2010 年度夏学期 数理科学 I 期末試験解答（担当:高山茂晴）

問題 1. Lagrange の未定乗数法を必ず用いて以下の問に答えよ.
Vを正定数とする.体積がVの直方体の内,その表面積が最小となるものは何か?

(解) 直方体の 3 辺の長さをx, y, zとすると,$xyz = V$が成り立つ.このとき,問題は

「条件$\varphi(x,y,z) = xyz - V = 0$ の下で,関数$f(x,y,z) = 2(xy + yz + zx)$を最小にする点$(x,y,z)$を求めよ」

と言い換えることができる.
$^\forall M > 0$をとる.このとき$^\exists a > 0$ s.t. $x \geq a \vee y \geq a \vee z \geq a \Longrightarrow f(x,y,z) > M$が成り立つ.実際,たとえば

$$f(x,y,z) = 2(xy + yz + zx) > 2x(y+z) \geq 2x \cdot 2\sqrt{yz} = 4\sqrt{Vx}$$

であるから,$a = \frac{M^2}{16V}$とすれば$x \geq a$のとき$f(x,y,z) > M$となる.$y \geq a$あるいは$z \geq a$の場合も同様である.以下$M = 6V^{\frac{2}{3}}$とし,$a = \frac{M^2}{16V} = \frac{9}{4}V^{\frac{1}{3}}$としよう.

閉領域$D = \{(x,y,z) | 0 \leq x,y,z \leq a\}$とする.Lagrange の未定乗数法より,$D$上の$f$の最小値の候補は次のいずれかである:

<u>Dの境界と曲線$\varphi = 0$との交わり</u>

境界の内,$x = 0$などとなる境界は$\varphi = 0$と交わらない.よって$x = a$などの状況を考えればよいが,このとき上の議論より$f(x,y,z) > 6V^{\frac{2}{3}}$.

<u>φの特異点</u>

このとき$\varphi = xyz - V, \varphi_x = yz, \varphi_y = zx, \varphi_z = xy$が全て$0$となるはずだが,このような$(x,y,z)$は存在しない.

<u>$F(x,y,z;\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z)$として,$F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0$を満たす点</u>

$F(x,y,z;\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) = 2(xy + yz + zx) + \lambda(xyz - V)$であるから

$$F_x = 2(y+z) + \lambda yz = 0,$$
$$F_y = 2(z+x) + \lambda zx = 0,$$
$$F_z = 2(x+y) + \lambda xy = 0,$$
$$F_\lambda = xyz - V = 0$$
$$\therefore (x,y,z;\lambda) = \left(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}}; -4V^{-\frac{1}{3}}\right).$$

このとき$f(x,y,z) = 6V^{\frac{2}{3}}$.
以上より,fは$x = y = z = V^{\frac{1}{3}}$のとき最小値$6V^{\frac{2}{3}}$をとる.つまり体積が$V$の直方体の内,その表面積を最小にするものは,1 辺の長さが$V^{\frac{1}{3}}$の立方体である.

問題 2. 次の式で定められるxの陰関数yの極値を,陰関数を直接求めることなしに,求めよ.
$(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$,ここで$a,b$は正定数で$a^2>2b^2$を満たす.

(解) $f(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2x^2-b^2y^2$とおくと

$$f_x=4x(x^2+y^2)-2a^2x, f_y=4y(x^2+y^2)-2b^2y, f_{xx}=12x^2+4y^2-2a^2.$$

陰関数定理より,$f_y\neq 0$を満たす点の近傍で$y=y(x)$と書けて

$$y'=-\frac{f_x}{f_y} \tag{2.1}$$

が成り立つ.yが極値をとる点においては$y'=0$であるから,このとき$f_x=0$.つまり$f=f_x=0$かつ$f_y\neq 0$となる点を求めればよい.$f_x=0$より$x=0$または$x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$となる.

<u>$x=0$のとき</u>

$f(0,y)=y^4-b^2y^2=0$かつ$f_y(0,y)=4y^3-2b^2y\neq 0$より$y=\pm b$.

<u>$x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$のとき</u>

$x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$かつ$(x^2+y^2)^2-a^2x^2-b^2y^2=0$を解くと,$x_0=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{a^2-b^2}}$, $y_0=\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}$として

$$(x,y)=(\pm x_0,\pm y_0)\left[\text{複号任意}\right].$$

また,このとき$f_y=4y\cdot\frac{a^2}{2}-2b^2y=2y(a^2-b^2)\neq 0$である.

さて,これらの点におけるyの 2 階導関数の符号を調べよう.(2.1)式より次が成り立つ:

$$y''=-\frac{(f_{xx}+f_{xy}y')f_y-f_x(f_{yx}+f_{yy}y')}{{f_y}^2}=-\frac{f_{xx}}{f_y}\,(\because y'=f_x=0).$$

ここで

$$-\frac{f_{xx}(0,b)}{f_y(0,b)}=\frac{a^2-2b^2}{b^3}>0, -\frac{f_{xx}(0,-b)}{f_y(0,-b)}=-\frac{a^2-2b^2}{b^3}<0,$$

$$-\frac{f_{xx}(\pm x_0,y_0)}{f_y(\pm x_0,y_0)}=-\frac{2(a^2-2b^2)}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}<0, -\frac{f_{xx}(\pm x_0,-y_0)}{f_y(\pm x_0,-y_0)}=\frac{2(a^2-2b^2)}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}>0$$

$$\therefore\begin{cases}\text{極大値:}\quad -b(x=0), \dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}\left(x=\pm\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{a^2-2b^2}{a^2-b^2}}\right),\\[2ex] \text{極小値:}\quad b(x=0), -\dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}\left(x=\pm\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{a^2-2b^2}{a^2-b^2}}\right).\end{cases}$$

問題 3. $f(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}, g(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$とおく.

(1) 円周$C_\varepsilon=\{x^2+y^2=\varepsilon^2\}$に対して,線積分$\int_{C_\varepsilon} fdx+gdy$の値を求めよ.ただし$C_\varepsilon$の向きは反時計回りとする.

(2) 曲線$C=\{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\}$が原点$O$を通らないとき,線積分$\int_C fdx+gdy$の値を求めよ.ただし$C$の向きは反時計回りとする.

(解)

(1) $C_\varepsilon=\{(\varepsilon\cos t,\varepsilon\sin t)|t\in[0,2\pi]\}$と書けるから

$$\int_{C_\varepsilon} fdx+gdy=\int_0^{2\pi}\left(f(\varepsilon\cos t,\varepsilon\sin t)\frac{dx}{dt}+g(\varepsilon\cos t,\varepsilon\sin t)\frac{dy}{dt}\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-\varepsilon\sin t}{\varepsilon^2}\cdot(-\varepsilon\sin t)+\frac{\varepsilon\cos t}{\varepsilon^2}\cdot\varepsilon\cos t\right)dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

(2) <u>原点OがCの外側にあるとき</u>

閉領域$D=\{(x-a)^2+(y-b)^2\leq R^2\}$とし,その.$D$の各点で$f_y(x,y)=g_x(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$であるから,Green の定理より

$$\int_C fdx+gdy=\iint_D\left(-f_y+g_x\right)dxdy=0.$$

<u>原点OがCの内側にあるとき</u>

閉領域$D=\{(x-a)^2+(y-b)^2\leq R^2\}$とする.また,$\varepsilon$を十分小さくとって円板$D_\varepsilon=\{x^2+y^2<\varepsilon^2\}$が$D$に含まれるようにする.このとき閉領域$D\setminus D_\varepsilon$(境界の正方向は,$D$の内部を左手に見て進む向きとする)の各点で$f_y(x,y)=g_x(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$であるから,Green の定理より

$$\int_C fdx+gdy=\int_{C_\varepsilon} fdx+gdy+\int_{C-C_\varepsilon} fdx+gdy=2\pi+\iint_{D\setminus D_\varepsilon}\left(-f_y+g_x\right)dxdy=2\pi.$$

問題 4. 以下の場合に Stokes の定理を検証する.つまり Stokes の定理を用いてはならない.
$\vec{F}=(-y^3,-z^3,-x^3)$を$\mathbb{R}^3$のベクトル場,$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=1,z\geq 0\}$とする.

(1) Sの境界∂Sに適当な向きを指定し,$\vec{F}$の∂Sに沿った線積分の値を求めよ.

(2) Sのパラメータ表示$P(u,v)$と単位法ベクトル場$\vec{n}$を一つ与え,それに関する$\vec{F}$の回転のS上の面積分の値を求めよ.

(解)

(1) ∂Sはxy平面上の単位円であり,その向きを反時計回りとすると

$$\partial S=\{\vec{\gamma}(t)=(\cos t,\sin t,0)|t\in[0,2\pi]\}$$

と書ける.このとき接ベクトルは$\overrightarrow{\gamma'}(t)=(-\sin t\,,\cos t\,,0)$であるから

$$\int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{\gamma}=\int_0^{2\pi}\vec{F}(\cos t\,,\sin t\,,0)\cdot\overrightarrow{\gamma'}(t)dt=\int_0^{2\pi}(-\sin^3 t\quad 0\quad -\cos^3 t)\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^4 t\,dt=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2dt=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 2t)dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3+\cos 4t}{2}\right)dt=\frac{3}{4}\pi.$$

(2) Sのパラメータ表示を

$$S=\left\{\vec{P}(u,v)=\left(u\cos v\,,u\sin v\,,\sqrt{1-u^2}\right)\middle|(u,v)\in[0,1]\times[0,2\pi]\right\}$$

とする.このとき

$$\overrightarrow{P_u}=\left(\cos v\,,\sin v\,,-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right),\overrightarrow{P_v}=(-u\sin v\,,u\cos v\,,0),$$

$$\overrightarrow{P_u}\times\overrightarrow{P_v}=\left(\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\cos v\,,\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\sin v\,,u\right).$$

よって,$u\neq 0$のとき

$$\vec{n}=\frac{\overrightarrow{P_u}\times\overrightarrow{P_v}}{\left|\overrightarrow{P_u}\times\overrightarrow{P_v}\right|}=\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}\left(\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\cos v\,,\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\sin v\,,u\right)=\left(u\cos v\,,u\sin v\,,\sqrt{1-u^2}\right).$$

さて,$\vec{F}$の回転は

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}=3(z^2,x^2,y^2)$$

であるから,そのS上の面積分は

$$\iint_S\mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_0^1\int_0^{2\pi}\mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\left(\overrightarrow{P_u}\times\overrightarrow{P_v}\right)dv\,du$$

$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}3(1-u^2\quad u^2\cos^2 v\quad u^2\sin^2 v)\begin{pmatrix}\dfrac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\cos v\\ \dfrac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\sin v\\ u\end{pmatrix}dv\,du$$

$$=3\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(u^2\sqrt{1-u^2}\cos v+\frac{u^4}{\sqrt{1-u^2}}\cos^2 v\sin v+u^3\sin^2 v\right)dv\,du$$

$$=3\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(u^2\sqrt{1-u^2}\cos v-\frac{u^4}{3\sqrt{1-u^2}}(\cos^3 v)'+u^3\cdot\frac{1-\cos 2v}{2}\right)dv\,du$$

$$=3\pi\int_0^1u^3du=\frac{3}{4}\pi.$$

…間違いなどあったら,お知らせください m(_ _)m

2010 年 7 月 31 日　　髙橋　一史