数学 IA 冬学期（織田）シケプリ

by 22 組数 IA シケ対

2010/02/01

これを書いているときには TEX さんを使い始めて 3 時間のシケ対によるシケプリです。過度な期待は禁物です。改行の仕方も良く分かりません。基本的には、最後の授業で織田先生から託された微妙にネタばれプリントに沿って復習していき、躓きそうなポイントを解説したいと思います。
主な参考書として『解析概論』を使用しています。該当部分が結構そのままだったりしますが、出来るだけ自分なりのそれなりに正しいと思われる解釈を加えるようにしています。微妙なところがあれば、初版は著作権が切れてネット上で読めるようになっているので、そこで確認できるかもしれません。

> 尚、単位に関わるので真剣に取り組んでいますが、誤りが含まれていると思われます。何かあったら連絡下さい。

出る可能性があるのは以下の事柄です。微妙にネタばれプリントはアップロードしておきます。言葉のニュアンスからより正確な判断が出来る・・・かも知れません。

- 有理式の基本的な積分
  - 部分分数分解で求積できるもの
  - 逆三角関数や対数関数の含まれるもの
- 広義積分
  - 収束の証明
  - ガンマ関数・ベータ関数の問題
- 重要な概念、定理の説明（面積確定・積分可能など）
- Gauss の超幾何関数の問題（もろそのままでない、ちょっとした応用？）
- ダランベールの収束判定条件
- サプライズ

は出ないそうです。

1　有理式の積分

部分分数分解と部分積分

■あべのり流？瞬殺部分分数分解　分母を払って係数比較なんて方法よりずっと速いです。その実体は数値代入法に他ならず、着目すべき部分は数値代入法特有の何を代入するか検討するという作業が非常に分かりやすくなる点に有るようです。しかしあまり複雑なものでなければ、今までの数値代入法で十分だと思います。

では早速、

$$\frac{2x^3 - x^2 + 2x + 1}{x(x^2+1)(x-1)^2}$$

でやってみます。始めは定石通り、

$$\frac{2x^3 - x^2 + 2x + 1}{x(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} + \frac{d}{x-1} + \frac{e}{(x-1)^2}$$

と置きます。初めて知ったのですが、このように分子を定めるのは解が一意的に定まることが保証されるからで、聞いた限りでは特に以下のルールに従って分子を置いていくと上手くいくようです。

- 分母が (なんとか)^2 の形のときは、1 次と 2 次に分ける
- 分母が（実数の範囲で）因数分解できない 2 次式の項の分子は、$bx + c$ のようにおく
- あとは普通

どれも上の例に含まれています。適当にやると、解なしとか解が不定とかになってややこしいです。言い忘れましたが、**必ず分母の次数が分子の次数より大きくなるように変形してから**にして下さい。やっぱり上手くいかなくなるはずです。では、係数 a, b, c, d, e を定めます。上の式が x についての恒等式になるとすると、分母を払って、

$$2x^3 - x^2 + 2x + 1 = a(x^2+1)(x-1)^2 + (bx+c)(x-1)^2 + dx(x^2+1)(x-1) + ex(x^2+1)$$

とし、x に適当な値を代入します。まず、$x = 1$ とすると（略）

こうやって代入する値の候補としては、上の式の中に 0 が多くなるものを選びます。計算が楽だからです。楽したいので、$x = i$(虚数単位) だって代入してやりましょう。$x^2 + 1 = 0$ になりますから、上の式は $1 = bi + c$ よって $b = 0, c = 1$ となり、一度に二つの未知数が解決してしまいます。

こうやっていけば、a, b, c, e は難なく求まりますが、最後に d が残ります。こいつは多少計算しないと求まりません。・・・と思いきや、次数に着目すれば楽に出来そうですね。

$$2x^3 - x^2 + 2x + 1 = a(x^2+1)(x-1)^2 + (bx+c)(x-1)^2 + dx(x^2+1)(x-1) + ex(x^2+1)$$

の中で、$b = 0$ ですから、右辺の 4 次の項は a と d を含むものだけになり、左辺は 3 次式です。もらいです。係数比較から、$d = -a = -1$ が分かります。もしもこの方法で分からなくても、多分ある次数の項を全部展開するぐらいの計算で済みます。始めから全部展開して係数比較するのは、部分分分分分分数分解というぐらい面倒くさくなるかもしれません。

あとの積分は何とでもなると思います。部分分数分解についてはこのぐらいで。

逆三角関数や対数関数を含む積分

まずは、基本的な積分を挙げておきます。

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \quad (x < 1)$$

・・・新しいものは以上だと思います。証明するのは簡単で、逆関数の微分の公式を使って上の 2 式の両辺を微分したものを求めるか、左辺を置換積分する（どんな置き換えを用いたかに注意）ことで求まります。

演習の復習をすれば大丈夫だと思います。

2　広義積分

広義積分とは

Riemann 積分では、有界な区間の、有界な連続関数の積分を考えました。広義積分が取り扱えるのは、積分区間が有界でないときや被積分関数が有界でないときです。

これらの場合を無視して、**あたかも Riemann 和が収束するかのような答案を書いてしまうのは NG です**。広義積分をする必要があったら、きちんと広義積分として計算し、収束するか確認したことを明記して下さい。でも普通の積分していると、途中で有界にならない項が出てくるのでまず大丈夫です。

例えば、区間 $[a,b]$ の下の限界 a だけが特異点（被積分関数が有界にならない点）で、それを除けば $[a+\varepsilon,b]$ において $f(x)$ は有界かつ積分可能とします。（積分可能性については、「重要な概念」で説明する予定です。）そのとき、もしも

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

が存在するならば、それを $\int_a^b f(x)\,dx$ の定義とするという考え方です。つまり、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

ということです。同じ表記で違う意味を表していることに注意して下さい。**積分記号がどんな意味を表しているかは、式全体を見ないと判別出来ません**。

収束の証明

広義積分が存在するかどうか確かめる方法は、主に 2 通りあります。

- 定義に従って計算し、積分値が収束するか調べる。
- 広義積分の収束に関する定理を用いる

$x=a$ が特異点であるとき広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が収束するための条件は、a に十分近い $p,q\,(a<p<q)$ をとるとき

$$\left|\int_p^q f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

が導かれるのですが、使いにくいです。

とりあえずそんなものは置いておいて、始めのまともに計算する方から実演してみます。楽なのがいいので、

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$$

あたりからやってみます。

まず被積分関数に着目します。積分区間内で特異点を探します。$x=0$ で有界でないですが、それ以外の点では有界かつ連続なので、そこだけ考えれば問題ありません。広義積分での $\int_0^1$ の意味は、$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1$ なので、これに基づいて計算してみます。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 = \infty$$

あちゃー、本当は収束させるつもりだったのに・・・。仕方無いので、もう一つ

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

でやってみます。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2$$

OK です。ちゃんと収束しました。

では次に、広義積分の収束を判断する 2 つの定理を紹介します。これらは積分が初等関数で表せないときにも収束を判断できます。

- 区間 $(a, b]$ において $f(x)$ は連続で、$x \to a$ のとき $f(x)$ は限りなく大なる値を取るが、$0 < \alpha < 1$ なるある指数 α に対して $(x-a)^\alpha |f(x)|$ が有界ならば $\int_a^b f(x)dx$ は収束する。
（$\int_a^b |f(x)|dx$ も収束する「絶対収束」をします。）
- 区間 $[a, \infty)$ において $f(x)$ は連続で、また $\alpha > 1$ なる指数に関して $x^\alpha |f(x)|$ が有界ならば、$\int_a^\infty f(x)dx$ は必ず収束する。
（やはり絶対収束）

上の二つの例では、１つ目の定理と一致していることがすぐに分かります。

証明はシケプリには載せませんが、参考書には載っていると思うので確認してみて下さい。

ガンマ関数・ベータ関数

これらの関数は広義積分を用いて定義されています。広義積分については、「重要な概念」の部分で解説します。

■ガンマ関数　Euler のガンマ関数と呼ばれます。階乗の拡張で有名なあれです。

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx \qquad (s > 0)$$

で定義されます。積分の値は s に依存しているので、s の関数として扱ったものです。

まず、被積分関数の特異点を調べます。$0 < s < 1$ のときの $x = 0$ の点のようです。また積分区間が有界でないところも、広義積分の定義から計算しないといけません。

早速定義に基づいて計算し、収束するか確認してみます。まずは簡単のために $s > 1$ のときを考えてみます。

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}x^{s-1}dx \\ &= \lim_{a\to\infty}\left(\left[-e^{-x}x^{s-1}\right]_0^a + (s-1)\int_0^a -e^{-x}x^{s-2}dx\right) \\ &= (s-1)\Gamma(s-1)\end{aligned}$$

例の有名な性質です。でもこのままでは、微妙な式ですが

$$\Gamma(s) = (s-1)\ldots(s-k)\Gamma(s-k)$$

とどんどん変形出来るので、結局 $0 < s < 1$ のときに収束するかどうか調べないと分からなくなってしまいました・・・。ちょっと計算すればすぐ出来ますが、参考書を見るとスマートな説明が載っています。

被積分関数を $f(x)$ とします。$x \to 0$ とするとき $0 < s < 1$ のときには、$x^{1-s}f(x) = e^{-x} \to 1$、また、$x$ が十分大きいときには $e^{-x}x^{s-1} < \dfrac{1}{x^2}$ となるので、積分の上の限界 ∞ に関しても収束します、

という説明でした。

実際に計算しても結局は、指数関数と多項式はどっちが早く減少するかとか、そういう性質に帰着されてしまいます。特に指定が無ければ、こういう議論をしても大丈夫だと思います。

■ベータ関数　基礎統計でも脇役として登場していた関数です。その定義は $p > 0,\ q > 0$ とするとき

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

というものです。被積分関数の特異点になる可能性があるのは、$x = 0, 1$ です。やはり広義積分の収束に関する定理から、収束することを容易に示せます。

3　重要な概念の確認

この辺は読み慣れた教科書を見て勉強するのが一番良いかもしれません・・・。

積分（Riemann 積分）

■定義　Riemann 積分とは、高校のときからおなじみの「短冊を細かくしたら面積になるよねー」のノリのあれです。

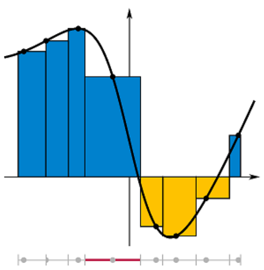


図 1　Riemann 積分の図 from Wikipedia

うう、図の表示も何とか出来ました。まずは定積分を定義することから入ります。使うものを準備しましょう。簡単のために、区間 $[a, b]$ で有界かつ連続な関数 $f(x)$ で積分を考えます。（実は不連続点が有限個あっても積分出来ます。）この区間を $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ において区切り、n 個の細区間に分割します。

$$a < x_1, \ldots, x_{n-1} < b$$

別に区間の幅を揃える必要はありません。この分割方法を Δ と呼ぶことにして、この中の左から第 i 番目の細区間の幅を δ_i とします。つまり、

$$\delta_i = x_i - x_{i-1} > 0$$

です。楽したいので細区間そのものも δ_i と呼ぶことにします。それから、これらの区間は皆閉区間としておきます。・・・何で開区間だと駄目なんだろう。そのうち考えてみます。

まず、分割 Δ における δ_i の最大値を δ とします。これを、分割の細かさの指標に用います。$\delta \to 0$ とすれば、全部の短冊が限りなく細かくなることを簡単に表せます。

次に、2 種類の短冊を考えます。大きい方と小さい方です。細区間 δ_i における $f(x)$ の上限、下限を M_i, m_i とします。そして、全区間 $[a,b]$ における $f(x)$ の上限、下限を添え字無しの M, m で表します。つまり、

$$M_i \leq M, m_i \geq m$$

となります。M, m はアバウト過ぎて意味が無いと思われがちですが、短冊の面積（一般の面積をまだ定義してませんが、これは矩形の面積ですから別に既知のものとしても良いと思います。縦×横です。）の和である Riemann 和が有限であることを定積分を定義するときに用いるので、その時に活躍してもらいます。

役者が揃ったので、早速「短冊を足し合わせる」ことを実行してみます。大きい方と小さいほうの短冊の面積の和が、分割の仕方によらずにある値に収束すれば、直観と合う理論が出来そうです。

区間 $[a,b]$ の上記分割 Δ に対して、次のような和を考察します。

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i \delta_i,\ s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i$$

ここで、

$$s_\Delta \leq S_\Delta$$

また、

$$S_\Delta \leq M \sum_{i=1}^{n} \delta_i = M(b-a),\ s_\Delta \geq m \sum_{i=1}^{n} \delta_i = m(b-1)$$

となりますから、これらを合わせて

$$m(b-a) \leq s_\Delta \leq S_\Delta \leq M(b-a)$$

従って、あらゆる分割 Δ に対して Riemann 和 S_Δ と s_Δ は有界になり、従って上限、下限が存在します。興味があるのはもちろん S_Δ の下限と s_Δ の上限です。今のところは、これが $\delta \to 0$ のときに同じ値に収束するか調べるのが目標です。見失わないようにしましょう。これから脱線しまくる予定ですから。

まず、区間 $[a,b]$ の分割 Δ における各細区間をさらに細分して分割 Δ' を作ることを考えると、そのつくり方から

$$s_\Delta \leq s_{\Delta'},\ S_{\Delta'} \leq S_\Delta \tag{1}$$

が言えます。ややこしいですが、ちょっと考えれば分かると思いますので説明は省きます。でも、一応しておかないとシケ対の意味ないよな・・・教科書の写しは微妙ですもんね。上の式の前半について言うと、ある区間の最小値は、その区間を 2 分した区間での 2 つの最小値以下になるということでしょうか。

結局任意の分割 Δ, Δ' に対して

$$s_\Delta \leq S_\Delta$$

が成り立つので、左辺の上限 s と右辺の下限 S の間の大小関係は

$$s \leq S$$

になります。さて、$s = S$ を示せる条件が分かれば万歳ですが・・・ちょっと別ルートから考えます。

■原始関数から考察　原始関数と上の s, S との関係を調べます。原始関数とは、$f(x)$ が与えられたとき、それを導関数とする関数 $F(x)$ のことでした。

区間 $[a, b]$ の部分区間 $[a', b']$ に関する和 $\sum M_i \delta_i$ の下限を一般に $S(a', b')$ と書くなら、$x \in [a, b]$ のとき

$$S(a, b) = S(a, x) + S(x, b)$$

となることが予想出来ます。実際に証明してみます。方針は行き当たりばったり・・・で出来る訳ないですよね。何でこんな証明思いつくかは謎ですが、まあ目標がはっきりしているので証明見れば納得は出来ます。・・・でも何だか、参考書の参考書を作っているようでキリが無いですね。締め切り間に合うかな・・・。

区間 $[a, b]$ の分割 Δ の分点による $(a, x), (x, b)$ の分割を Δ', Δ'' とします。こんな感じです。うう・・・今回の図はファイル形式が違ってだいぶてこずりました・・・。

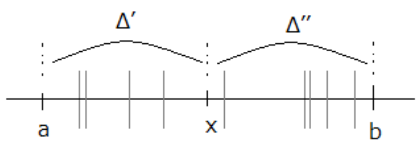


図 2　分割の図

こんな感じですね。それらに対する和 $S_{\Delta}, S_{\Delta'}, S_{\Delta''}$ に関して、

$$S_{\Delta} \geq S_{\Delta'} + S_{\Delta''} \tag{2}$$

が成り立ちます。ここで、任意の $\varepsilon > 0$ について、下限の意味から $S_{\Delta} < S(a, b) + \varepsilon$ になる Δ があります。

下限の性質の一つに、「ある区間において、その下限より大きいある数に対して、その数より小さく、かつその区間には属するような数が必ず存在する」というものが有ります。これは下限の定義の一つですが、もしもこれが成り立たないと、上の「」中の ” 下限より大きな数 ” が本当の下限になってしまいます。つまり下限は、定義の中で「自分より大きな下限」の存在を否定するものになっているんだと思います。

さて、原始関数から s, S の性質に迫る話に戻りましょう。やはりこれらも下限の性質からですが、このような Δ を取ったとき、$S_{\Delta'} \geq S(a, x)$, $S_{\Delta''} \geq S(x, b)$ なので、(2) から、

$$S(a, b) + \varepsilon > S(a, x) + S(x, b)$$

となります。

> （結局下限の性質は何に使ったのかというと、上のように「このような Δ 」と言ってしまえることにあるかもしれません。証明のスタート地点にあたるものの存在を保証してくれるという一面があるみたいです。だから何だって言われると困りますが・・・）

上の式で ε は任意なので、すぐに

$$S(a, b) \geq S(a, x) + S(x, b) \tag{3}$$

が導かれます。何でっていう人は最後の演習の復習をしましょう。・・・でも私は全然出来てなかったので、反省の意味も込めてここで取り扱っておきます。まだ『解析概論』の該当部分 2 ページしか進んでないけど気にしません。え？　締め切り？なにそれおいしそう

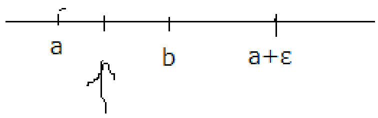
示すべきものは、

$$\forall \varepsilon > 0 : a + \varepsilon > b \Rightarrow a \geq b$$

です。直観的に大小関係で矛盾が出るのは分かるので、背理法を使います。もしも上の命題で、

$$\Rightarrow a < b$$

だったとすると、矛盾が出るような ε の選び方が有るはずです。何より ε は**任意**ですから、好き勝手できます。では、次の図を見て下さい。



適当に書いた割にはいけてます。まず、$a + \varepsilon > b$ は満たされていて、$a < b$ も成り立ちます。・・・ですがこれは単にに ε が十分に大きいからで、$\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ とかに取ると、$a + \varepsilon$ はこの数直線で、見苦しい矢印で指されているあたりところに来ます。そうなると、大本の仮定の $a + \varepsilon > b$ と矛盾してしまいます。あんまり自信無いですがこの矛盾はそもそも $a < b$ としたことが原因なので、目標とする命題が正しいことが分かります。

その一方で見方を逆にして、$S_{\Delta'} < S(a, x) + \varepsilon$, $S_{\Delta''} < S(x, b) + \varepsilon$ なる分割 Δ', Δ'' を併合して作った分割 Δ に対して、$S_\Delta \geq S(a, b)$ が成り立ちます。$S_\Delta = S_{\Delta'} + S_{\Delta''}$ なので、

$$S(a, b) < S(a, x) + S(x, b) + 2\varepsilon$$

となり、ε は任意ですから、

$$S(a, b) \leq S(a, x) + S(x, b) \tag{4}$$

が導かれます。(3) と (4) から、期待していた式が導かれます。・・・うーん難しい。直観を頼りにすれば結果は分かるのですが・・・。

ここまで来れば、S や s の正体がはっきりします。$h > 0$ とすれば、

$$S(a, x + h) - S(a, x) = S(x, x + h)$$

となります。$[x, x + h]$ における $f(x)$ の上限、下限を M_0, m_0 とすれば、

$$m_0 h \geq S(x, x + h) \geq M_0 h$$

従って、$f(x)$ が連続ならば、中間値の定理によって

$$S(x, x + h) = h f(x + \theta h), \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

即ち

$$\frac{S(a, x + h) - S(a, x)}{h} = f(x + \theta h)$$

従って、

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(a, x + h) - S(a, x)}{h} = f(x)$$

ここで $h < 0$ としても同様になります。ずばり、S は $f(x)$ の原始関数になります！まだ「積分可能」も定義していないので油断できませんが、積分を計算するには原始関数を求めれば良いと分かった訳です。いちいちリーマン和を計算しなくても済むというだけでなく、積分が微分の逆演算であることも分かります。同様に s も $f(x)$ の原始関数となることが分かります。

またちょっと飛んでしまいますが、$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とするとき、積分は

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

によって計算されます。これを**微分積分法の基本公式**といいます。

・・・これだけ書いといてなんですが、やっぱりシケプリは浅く広くが良い気がしてきました。Darboux の定理あたりのちょっと話が飛びますが、何となく授業で取り扱ってない気がしますし、正直なところ存在意義があるのかよく分からないので置いておきます。

■積分可能性　上の議論で $s = S$ の場合だと考えて問題ありません。しかし、正確な表現ではないようなのでもう少し進めます。

定積分の定義を考えながら説明します。まず、分割 Δ に関して各細区間 $[x_{i-1}, x_i]$ において任意の点 ξ_i を取って、和

$$\Sigma_\Delta = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i$$

を考えます。このとき $s_\Delta \leq \Sigma_\Delta \leq S_\Delta$ です。（つまり、短冊の例で考えると真の積分の値は S_Δ と s_Δ の間にあることは明らかなので、「これらの間にある、極限を取ったら真の積分に化ける何か」を考えたいのです。具体的な例として Σ_Δ を構成しました。）

$\delta \to 0$ とすると、はさみうちの原理から分割 Δ や ξ_i に依らずに Σ_Δ の極限が存在して、それを I とします。

$$I = \lim_{\delta \to 0} \sum f(\xi_i)\delta_i$$

この極限値が存在することを、積分可能であると言います。そしてこの極限値 I を区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の**定積分**といい、

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

と表します。**$s = S$ は積分可能になるための必要十分条件**で、積分可能の判定律という扱いになります。

広義積分

大切なので、別に「広義積分」の部分を設けてあります。そちらを参照して下さい。

■　以上で 1 変数の積分については終わりますが、

- 置換積分
- 部分積分

についての説明はしませんでした。恐らく試験に出ても、計算テクニックとしての出題になると思いますし、それなら以前からやっていたので大丈夫・・・のはずです。

多変数の積分

二つ以上の独立変数を持った関数でも、１変数のときと同じように積分を考えられます。どの次元でも似たようなものになるので、簡単のために２次元のときを軽く扱っておきます。xy 平面の閉矩形

$$[K] : a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d$$

において、$f(x,y)$ は有界であるとします。

区間 $[a,b]$, $[c,d]$ を次のような分点で m 分、n 分して、矩形網 Δ と呼ぶことにします。

$$\Delta \begin{cases} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d \end{cases}$$

これらの分点を通る両軸の平行線によって、矩形 K を mn 個の小矩形に分割する訳です。

図３　矩形網 Δ のイメージ

Δ の一つの小矩形

$$\omega_{ij} : x_{i-1} \leq x \leq x_i,\, y_{j-1} \leq y \leq y_j$$

における $f(x,y)$ の上限、下限を M_{ij}, m_{ij} として、全ての小矩形に関する和

$$S_\Delta = \sum M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$s_\Delta = \sum m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$\left(\begin{array}{c} i = 1, 2, \ldots m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right)$$

を考えます。ω_{ij} は小矩形の名前でしたが、これでその面積も表してしまうことにしまえば、

$$S_\Delta = \sum M_{ij}\omega_{ij},\, s_\Delta = \sum m_{ij}\omega_{ij}$$

と、より簡潔に表せます。

後は１変数のときと同じように、これらの２つの和に挟まれる、将来「真の積分」を示すことになるものを導入します。小矩形 ω_{ij} において任意に点 $P_{ij} = (\xi_i, \eta_j)$ を取って、和

$$\Sigma_\Delta = \sum f(P_{ij})\omega_{ij}\, (1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n)$$

を作るとき、

$$\lim \Sigma_\Delta = I$$

が存在するならば、I を矩形 K における $f(x,y)$ の積分と言い、それを次のように書きます。

$$\begin{aligned} I &= \int_K f(P)d\omega \\ &= \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy \end{aligned}$$

敢えて２種類の表記をしました。１番目の式の意味はまさに「I を矩形 K における $f(x,y)$ の積分」ですが、２番目の積分は、まるで積分を２回するよと言っているようです。これの意味は、後の Fubini の定理の部分で確認します。

１次元のときと同じように、積分可能とは極限

$$\lim_{\delta\to 0} \Sigma_\Delta = I$$

が存在することで、その必要十分条件は $S = s$ です。また、$f(x,y)$ が K において連続なら問題なく積分可能です。

もし $f(x,y)$ が連続でなくても、それが有界なら、矩形網 Δ において $f(x,y)$ の不連続点を含む小矩形の面積の総和を Ω_Δ とするとき $\lim_{\delta\to 0}\Omega_\Delta = 0$ ならば、$f(x,y)$ は K において積分可能になります。ちょっと分かりにくいですが、次の面積確定の解説のところで実例を出してこの意味を考えてみます。

■面積の定義と面積確定　今までは面積を考えるときはいつも矩形を扱っていたので、その面積は「縦×横」としてとりあえず済んでいました。（本当は夏学期の授業でも矩形の面積について少し詳しい議論をしましたが割愛します。）これから上の議論を用いて、任意の区域の面積を定義してしまいます。

今 K を有界なる任意の区域とします。ここで、次のような関数 $\varphi(P)$ を考えます。

$$\varphi(P) = \begin{cases} 1 & (P \in K) \\ 0 & (P \notin K) \end{cases}$$

こんな関数を、点集合 K の定義関数と言うらしいです。

この定義関数 $\varphi(P)$ が積分可能であることが、K が面積確定であることの定義です。 この関数を、K を包む矩形 K^* で積分することを考えます。

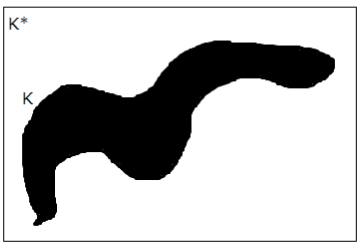


図 4　区域 K のイメージ

我ながら趣味悪い区域です。印刷する方はこの部分だけインクが集中しますので、すみませんが気を付けて下さい。黒塗りの部分が 1、白い部分は 0 です。インクを浪費したおかげで、明らかに $\varphi(P)$ が不連続になる部分が何処にあるか分かります。境界ですね。この部分をどう処理するかは後で考えることにして、とりあえず面積を定義するための準備を続けます。

任意の矩形網 Δ に対して、$s_\Delta = \sum m_{ij}\omega_{ij}$ をつくると、$\varphi(P)$ の定義により m_{ij} は小矩形 ω_{ij} の点が（境界も含めて）全て K に属するときだけ $m_{ij}=1$ で、その他は $m_{ij}=0$ となりなす。つまり、K に完全に含まれる小矩形群の総面積となります。その上限 $s=\lim_{\delta\to 0} s_\Delta$ は、$K, f(x,y)$ が有界なので確かに存在します。これを区域 K の内面積といいます。

また、$S_\Delta = \sum M_{ij}\omega_{ij}$ において同じように考えると、S_Δ は矩形網 Δ において、K にその一部でも属するような小矩形の総面積になります。やはりその下限 $S=\lim_{\delta\to 0} S_\Delta$ は存在します。これを外面積といいます。

言い忘れていたかも知れませんが、ここでは δ は小矩形の中で一番長い辺の長さとしています。役割は１変数のときのものと同じです。

面積確定であるための条件は $S=s$ となります。その共通の値をもって K の面積と定義します。

■一般区域上の積分　今までは、xy 平面全体に定義されていた関数をある領域の中で積分することを考えていましたが、その領域内でだけ関数が定義されていても、適当にそれを全平面に拡張して積分を考えることが出来ます。

xy 平面上の積分区域 K は有界で、面積確定であるものに限定して考えます。関数 $f(P)$ は少なくとも K において定義され、有界であるとします。

矩形網 Δ において、K の点を含む小矩形 ω_i において K の任意の点 P_i を取って、和

$$\Sigma_\Delta = \sum f(P_i)\omega_i$$

を作ります。（今まで添え字が i,j でしたが、添え字を取りなおして i 一文字で表すことも出来ます。）

もしも

$$I = \lim_{\delta\to 0}\Sigma_\Delta$$

が存在するならば、それを区域 K 上の $f(P)$ の積分とします。

Σ_Δ において K の境界点を含む小矩形 ω_i に関する部分（臨界矩形というらしい）は、その絶対値において $M\Omega_\Delta$ を越えません。M は区域 K における　$|f(P)|$ の上限で、Ω_Δ は臨界矩形の総面積になります。K は面積確定であるという仮定によって、$\delta\to 0$ のとき $\Omega_\Delta\to 0$ なので、和 Σ_Δ における小矩形 ω_i は完全に K の内側にあるものだけを考えれば OK です。

次に K に属しない点に関して関数 $f(P)$ を変更 or 拡張します。

$$f^*(P) = \begin{cases} f(P) & (P\in K) \\ 0 & (P\notin K)\end{cases}$$

そして、K を完全に含む矩形（辺は座標軸に平行）K^* を取って、K^* における $f^*(P)$ の積分を考えます。それは結局 K 上の $f(P)$ の積分に帰着します。

■区分的に滑らかな　って何でしょう・・・。私の参考書では一度も出てきていませんが、

> 領域 K の境界が滑らかな曲線またはそれの有限個の接合であるときには、K は面積確定である。

とあります。恐らくこれのことだと思います。講義では、境界が区分的に滑らかならばその領域は面積確定であるとのことでしたが、それを証明してみます。

まず、

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ (0\le t\le 1)$$

を滑らかな曲線とします。滑らかなので $\varphi'(t),\ \psi'(t)$ は連続で、$\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2\neq 0$ です。

早い話が、曲線を覆う矩形群を実際に作って面積調べてやろうということです。曲線が全部含まれれば問題無いので、ゆるい評価をします。

微分法の平均値の定理によって、

$$x_1 - x = (t_1 - t)\varphi'(\tau_1),\, y_1 - y = (t_1 - t)\psi'(\tau_2)$$

となります。τ_1, τ_2 は t, t_1 の中間値になります。いま、閉区間 $0 \leq t \leq 1$ における $|\phi'(t)|, |\psi'(t)|$ の最大値を M とすれば、$t_1 > t$ のときは

$$|x_1 - x| \leq M(t_1 - t),\, |y_1 - y| \leq M(t_1 - t)$$

となります。故に区間 $0 \leq t \leq 1$ を n 等分すれば、各小区間 $\left[t, t + \frac{1}{n}\right]$ における曲線上の点 (x, y) は全て辺長 $\frac{2M}{n}$ なる正方形の中に含まれます。

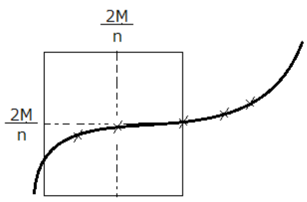


図 5　曲線を覆う矩形の一つ

従って曲線全部は、総面積が

$$n\left(\frac{2M}{n}\right)^2 = \frac{4M^2}{n}$$

以下の矩形網で覆われます。(「以下」なのは、矩形の一部は一般にはお互いに被るから。) n を大きくとれば、この総面積はいくらでも小さくなるので、面積確定になります。

ここでは取り扱いませんが、講義で出てきた「縦線領域」や「横線領域」も、結局は区分的に滑らかな境界をもつので積分可能です。

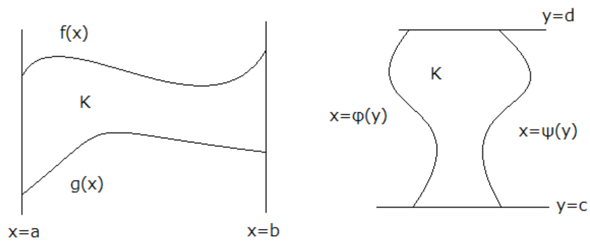


図 6　縦線・横線領域（逆だったらごめんなさい）

今すぐに 1 変数の積分にして考えるのは辛いところがありますね・・・。積分するだけだったらすぐ出来ますが、それが「面積」になっているかは怪しいところなのでしょうか。講義でも参考書でも、後で紹介する Fubini の定理が出てくるまでこの面積を求めてはいないようです。

■１次元への単純化（Fubini の定理）　多変数の積分を定義してみたは良いですが、さっぱり計算できる気がしません。けれども、これを**１次元の積分の繰り返しとして計算できる**という定理が、これから解説する Fubini の定理です。

簡単な場合として、次の定理を扱います。

矩形 $K(a \leq b,\, c \leq d)$ において $f(x,y)$ が連続ならば、

$$\int_K f(x,y)d\omega = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

はい、さっぱり分かりません。数学は哲学ですから仕方ありません。"Cogito ergo sum" が文法的に説明出来ても、意味が分からなければありがたみが無いのと似てますね（？）

これは次のような意味です。$f(x,y)$ の連続性より、左辺の２次元積分は可能です。右辺において $f(x,y)$ の y をしばらく固定すれば、$f(x,y)$ は x に関しても連続ですから、$\int_a^b f(x,y)dx$ は確定します。そしてこれは y の関数になります。それを

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

と書くとすると、はじめの式で

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_c^d F(y)dy$$

を意味します。定理の主張は、積分 $\int_c^d F(y)dy$ が可能で、かつそれが $\int_K f(x,y)d\omega$ に等しいということです。

証明が出るかどうかは分かりませんが、結構面白いので確認してみて下さい。

今更ですが、重要な概念の説明をして、証明は気になる方だけ参考書で確認してもらう、というのが良いかもしれません。無駄にシケプリ長いですし・・・。後で無駄に長い部分を削除しようかな・・・。

■多変数の広義積分　これまでは積分の区域 K は有界でかつ面積確定とし、また積分される関数 $f(P)$ は K において有界でした。しかし、K において $f(P)$ が有界でない場合、また全平面にわたって積分したい場合など、積分の意味を拡張することが重要になるそうです。そのために次の仮定をします。

- K が有界なる場合は、K は面積確定とする。K が有界でない場合には、正方形 $|x| < R,\, |y| < R$（$R > 0$ は任意）に含まれる K の部分は面積確定とします。
- K 以内に面積確定なる有界な閉区間を取って、次第にそれを拡張して限りなく区域 K に近づけられるとします。つまり K に含まれる面積確定の有界な閉区域の無限列 K_n があって、K 内の任意の有界な閉区域は十分大なる番号以上の全ての K_n に含まれるとします。
- K に含まれる任意の面積確定なる有界の閉区域において、$f(P)$ は有界で、かつ積分可能であるとします。

２番目の仮定に挙げたような性質を持つ区域列 K_n は、K に収束すると言います ($K_n \to K$)。特に $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$ のときには、単調に K に収束すると言います。

$f(P)$ は K において正とします。そのとき積分

$$I(K_n) = \int_{K_n} f(P)d\omega$$

が、K に収束する全ての区域列 K_n に関して、$n \to \infty$ のとき一定の極限値 I に収束するならば、その極限値 I をもって K における $f(P)$ の積分とします。

この意味での積分を、正なる関数 $f(P)$ の広義積分と言います。なんで正かというと、K_n が K の中でどんどん広がっていくことを考えると、積分の値は単調増加になり、評価が簡単だから・・・なのでしょうか。うーん・・・何で負の関数の積分を考えてはまずいのでしょうか・・・。参考書には、負の値も取り得る関数の積分が収束しない例が載っていますが・・・。何か分かり次第書き加えてアップし直します。

■多変数の積分における変数変換　証明は省略しますが 2 変数のときで説明すると、(x, y) 系を (u, v) 系に変換するとき、$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v)$ とすると、新しい変数での積分は

$$\iint f(x, y)dxdy = \iint f(u, v)|J|dudv$$

となります。J は Jacobian（ヤコビアン）と呼ばれ、

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

となります。注意してほしいのは、$|J|$ は**行列式の絶対値**になっていることです。だから**絶対に正になります。**何で負になっちゃいけないんだ、と思いますがそうなっています。気を付けて下さい。また **その成分は、今までの変数を新しい変数で表したものを、新しい変数で微分したものになっています。** よくやりがちなのは、(u, v) を (x, y) で微分したものを成分に書いてしまうことです。このときは、$J \neq 0$ なら $|J|$ は本来の値の逆数になってしまいます。いつかの演習の解答では、暗にこの性質を利用したものもあります。気を付けて下さい。

式の中にある複雑な (x, y) の式、例えば $x - y,\ x + y$ を $u,\ v$ と置くようなときには、u, v を x, y で微分したものを成分とする Jacobian の値を求めて、その逆数を取れば良いわけです。いちいち

$$x = \frac{u + v}{2},\ v = \frac{u - v}{2}$$

と解き直してから Jacobian を計算する必要はありません。

もしも Jacobian が定数でないときには、どこかで負にならないかなどややこしくなります。

4　Gauss の超幾何関数

そのままは出さないということでしたが、一応そのままの定義を書いておきます。

$${}_2F_1(a, b; c; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n$$

記号 $(a)_n$ は Pochhammer symbole とか呼ばれ、

$$(a)_n = a(a + 1) \ldots (a + n - 1) = \prod_{i=0}^{n-1} (a + i)$$

という意味です。${}_2F_1$ の添え字は、Gauss の超幾何関数はもっと一般的な級数のうちの一種だということを表しています。収束するか判断するには、次で紹介するダランベールの判定基準を用いれば出来ます。

満たす微分方程式とか積分表示とかありましたが、問題にはし難いだろうとシケ対は決めつけているようです。

「特殊化した形で、問題に使用するのも面白いと思っている」とのことですが・・・。とりあえず、本番で「定義ぐらいは知ってるよね」みたいなことになっても対応できるぐらいで大丈夫だと・・・思います。

5 ダランベールの収束判定条件 その他もろもろ

一般的な無限級数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

が収束するか考えます。この級数の各項の絶対値の級数もまた収束するならば、この級数は**絶対収束**するといいます。絶対収束しない級数は、その性質がややこしかったりするので、交代級数以外は手をつけなかったのでした。

先に交代級数の収束条件をまとめておきます。交代級数

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

の収束条件は、

$$a_n > a_{n+1},\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

です。証明は恐らくどの参考書にもありますし、単純明快ですから確認してみて下さい。

ダランベールの収束判定法は、絶対収束を扱ったものです。なので、各項は全て正とします。

まず、この定理を見て下さい。

> 次の無限級数
>
> $$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$
>
> を考える。k は 1 よりも小さい正の数で、ある番号以上で常に
>
> $$\frac{a_{n+1}}{a_n} < k$$
>
> ならば、$\sum a_n$ は収束する。

証明は同じく分かりやすいので、是非確認を。このとき、$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$ が存在するならば、$l < 1$ のとき収束します。$l > 1$ なら発散し、$l = 1$ のときには、この方法では何とも言えません・・・というのが、ダランベールの判定法です。

Gauss の超幾何関数も条件が整えば $z = 1$ で収束しますが、ダランベールの収束判定法では分かりません。講義には出ませんでしたが、Gauss の判定法とかいうものがあったような・・・。

6 サプライズ

出ません。

基本的なことをきちんと勉強して下さいとのことでした。参考書で基本的な概念を確認し、積分の問題を十分練習しておけば大丈夫だと思います。シケプリは要らないかもしれません。

7　演習の復習だけはしましょう

さて一通りおさらいしてきましたが、まず筆者自身がこれだけでは点を取れる訳がありません。筆者はラテン語の試験で点を取れない勉強だって幾らでも出来ることを学んだので、同じ間違いは繰り返しませんよ orz

実際に

- 部分分数分解
- 部分積分
- 逆三角関数を含む積分
- 広義積分の計算
- Gauss の超幾何関数の性質（収束半径とか）を求める
- 冪級数の収束半径を求める

ぐらいは出来るようにしましょう。

他にも、多変数の積分の変数変換ぐらいは出来た方がいいと思います。幸い全部演習でやっていることばかりなので、それを復習していこうと思います。

以降は、筆者の演習復習日記になってしまうかもしれませんので、シケプリはこのぐらいにします。

おわりに

最後まで読んで頂いた方、また最後だけ読んで頂いた方、どうもありがとうございます。多少は点数アップの役に立てば良いなと思っています。このしょうもないシケプリは、直前に多少のアップグレードをするかもしれません。期待せずにご期待下さい。