# 2010 年度数学2期末試験解答例

## [1]

行列の基本変形を用いるとかなり計算が楽になります。一応まとめておくと、

| |
|---|
| 1.行 or 列を交換すると行列式は(-1)倍になる |
| 2.いずれかの行 or 列を$c(\in \mathbb{R})$倍すると行列式も c 倍される |
| 3.行 or 列に関する加算を行っても行列式は不変 |

の 3 点でした。以下では L1～L3、R1～R3 という表記(ノート等参照)を用いて簡略化します。

$$\begin{vmatrix} a & b & d & -b \\ c & d & -c & a \\ d & -b & a & b \\ -c & a & c & d \end{vmatrix} = (a+d)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & d & -b \\ 0 & 1 & -c & a \\ 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{vmatrix} \left(\because R3(1.3;-1), R3(2.4;-1)\right)$$

$$= (a+d)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & d & -b \\ 0 & 1 & -c & a \\ 0 & 0 & a-d & 2b \\ 0 & 0 & 2c & d-a \end{vmatrix} \left(\because L3(1.3;-1), L3(2.4;-1)\right)$$

$$= (\mathrm{a}+\mathrm{d})^2 \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -c & a \\ 0 & a-d & 2b \\ 0 & 2c & d-a \end{vmatrix} \left(\because \text{余因子を用いた行列の展開公式}\right)$$

$$= (\mathrm{a}+\mathrm{d})^2 \times 1 \times 1 \times \begin{vmatrix} a-d & 2b \\ 2c & d-a \end{vmatrix} \left(\because \text{同上}\right)$$

$$= -(\mathrm{a}+\mathrm{d})^2\{(a-d)^2+4bc\} \quad \blacksquare$$

一応答えは出たのでそれが明らかにおかしいものではないことを確かめておきましょう。<u>行列のいずれか 2 つの行同士 or 列同士が完全に一致すれば、行列式は 0 になる</u>(もっというと片方がもう一方の定数倍ならば 0 になります)という知識を使い、たとえば 1 行目と 3 行目に注目すると「$a=-d$」あるいは「$a=d$かつ$b=0$」のとき、行列式が 0 となることがわかります。これが出た答えと矛盾しないことは各自確かめておいてください。

## [2]

⑴ $A^m = O$より、$\det(A^m) = (detA)^m = 0 \quad \therefore detA = 0$

よって特性方程式$\Phi_{A(x)} = \det(xE-A) = 0$ は $x=0$ を解に持つ。

また、固有値を α, 固有ベクトルを$\boldsymbol{v}(\neq \boldsymbol{0})$とすると、$A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}$より、$\boldsymbol{0} = A^m\boldsymbol{v} = \alpha^m\boldsymbol{v}$

$$\therefore \alpha = 0$$

以上より、固有値が０のみであることが示せた。

（2）$\boldsymbol{n}$次正方行列$A$が対角化できるためには、$A$が$\boldsymbol{n}$個の線形独立な固有ベクトル $\boldsymbol{v_1} \dots \boldsymbol{v_n}$を持つことが必要。ここで(1)より、$A\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0} (i = 1 \dots n)$が成り立つ。
また、任意のベクトル$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$は線形独立な$\boldsymbol{n}$個のベクトルの線形結合$\sum_i a_i \boldsymbol{v}_i$として表せるので、

$$A\boldsymbol{x} = A \sum_i a_i \boldsymbol{v_i} = \sum_i a_i \cdot A\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}$$

が任意の$\boldsymbol{n}$次ベクトルに対して成り立つ。よって、$A$は零行列である。■

# [3]

(1)$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$とおくと、$A^T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$が成り立つような$\boldsymbol{v}$を求めればよい。拡大係数行列 $(A^T|\boldsymbol{0}) = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -5 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$を(1,3 行目を入れ替える等の小技を駆使しつつ)頑張って変形すると、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$にまですっきりできます。

よって、$a + 2c + d = b - c - 2d = 0$より、

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha - \beta \\ \alpha + 2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって$V_1$は２次元であり、基底の例は$\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ■

また、4 次正方行列$A$を、列ベクトルを４つ横に並べたものとみなすと、$A = (\boldsymbol{v_1}\ \boldsymbol{v_2}\ \boldsymbol{v_3}\ \boldsymbol{v_4})$と表せる。この時$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \mathrm{p}_3 \\ \mathrm{p}_4 \end{pmatrix}$とおくと$A\boldsymbol{p} = \sum_i p_i \boldsymbol{v}_i$と表せるので、$Im(A)$は$\boldsymbol{v_1} \dots \boldsymbol{v_4}$の線形結合で表せるベクトルの集合に等しい。ここで$-3\boldsymbol{v}_3 - 2\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, 2\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4 =$

$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1-6\boldsymbol{v}_3-5\boldsymbol{v}_4=\boldsymbol{v}_2+5\boldsymbol{v}_3+4\boldsymbol{v}_4=\boldsymbol{0}$

より、$V_2=Im(A)=span(\boldsymbol{v_1},\dots\boldsymbol{v_4})=span\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$である。

以上より、$V_2$の次元は 2、基底は$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$である。 ■

（補足）

途中の線形結合のごちゃごちゃした計算はどこからでてきたんだよと思った方もいるかもしれませんが、前半部の拡大係数行列を変形していく過程を転置して途中計算を大幅に略しただけのことです。もちろん、線形関係の非自明解が二つある、すなわち次元が２であることを示した後、$\boldsymbol{v_1}\dots\boldsymbol{v_4}$から好きな２つをもってきて基底としても全く問題ありません。

⑵　線形部分空間に関する次元公式$dimV+dimW=dim(V+W)+dim(V\cap W)$より、

$$dimV_1^{\perp}=4-dimV_1=2$$

よって、求めるべきものは$V_1$の２つの基底の両方と直交する２本の線形独立なベクトルだとわかります。ただ筆者は完全にパトラッシュ僕もう疲れたよ状態に陥っているので求め方はお任せします。何も思いつかないあなたは適当にベクトルをおいて内積が０になる式を二つ立てればいいと思うよ、うん。とはいえ勘の鋭い(あるいはめんどくさがりな)あなたならそろそろさっき求めた$V_2$と内積をとるといずれも 0 になることに気付く頃でしょう。というわけで、結論から言うと$V_1^{\perp}$の基底の例は$V_2$と同じ、

$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$です。

⑶　~~いい加減飽きてきたので~~解けなくてもさほど支障はない問題だと思われるのでざっくりした説明でいきます。$Im(A)=\left(Ker(A^T)\right)^{\perp}$であるとしれっと予想を立てて、以下証明。

示すことは次の二つ。

Ⅰ $Im(A)$、$Ker(A^T)$にそれぞれ含まれる任意の２ベクトルをとると内積が０になる。

Ⅱ $Im(A)$、$Ker(A^T)$の和空間が$\mathbb{R}^n$に一致する。（$\Leftrightarrow \dim\left(Im(A)+Ker(A^T)\right)=n$）

Ⅰについて

任意のベクトル$\boldsymbol{x} \in Im(A)$、$\boldsymbol{y} \in Ker(A^T)$に関して、$A^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$が常になりたち、またあるベクトル$\boldsymbol{v}$が存在し、$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}$を満たす。

このとき、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{v})^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}^T(A^T\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{0} = 0$となるので、内積は常に0となる。(証明終)

IIについて

$dim\left(Im(A) + Ker(A^T)\right) = \dim\left(Im(A)\right) + \dim\left(Ker(A^T)\right) - \dim(Im(A) \cap Ker(A^T))$

ここで、$Im(A) \cap Ker(A^T) = \{\boldsymbol{0}\}(\because \boldsymbol{x} \in \{Im(A) \cap Ker(A^T)\} \Rightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 = 0)$より、$\dim\left(Im(A) \cap Ker(A^T)\right) = 0$である。

また、$\dim\left(Im(A)\right) = rank\ A = rank\ A^T = \dim\left(Im(A^T)\right)$

したがって、$\dim(Im(A) + Ker(A^T)) = \dim\left(Im(A^T)\right) + \dim\left(Ker(A^T)\right) = n$ (証明終)

以上I, IIより、$Im(A) = \left(Ker(A^T)\right)^{\perp}$が示せた。 ■

(補足)

夏学期の授業で扱いましたが rank とは列や行の基本変形を用いて行列を標準形$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & O \\ & & 1 & \\ & O & & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$に変形したときに続く 1 の個数です。元の行列を転置しても行変形を列変形に、列変形を行変形におきかえて考えればたどり着く標準形は同じなので、$rank\ A = rank\ A^T$が言えることがわかります。

# [4]

マルコフ過程なので略。

作成者:T.Togo

*For Dear Lovers & Tears & Yφu*(今まで愛してくれた全ての貴方に)