2005年度冬学期解答

1　はじめに

　所詮一学生が作ったものにすぎません。参照の際は自己責任でお願いします。
　不備、誤りがあったら、g940609@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp までお願いします。できるだけ早く直します。

小西

2　問 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 & 5 \\ -1 & 7 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & -15 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

に対して、$\mathrm{Ker}(A)$ と $\mathrm{Im}(A)$ の基底をそれぞれ一組求めよ。

解答.

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して、$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

よって、$\mathrm{Ker}(A)$ の基底として、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれる。

また (1) より、$\mathrm{Im}(A)$ の基底として、$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$
がとれる。 $\square$

(補足)
計算チェック。

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

3　問2

(1) 実対称行列

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

に対して、${}^tPBP$ が対角行列となるように直交行列 P を求めよ。

(2)(1) の結果を用いて、2 次形式 $(B\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ $(\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3)$ に対して、
$\|\boldsymbol{v}\| = 1$ の下での最大値、最小値を求めよ。
また 2 次形式が最大値、最小値をとるときの $\boldsymbol{v}$ についても調べよ。

解答. (1) $T = \lambda I_3 - B$ とおく。

$$|T| = (\lambda - 12)(\lambda - 6)^2$$

$\lambda = 12$ のとき、

$$T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって、固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ がとれる。

$\lambda = 6$ のとき、

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと、$x+y-2z=0$
グラム・シュミットの正規直交化法により、
固有ベクトル $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる。
$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix}$ とおく。

$$BP = P \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であることは簡単に確かめられるから、
P は直交行列となる。
よって、${}^tPBP = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ より、求める直交行列は

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix}$$ □

解答. (2) $C = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ とおく。
${}^tP\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\,(\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3)$ とすると、

$$\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{w} \tag{1}$$

P は直交行列なので、$\|\boldsymbol{v}\| = 1$ より、$\|\boldsymbol{w}\| = 1$
$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと、

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{2}$$

(1) より、

$$\begin{aligned} (B\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) &= (BP\boldsymbol{w}, P\boldsymbol{w}) \\ &= ({}^tPBP\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) \\ &= (C\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) \\ &= 12x^2 + 6y^2 + 6z^2 \end{aligned}$$

最大値について、(2) より、

$$\begin{aligned}(B\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) &= 12-6y^2-6z^2 \\ &\leq 12\end{aligned}$$

等号は、$y=z=0$ で成立。
このとき、$x=\pm 1$ より、$\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{w}=\pm\boldsymbol{p}_1$
よって、

$$\boldsymbol{v}=\pm\boldsymbol{p}_1 \text{のとき、} \max(B\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=12$$

最小値について、(2) より、

$$\begin{aligned}(B\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) &= 6+6x^2 \\ &\geq 6\end{aligned}$$

等号は、$x=0$ で成立。
このとき、$\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{w}=y\boldsymbol{p}_2+z\boldsymbol{p}_3\,(y^2+z^2=1)$
よって、

$$\boldsymbol{v}=y\boldsymbol{p}_2+z\boldsymbol{p}_3\,(y^2+z^2=1) \text{ のとき、} \min(B\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=6$$

□

4 問3

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\-3\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-5\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

に対して、

$$V_1=\mathbb{R}\boldsymbol{a}_1+\mathbb{R}\boldsymbol{a}_2, V_2=\mathbb{R}\boldsymbol{a}_3+\mathbb{R}\boldsymbol{a}_4$$

とする。$V_1\cap V_2, V_1+V_2$ の基底を求めよ。

解答. $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4\end{pmatrix}$ とする。
$V_1\cap V_2$ の任意の元 $\boldsymbol{u}$ をとると、

$$\boldsymbol{u}=w\boldsymbol{a}_1+x\boldsymbol{a}_2=-y\boldsymbol{a}_3-z\boldsymbol{a}_4$$

とおける。

$$\therefore A\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ここで、

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

より、

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{R})$$

よって、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= w\boldsymbol{a}_1 + x\boldsymbol{a}_2 \\ &= -z\boldsymbol{a}_2 \\ &= z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

ゆえに、$V_1 \cap V_2$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ がとれる。

また、$V_1 + V_2 = \mathrm{Im}(A)$ であるから、(1) より $V_1 + V_2$ の基底として

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれる。 $\square$

5　問4

行列

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

と4次元実ベクトル

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して、$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ の関数

$$f(\boldsymbol{v}) = \|C\boldsymbol{v} - \boldsymbol{e}\|$$

を考える。$f(\boldsymbol{v})$ の最小値を最小二乗法により求めよ。

解答. 任意の $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$ をとる。
$f(\boldsymbol{v})$ が最小のとき、

$$\begin{aligned} 0 &= (C\boldsymbol{w}, C\boldsymbol{v} - \boldsymbol{e}) \\ &= (\boldsymbol{w}, {}^t C(C\boldsymbol{v} - \boldsymbol{e})) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{w}$ は任意なので、

$${}^t C(C\boldsymbol{v} - \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0}$$

$$\therefore {}^t CC\boldsymbol{v} = {}^t C\boldsymbol{e}$$

${}^t CC = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, {}^t C\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より、$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

このとき、

$$\min f(\boldsymbol{v}) = \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad \square$$

6　問5

行列 $U \in M_n(\mathbb{C})$ がユニタリ行列だとする。
$\alpha \in \mathbb{C}$ が U の固有値であるとき、

$$|\alpha| = 1$$

を示せ。

解答. α に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ とする。
固有値、固有ベクトルの定義から、$U\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}$

$$\therefore \|U\boldsymbol{v}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{v}\| \tag{1}$$

さらに、

$$\begin{aligned} \|U\boldsymbol{v}\|^2 &= \langle U\boldsymbol{v}, U\boldsymbol{v}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{v}, U^*U\boldsymbol{v}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \quad (\because U^*U = I_n) \\ &= \|\boldsymbol{v}\|^2 \end{aligned}$$

より、

$$\|U\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\| \tag{2}$$

(1),(2) より、

$$\|\boldsymbol{v}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{v}\|$$

$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ゆえ、$|\alpha| = 1$ $\square$

7　問 6

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -8 & -13 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

と 4 次元ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

に対して、

$$\boldsymbol{v} \in \mathrm{Im}(A)$$

となる条件を a と b に関して求め、そのときの解をすべて求めよ。

解答. 条件より、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ なる $x = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ が存在すればよい。

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & -8 & -13 & a \\ 5 & 1 & -3 & -7 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a+1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b-6}{9} \end{array}\right)$$

よって、$a = -1, b = 6$ となることが必要。
この下で、

$$\begin{cases} w - y - 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (y, z \in \mathbb{R})$$

よって、$a=-1, b=6$ の下で、

$$\boldsymbol{x} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ となる。 □

(補足)

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}(A)$ の基底。つまり、$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおけば、

$$A(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{p} \in \mathrm{Ker}(A))$$

という形になる。

8 問 7

行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & -5 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して、最小多項式 $m_A(t)$ を求めよ。
さらに、一般固有空間への射影を A を用いて表せ。

解答.

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)^3$$

よって、最小多項式 $m_A(t)$ は、

$$(t+1)(t-1), (t+1)(t-1)^2, (t+1)(t-1)^3$$

のいずれか。

$$(A+I_4)(A-I_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&2&2&2\\-2&-2&-2&0\\-2&-2&-2&0\end{pmatrix}\neq O_4$$

$$(A+I_4)(A-I_4)^2=O_4$$

よって、

$$m_A(t)=(t+1)(t-1)^2$$

ゆえに、$\mathbb{R}^4=W(-1)\oplus W(1)$ と一般固有分解される。
ただし、$W(-1)=\mathrm{Ker}(A+I_4),W(1)=\mathrm{Ker}(A-I_4)^2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(t+1)(t-1)^2}&=\frac{\frac{1}{4}}{t+1}+\frac{-\frac{1}{4}}{t-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(t-1)^2}\\&=\frac{\frac{1}{4}}{t+1}+\frac{-\frac{1}{4}t+\frac{3}{4}}{(t-1)^2}\end{aligned}$$

$$\therefore 1=\frac{1}{4}(t-1)^2+(-\frac{1}{4}t+\frac{3}{4})(t+1)$$

ゆえに、

$$I_4=\frac{1}{4}(A-I_4)^2+(-\frac{1}{4}A+\frac{3}{4}I_4)(A+I_4)$$

ここで、

$$P_1=\frac{1}{4}(A-I_4)^2,P_2=(-\frac{1}{4}A+\frac{3}{4}I_4)(A+I_4)$$

とおくと、

$$I_4=P_1+P_2 \tag{1}$$

となる。

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}\quad(\boldsymbol{x_1}\in W(-1),\boldsymbol{x_2}\in W(1))$$

とする。(1) より、$\boldsymbol{x_1}=P_1\boldsymbol{x_1}+P_2\boldsymbol{x_1}$
ここで、

$$\begin{aligned}P_2\boldsymbol{x_1}&=(-\frac{1}{4}A+\frac{3}{4}I_4)(A+I_4)\boldsymbol{x_1}\\&=(-\frac{1}{4}A+\frac{3}{4}I_4)\mathbf{0}\quad(\because\boldsymbol{x_1}\in W(-1)=\mathrm{Ker}(A+I_4))\\&=\mathbf{0}\end{aligned}$$

よって、$\boldsymbol{x_1} = P_1\boldsymbol{x_1}$
同様にして、$P_1\boldsymbol{x_2} = \mathbf{0}$ も示せる。
以上より、

$$\begin{aligned} P_1\boldsymbol{x} &= P_1\boldsymbol{x_1} + P_1\boldsymbol{x_2} \\ &= P_1\boldsymbol{x_1} \\ &= \boldsymbol{x_1} \end{aligned}$$

よって、$W(-1)$ への射影は、

$$P_1 = \frac{1}{4}(A - I_4)^2$$

同様にして、$W(1)$ への射影は,

$$P_2 = (-\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}I_4)(A + I_4) \qquad \square$$

(補足) $V(-1) = \mathrm{Ker}(A + I_4), V(1) = \mathrm{Ker}(A - I_4)^3$ とする。
一般論より、

$$V(-1) = W(-1), V(1) = W(1)$$

となることを講義では学んだが、ここではそれを実際に確認してみよう。
一つ目の等式は明らか。

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -12 & 2 \\ 4 & 8 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore W(1) = \mathrm{Ker}(A - I_4)^2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(A - I_4)^3 = \begin{pmatrix} 10 & 18 & 26 & -6 \\ -10 & -18 & -26 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore W(1) = \mathrm{Ker}(A - I_4)^3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

以上より、

$$V(1) = W(1)$$