電磁気学 試験対策プリント

制作：早川和希

2011 年 冬学期

目次

1　静電場

1.1　クーロンの法則

位置 $\boldsymbol{r}'$ にある電荷 Q があるとき, 位置 $\boldsymbol{r}$ にある電荷 q に働く静電気力 (クーロン力) は,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad (\varepsilon_0 : \text{真空の誘電率}) \tag{1}$$

であることが知られている．これを**クーロンの法則**という．これは線形であるから**重ね合わせの原理**を満たす．

位置 $\boldsymbol{r}'_1, \boldsymbol{r}'_2, \cdots, \boldsymbol{r}'_n$ に電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ があるとき, 電荷 q に働くクーロン力は以下のように表せる．

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_i|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_i) \tag{2}$$

1.2　ガウスの法則

これ以降は簡単のため電荷は q, Q のみ, Q の位置は原点 ($\boldsymbol{r}' = 0$) とする．

以下を満たすようなベクトル場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を考える．

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{3}$$

この $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を**電場** (時間変化しない場合は特に静電場) という．これは電荷 Q が周りの空間に影響を与え, その空間にやってきた電荷 q が力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を受けているといえる．この影響を受けた空間のことを**場**という．

したがって電場は以下のようになる．

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r} \tag{4}$$

ここで電荷分布が半径 r の球であるとき, この領域から流出する電気力線の総和を求める．球面の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると, 総和は,

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS &= |\boldsymbol{E}|S \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\times 4\pi r^2 \\ &= \frac{Q}{\varepsilon_0}\end{aligned} \tag{5}$$

任意の曲面 S についても同様に

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{6}$$

が成立する[*1]．これを**ガウスの法則**という．特にこれは積分型のガウスの法則という．ガウスの発散定理[*2]より，

$$\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} dS = \int \mathrm{div} \boldsymbol{E} dV \tag{10}$$

さらに電荷が連続的に分布しているとき, 電荷密度を ρ とすると,

$$Q = \int \rho dV \tag{11}$$

よってガウスの法則は,

$$\int \mathrm{div} \boldsymbol{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV$$

$$\mathrm{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{12}$$

これを微分型のガウスの法則という.

1.3 静電ポテンシャル

ここで微分公式

$$\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = -\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \tag{13}$$

より, 電場は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\boldsymbol{r}|^3} \boldsymbol{r} \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \frac{Q}{|\boldsymbol{r}|} \end{aligned} \tag{14}$$

のように表せるから,

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\boldsymbol{r}|} \tag{15}$$

という量を導入すると,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \phi(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{grad} \phi(\boldsymbol{r}) \tag{16}$$

[*1] [定義] 立体角 $\Omega = S/r^2 (S$: 錐体の底面積, r : 球の半径) 全立体角は $S = 4\pi r^2$ のときなのでこれは 4π となる.

[証明]

任意の閉曲面 S において $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{n}$ のなす角度を θ とすると,S の微小な錐体への射影は $\cos\theta dS$ となるから, 微小な立体角は

$$d\Omega = \frac{\cos\theta dS}{r^2} \tag{7}$$

で与えられるから, 微小面積当たりの電場の流出量は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\theta dS \quad (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = r\cos\theta) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\theta \frac{r^2}{\cos\theta} d\Omega \end{aligned} \tag{8}$$

となるから, これを積分すると

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int d\Omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{9}$$

となり, 任意の閉曲面においてもガウスの法則が成立することが示された.

[*2] 付録 A.1 節を参照.

と書ける．このスカラー場 $\phi(\boldsymbol{r})$ を**静電ポテンシャル**という．

クーロン力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が A 点 $\boldsymbol{r_A}$ から B 点 $\boldsymbol{r_B}$ まで任意の経路に沿ってする仕事 W_{AB} は,

$$\begin{aligned} W_{AB} &= -\int_A^B q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= q\int_A^B \nabla\phi(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = q(\phi(\boldsymbol{r_B}) - \phi(\boldsymbol{r_A})) \end{aligned} \tag{17}$$

このように W_{AB} は経路によらず始点と終点の静電ポテンシャルの差のみによって決まる．このポテンシャルの差を A 点と B 点の**電位差**といい, $\phi(\boldsymbol{r})$ のことを**電位**と呼んだりもする．電位の基準点はアースした導体の電位を 0 とすることが多い.

1.4　静電場の基本法則

ある閉曲線 C を一周するときのクーロン力のする仕事 W は,

$$\begin{aligned} W &= -\oint_C q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= q\oint_C \nabla\phi(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

よって

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{19}$$

ストークスの回転定理より,C の囲む面を S とすると,

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{20}$$

となるから

$$\begin{aligned} \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS &= 0 \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{E} &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

が成立する．これとガウスの法則とを合わせた 2 式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{22}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = 0 \tag{23}$$

を**静電場の基本法則**という.

2 電流と静磁場

2.1 電流

導体中を電子が一定の速さで運動すると, 一定の大きさの電流が流れる[*3]．これを**定常電流**という．電流の強さ I は導体のある断面を単位時間あたりに通過する電荷の量であるから,

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{25}$$

単位面積あたりの電流 $\boldsymbol{j}$ を電流密度という[*4]．断面 S を通過する電流密度の総量 (即ち電流) は $\int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} dS$ であるから,

$$\int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} dS = -\frac{dQ}{dt} \tag{26}$$

左辺にガウスの発散定理を適用し, 右辺では $Q = \int_V \rho dV$ の関係を用いると,

$$\int_V \left(\mathrm{div}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{27}$$

これは局所的な電荷の保存を表しているから, この式のことを**電荷の連続の式**または**電荷保存則**という.

2.2 ローレンツ力

電流や磁石によりつくられた磁気的な場を**磁場** (時間変化しない場合は特に静磁場) という．磁場 $\boldsymbol{B}$ のもとで電荷 q が速度 $\boldsymbol{v}$ をもつとき, この電荷が受ける力は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{28}$$

さらに電場 $\boldsymbol{E}$ がかかっている場合には

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{29}$$

この力を**ローレンツ力**という[*5]．

[*3] 電流 I の流れる導体の両端には電位差 $\Delta\phi$ が生じている．I と $\Delta\phi$ は比例し $\Delta\phi = RI$ の関係がある. これを**オームの法則**という．R を電気抵抗という．R は導体の長さ L に比例し, 断面積 S に反比例して

$$R = \rho \frac{L}{S} \tag{24}$$

となる．この ρ を**抵抗率**という.（文字は同じだが電荷密度ではない. 念のため）これにより $\boldsymbol{E} = \rho \boldsymbol{j}$ の関係が導かれ, 電流は電場に比例することがわかる.

[*4] 流れる方向を持つのでこれはベクトルとなる.

[*5] 電流 I が流れる電流素片 $d\boldsymbol{s}$ の位置を $\boldsymbol{r}'$ とするとき, これが位置 $\boldsymbol{r}$ につくる磁場 $d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \quad (\mu_0 : \text{真空の透磁率}) \tag{30}$$

これを**ビオ・サバールの法則**という.

今, 電流素片の位置が原点 ($\boldsymbol{r}' = 0$) で位置 $\boldsymbol{r}$ にある磁荷 Q_m にはたらく磁気力 $d\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{r})$ は

$$d\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{r}) = Q_m d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_m I d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \tag{31}$$

2.3　静磁場におけるガウスの法則

静電場では単独の電荷が存在することができたのに対し, 静磁場では単独の磁荷 (モノポール) は存在しないとされている. これは磁力線の正味の流出量が 0 であることを示しているから, 静磁場におけるガウスの法則は

$$\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS = 0 \tag{35}$$

ガウスの発散定理より

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{36}$$

が成立する.

2.4　アンペールの法則

無限に長い直流電流 I の周りには磁場が作られ, 直線から距離 r でのこの大きさは

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{37}$$

となる[*6] .

半径 r の円 C の円周に沿った線素ベクトルを $d\boldsymbol{l}$ とするとき, この円を一周にわたって磁場を積分すると

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I \tag{39}$$

電流が複数ある場合には

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum_i I_i \tag{40}$$

となる. 作用反作用の法則より Q_m が $d\boldsymbol{s}$ の部分に及ぼす力は $d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -d\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{r})$ となる. ところで

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q_m \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \tag{32}$$

は Q_m が $d\boldsymbol{s}$ の部分につくる磁場である. よって

$$d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = Id\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{33}$$

ここで $Id\boldsymbol{s} = \boldsymbol{j}dV$ として積分すると $\int \boldsymbol{j}dV = q\boldsymbol{v}$ より磁気力は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{34}$$

となる.

*6 $\boldsymbol{r}' = (r,0,0), \boldsymbol{r} = (0,0,z)$ として z 軸上を流れる無限に長い定常電流 I が電流素片 $d\boldsymbol{s} = (0,0,dz)$ の位置で $(r,0,0)$ につくる磁場 $d\boldsymbol{B} = (0, dB_y, 0)$ は, ビオ・サバールの法則より

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

$$dB_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dz$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dz = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{38}$$

となる. (蛇足ではあるが, $z = r\tan\theta$ と変数変換すれば積分できる.)

これが電流密度 $\boldsymbol{j}$ で分布しているときは

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{41}$$

左辺にストークスの回転定理を適用すると

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} \tag{42}$$

これを**アンペールの法則**という.

3 時間変化する電磁場

3.1 電磁誘導

磁場の変化によって引き起こされる電気的現象を**電磁誘導**という. 閉じたコイルを貫く磁束を Φ とするとき, Φ の変化により生じる起電力 V は

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{43}$$

で与えられる. これを**ファラデーの電磁誘導の法則**という.

この V の負号は磁束の変化を打ち消すように電流が誘導されることを意味する. このことを**レンツの法則**という. 電磁誘導によって生じた電場を**誘導電場**という. これを $\boldsymbol{E}$ とするとき, コイル一周にわたって積分した値が起電力であるから

$$V = \oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{44}$$

ストークスの回転定理より

$$\int \mathrm{rot}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS = -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{45}$$

が成立する.

3.2 アンペール・マクスウェルの法則

電流が定常電流のみのときはアンペールの法則は $\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j}$ であったが, 電流が時間変化するときはさらにこれを一般化して

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{46}$$

これを**アンペール・マクスウェルの法則**という. 特に右辺の第 2 項は**変位電流**と呼ばれている.

ここで $Q = \varepsilon_0\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS$, $dQ/dt = -\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}dS$ であったから

$$\frac{dQ}{dt} = \varepsilon_0\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS = -\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{47}$$

ガウスの発散定理より

$$\int \mathrm{div}\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{j}\right) dV = 0$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\boldsymbol{E}) + \mathrm{div}\boldsymbol{j} = 0 \tag{48}$$

ガウスの法則より

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{j} = 0 \tag{49}$$

これは電荷保存則に他ならない．よってアンペール・マクスウェルの法則は電荷保存則と矛盾しない*7．

4 マクスウェル理論

4.1 マクスウェル方程式

今までに求めた 4 つの基礎的な方程式を書き下すと

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{50}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{51}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{52}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{53}$$

式 (50)〜(53) までの 4 つの方程式のことを**マクスウェル方程式**という*8．

4.2 電磁波

電流分布も電荷分布もない状態ではマクスウェル方程式は

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0 \tag{56}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{57}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{58}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{59}$$

---

*7 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{B}) = 0$ より明らかですよね.

*8 実はこの書き方では真空中でしかこれらは成立していないことになってしまう．一般的な電磁場で成り立つようにするには, これらの式を

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \tag{54}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{55}$$

としなければならない．(残りの 2 式はそのままでよい)

ここで出てきた $\boldsymbol{D}$ を**電束密度**，$\boldsymbol{H}$ を**磁場** (このとき $\boldsymbol{B}$ は磁束密度と呼んでこれと区別しなければならない) という．

式 (58) の rot をとると

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\mathrm{rot}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\boldsymbol{B})$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E} = 0 \tag{60}$$

ここで

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{61}$$

とした．同様に式 (59) の rot をとることにより

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B} = 0 \tag{62}$$

が導かれる．式 (60)(62) を合わせて**電磁波の波動方程式**という.

4.3 電磁波の放射

マクスウェル方程式のうちの

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{63}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{64}$$

の式 (63) に $\boldsymbol{E}$ を, 式 (64) に $\boldsymbol{B}$ をかけてこれらを組み合わせると

$$\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = -\mu_0 \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} - \varepsilon_0\mu_0 \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\ \mathrm{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right) \qquad \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} = \boldsymbol{H}\ \text{とした}\right) \tag{65}$$

これを領域全体にわたって積分すると

$$\int \mathrm{div}\boldsymbol{S} dV = -\left(\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} dV + \frac{d}{dt}\int u\ dV\right) \tag{66}$$

ここで

$$\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{67}$$

$$u \equiv \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \tag{68}$$

とした．この $\boldsymbol{S}$ を**ポインティングベクトル**といい, u は**電磁場のエネルギー密度**である．式 (66) の右辺の第 1 項は系のすべての粒子の運動エネルギーの変化量の総量を, 第 2 項は場そのもののエネルギーの変化量の総量を表している．よって左辺は領域全体での場のエネルギーの流出量の総量であるといえる. $\int \mathrm{div}\boldsymbol{S}dV = \int \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}dS$ （dS は面積素）より $\boldsymbol{S}$ 自体はこの流れの密度, 即ち単位時間, 単位面積あたりに通過する場のエネルギーの大きさを表す.

4.4　遅延ポテンシャル

電荷密度が時間変化する場合, ポテンシャル ϕ が満たすべき方程式は

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}-\nabla^2\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{69}$$

で与えられる. このような方程式をダランベール方程式という. 時間変化がなければこれはポアソン方程式となる. また, 右辺が 0 ならこれは波動方程式となる. このようなダランベール方程式の解を遅延ポテンシャルという. 以下では一般的な場合でのこの微分方程式の一般解の求め方を示した後, 電磁ポテンシャルの遅延ポテンシャルを求める[*9].

一般に関数 $f(\boldsymbol{r},t)$ が満たす微分方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{r},t)}{\partial^2}-\nabla^2 f(\boldsymbol{r},t)=F(\boldsymbol{r},t) \tag{70}$$

が与えられたとする. この f , F のフーリエ変換[*10] を以下のように行う.

$$f(\boldsymbol{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\ e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}d^3k\ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\tilde{f}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{72}$$

$$F(\boldsymbol{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\ e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}d^3k\ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\tilde{F}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{73}$$

なお, $e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ のマイナスは後の便宜上つけたものである. これらを式 (70) に代入すると

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\ e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}d^3k\ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\left[\left(-\frac{\omega^2}{c^2}+\boldsymbol{k}^2\right)\tilde{f}-\tilde{F}\right]=0 \tag{74}$$

この式のフーリエ逆変換をすると

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2}+\boldsymbol{k}^2\right)\tilde{f}-\tilde{F}=0$$

$$\tilde{f}=\frac{\tilde{F}}{\boldsymbol{k}^2-\omega^2/c^2} \tag{75}$$

これを f の式に代入すると

$$f(\boldsymbol{r},t)=\int e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\frac{\tilde{F}(\boldsymbol{k},\omega)}{\boldsymbol{k}^2-\omega^2/c^2}d\omega d^3k \tag{76}$$

ここで $\tilde{F}$ のフーリエ逆変換は

$$\tilde{F}(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-i\omega t'+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}F(\boldsymbol{r}',t')dt'd^3r' \tag{77}$$

[*9] この節の内容は難しいので結果だけを見て読み飛ばしてもらっても構わない.

[*10] フーリエ変換の指数部分の符号と規格化定数の取りかたには様々な種類があり

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{2\pi}\int f(r)e^{-ikr}dr\quad,\quad f(r)=\int\tilde{f}(k)e^{ikr}dk \tag{71}$$

のようにするパターンもある. 今回はこれを用いる. なおこれらの違いは定義の違いでしかなく, 本質的な部分は同じである.

これを上式に代入すると

$$f(\boldsymbol{r},t) = \int \left(\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{i\{\omega(t-t') - \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\}}}{\boldsymbol{k}^2 - \omega^2/c^2} d\omega d^3k \right) F(\boldsymbol{r}',t')dt'd^3r'$$
$$= \int G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t')F(\boldsymbol{r}',t')dt'd^3r' \tag{78}$$

ただし

$$G(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}}{\boldsymbol{k}^2 - \omega^2/c^2} d\omega d^3k \tag{79}$$

と置いた．この G を**グリーン関数**という[*11]．

$\boldsymbol{r}$ 方向を z 軸にとり $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角を θ , $\boldsymbol{k}$ の方位角を ϕ , $|\boldsymbol{k}| = k$, $|\boldsymbol{r}| = r$ として極座標表示をする．体積素は $d^3k = k^2 \mathrm{sin}\theta d\theta d\phi dk$ より

$$G(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ e^{i\omega t} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikr\mathrm{cos}\theta}}{\boldsymbol{k}^2 - \omega^2/c^2} k^2 \mathrm{sin}\theta d\theta dk$$
$$= \frac{1}{2ir(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k-\omega/c} + \frac{1}{k+\omega/c} \right) e^{ikr} dk \tag{84}$$

ここでグリーン関数には $k = \pm\,\omega/c$ で特異点が存在する．そこで, このグリーン関数をきちんと求めるために境界条件として十分過去には f は存在していなかったとして, これに因子 $e^{\lambda t}$ をかける．すると, これは $\omega \to \omega - i\lambda$ と置き換えることに相当するので, ここで特異点 $k = -\omega/c + i\lambda$ のみ曲線内に含むような虚部が正の部分のみの半円状の積分経路 C を考える．ここで C が充分大きければ k の正である虚部がとても大きくなり e^{ikr} の寄与により被積分関数そのものはとても小さくなり, 結果 C に沿った積分は 0 になる．よって C を経路に含めても積分の値は変わらないから, 留数定理[*12] より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k-\omega/c+i\lambda} + \frac{1}{k+\omega/c-i\lambda} \right) e^{ikr} dk = 2\pi i e^{ir\left(-\frac{\omega}{c}+i\lambda\right)} \to 2\pi i e^{-ir\omega/c} \tag{87}$$

[*11] 関数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ がポアソン方程式

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{80}$$

の解であるとする．$\delta(\boldsymbol{r})$ はデルタ関数である．ここでポアソン方程式

$$\nabla^2 h(\boldsymbol{r}) = -f(\boldsymbol{r}) \tag{81}$$

の解は

$$h(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')d^3r' \tag{82}$$

で与えられる．実際に式 (81) に式 (82) を代入すると

$$\nabla^2 \int G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')d^3r' = -\int \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')d^3r' = -f(\boldsymbol{r}) \tag{83}$$

となり, 正しいことがわかる．実際に問題を解く際にはここに境界条件を設定することで様々なグリーン関数を求めるということもする．なお解 $h(\boldsymbol{r})$ には $f(\boldsymbol{r})$ の影響がたたみこまれているため h のことを**たたみこみ**という．

[*12] 複素関数 $f(z)$ が閉曲線 C とその内部で特異点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ を除いて正則 (簡単に言うと微分可能ということ) であるとする．

$$\lim_{z \to z_i} f(z)(z-z_i) = R_i \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{85}$$

が存在するとき R_i を留数といい, 以下の留数定理が成立する．

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i(R_1 + \cdots + R_n) \tag{86}$$

ここで最終的に因子の影響を限りなく小さくするために $\lambda \to 0$ の極限を取った．よってグリーン関数は

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{2r(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi r}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)\end{aligned} \tag{88}$$

ここでデルタ関数の公式

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega \tag{89}$$

を用いた．したがって

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int \delta\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}-t'\right)F(\boldsymbol{r}',t')dt'd^3r' \\ &= \int \frac{F\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r'\end{aligned} \tag{90}$$

となる．このような f を**遅延ポテンシャル**という．

4.5 電磁ポテンシャル

ベクトル解析の公式 div rot $= 0$ とマクスウェル方程式の 1 つ $\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$ より

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{91}$$

なるベクトル $\boldsymbol{A}$ を定義できる．この $\boldsymbol{A}$ を**ベクトルポテンシャル**という．また, マクスウェル方程式より

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= 0 \\ \mathrm{rot}\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) &= 0\end{aligned} \tag{92}$$

公式 rot grad $= 0$ より

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{93}$$

となるような ϕ を定めることができる．この ϕ は形からわかるように静電ポテンシャルの拡張であり, **スカラーポテンシャル**と呼ばれる．この $(\boldsymbol{A},\phi)$ の組を**電磁ポテンシャル**という．ここで任意の関数 $\chi(\boldsymbol{r},t)$ によって $(\boldsymbol{A},\phi)$ を

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\chi \tag{94}$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{95}$$

のように変換して得られた $(\boldsymbol{A}',\phi')$ について

$$\boldsymbol{B}' = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}' = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} + \mathrm{rot\ grad}\chi = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \tag{96}$$

$$\boldsymbol{E}' = -\mathrm{grad}\phi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} = -\mathrm{grad}\phi + \mathrm{grad}\frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{E} \tag{97}$$

となり変換前と同じ電磁場を与える．式 (94)(95) のような変換を**ゲージ変換**という．ゲージ変換のもとでは $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{E}$ は不変であるから, マクスウェル方程式はこれに対し不変である．ゲージ変換の式より

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi'}{\partial t} = \mathrm{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi \tag{98}$$

ここで $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi = 0$ となるように χ を選ぶと

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{99}$$

となるように電磁ポテンシャルを選ぶことができる．この式を**ローレンツ条件**という．この条件を満たすポテンシャルを**ローレンツゲージ**におけるポテンシャルという．このもとでは

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{E} &= -\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\boldsymbol{A}) \\ &= \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \tag{100}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$-\frac{1}{c^2}\mathrm{grad}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla^2\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{j} \tag{101}$$

先の節でやったように式 (100)(101) を解いた解が遅延ポテンシャルであったのだから, 電磁ポテンシャルは

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r' \tag{102}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r' \tag{103}$$

で与えられる[*13]．これは時間変化する電磁場は $\boldsymbol{r}'$ にある電荷や電流の $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$ だけ以前の時間によって決まることを示している．このことは電荷や電流の変動が光の速さで伝わり, $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$ の時間が経過したときに電磁場へ影響を及ぼすということを意味している[*14].

[*13] 時間変化のない場では当然

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r' \tag{104}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r' \tag{105}$$

のように静電ポテンシャルとビオ・サバールの法則が得られる．

[*14] $\boldsymbol{r}'$ にある電荷や電流の変化が遅れて $\boldsymbol{r}$ にある電磁場に変化を及ぼすから遅延ポテンシャルなどという名前になったのであろうか.

付録 A　数学的補足

A.1　ベクトル解析

A.1.1　$\mathrm{grad}, \mathrm{div}, \mathrm{rot}$

以下のように定義されるベクトルを**ナブラ**という.

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{106}$$

これは**微分演算子**である.

あるスカラー場 ϕ に ∇ を演算したベクトル

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \equiv \mathrm{grad}\phi \tag{107}$$

を ϕ の**グラディエント** (**勾配**) という.

また, あるベクトル場 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ と ∇ との内積

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \equiv \mathrm{div}\boldsymbol{A} \tag{108}$$

を $\boldsymbol{A}$ の**ダイバージェンス** (**発散**) という. 発散は微小領域からの単位体積あたりの $\boldsymbol{A}$ の全方向に流出する量を表しているといえる.

また, ∇ と $\boldsymbol{A}$ との外積

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \equiv \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{109}$$

を $\boldsymbol{A}$ の**ローテーション** (**回転**) という.

A.1.2　公式集

$\mathrm{grad}, \mathrm{div}, \mathrm{rot}$ に関する公式を以下に挙げておく. 忘れた場合は x 成分をチェックするなどして思い出せば良い.

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi) = 0 \tag{110}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = 0 \tag{111}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}(\mathrm{rot}\boldsymbol{B}) \tag{112}$$

$$\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{A}) = \phi\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{grad}\phi \tag{113}$$

$$\mathrm{rot}(\phi\boldsymbol{A}) = \phi\mathrm{rot}\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\phi \times \boldsymbol{A} \tag{114}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{115}$$

なお,

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 \tag{116}$$

を**ラプラシアン**という.

電場 $\boldsymbol{E}$ は静電ポテンシャル ϕ を用いて $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi$ と書けるので, 両辺の発散をとると, ガウスの法則より

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathrm{grad}\phi) = -\mathrm{div}\boldsymbol{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned} \tag{117}$$

この形の方程式を**ポアソン方程式**という．このうち右辺が特に 0 になるものを**ラプラス方程式**という.

A.1.3　ガウスの発散定理

あるベクトル場 $\boldsymbol{E}$ の発散の体積積分について

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{E}dV = \int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{118}$$

が成り立つ．これを**ガウスの発散定理**という[*15]．これは発散の体積積分をその領域の表面上の面積分で与えることができるというものである．微小体積あたりの $\boldsymbol{E}$ の流出量が $\mathrm{div}\boldsymbol{E}dV$ で与えられることから, 左辺はとある領域全体の $\boldsymbol{E}$ の流出量の総量ということになる．一方, $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS$ は微小面積あたりの流出量を示すから, 右辺は領域の表面からの $\boldsymbol{E}$ の流出量の総量を表すことになる．これらが等しいとするのがガウスの発散定理である.

A.1.4　ストークスの回転定理

あるベクトル場 $\boldsymbol{E}$ のある閉曲線 C 上で一周積分したものについて,C によって囲まれる面を S とすると,

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{119}$$

が成り立つ．これを**ストークスの回転定理**という.

$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS$ は微小面 dS での $\boldsymbol{E}$ の回転を表す．これを S 全体にわたって足しあわせたものについて, S 内部での回転は打ち消し合う (下図参照) から, 結局残るのは S の縁に沿った部分, つまり C 上の線積分のみとなる．よってストークスの回転定理が成り立つというわけである.

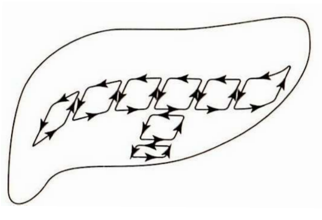

図 1　ストークスの回転定理

[*15] ガウスの発散定理とストークスの回転定理については厳密な証明は行わず, イメージを掴んでもらうに留める. 証明は教科書を参照していただきたい.

A.2　フーリエ解析

A.2.1　フーリエ級数展開

関数系 $\{1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \sin x, \sin 2x, \cdots\}$ は区間 $[0, 2\pi]$ で直交しており, かつ完備である[*16]．

一般の関数をこの正弦関数系で分解したものの足しあわせ (波の重ね合わせに相当) で表すことができる．このようにして表すことを関数を**フーリエ級数展開**するという．具体的には, いま x を実数とすると区間 $[0, 2\pi]$ で可積分な関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{121}$$

のように展開することができる．ここでフーリエ係数は,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \tag{122}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \tag{123}$$

で与えられる．

ここで実数から複素数まで拡張すると $\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}/2, \sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}/2i$ より,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}\right] \end{aligned} \tag{124}$$

ここで

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx - \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \end{aligned} \tag{125}$$

と置くと $a_0/2 = c_0, a_n + ib_n/2 = c_{-n}$ より

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}e^{-inx}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{126}$$

これが**複素フーリエ級数展開**である．

[*16] 2 つの複素関数 $f(x), g(x)$ の区間 $[a, b]$ 上での内積を

$$f \cdot g \equiv \int_a^b f(x)g^*(x)dx \quad (g^* \text{は } g \text{ の複素共役}) \tag{120}$$

と定義する．これから決まるノルムの収束について完備なとき, この空間を**ヒルベルト空間**という．$f \cdot g = 0$ のとき f と g は直交するという．

A.2.2 フーリエ変換

積分区間を $[-\pi, \pi]$ としても同様にフーリエ展開できるから,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad , \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{127}$$

となる. ここで $nx = \omega_n t$ とすると $x = \Delta\omega\ t$ $(\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n)$ であり, 周期を T とすると

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad , \quad c_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-i\omega_n t}dt \tag{128}$$

となるので c_n を代入すると

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)e^{-i\omega_n \tau}d\tau\ e^{i\omega_n t} \tag{129}$$

ここで $\Delta\omega \to 0$ $(T \to \infty$ に相当$)$ とすると, $\omega_n \to \omega$ と置き直して

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\ e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right)\ e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t}d\omega \end{aligned} \tag{130}$$

ここで

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \tag{131}$$

と置いた. 式 (131) を f の**フーリエ変換**といい, 式 (130) を**フーリエ逆変換**という.

A.3 デルタ関数

ある関数を決定して初めて関数が決定できるような関数の関数ともいえるようなものを**汎関数**という. ある有界閉区間で無限回連続微分可能な関数 $\phi(x)$ に対する線形連続汎関数を**超関数**という. 次のような超関数

$$\delta[\phi] = \phi(0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)dx \tag{132}$$

を**デルタ関数**といい,

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases} \tag{133}$$

のようになる. ϕ のフーリエ変換を

$$\tilde{\phi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{-ikx}dx \tag{134}$$

とする. ここで

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}dk\right)\phi(x)dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(k)dk \end{aligned} \tag{135}$$

$\tilde{\phi}$ のフーリエ逆変換は

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\phi}(k)e^{ikx}dk$$

$$\phi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\phi}(k)dk \tag{136}$$

であるから, 確かに式 (135) は $\phi(0)$ を与えるから, 定義式より

$$\delta(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}dk = \delta(x) \tag{137}$$

となる.

付録 B　特殊相対性理論

B.1　ローレンツ変換

B.1.1　相対性原理, 光速度不変の原理

特殊相対性理論では以下の 2 つの原理を用いる. 1 つは全ての自然法則はあらゆる座標系において同一でなければならないとする**相対性原理**である. これは自然法則を表す方程式はいかなる座標, 時間の変換を行おうともこれを不変に保つということを意味する[*17]. また, アインシュタインはこれに加え, 光の速度は有限で一定であるという**光速度不変の原理**を要請した. このことはマイケルソンとモーレーの実験により, 光の速度がその伝搬方向によらないという結果から明らかとなった. 以上のことから時間は絶対的ではないということがいえる. つまり, 時間は各座標系ごとに異なっているということである.

物体の速度が光速に近くなりこの時間のずれが無視できないような状況を相対論的というが, このとき時間を不変なものとしていたガリレイ変換は破綻してしまう. よって時間もまた座標変換の変更を受けるものとして空間の 3 変数と共に 4 つの (ct, x, y, z) の組の変換を考えなくてはならない. なお, 次元を揃えるため t には c をかけてある.

B.1.2　ローレンツ変換

変数 (ct, x, y, z) によって張られる空間を**ミンコフスキー空間**という. この空間内における"長さ"を**世界長さ**といい, 以下のように定義する.

$$s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{138}$$

この世界長さを不変とするような変換を**ローレンツ変換**という. 簡単のため tx 平面のみで考える ($y' = y$, $z' = z$ とする) と, ローレンツ変換は

$$s'^2 = s^2$$

$$-c^2t'^2 + x'^2 = -c^2t^2 + x^2 \tag{139}$$

ここで, 回転角 θ を導入して

$$ct' = ct\ \cosh\theta - x\ \sinh\theta \tag{140}$$

$$x' = -ct\ \sinh\theta + x\ \cosh\theta \tag{141}$$

[*17] 物理法則を表す方程式が, 物理法則はあらゆる座標変換のもとで不変であるということを示す性質を**共変性**という. したがって, 今後の目標は物理法則を表す方程式を共変形式で書き下す, ということになる.

と置くとこれらは式 (139) を満たすことがわかる．つまりローレンツ変換はミンコフスキー空間における世界長さを不変に保つような回転変換であるといえる.(ただし, 三角関数ではなく双曲線関数である点に注意.)

ここで,K 系 (ct, x, y, z) に対して K' 系 (ct', x', y', z') が x 方向に速度 v で運動しているとする．このとき

$$\tanh\theta = \frac{v}{c} \tag{142}$$

と定義すると

$$\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad , \quad \sinh\theta = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{143}$$

となるから, ローレンツ変換は

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{144}$$

$$x' = \frac{-\frac{v}{c}ct + x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{145}$$

のようになる．ここで, $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, $\beta = v/c$ と定義すると, ローレンツ変換は

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{146}$$

のように書ける．

B.2　数学の準備

B.2.1　4 元ベクトル

時空の座標を $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ と表すことにする．これらをまとめた x^i $(i = 0, 1, 2, 3)$ を **4 元ベクトル**という．また, もう 1 種類の 4 元ベクトルとして x_i を導入するが

$$x_0 = -x^0 \quad , \quad x_1 = x^1 \quad , \quad x_2 = x^2 \quad , \quad x_3 = x^3 \tag{147}$$

と定義する．この量 x^0 などは 4 元ベクトルの**反変成分**, x_0 などは**共変成分**と呼ばれる．世界長さは

$$\begin{aligned} s^2 &= \sum_{i=0}^{3} x^i x_i \\ &= x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3 \\ &= -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \end{aligned} \tag{148}$$

のように表せる[*18]．このような積 $x^i x_i$ を 4 元ベクトルのスカラー積という．ある座標系 (x^0, x^1, x^2, x^3) から異なる座標系 (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) への変換について, 座標の微分は

$$dx'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dx^i \tag{149}$$

[*18] 以降は簡単のため数式中の同じ項の中での同じ添字については $\sum$ の記号がなくてもその和をとることとする．このことは**アインシュタインの規約**と言われる．なお, ラテン文字 i , j , k などは 0 から 3 まで, ギリシャ文字 μ , ν などは 1 から 3 までの和をとるものとする．

のように変換される．このように変換される性質を持つベクトルを**反変ベクトル**という．

また, ϕ をあるスカラーとするとき, スカラー導関数 $\partial\phi/\partial x^i$ は

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \tag{150}$$

のように変換される．$\partial\phi/\partial x^i = A_i$ とすると, 上式は

$$A'_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}A_i \tag{151}$$

となる．この A_i のように変換されるベクトルを**共変ベクトル**という．

B.2.2　テンソル

4 次元の反変ベクトル, 共変ベクトル同士の積 $T^{ij} = A^i A^j$, $T_{ij} = A_i A_j$ は 16 個の量を持つものとなる．この T^{ij} や T_{ij} などを **2 階のテンソル**といい,

$$T'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}T^{kl} \tag{152}$$

のような変換をするものを **2 階の反変テンソル**といい,

$$T'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}T_{kl} \tag{153}$$

のような変換をするものを **2 階の共変テンソル**という．また, ある反変ベクトルとある共変ベクトルからなるテンソル

$$T^i{}_j = A^i B_j \tag{154}$$

を **2 階の混合テンソル**といい,

$$T'^i{}_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}T^k{}_l \tag{155}$$

のように変換される．テンソル A^{ij} は $A^{ij} = A^{ji}$ のときは対称テンソルといい, $A^{ij} = -A^{ji}$ のときは反対称テンソルと呼ばれる．反対称テンソルは性質上対角成分は 0 となる．テンソルを用いると世界長さは

$$s^2 = g_{ij}x^i x^j \tag{156}$$

のように表せる．ただし,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{157}$$

である．これを**計量テンソル**という．テンソルの成分のうち同じ成分についての和

$$A^i{}_i = A^0{}_0 + A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3 \tag{158}$$

をとることをテンソルの**縮約**という．また,

$$A_i = g_{ij}A^j \quad , \quad A^i = g^{ij}A_j \tag{159}$$

のように計量テンソルを用いて添字の上げ下げを行うことができ, スカラー積は

$$A^i{}_i = g_{ij}A^i A^j = g^{ij}A_i A_j \tag{160}$$

のように書ける．ここで

$$g^{ik}g_{kj} = \delta^i{}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{161}$$

のようにする．$\delta^i{}_j$ は単位テンソルと呼ばれる．すると,

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{162}$$

となり g_{kj} と値は全く同じであることがわかる．

B.3　相対論的力学

B.3.1　4 元速度,4 元運動量

ある質点の速度は dx^i/dt としたいところだが, これは誤りである．なぜなら t は座標によって異なる量であり, よってこの形は共変形式にはならないからである．

質点と共に運動する座標系, 即ち質点に対して静止している座標で測る時間を**固有時間**という．固有時間 $d\tau$ は質点の速度を v とすると, ローレンツ変換により

$$d\tau = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{dt - \frac{v}{c^2}vdt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \sqrt{1-(v/c)^2}dt = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{c}dx^0 \tag{163}$$

である．よって"速度"を

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right) \tag{164}$$

のように定義する．これを **4 元速度**という．また, この系での世界長さは

$$ds^2 = -(dx^0)^2 = -(cd\tau)^2 \tag{165}$$

である．4 元速度のスカラー積は

$$u^i u_i = g_{ij}u^i u^j = g_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = -c^2 \tag{166}$$

で常に一定となる．質点の質量を m とすると,**4 元運動量**は

$$p^i = mu^i \tag{167}$$

と定義される．このスカラー積も

$$p^i p_i = m^2 u^i u_i = -m^2c^2 \tag{168}$$

で一定となる．4 元運動量の時間成分と空間成分は

$$p^0 = mu^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{169}$$

$$p^\mu = mu^\mu = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (\mu = 1, 2, 3) \tag{170}$$

ここで,

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{171}$$

と定義すると $p^\mu = m'\boldsymbol{v}$ と表せる．このことは運動している物体は慣性質量が m' のように m から増加していることを示している．よって m を特別に**静止質量**と呼んで区別する．

また, p^0 に c をかけて非相対論的極限 $(v/c \ll 1)$ を取り, テイラー展開すると

$$cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{172}$$

これは粒子の運動エネルギーに定数 mc^2 を加えたものとなっている．つまりこれは相対論的な粒子のエネルギーを示している．ここで $cp^0 = E$ と置くと

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{173}$$

となる．また $p^ip_i = -m^2c^2$ であったから,

$$\begin{aligned} c^2p^ip_i = -(cp^0)^2 + c^2p^\mu p_\mu = -E^2 + c^2\boldsymbol{p}^2 = -m^2c^4 \\ E^2 = c^2p^2 + m^2c^4 \quad (\ |\boldsymbol{p}| = p \ \ \text{とした}\ ) \end{aligned} \tag{174}$$

よって物体が静止しているとき, 物体の静止エネルギーについてのあまりにも有名すぎる式

$$E = mc^2 \tag{175}$$

が得られる．

B.3.2 最小作用の原理

最小作用の原理とは, 全ての力学系に対して作用というある積分 S が存在して, その変分 δS が 0 となるような経路が現実の運動となる, というものである．この作用が座標の選び方によらない, 即ちローレンツ変換に対して不変であるためには作用はスカラーでなくてはならない．よってこれはミンコフスキー空間のスカラーである世界長さ ds を用いて

$$S = \int \alpha ds \quad (\ \alpha : \text{定数}\ ) \tag{176}$$

と書かれるはずである．$ds = -cd\tau = -c\sqrt{1-(v/c)^2}dt$ であったから

$$S = -\alpha c \int \sqrt{1-(v/c)^2}dt \tag{177}$$

となる．この系のラグランジアンを L とすると, 作用は

$$S = \int Ldt \tag{178}$$

とも書ける．式 (177) の被積分関数を展開すると

$$-\alpha c\sqrt{1-(v/c)^2} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c} \tag{179}$$

ラグランジアンの定数部分は運動方程式に影響しないので無視することができて, 古典力学でのラグランジアン $L = \frac{1}{2}mv^2$ と比べると $\alpha = mc$ となるから作用は

$$
\begin{aligned}
S &= -mc^2 \int \sqrt{1-(v/c)^2}dt \\
&= -mc^2 \int d\tau \\
&= -mc \int ds
\end{aligned}
\tag{180}
$$

となる. 最小作用の原理は

$$
\delta S = -mc\ \delta \int ds = 0 \tag{181}
$$

のようになる. $ds^2 = dx^i dx_i$ であったから

$$
\begin{aligned}
\delta S &= -mc\ \delta \int \frac{dx^i dx_i}{ds} \\
&= m\ \delta \int \frac{dx^i dx_i}{d\tau} \\
&= m \int u_i \delta dx^i \quad \left(u_i = \frac{dx_i}{d\tau} \text{ とした} \right)
\end{aligned}
\tag{182}
$$

これを部分積分すると

$$
\delta S = mu_i\ \delta x^i \Big|_a^b - m \int \delta x^i \frac{du_i}{d\tau} d\tau \tag{183}
$$

実際は停留値を持つ条件から右辺の第 1 項は 0 となり, $\delta S = 0$ から $du_i/d\tau = 0$ が得られる. ここで b が動けるものとして $b = i$ と置くと

$$
\delta S = mu_i \delta x^i \tag{184}
$$

4 元運動量は $p_i = mu_i$ だから, 上式より

$$
p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i} \tag{185}
$$

が得られる. $p^i p_i = -m^2c^2$ であったから

$$
\begin{gathered}
p^i p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x_i} = g^{ij}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j} = -m^2c^2 \\
-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = -m^2c^2
\end{gathered}
\tag{186}
$$

が得られる. これは**相対論的力学におけるハミルトン・ヤコビ方程式**である. 相対論では粒子のエネルギー mc^2 を含んでいるので, 古典力学で考えるためには

$$
S = S' - mc^2 t \tag{187}
$$

の変換を行うと

$$
\frac{\partial S'}{\partial t} - \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] = 0 \tag{188}
$$

$\partial S/\partial x^\mu = p_\mu$ より $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = p^2$ となる. ハミルトニアンを $H = p^2/2m$ とすると, 古典力学では $c \to \infty$ であったから

$$
\frac{\partial S'}{\partial t} + H = 0 \tag{189}
$$

と**古典力学におけるハミルトン・ヤコビ方程式**を得る.

B.4　電磁場の共変形式

B.4.1　電磁ポテンシャル

電磁ポテンシャルの満たすべき微分方程式は

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{190}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j} \tag{191}$$

であった．ここで

$$j^i = \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} \quad , \quad A^i = \begin{pmatrix} \frac{\phi}{c} \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{192}$$

とすると, 上の 2 式は

$$g^{jk}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k}A^i = -\mu_0 j^i \tag{193}$$

というシンプルな形にまとめられる．ここで

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0 \tag{194}$$

という式は展開すると $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0$ を与える．つまりこの式はローレンツ条件を表している．

式 (193) を x^i で偏微分すると

$$g^{jk}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = -\mu_0 \frac{\partial j^i}{\partial x^i} \tag{195}$$

左辺はローレンツ条件より 0 であるから

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \tag{196}$$

が得られる．これは展開すると $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{j} = 0$ であるから, これは電荷保存則を表しているということがわかる．

B.4.2　電磁場テンソル

ここで

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \tag{197}$$

というテンソルを定義する．これは具体的に行列表示すると

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{198}$$

これを**電磁場テンソル**という．この反変テンソルは

$$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{199}$$

となる．ここで, 偏微分の記号を $\partial_i = \partial/\partial x^i$ と略記して

$$\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0 \tag{200}$$

というものを考える．この式から

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{201}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{202}$$

が得られる．また,

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} = \mu_0 j^i \tag{203}$$

というものを考える．この式から

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{204}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{205}$$

が得られる．つまり, 式 (200)(203) はマクスウェル方程式の共変形式という事になる．このことからわかるように電場や磁場はベクトルではなくテンソルとして変換されるのである．

実際に電磁場のローレンツ変換は

$$F'^{kl} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{\partial x'^l}{\partial x^j} F^{ij} \tag{206}$$

$$j'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} j^i \tag{207}$$

のようになっている．

電磁場が $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ で与えられる K 系に対し, 速度 v で x 方向に運動する K' 系から見た電磁場 $\boldsymbol{E}', \boldsymbol{B}'$ は, ローレンツ変換により

$$E_x{}' = E_x \quad , \quad E_y{}' = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad , \quad E_z{}' = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{208}$$

$$B_x{}' = B_x \quad , \quad B_y{}' = \frac{B_y + \frac{v}{c^2}E_z}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad , \quad B_z{}' = \frac{B_z - \frac{v}{c^2}E_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{209}$$

ここで, 非相対論的極限をとると

$$E_x{}' = E_x \quad , \quad E_y{}' = E_y - vB_z \quad , \quad E_z{}' = E_z + vB_y \tag{210}$$

$$B_x{}' = B_x \quad , \quad B_y{}' = B_y + \frac{v}{c^2}E_z \quad , \quad B_z{}' = B_z - \frac{v}{c^2}E_y \tag{211}$$

となるから, $\boldsymbol{v} = (v, 0, 0)$ として上の式をベクトルで表すと

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{212}$$

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E} \tag{213}$$

を得る．

電磁場中を速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する電荷 q にはたらくローレンツ力は $q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ であった．ここで, この電荷と共に運動する慣性系から観測すると磁気力 $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ の部分は相対速度が 0 だから, なくなってしまうはずである．しかし, 実はローレンツ変換をすることで電場が $\boldsymbol{E}'$ となっていたので, やはりこの荷電粒子にはたらくローレンツ力は $q\boldsymbol{E}' = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ であるから, 座標変換を行なっても力は不変であることが示された．このようにマクスウェル方程式がローレンツ変換に対し不変で共変性を持つという事は, 電磁場があらゆる座標変換に対して共変であるということを表している．

B.5 電磁場中の電荷のラグランジアン

先に示した作用には粒子のエネルギーに相当する部分しか被積分関数に含まれていなかった．電磁場などの場の存在するとき, 粒子の電荷を e とすると, 積分

$$e\int A_i dx^i \tag{214}$$

の項を付け加えることが必要である[*19]．よって作用は

$$\begin{aligned} S &= \int \left(-mc^2 ds + eA_i dx^i\right) \\ &= \int \left(-mc^2 ds - e\phi dt + e\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}\right) \\ &= \int \left(-mc^2\sqrt{1-(v/c)^2} - e\phi + e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}\right) dt \end{aligned} \tag{215}$$

のように書けるから, 電磁場中の電荷のラグランジアンは

$$L = -mc^2\sqrt{1-(v/c)^2} - e\phi + e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} \tag{216}$$

のようになる．ここで, 粒子のみの時のラグランジアンを改めて $L_{matter} = -mc^2\sqrt{1-(v/c)^2}$ とすると, この粒子の運動量は $\partial L_{matter}/\partial\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v}/\sqrt{1-(v/c)^2} = \boldsymbol{p}$ となる．

ここで上記のラグランジアンについての一般化運動量は

$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + e\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A} \tag{217}$$

となる．ここで

$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}} = e\ \mathrm{grad}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}) - e\ \mathrm{grad}\phi \tag{218}$$

となるが, ベクトル解析の公式 $\mathrm{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{b}$ より, $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ は独立であることに注意すると,

$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}} = e(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + e\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{A} - e\ \mathrm{grad}\phi \tag{219}$$

ここで, ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}} = \frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}} \tag{220}$$

より,

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}) = e(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + e\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{A} - e\ \mathrm{grad}\phi \tag{221}$$

となる. ここで $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ より $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\boldsymbol{r}}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$ となるので上式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -e\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + e\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{A} - e\ \mathrm{grad}\phi \tag{222}$$

[*19] ローレンツ変換に対して不変であるという条件のみならば, あるスカラー χ を持ちだして $\int\chi ds$ という項でもよいが, 経験的事実として $\chi = A_i\frac{dx^i}{ds}$ として $\int\chi ds = \int A_i\frac{dx^i}{ds}ds = \int A_i dx^i$ のような項を要請する．このように相対論的不変性からはこの項は一般的に書き下せないものなのである．

となる. ここで電磁場は

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{223}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{224}$$

であったから, ラグランジュ方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{225}$$

という形になる. この運動方程式の右辺の示す力はまさにローレンツ力となっている.

B.6 エネルギー・運動量テンソル

前の節までは粒子そのもの, または粒子と場の相互作用による作用を考えてきたが, 今回は場そのものの性質による作用を考える. 電磁場のみによる作用はやはりスカラーでなければならないので, 電磁場テンソルを用いた

$$S = a \int F_{ij}F^{ij} dV dt \tag{226}$$

のようなスカラーの積分でなければならない. a は定数であり, 後の便宜上 $a = 1/4\mu_0$ とする.

ここでスカラーを $\chi = F_{ij}F^{ij}/4\mu_0$ とおくと, 作用は

$$S = \int \chi dV dt \tag{227}$$

となる. この $\int \chi dV$ の部分が系のラグランジアンとなることから χ はラグランジアン密度とみなすことができる. F_{ij} は A_i によって記述されるから χ は A_i とその時間及び空間に関する 1 階導関数の関数であり, $\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = A_{i,k}$ と略記することにすると $\chi = \chi(A_i, A_{i,k})$ である. このことからラグランジュ方程式

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \chi}{\partial A_{i,k}} - \frac{\partial \chi}{\partial A_i} = 0 \tag{228}$$

が得られる. ここで

$$\frac{\partial \chi}{\partial x^l} = \frac{\partial \chi}{\partial A_i}\frac{\partial A_i}{\partial x^l} + \frac{\partial \chi}{\partial A_{i,k}}\frac{\partial A_{i,k}}{\partial x^l} \tag{229}$$

であるから, これにラグランジュ方程式を代入すると,

$$\frac{\partial \chi}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \chi}{\partial A_{i,k}}\frac{\partial A_i}{\partial x^l} + \frac{\partial \chi}{\partial A_{i,k}}\frac{\partial A_{i,k}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(A_{i,l}\frac{\partial \chi}{\partial A_{i,k}}\right) \tag{230}$$

ここで

$$\frac{\partial \chi}{\partial x^l} = \delta^k{}_l \frac{\partial \chi}{\partial x^k} \tag{231}$$

と表せるから, 上式は

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(A_{i,l}\frac{\partial \chi}{\partial A_{i,k}} - \delta^k{}_l \chi\right) = 0 \tag{232}$$

となるから

$$T^k{}_l = A_{i,l}\frac{\partial \chi}{\partial A_{i,k}} - \delta^k{}_l \chi \tag{233}$$

という量を導入すると

$$\frac{\partial T^k{}_l}{\partial x^k} = 0 \tag{234}$$

のように書ける[20].

さて, $\chi = F_{ij}F^{ij}/4\mu_0$ であったから, この変分をとると, $F_{ij}\delta F^{ij} = F^{ij}\delta F_{ij}$ に注意すると,

$$\delta\chi = \frac{1}{2\mu_0}F^{ij}\delta F_{ij} = \frac{1}{2\mu_0}F^{ij}\delta\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}\right) \tag{239}$$

この第 2 項で記号 i と j を入れ替え, F^{ij} の反対称性により, これを $-F^{ij}$ と置き換えると,

$$\delta\chi = \frac{1}{\mu_0}F^{ij}\delta\frac{\partial A_j}{\partial x^i} = \frac{1}{\mu_0}F^{ij}\delta A_{j,i}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial A_{j,i}} = \frac{1}{\mu_0}F^{ij} \tag{240}$$

が得られる. したがって, ダミー添字の表し方を少し変えて

$$\begin{aligned} T^i{}_j &= A_{k,j}\frac{\partial\chi}{\partial A_{k,i}} - \delta^i{}_j\chi \\ &= \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_k}{\partial x^j}F^{ik} - \frac{1}{4\mu_0}\delta^i{}_jF_{kl}F^{kl} \end{aligned} \tag{241}$$

となる. この反変テンソルは

$$T^{ij} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A^k}{\partial x_j}F^i{}_k - \frac{1}{4\mu_0}g^{ij}F_{kl}F^{kl} \tag{242}$$

ここで, 系は場のみを考えているので, 電荷は存在しないとしているから, マクスウェル方程式

$$\frac{\partial F^i{}_k}{\partial x_k} = \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0 \tag{243}$$

により

$$-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A^j}{\partial x_k}F^i{}_k = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(A^jF^i{}_k\right) \tag{244}$$

を T^{ij} に加えた式を T'^{ij} とすると, この混合テンソルは

$$T'^i{}_j = T^i{}_j - \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(A_jF^{ik}\right) \tag{245}$$

[20] ここでの議論は力学におけるエネルギー保存を導出するのと同じ流れである. 即ち, ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \tag{235}$$

に対し

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial L}{\partial r}\frac{dr}{dt} \tag{236}$$

であるから

$$H = v\frac{\partial L}{\partial v} - L \tag{237}$$

のようにルジャンドル変換すると

$$\frac{dH}{dt} = 0 \tag{238}$$

となり, 系のハミルトニアンが保存され, エネルギーが保存する.

ここで, これを x^i で偏微分すると F^{ik} は反対称テンソルであるから $\partial^2 A_j F^{ik}/\partial x^i \partial x^k = 0$ が恒等的に成立する. よって

$$\frac{\partial T'^i{}_j}{\partial x^i} = 0 \tag{246}$$

となるから, 式 (244) を加えても良い. 実際に加えると

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial A^k}{\partial x_j} - \frac{\partial A^j}{\partial x_k}\right) F^i{}_k - \frac{1}{4\mu_0} g^{ij} F_{kl} F^{kl} \\ &= \frac{1}{\mu_0} F^{jk} F^i{}_k - \frac{1}{4\mu_0} g^{ij} F_{kl} F^{kl} \\ &= \frac{1}{\mu_0}\left(g_{kl} F^{jk} F^{il} - \frac{1}{4} g^{ij} F_{kl} F^{kl}\right) \end{aligned} \tag{247}$$

となる. この T^{ij} を電磁場の**エネルギー・運動量テンソル**という.

ここで, 具体的にエネルギー・運動量テンソルの成分を計算してみると ($\boldsymbol{B}/\mu_0 = \boldsymbol{H}$ としている)

$$T^{00} = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \tag{248}$$

$$T^{01} = \frac{1}{\mu_0 c}\left(E_z B_y - E_y B_z\right) = \frac{1}{c}\left(E_z H_y - E_y H_z\right) \tag{249}$$

$$T^{11} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left({E_y}^2 + {E_z}^2 - {E_x}^2\right) + \frac{1}{2\mu_0}\left({B_y}^2 + {B_z}^2 - {B_x}^2\right) \tag{250}$$

$$T^{12} = -\varepsilon_0 E_x E_y - \frac{1}{\mu_0} B_x B_y \tag{251}$$

などとなる. ここでエネルギー密度, ポインティングベクトルは

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \tag{252}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{253}$$

であった. また, このテンソルの空間成分を

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\varepsilon_0 E_\alpha E_\beta - \frac{1}{\mu_0} B_\alpha B_\beta + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right)\delta_{\alpha\beta} \tag{254}$$

と置くと, エネルギー・運動量テンソルの行列表示は

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} w & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{255}$$

この $\sigma_{\alpha\beta}$ を**マクスウェルの応力テンソル**という.

エネルギー・運動量テンソルの時間成分は場のエネルギー変化を表し, 空間成分, 即ちマクスウェルの応力テンソルは場の運動量の変化を表す. 電荷や電流が存在していなければ, このテンソルの発散は

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0 \tag{256}$$

となるから, 場のエネルギーと運動量が保存していることがわかる.

付録 C　物性物理入門：物質中における電磁場

C.1　誘電体

C.1.1　電気分極

物質はその電気的性質から導体, 半導体, 絶縁体のように分類することができる. 絶縁体は電流を流さない性質を持ち, したがって電子やイオンが物質全体にわたって動きまわる事はできない. しかし, これに外部から電場をかけると物質中の電荷に偏りが生じ, 全体として分極する. このことから絶縁体のことを**誘電体**と呼ぶ. 誘電体に電場をかけているとき, 微視的には電場から力を受け正の電荷 (原子核など) と負の電荷 (電子など) とが逆方向に変位して分極した構造を作る. これを**電気双極子**という.

負電荷が原点, 正電荷が位置 $\boldsymbol{d}$ にあるとき, 電荷の大きさを q とすると,

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d} \tag{257}$$

を**電気双極子モーメント**という.

巨視的な分極の様子を記述するには個々の原子や分子の分極の総和の平均をとるという手法を用いる. 物質中のそれぞれの双極子モーメントを $\boldsymbol{p}_i$ とするとき, この総和を体積 V で割って平均化した

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sum_i \boldsymbol{p}_i}{V} \tag{258}$$

を**電気分極**という. 電気分極が電場に比例している状態を常誘電相といい, そのような誘電体を**常誘電体**という. 常誘電体の電気分極は電場を $\boldsymbol{E}$ とすると

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E} \tag{259}$$

と書ける. χ を**電気感受率**という.

また, 誘電体の中には外部から電場をかけなくても双極子モーメントの方向が揃い, 分極する場合がある. このことを自発分極といい, このような誘電体を**強誘電体**という.

電気分極により発生する電場を分極電場といい, これを $\boldsymbol{E}_P$ とすると, これの誘電体の表面から流出する総和は電気分極の仮想的な流出量 $\mathrm{div}\boldsymbol{P}$ の体積全体にわたって流出していく量に等しく

$$\varepsilon_0 \int \boldsymbol{E}_P \cdot \boldsymbol{n} dS = -\int \mathrm{div}\boldsymbol{P} dV \tag{260}$$

となる[*21].

誘電体中の電場 $\boldsymbol{E}$ は外部電場 $\boldsymbol{E}_e$ と分極電場 $\boldsymbol{E}_P$ の和で表される. 外部にある電荷密度を ρ_e とすると, ガウスの法則より

$$\varepsilon_0 \int \boldsymbol{E}_e \cdot \boldsymbol{n} dS = \int \rho_e dV \tag{263}$$

[*21] 本来電気分極は誘電体の外部へ出ていく事はないのだが, 仮想的な流出を考え, また仮想的に分極によって電荷が生じたとして**分極電荷** ρ_P というものを導入すると

$$\rho_P = -\mathrm{div}\boldsymbol{P} \tag{261}$$

となり

$$\varepsilon_0 \int \boldsymbol{E}_P \cdot \boldsymbol{n} dS = \rho_P \tag{262}$$

のような形になり, ガウスの法則と整合性がとれて計算上便利である. なお, 実際に存在し, 物質から取り去ったり, 加えたりできる電荷をこれと区別して**真電荷**と呼ぶ.

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_e + \boldsymbol{E}_P$ より

$$\varepsilon_0 \int \boldsymbol{E}_e \cdot \boldsymbol{n} dS + \varepsilon_0 \int \boldsymbol{E}_P \cdot \boldsymbol{n} dS = \int \rho_e dV - \int \mathrm{div} \boldsymbol{P} dV$$

$$\int (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{n} dS = \int \rho_e dV \tag{264}$$

となる．これが**誘電体におけるガウスの法則**である．ここで

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{265}$$

という量を定義する．これを **電束密度**という．これを導入すると式 (264) は

$$\int \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int \rho_e dV \tag{266}$$

これの微分型は

$$\mathrm{div} \boldsymbol{D} = \rho_e \tag{267}$$

となる．

また, $\boldsymbol{P}$ を $\boldsymbol{E}$ を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E} \\ &= \varepsilon_0 (1 + \chi) \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{268}$$

ここで

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi) \tag{269}$$

とした．この ε を誘電体の**誘電率**という．つまり物質中では真空中に比べて電束密度は $\varepsilon_0 \to \varepsilon$ への変更を受けているとみなすことができる．

C.1.2　多重極展開

点 $\boldsymbol{r}'$ に負電荷 $-q$ があり, 点 $\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{d}$ に正電荷 q があるとき, 点 $\boldsymbol{r}$ ($|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \gg |\boldsymbol{d}|$) におけるこの電気双極子の作る電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ は

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{d}|} - \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) \\ &\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{d} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \\ &= \frac{\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \end{aligned} \tag{270}$$

で与えられる．途中の近似は $1/|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{d}|$ をテイラー展開して $|\boldsymbol{d}|$ の 2 次以上の微小項は無視した．

これによって生じる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= -\mathrm{grad} \phi(\boldsymbol{r}) \\ &= \frac{\{3\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') - (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')^2 \boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^5} \end{aligned} \tag{271}$$

となる．

電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r}')$ が与えられたとき, 電位は $|\boldsymbol{r}| = r$ とすると

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r' \\ &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\boldsymbol{r}')\left(\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^3}+\frac{3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')^2-\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{r}'^2}{2r^5}\right)d^3r' \end{aligned} \tag{272}$$

これは $1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ のテイラー展開で 3 次以上の微小項を無視して近似した．ここでこの第 1 項, 第 2 項はそれぞれ

$$\int \rho(\boldsymbol{r}')d^3r' = q \tag{273}$$

$$\int \rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'d^3r' = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} \tag{274}$$

となり, 電荷の総和や双極子モーメントによるポテンシャルを与えることがわかる．この式の第 3 項は

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{1}{2}\int\left(\frac{3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')^2-\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{r}'^2}{r^5}\right)\rho(\boldsymbol{r}')d^3r' \tag{275}$$

であり, この積分の中の括弧の部分は

$$\frac{3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')^2}{r^5}-\frac{\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{r}'^2}{r^5} = \left(x'_\alpha x'_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{r}'^2\right)\left(\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5}-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3}\right) \tag{276}$$

のように変形できる．(x_α, x'_α などはベクトル $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'$ の成分)．ここで

$$Q_{\alpha\beta} = \int(3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{r}'^2)\rho(\boldsymbol{r}')d^3r' \tag{277}$$

というテンソルを定義する．これは**電気 4 重極子モーメント**という．これを用いると第 3 項は

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{6}Q_{\alpha\beta}\left(\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5}-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3}\right) \tag{278}$$

のように表せる．

以上のことから電位は $1/r$ のべき乗の展開を用いて表すことができる．このことを**多重極展開**という．

C.2 磁性体

誘電体のときと同じように磁場中で何らかの磁気的性質を示す物質を**磁性体**という．

モノポールが存在しないという事は, 磁石は N 極と S 極がどんなに小さくてもセットになっているということである．即ち, 磁石は本質的に双極子を形成しているということである．これを**磁気双極子**という．磁気双極子モーメントを $\boldsymbol{m}$ と表す[*22] とき, 巨視的に平均化された

$$\boldsymbol{M} = \frac{\sum_i \boldsymbol{m}_i}{V} \tag{279}$$

を**磁化**という．

[*22] 後述のように物質の磁気的性質, 即ち磁性は本質的に量子力学的現象である．よって磁性を記述するのに不可欠な磁気双極子モーメントだが, 今回のシケプリの取り扱い範囲を超えてしまうため $\boldsymbol{m}$ の具体的な表式を書き下すことはしない．決して面倒くさいからではない．

磁気モーメントの平均は磁場に比例するので, 磁化は磁場 $\boldsymbol{H}$ を用いて

$$\boldsymbol{M} = \mu_0 \chi \boldsymbol{H} \tag{280}$$

と書ける．このような性質を**常磁性**といい, この χ を**磁気感受率**という．

微視的な磁気双極子の相互作用の強い物質は外部から磁場をかけなくても磁気モーメントの方向が揃い, 磁化が生じることがある. このことを**自発磁化**といい, このような性質を持つ磁性体を**強磁性体**という．また, このような分極により発生する磁場を分極磁場という.

誘電体の時と同じように全体の磁場 $\boldsymbol{H}$ は外部磁場 $\boldsymbol{H}_e$ と分極磁場 $\boldsymbol{H}_M$ の和で与えられる．また, 分極磁場におけるガウスの法則も同様に

$$\mu_0 \int \boldsymbol{H}_M \cdot \boldsymbol{n} dS = -\int \mathrm{div} \boldsymbol{M} dV \tag{281}$$

と表せるから, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_e + \boldsymbol{H}_M$ より

$$\begin{aligned} \mu_0 \int \boldsymbol{H}_e \cdot \boldsymbol{n} dS + \mu_0 \int \boldsymbol{H}_M \cdot \boldsymbol{n} dS &= \int \mathrm{div}(\mu_0 \boldsymbol{H}_e) dV - \int \mathrm{div} \boldsymbol{M} dV \\ \int (\mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{n} dS = 0 \quad & (\mathrm{div}(\mu_0 \boldsymbol{H}_e) = 0 \text{ より}) \end{aligned} \tag{282}$$

ここで磁束密度を

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} \tag{283}$$

と定義すると上式は

$$\int \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0 \tag{284}$$

となり, この微文型は

$$\mathrm{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{285}$$

という見慣れた形になる．また, $\boldsymbol{M}$ を $\boldsymbol{H}$ を用いて表すと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \chi \boldsymbol{H} \\ &= \mu_0 (1 + \chi) \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \end{aligned} \tag{286}$$

ここで

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi) \tag{287}$$

とした．この μ を磁性体の**透磁率**という．つまり物質中では磁束密度は真空中に比べて $\mu_0 \to \mu$ への変更を受けているとみなすことができる.

微視的には磁気双極子は熱運動により様々な方向を向いている. しかし温度を下げていくとこの熱運動は弱まり, 磁気双極子間の相互作用がこれに勝り, 磁気モーメントの方向が揃うようになる．つまりある温度を境にして物質には自発磁化が生じ強磁性相が出現する．この相転移を起こす温度を**キュリー温度**という[*23].

ファラデーの電磁誘導の法則で磁束の変化が電場を誘導したように, 電束の変化が磁場を誘導する．ただしアンペールの法則より, 電流もまた磁場を発生させる.

[*23] 誘電体に関しても, ある温度を境にして相転移が起きて強誘電相が出現することがある．このときの温度もまたキュリー温度という

任意の閉曲面 C について, これを貫く電束を Ψ とし, この曲面を流れる電流を I とするとき, この閉曲線に沿ってこのとき発生した磁場を積分したものは, 線素ベクトルを $d\boldsymbol{l}$ とすると

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{d\Psi}{dt} + I \tag{288}$$

となる. 電束密度 $\boldsymbol{D}$, 電流密度 $\boldsymbol{j}$ を用いて右辺を面積分に直す.

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \right) \cdot \boldsymbol{n} dS$$

$$\int \mathrm{rot} \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \right) \cdot \boldsymbol{n} dS$$

$$\mathrm{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \tag{289}$$

となる. これが物質中における効果も考慮したアンペール・マクスウェルの法則となる.

C.3 超伝導

C.3.1 超伝導体

物質に外部から磁場をかけると, 電磁誘導によりこの磁束の変化を打ち消す向きに誘導電流が流れる. これによって磁気モーメントが発生するが, これは外部磁場とは逆向きになる. このような磁気分極の性質を**反磁性**という. このことからあらゆる物質には反磁性が出現するのだが, 一般的にはスピンなどによる常磁性の影響の方が強く, 実質的に反磁性が見られないことも多い.

金属の中には温度を下げていくと急に電気抵抗が 0 になるものが存在する. このような現象を**超伝導**という. この状態では電流を流しても抵抗がないため全く減衰しない. このような電流を**永久電流**という. というのも, 金属格子中の電子は**クーパー対**と呼ばれる 2 個の電子からなる電子対を形成し, 熱運動によるエネルギーがこの結合エネルギー以下であれば, クーパー対から格子へのエネルギーの移動は起こらず, 結果として電流が流れ続けるということになる.

超伝導は磁気的に見ても特殊な性質を示す.

超伝導状態ではその中の磁束密度は常に 0 となる. つまり

$$\boldsymbol{B} = 0 \tag{290}$$

が常に成立する. これを**マイスナー効果**という. このとき外部から磁場 $\boldsymbol{H}$ を作用させると, 磁化が

$$\boldsymbol{M} = -\mu_0 \boldsymbol{H} \tag{291}$$

のようになり $\boldsymbol{B} = 0$ を維持しようとする. このとき磁気感受率は $\chi = -1$ となる. このように反磁性を示す磁化が外部磁場を打ち消すので, この性質を**完全反磁性**という. なお, 磁場をかけた場合は電磁誘導により電流が発生するが, これは超伝導体の表面のみに流れる.

しかし, 外部磁場を強くしていくと, やがて超伝導状態が壊れて常伝導状態へとなる．この超伝導相から常伝導相へ相転移するときの磁場 H_C を**臨界磁場**という．

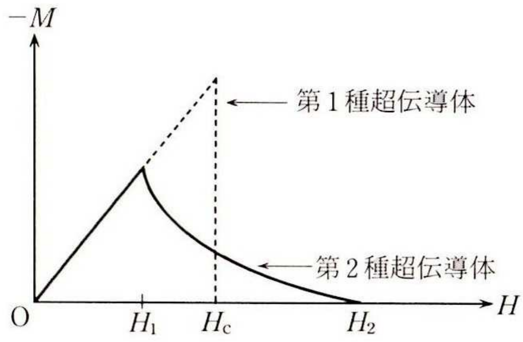

図 2　第 1 種超伝導体, 第 2 種超伝導体

不純物もなく結晶構造も均一であるような物質では図のように H_C で超伝導相から相転移を起こす．このような超伝導体を**第 1 種超伝導体**という．

一方, 不純物が混じっていたり, 結晶構造に不均一性があったりすると, 図の実線部のような変化をする．このような超伝導体を**第 2 種超伝導体**という．これは, H_C よりも小さな磁場 H_1 で完全反磁性ではなくなってしまうが, それでも電気的には超伝導の性質を示している．この H_1 を**下部臨界磁場**という．磁場を大きくしていくと, やがて H_C よりもはるかに大きい磁場 H_2 のときに超伝導状態ではなくなる. この H_2 を**上部臨界磁場**という.

$H_1 < H < H_2$ のときは物質にいくらか磁場は侵入してくるものの, 電気的には超伝導を保っていられる. これは物質中ではある部分は超伝導状態だが, 別の部分では常伝導状態という混合状態が実現するからである.

H_2 の大きい物質ほど超伝導状態がよく保たれるという事で実用上第 2 種超伝導体の方が重要である.

C.3.2　ロンドン理論

古典的な電子の運動方程式は, 電子の質量を m とすると

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\boldsymbol{E} \tag{292}$$

なので, これを解くと (初速度は 0 とする)

$$\boldsymbol{v} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}t \tag{293}$$

単位体積あたりの電子の個数を n とすると, 電流密度は以下のように表せる.

$$\boldsymbol{j} = en\boldsymbol{v} = \frac{e^2n}{m}\boldsymbol{E}t$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \frac{e^2n}{m}\boldsymbol{E} \tag{294}$$

この式 (294) を**ロンドン方程式**という[*24] .

ロンドン方程式の両辺に rot を取り, マクスウェル方程式を用いて変形すると

$$\mathrm{rot}\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \frac{e^2n}{m}\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{e^2n}{m}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{j} = -\frac{e^2n}{m}\boldsymbol{B} \tag{295}$$

$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j}$ (変位電流はないとする) の両辺 rot をとると

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\mathrm{rot}\boldsymbol{j}$$

[*24] ロンドンは人名. イギリスではない.

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 e^2 n}{m}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\lambda^2}\boldsymbol{B} \tag{296}$$

ここで

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 e^2 n}} \tag{297}$$

とした．

簡単のため 1 次元の場合は

$$\frac{\partial^2 B(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda}B(x) \tag{298}$$

これを解くと

$$B(x) = B_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \tag{299}$$

となる．B_0 は加えている微速密度の表面における値である．この式は超伝導体に対して磁束密度を加えると，実はある程度これが侵入してくることを意味している．この式では $x = \lambda$ 程度の距離で磁束密度の値がその表面における値の $1/e$ 程度になっている．この距離 λ を**侵入距離**という．

この磁束密度が侵入してくることは超伝導電流が流れる部分がある程度厚みを持っていることに起因する．電流密度が有限であることから，超伝導体の表面を流れる電流は必ず厚みを持っていなくてはならない．すると完全反磁性により打ち消される磁束密度は電流の流れている領域中で 0 になるから，表面で急激に 0 になることはなく，この電流の流れている深さで 0 になる．このことから磁束密度は実際は超伝導体の表面からわずかに侵入できることになる．

しかし，ロンドンの理論では実験事実を完璧に説明することは出来なかった．というのも超伝導電流を起こすクーパー対は異なるスピンを持つ 2 個の電子がより低いエネルギー状態を作るために電子対を形成したものだからである．つまり，超伝導現象，さらには反磁性そのものが量子力学的現象であり，古典論的仮定から出発しているロンドン理論の限界がここにある．

これに代わるものとして **BCS 理論**が超伝導現象をうまく説明している．今回はこれ以上踏み込むことはしないが・・・．

参考文献

[1] 横山順一 『講談社基礎物理学シリーズ 4 電磁気学』 (講談社)
[2] 広江克彦 『趣味で物理学』 (理工図書)
[3] 牟田泰三 『現代物理学叢書 電磁力学』 (岩波書店)
[4] 中山正敏 『岩波基礎物理学シリーズ 4 物質の電磁気学』 (岩波書店)
[5] 一石賢 『道具としての物理数学』 (日本実業出版社)
[6] ランダウ, リフシッツ 『場の古典論 (原書第 6 版)』 (東京図書)
[7] 須藤靖 『解析力学・量子論』 (東京大学出版会)
[8] 佐藤勝彦 『岩波基礎物理シリーズ 9 相対性理論』 (岩波書店)
[9] 岡真 『新物理学シリーズ 39 電磁場の古典論』 (培風館)
[10] A.C. ローズ-インネス , E.H. ロディリック 『超電導入門』 (産業図書)

おしまい

・・・・・前作よりも内容も量もパワーアップしております
ここまで読んでくださってありがとうございました