２０１１年度数学 IA（斎藤 義久） 冬学期期末試験問題　解答

[1] 次の関数の原始関数を求めよ．

(1)$\sqrt{2x+1}$　(2)$\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$

[解]C は積分定数とする．

(1)$\dfrac{(2x+1)^{3/2}}{3}+C.$

(2)$\sqrt{x}=t$ とおく．$x=t^2$から $dx=2tdt.$

$$\begin{aligned}\int\frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dx &= \int\frac{1-t}{t^2+t}\cdot 2tdt\\ &= 2\int\frac{1-t}{t+1}dt\\ &= 2\int\left(-1+\frac{2}{t+1}\right)dt\\ &= -2t+4\log(t+1)+C\\ &= -2\sqrt{x}+4\log(\sqrt{x}+1)+C.\end{aligned}$$

[2]D と $f(x,y)$ を以下のように与えるとき，重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ．

(1)$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le x\le 1, 0\le y\le 2\}, f(x,y)=\dfrac{x^3}{1+y^2}$

(2)$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le \pi, 0\le y\le \sin x\}, f(x,y)=x^2-y^2$

[解]

(1)

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \int_0^2\left(\int_{-1}^1\frac{x^3}{1+y^2}dx\right)dy\\ &= \int_0^2\frac{1}{1+y^2}\left(\int_{-1}^1 x^3dx\right)dy\\ &= \int_0^2 0dy\\ &= 0.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x}(x^2-y^2)dy\right)dx \\
&= \int_0^\pi \left(x^2\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)dx \\
&= \int_0^\pi \left(x^2\sin x + \frac{1}{3}(1-\cos^2 x)(\cos x)'\right)dx \\
&= \left[-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + \frac{1}{3}(\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x)\right]_0^\pi \\
&= \pi^2 - \frac{40}{9}.
\end{aligned}$$

[4]『２重積分の変数変換公式』とはどのようあものか，正確に述べよ．

[解] 教科書 P.202 定理 5.15 参照　以下転載

$\Phi : D \to E$ が 1 対 1 写像で，J_Φが D 上で 0 にならないとする．$f(x,y)$ を E 上の連続関数とするとき

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_D f(x(u,v),y(u,v))\left|J_\Phi\right|dudv.$$

[5] 2 重積分の変数変換公式を用いて，$\mathbb{R}^2$内の 4 つの曲線

$$x^2 = ay, x^2 = by, y^2 = cx, y^2 = dx \ (0 < a < b, 0 < c < d)$$

で囲まれる図形の面積を求めよ．

[解]求める図形は第一象限にあるので，$x > 0, y > 0$ としてよい．
まず，$x^2 = uy, y^2 = vx$ となるような写像 $\Phi(u,v) = (x,y)$ を考える．

$$\begin{cases} x^2 = uy \\ y^2 = vx \end{cases}$$

を解くと，

$$x = u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}, y = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}$$

また，$ay < x^2 < by, cx < y^2 < dx$ より，

$$\begin{aligned}
ay < uy < by &\Longleftrightarrow a < u < b \\
cx < vx < dx &\Longleftrightarrow c < v < d
\end{aligned}$$

ここで，写像Φのヤコビアンを計算すると，

$$J_\Phi = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

したがって，求める図形の面積は

$$
\begin{aligned}
\iint_E 1 dxdy &= \iint_D \frac{1}{3} dudv \\
&= \frac{1}{3}\int_a^b \left(\int_c^d dv\right) du \\
&= \frac{1}{3}(b-a)(d-c).
\end{aligned}
$$

[6]$a > 0$ とする．3 次元空間内で，半径 a の球と半径 $a/2$ の円柱の共通部分の体積を求めよ．ただし，球の中心は円柱の表面上にあるとする．

[解] 第 12 回演習（1 月 15 日）プリント参照　以下転載（一部変更した部分あり）

座標軸を適当に選んで

$$
\begin{aligned}
\text{球} &: x^2+y^2+z^2 \le a^2, \\
\text{円柱} &: x^2+y^2 \le ax \Longleftrightarrow \left((x-\frac{a}{2})^2+y^2 \le \frac{a^2}{4}\right)
\end{aligned}
$$

としてよい．共通部分の図形を X，その体積を V とすると，

$$V = \iiint_X 1 dxdydz$$

である．まず，最初に z について積分し，後から x, y について重積分するとすると，

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_{x^2+y^2\le ax} \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} 1dz\right) dxdy \\
&= 2\iint_{x^2+y^2\le ax} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dxdy
\end{aligned}
$$

対称性から，$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge 0, x^2+y^2 \le ax\}$ とすれば，

$$V = 4\iint_E \sqrt{a^2-x^2-y^2} dxdy$$

となる．ここで，2 変数の極座標変換

$$\Phi : (r,\theta) \longmapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

を考えよう．

$$
\begin{aligned}
D :&= \{(r,\theta) \mid r\sin\theta \ge 0, r^2 \le ar\cos\theta\} \\
&= \{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le r \le a\cos\theta\}
\end{aligned}
$$

とすると，

$$
\begin{aligned}
V &= 4\iint_E \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy \\
&= 4\iint_D \sqrt{a^2-r^2}\ rdrd\theta \qquad (\because J_\Phi = r) \\
&= 4\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}rdr\right)d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/2}\left(\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^{a\cos\theta}\right)d\theta \\
&= \frac{4}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)d\theta \\
&= \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}+\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)(\cos\theta)'d\theta\right) \\
&= \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}+\left[\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2}\right) \\
&= \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right).
\end{aligned}
$$

[7] 次の等式を示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

注）ガンマ関数とベータ関数の関係式

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ (p,q>0)$$

を既知としてはならない.

[解] 教科書 P.212 例 5.16 参照

この被積分関数は偶関数だから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

である．ここで，

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

とおく.

$$W = \{(x,y) \mid x>0, y>0\}$$

とおき，広義積分

$$\iint_W e^{-x^2-y^2}dxdy \tag{1}$$

を考える．

$$W_n = \left\{(x,y) \mid \frac{1}{n} < x < n, \frac{1}{n} < y < n\right\}$$

とおくと，$\{W_n\}$ は W に収束する増大列で

$$\begin{aligned}\iint_{\bar{W_n}} e^{-x^2-y^2}dxdy &= \int_{1/n}^{n} e^{-x^2}dx \int_{1/n}^{n} e^{-y^2}dy \\ &= I(n)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

である．($\bar{W_n}$は，W_nにその境界を加えた有界閉領域を表す)
ただし，

$$I(n) = \int_{1/n}^{n} e^{-x^2}dx$$

とする．
(2) の右辺は $\longrightarrow I^2 (n \to \infty)$ ゆえ，広義積分 (1) は収束して，その値は I^2に等しい．
一方，

$$U_n = \left\{(x,y) \mid x > 0, y > 0, \frac{1}{n} < \sqrt{x^2+y^2} < n\right\}$$

とおけば，$\{U_n\}$ も W に収束する増大列である．

$$F_n = \left\{(r,\theta) \mid \frac{1}{n} \leq r \leq n, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\},$$
$$\Phi : F_n \to \bar{U_n},\ \Phi(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned}\iint_{\bar{U_n}} e^{-x^2-y^2} &= \iint_{F_n} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{1/n}^{n} e^{-r^2} r dr \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{1/n^2}^{n^2} e^{-t}\frac{dt}{2} \quad (t = r^2, dt = 2rdr) \\ &= \frac{\pi}{4}(e^{-\frac{1}{n^2}} - e^{-n^2}) \\ &\longrightarrow \frac{\pi}{4} \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

したがって，

$$I^2 = \frac{\pi}{4}$$

I は正の数なので

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

以上より

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= 2I \\ &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$