微分積分学Ａセメスター試験対策プリント

【解説編】

制作　ks
協力　om tt

目次

§1 二変数関数の偏微分

第一問　定義に従った偏微分
$\mathbb{R}^2$上の二変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

について以下の問いに答えよ。
(1) $f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$を計算せよ。
(2) fは(0,0)で連続か。

ポイント
(1) f_{xy}とf_{yx}が一致しない一例です。普通の偏微分の問題は多分みんなできるので、定義の従って偏微分する問題にしました。
(2) S セメスター範囲の確認。ε δ 論法で厳密に示します。

解答
(1)
$(\mathrm{x},\mathrm{y})=(0,0)$において、

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0$$

$(\mathrm{x},\mathrm{y})\neq(0,0)$において、

$$f_x(x,y)=\frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{x^5-x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

よって、

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{m\to0}\frac{f_x(0,m)-f_x(0,0)}{m}=0$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{m\to0}\frac{f_y(n,0)-f_y(0,0)}{n}=1$$

(2)
$\varepsilon>0$を任意に定める。ここで、$\delta=\sqrt{\varepsilon}$とおくと、

$$B_\delta(0,0)=\{(x,y)|x^2+y^2<\delta^2\}$$

を満たす範囲の(x, y)は

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)\ (0 \leq r < \delta, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおける。この時、

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| = r^2|\cos^3\theta\sin\theta|$$
$$< r^2 < \delta^2 < \varepsilon$$

よって、fは(0,0)で連続である。

§2 二変数関数のテイラー展開

第一問　二変数関数のテイラー展開

剰余項を$O\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n\right)$の形にするものとして以下の問いに答えよ。

(1)
$\mathbb{R}^2$上の二変数関数

$$f(x,y)=\sin(x\cos y)$$

を(0,0)の周りでテイラー展開せよ。ただし$n=3$とする。
(2)
$\mathbb{R}^2$上の二変数関数

$$f(x,y)=(x+y)e^{xy}$$

を(1,1)の周りでテイラー展開せよ。ただし$n=4$とする。

ポイント
単純に公式に当てはめるだけです。

解答
(1)

$$f_x=\cos y\cos(x\cos y)$$
$$f_y=(-x\sin y)\cos(x\cos y)$$
$$f_{xx}=-\cos^2 x\sin(x\cos y)$$
$$f_{yy}=(-x^2\sin^2 y)\sin(x\cos y)-(x\cos y)\cos(x\cos y)$$
$$f_{xy}=x^2\sin y\cos y\sin(x\cos y)$$

よって、

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(0,0)+\left(f_x(0,0)x+f_y(0,0)y\right)\\&\quad+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right)+O\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\right)\\&=x-\frac{x^2}{2}+O\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\right)\end{aligned}$$

(2)

$$f_x=(xy+y^2+1)e^{xy}$$
$$f_y=(xy+x^2+1)e^{xy}$$
$$f_{xy}=(y^2x+y^3+y+1)e^{xy}$$
$$f_{yy}=(x^2y+x^3+x+1)e^{xy}$$
$$f_{xy}=(x^2y+xy^2+2x+2y)e^{xy}$$

$$f_{xxx} = (y^3x + y^4 + 2y^2 + 1)e^{xy}$$
$$f_{yyy} = (x^3y + x^4 + 2x^2 + 1)e^{xy}$$
$$f_{xxy} = (x^2y^2 + xy^3 + 3xy + 3y^2 + x + 1)e^{xy}$$
$$f_{yyx} = (x^2y^2 + x^3y + 3xy + 3x^2 + y + 1)e^{xy}$$

よって、

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(1,1) + \left(f_x(1,1)x + f_y(1,1)y\right) \\ + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2f_{xy}(1,1)(x-1)(y-1) + f_{yy}(1,1)(y-1)^2\right) \\ + \frac{1}{6}\left(f_{xxx}(1,1)(x-1)^3 + 3f_{xxy}(1,1)(x-1)^2(y-1) + 3f_{xyy}(1,1)(x \right. \\ \left. - 1)(y-1)^2 + f_{yyy}(1,1)(y-1)^3\right) + O\left(\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}\right)^4\right) \\ = 2e + 3e(x-1) + 3e(y-1) + 2e(x-1)^2 + 3e(x-1)(y-1) + 2e(y-1)^2 \\ + \frac{5}{6}e(x-1)^3 + 5e(x-1)^2(y-1) + 5e(x-1)(y-1)^2 \\ + \frac{5}{6}e(y-1)^3 + O\left(\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}\right)^4\right) \end{aligned}$$

第二問　係数比較

$$f(x,y)=\log(1+2x+y)$$

とする。

$$\frac{\partial f^9}{\partial x^4 \partial y^5}(0,0)$$

を求めよ。

ポイント

そのまま計算しても解けなくはないですが面倒なので、一変数関数のテイラー展開と二変数関数のテイラー展開で係数を比較します。

解答

$$2x+y=t$$

とおくと、これは一変数関数となるので、一変数関数とみなして0の周りでテイラー展開をすると、

$$f(x,y)=(2\mathrm{x}+\mathrm{y})-\frac{1}{2}(2x+y)^2+\frac{1}{3}(2x+y)^3-\cdots+\frac{1}{9}(2x+y)^9$$

$$+\mathrm{O}\left(\sqrt{x^2+y^2}^{10}\right)$$

ここで、x^5y^4の係数を抜き出すと、二項定理より、

$$\frac{1}{9}\binom{9}{4}\times 32$$

また、与関数を二変数関数として(0,0)の周りでテイラー展開すると、x^5y^4の係数は、

$$\frac{1}{9!}\binom{9}{4}\frac{\partial f^9}{\partial x^4 \partial y^5}(0,0)$$

よって、係数を比較して、

$$\frac{\partial f^9}{\partial x^4 \partial y^5}(0,0)=8!\times 32=1920240$$

§3 極値問題

第一問　極値問題

以下の二変数関数$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$の極値を求めよ。

(1)

$$f(x,y) = (x+y^2)e^{-x^2}$$

(2)

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2} - 2x^2 - y^2$$

ポイント

多分上坂教授の授業でみっちりやっているので大丈夫だと思います。

(1) まとめ編の手順に従って、解いていきます。

(2) 基本的には、(1)と同じように解きますが、$DetH$が0になり、公式どおりには判定できない点があります。少し工夫が必要です。

解答

(1)

$$f_x = (1-2x^2-2xy^2)e^{-x^2}$$
$$f_y = 2ye^{-x^2}$$

ここで、$f_x = 0, f_y = 0$となるような(x,y)の組は、

$$(x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

また、ヘッセ行列は、

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (-2x+4x^2+4x^2y^2-4x-2y^2)e^{-x^2} & -4xye^{-x^2} \\ -4xye^{-x^2} & 2e^{-x^2} \end{pmatrix}$$

であり、

$(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$のとき、

$$detH = -4\sqrt{2}e^{-1} < 0$$

なので、極値でない。

$(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$のとき、

$$detH = 4\sqrt{2}e^{-1} > 0$$

$$trH = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{-\frac{1}{2}} > 0$$

なので、極小

以上より、

$$(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

のとき、極小値

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}e}$$

を持つ。

(2)

$$f_x = x(x^2+y^2-4)\ldots\mathfrak{A}$$
$$f_y = y(x^2+y-2)\ldots\mathfrak{B}$$

ここで、$f_x = 0, f_y = 0$となるような(x,y)の組を考える。$\mathfrak{B}$の式に注目すると、

$y = 0$のとき、

$\mathfrak{A}$より、

$$x(x^2-4) = 0$$

よって、

$$(x,y) = (\pm 2{,}0),(0{,}0)$$

$y = -x^2+2$のとき、

$\mathfrak{A}$にこれを代入して、

$$x^2(x^2-3) = 0$$

よって、

$$(x,y) = \left(\pm\sqrt{3},-1\right),(0{,}2)$$

以上より、停留点は、

$$(x,y) = (\pm 2{,}0),(0{,}0),\left(\pm\sqrt{3},-1\right),(0{,}2)$$

また、ヘッセ行列は、

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x^2+y^2-4 & 2xy \\ 2xy & x^2+2y-2 \end{pmatrix}$$

$(x,y) = (\pm 2{,}0)$のとき、

$$detH = 16 > 0$$
$$trH = 10 > 0$$

なので、極小。

$(x,y) = (0{,}0)$のとき、

$$detH = 8 > 0$$
$$trH = -6 < 0$$
なので、極小。
$(x, y) = (\sqrt{3}, -1)$のとき、
$$detH = 2\sqrt{3} - 6 < 0$$
なので、極値でない。
$(x, y) = (-\sqrt{3}, -1)$のとき、
$$detH = -2\sqrt{3} - 6 < 0$$
なので、極値でない。
$(x, y) = (0,2)$のとき、
$$detH = 0$$
なので、判定できない。しかし、任意の$0 < \delta < 1$に関して、(十分小さいδに関して、)
$$B_\delta(0,2) = \{(x, y) | (x - 2)^2 + (y - 2)^2 < \delta^2\}$$
なる集合を考えると、
$$(x, y) = \left(\frac{\delta}{2}, 2\right) \in B_\delta(0,2)$$
のとき、
$$f\left(\frac{\delta}{2}, 2\right) = -\frac{4}{3} + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{2}\right)^4 > -\frac{4}{3} = f(0,2)$$
また、
$$(x, y) = \left(\frac{\delta}{2}, 2 - \frac{\delta^2}{4}\right) \in B_\delta(0,2)$$
のとき、
$$f\left(\frac{\delta}{2}, 2 - \frac{\delta^2}{4}\right) = -\frac{4}{3} + \left(\frac{\delta}{2}\right)^4 \left(\frac{\delta^2}{24} - \frac{3}{4}\right) < -\frac{4}{3} = f(0,2)$$
よって、$(0,2)$付近で$f(0,2)$より大きい点と、小さい点があるので、極値でない。
以上より、
$(x, y) = (0,0)$で極大値0
$(x, y) = (\pm 2,0)$で極小値-4

第二問　和と積の関係
a, α, β, γを正の実数とする。x, y, zを$x+y+z=a$となるように正の実数の範囲で動かしたとき、

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

の最大値を求めよ。

ポイント
極値ではなく最大値を求める必要があるので、答え方に注意が必要です。条件式から一文字消去するのが第一歩です。

解答

$$z=a-x-y$$

なので、題意より、

$$f(x,y)=x^\alpha y^\beta (a-x-y)^\gamma$$

の最大値を求めればいい。ただし、$x>0, y>0, x+y<a$である。まず、この関数の極値を求める。

$$f_x = x^{\alpha-1} y^\beta (a-x-y)^{\gamma-1}\{\alpha(a-x-y)-\gamma x\}$$
$$f_y = x^\alpha y^{\beta-1} (a-x-y)^{\gamma-1}\{\beta(a-x-y)-\gamma x\}$$

$f_x=f_y=0$となる停留点は、

$$(x,y)=\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}a, \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}a\right)$$

次にヘッセ行列Hを求め、この停留点が極値かどうか確かめる。x, yがこの値ならば、$\alpha(a-x-y)-\gamma x, \beta(a-x-y)-\gamma x$となっていることに注意して、

$$f_{xx}=(-\alpha-\gamma)x^{\alpha-1}y^\beta(a-x-y)^{\gamma-1}$$
$$f_{yy}=(-\beta-\gamma)x^\alpha y^{\beta-1}(a-x-y)^{\gamma-1}$$
$$f_{xy}=-\alpha x^{\alpha-1}y^\beta(a-x-y)^{\gamma-1}$$

これらはいずれも負の数であるから、

$$(x,y)=\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}a, \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}a\right)$$

のとき、$detH>0, trH<0$となる。したがって、この点は極大である。
最大値を与える点は、極大か境界上の点であるが、境界の点はいずれも0になるため、(たとえば、$x+y=a$になる点)最大値にはなりえない。すなわち求めた極値が最大値を与える点であり、この時、最大値は

$$\frac{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^{\alpha+\beta+\gamma}}a^{\alpha+\beta+\gamma}$$

§4 数列の収束

第一問　極限の計算

(1)

次の数列の極限を、イプシロンエヌ論法を用いて厳密に求めよ。

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

(2)

次の無限級数が収束することを証明せよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 2^n}$$

ポイント

(1) 上坂教授の問題の類題

(2) 直接収束先を求めることはできないので、授業中に扱った定理を利用します。

解答

(1)

任意の$\varepsilon > 0$に対して、

$$N > \max\left\{2, \frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

であるようにNを定めると、$n \geq N$の範囲で、

$$\left|\frac{n!}{n^n}\right| < \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

よって、

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

(2)

数列

$$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 2^n}$$

は、明らかに単調増加である。

また、

$$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

なので、a_nは上に有界。上に有界な単調増加な数列は収束するので、題意の数列は収束する。■

第二問　極限の証明
次の命題のうち正しいものは証明し、間違っているものは反例を示せ。
(1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

のとき、

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$$

(2)
数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$が発散すれば、

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_{n+1} - a_n|$$

は発散する。
(3)
全てのa_nに関して$0 < a_n < 1$ならば、

$$\lim_{k\to\infty}(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k) = 0$$

である。

ポイント
(1) 授業では極限の足し算を扱いましたが、掛け算になると証明の難易度がだいぶ上がります。収束する数列が有界であることを利用します。
(2) 発散は数学的に扱いにくいので、対偶を示します。コーシー列は収束することが知られているので、それを利用します。

解答
(1)
正しい。
任意の$\varepsilon > 0$を定める。

$$|a_n b_n - \alpha\beta|$$
$$= |a_n b_n - \alpha b_n + \alpha b_n - \alpha\beta|$$
$$\leq |a_n - \alpha||b_n| + |\alpha||b_n - \beta|$$

ここで、b_nが有界な数列であることから、上界が存在しているので、その上界の任意の値をKとしておき、

$$M = \max\{|\alpha|, K\}$$

と定めることができる。ここで、

$$N = \frac{\varepsilon}{2M}$$

とすると、

$$\begin{aligned} &|a_n b_n - \alpha\beta| \\ &\leq |a_n - \alpha||b_n| + |\alpha||b_n - \beta| \\ &\leq |a_n - \alpha|M + M|b_n - \beta| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となり、題意は示された。■

(2)

正しい。

対偶を示す。

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$$

が収束するとき、各項は0に収束するはずなので、

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$$

つまり、任意の$\varepsilon > 0$について、あるLが存在して、これ以降のnに関して、

$$|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$$

である。ここで、$k, l \geq L$を定めると、$(k < l)$

$$\begin{aligned} &|a_l - a_k| \\ &\leq |a_l - a_{l-1}| + |a_{l-1} - a_{l-2}| + \cdots + |a_{k+1} - a_k| \\ &< \varepsilon(l - k) \to 0 \end{aligned}$$

したがって、a_nはコーシー列であるから収束する。■

(3)

誤り。

反例は

$$a_n = 2^{-\frac{1}{2^n}}$$

がある。

§5 リーマン積分

第一問　リーマン積分
リーマン積分の定義に従って、次の式を証明せよ。

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

ただし、$a > 0$とする。

ポイント
こういうたぐいの問題を上坂教授は扱わなかったので、一応載せておきます。
最初は戸惑うと思いますが、慣れれば多分大丈夫です。

解答
任意の$\varepsilon > 0$に対して、

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2a^2}$$

を定める。閉区間$[0, a]$の任意の分割、$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = a$に対して、(ただし、幅は$\delta$より小さいものとする。)代表値系$\xi = (\xi_k)_{k=0}^{n-1}$を、

$$\xi_k = \sqrt{\frac{1}{3}(a_k^2 - a_k a_{k-1} + a_{k-1}^2)}$$

と定めると、この代表値系におけるリーマン和は、

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(a_k - a_{k-1})$$

$$= \frac{a^3}{3}$$

である。次に、任意の代表値系$\xi' = (\xi'_k)_{k=0}^{n-1}$に関してリーマン和を考えると、

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)(a_k - a_{k-1}) - \frac{a^3}{3}\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k) - f(\xi'_k)|(a_k - a_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| {\xi'_k}^2 - \xi_k^2 \right| (a_k - a_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\xi'_k - \xi_k| (\xi'_k + \xi_k)(a_k - a_{k-1})$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \delta \cdot 2a(a_k - a_{k-1})$$

$$= \delta \cdot 2a^2 < \varepsilon$$

以上より、

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

が示された。■

参考

今回は次の値を代表値系として最初にとりました。

$$\xi_k = \sqrt{\frac{1}{3}(a_k^2 - a_k a_{k-1} + a_{k-1}^2)}$$

この値は次のように定めることができます。

$$f(\xi_k) = \frac{\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx}{a_k - a_{k-1}}$$

こうすることで、平均値の定理より、$a_{k-1} < \xi_k < a_k$であり、リーマン和を任意の幅に対して積分値と一致させることができます。

第二問　単調増加関数のリーマン和
区間$[a,b]$で広義単調増加な関数は積分可能であることを示せ。

ポイント
たぶんこんな問題出てこないと思いますが(木田教授は計算問題が好きなようなので)、せっかくなので載せます。

解答
広義単調増加な関数を$f(x)$とする。任意の$\varepsilon > 0$に対して、幅がδより小さい任意の分割P、$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$と、任意の代表値系$\xi = (\xi_k)_{k=0}^{n-1}$を定める。ただし$\delta$は$\varepsilon$に対して以下のように定めるものとする。

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

このときリーマン和は、

$$R(f; P, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(a_k - a_{k-1})$$

で定められる。また、そのリーマン和のうち代表地形を固定した次のようなものを考える。

$$S(f; P) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k)(a_k - a_{k-1})$$

$$s(f; P) = \sum_{k=1}^{n} f(a_{k-1})(a_k - a_{k-1})$$

このとき、

$$S(f; P) - s(f; P)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [f(a_k) - f(a_{k-1})](a_k - a_{k-1})$$

$$< \sum_{k=1}^{n} [f(a_k) - f(a_{k-1})]\delta$$

$$= [f(b) - f(a)]\delta$$

$$= \varepsilon$$

つまり、

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon \ldots \mathfrak{A}$$

さて、$f(x)$は単調増加関数なので、任意の代表値系に関して、

$$s(f;P) < R(f;P,\xi) < S(f;P)$$

なので、$R(f,P,\xi)$は一点に収束する。■

(ちょっと最後の証明が感覚的な気がするので、間違っていたら教えてください。)

§6 有理関数の積分

第一問　有理関数の積分
不定積分せよ。

$$\int \frac{x}{(x^2-2)(x^2+2)^2}dx$$

ポイント
基本的には、まとめ編で書いたように手順に従っていけば解くことができますが、部分分数分解を行うときにいくつか工夫をすることで、より簡単に解けます。

解答

$$\frac{x}{(x^2-2)(x^2+2)^2}$$

を実数の範囲で因数分解すると、

$$\frac{x}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)(x^2+2)^2}$$

これを、

$$\frac{x}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)(x^2+2)^2}=\frac{A}{x-\sqrt{2}}+\frac{B}{x+\sqrt{2}}+\frac{Cx+D}{x^2+2}+\frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}$$

とおくと、$(A,B,C,D,E,F\in\mathbb{R})$

$$x=A\left(x-\sqrt{2}\right)(x^2+2)^2+B\left(x+\sqrt{2}\right)(x^2+2)^2+(Cx+D)(x^2-2)(x^2+2)$$
$$+(Ex+F)(x^2-2)$$

両辺に$x=\sqrt{2}$を代入して、

$$2\sqrt{2}\cdot 16B=\sqrt{2}$$

$$B=\frac{1}{32}$$

両辺に$x=-\sqrt{2}$を代入して、

$$-2\sqrt{2}\cdot 16A=-\sqrt{2}$$

$$A=\frac{1}{32}$$

両辺に、$x=\sqrt{2}i$を代入して、

$$\sqrt{2}i=\left(\sqrt{2}iE+F\right)\cdot(-4)$$

実部と虚部を比較して、

$$E=-\frac{1}{4}, F=0$$

両辺を微分して、$\sqrt{2}i$を代入して、

$$16C-8\sqrt{2}iD+1=0$$

実部と虚部を比較して、

$$C=-\frac{1}{16}, D=0$$

つまり、与式は

$$\int \frac{x}{(x^2-2)(x^2+2)^2}dx$$

$$=\frac{1}{32}\int \frac{1}{(x-\sqrt{2})}dx+\frac{1}{32}\int \frac{1}{(x+\sqrt{2})}dx-\frac{1}{16}\int \frac{x}{x^2+2}dx-\frac{1}{4}\int \frac{x}{(x^2+2)^2}dx$$

$$=\frac{1}{32}\log|x^2-2|-\frac{1}{32}\log|x^2+2|+\frac{1}{8(x^2+2)}+\mathfrak{K}$$

($\mathfrak{K}$は積分定数)

§7 広義積分

第一問　広義積分 1
広義積分せよ。
(1)
$$\int_0^\infty xe^{-x}dx$$
(2)
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$$

ポイント
定義できない値を適当な文字に置き換えて積分し、最後にその値に関する極限を取れば大丈夫です。

解答
(1)
$$\int_0^t xe^{-x}dx$$
を計算すると、
$$\int_0^t xe^{-x}dx = -te^{-t} + \int_0^t e^{-x}dx$$
$$= -te^{-t} - e^{-t} + 1$$
よって、
$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}(-te^{-t} - e^{-t} + 1) = 1$$
となる。
(2)
$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$$
を計算する。$t = \sqrt{x}$で置換積分すると、
$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$$
$$= \int_{\varepsilon'}^1 \frac{2}{t^2+1}dt \ (\varepsilon' = \sqrt{\varepsilon})$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\arctan\varepsilon'$$

$\varepsilon \to +0$のとき$\varepsilon' \to +0$なので、

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx = \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\frac{\pi}{2} - 2\arctan\varepsilon'\right) = \frac{\pi}{2}$$

第二問　広義積分 2
次の広義積分が収束する場合は値を求め、そうでなければ「発散する」と記せ。
(1)

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+1} dx$$

(2)

$$\int_0^{1} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ポイント
第一問のように不定積分が求まらないため一筋縄では解けない問題です。
(1) とある教授の過去問です。知らないと解くのはほぼ無理。
(2) (1)の類題。こちらは解きやすいです。

解答
(1)

$$\int_1^{b} \frac{\log x}{x^2+1} dx$$

とおく。

$$x = \frac{1}{u}$$

とおくと、

$$\int_1^{b} \frac{\log x}{x^2+1} dx = \int_1^{\frac{1}{b}} \frac{-\log u}{\frac{1}{u^2}+1} \cdot \frac{-1}{u^2} du$$

$$= \int_1^{\frac{1}{b}} \frac{\log u}{u^2+1} = -\int_{\frac{1}{b}}^{1} \frac{\log u}{u^2+1}$$

よって、

$$\int_1^{b} \frac{\log x}{x^2+1} dx + \int_{\frac{1}{b}}^{1} \frac{\log u}{u^2+1} = \int_{\frac{1}{b}}^{b} \frac{\log u}{u^2+1}$$

より、

$$\int_{\frac{1}{b}}^{b} \frac{\log u}{u^2+1} = 0$$

$b \to 0$で、

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+1} dx = 0$$

(2)

$$I = \int_0^b \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

とおく。

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

なので、部分積分より、

$$I = [(\sin^{-1} x)^2]_0^b - I$$

よって、

$$I = \frac{[(\sin^{-1} x)^2]_0^b}{2}$$

$$= \frac{(\sin^{-1} b)^2}{2}$$

$b \to 1$で、

$$I = \frac{\pi^2}{8}$$

§8 二変数関数の積分

第一問　二変数関数の積分

次の関数を指定された領域D内で重積分せよ。ただし、aは定数である。

(1)

$$f(x,y)=\frac{1}{(x+y+1)^2}\ (D=[0,1]\times[0,1])$$

(2)

$$f(x,y)=x\ \left(D=\left\{0\leq x\leq a,\frac{x^2}{a}\leq y\leq 2a-x\right\}\right)$$

ポイント

(1)(2) 公式通りに積分します。

解答

(1)

$$\iint_D f(x)dxdy=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{(x+y+1)^2}dx\right)dy$$

$x+y+1=t$とおくと、

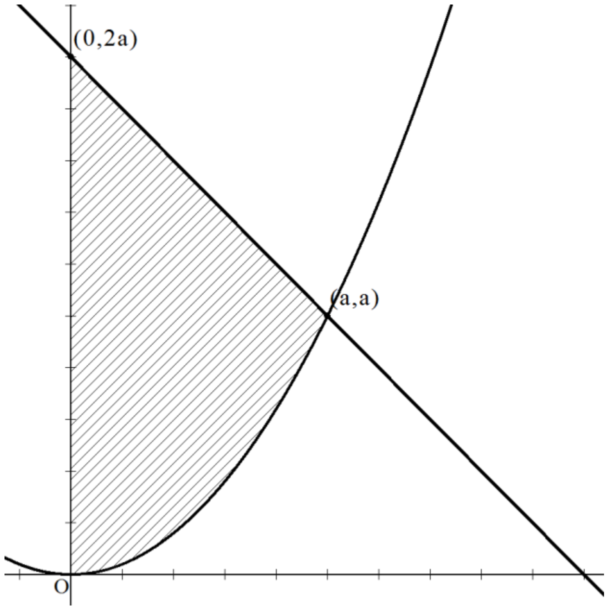
$$=\int_0^1\int_{y+1}^{y+2}\left(\frac{1}{t^2}dt\right)dy$$

$$=\int_0^1(\log|y+1|-\log|y+2|)dy$$

$$=2\log 2-\log 3$$

(2)

図示すると領域は以下のようになる。(次ページ)



よって、

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^a \left(\int_{\frac{x^2}{a^2}}^{2a-x} xdy \right) dx$$

$$= \int_0^a x\left(2a - x - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$= \frac{5a^3}{12}$$

第二問　体積１
三次元空間において、次の領域の体積を求めよ。

$$|x| + |y| \leq 1$$
$$0 \leq z \leq x^2 + y^2$$

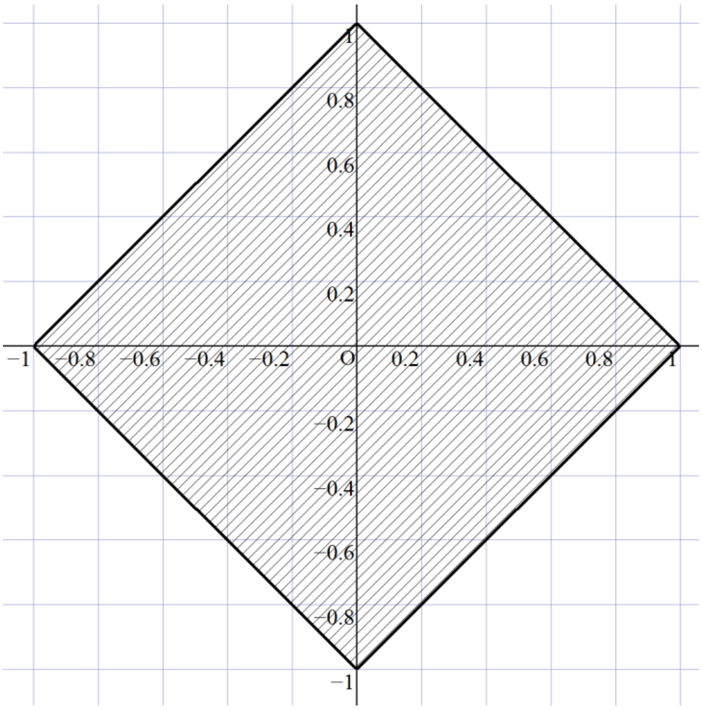
ポイント

$f(x,y)$の部分をzに置き換えて考えます。対称性をうまく利用して計算量を減らすことができます。

解答

$$|x| + |y| \leq 1$$

とは以下のような領域である。



ここで図形の対称性より$x \geq 0, y \geq 0$の範囲のみ考えればよい。

すなわち求める体積は、

$$4\int_0^1 dx \int_0^{-x+1} dy (x^2 + y^2)$$

$$= 4\int_0^1 \left(-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{3}\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}$$

参考
さらに対称性を利用すると以下のように解くこともできる。すなわち、

$$|x| + |y| \leq 1$$

を45°回転させた

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

の領域で考えて、

$$4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy (x^2 + y^2)$$

$$= \frac{2}{3}$$

としてもよい。

§9 変数変換

第一問　変数変換

次の関数が収束するならば、指定された領域D内で重積分せよ。ただし、αは実定数とする。

(1)

$$f(x,y)=\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha}dxdy \ (D=\{x^2+y^2\leq 1\})$$

(2)

$$f(x,y)=\iint_D \frac{(2x-y)^5}{(x+3y)^4}dxdy \ (D=\{0\leq 2x-y\leq 2,1\leq x+3y\leq 3\})$$

ポイント

(1) 極座標に変換するパターンです。αによって、場合分けが必要なので注意してください。

(2) そのまま計算すると死ぬので、変数変換します。xをuで偏微分するのであって、uをxで偏微分するのではありません。

解答

(1)

極座標に変換すると、与式は

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{(1+r^2)^\alpha}dr$$

$1+r^2=t$と定めると、

$$=2\pi\int_1^2\frac{1}{2t^\alpha}dt$$

$$=\pi\int_1^2\frac{1}{t^\alpha}dt$$

$\alpha\neq 1$のとき、

$$=\pi\left[\frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\right]_1^2$$

$$=\frac{\pi}{1-\alpha}(2^{1-\alpha}-1)$$

$\alpha=1$のとき、

$$\pi[\log t]_1^2 = \pi \log 2$$

(2)

$$\begin{cases} u = x + 3y \\ v = 2x - y \end{cases}$$

とおく。これは、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dots \mathfrak{A}$$

である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を取ると、

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

であるから、これを$\mathfrak{A}$の両辺に左からかけて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

さて、この変数変換のヤコビ行列は

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

と一致するので、ヤコビアン(ヤコビ行列の行列式)は、

$$-\frac{1}{7}$$

つまり、与式より、

$$= \frac{1}{7}\int_1^3 \frac{1}{u^4} du \int_0^2 \frac{1}{v^2} dv = \frac{832}{1701}$$

第二問　体積２
三次元空間において次の6つのグラフで囲まれた立体の体積を求めよ。

$$x=\frac{1}{\sqrt{yz}},x=\frac{2}{\sqrt{yz}},y=\frac{1}{\sqrt{zx}},y=\frac{2}{\sqrt{zx}},z=\frac{1}{\sqrt{xy}},z=\frac{2}{\sqrt{xy}}$$

ポイント
このまま断面を取って積分しようとすると頭がパンクするので、変数変換をします。どのように変数を取れば、変数の定義域が分かりやすくなるかを考えましょう。

解答
題意より明らかに立体の存在範囲は(x,y,z)がすべて正の範囲である。

$$\begin{cases} xy^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}=s \\ x^{\frac{1}{2}}yz^{\frac{1}{2}}=t \\ x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}z=u \end{cases}$$

とおく。これを変形して、

$$\begin{cases} x=s^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} \\ y=s^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{2}}u^{-\frac{1}{2}} \\ z=s^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

よって、変数変換のヤコビ行列は、

$$J(s,t,u)=\begin{pmatrix} \frac{3}{2}s^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}s^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{3}{2}}u^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}s^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2}s^{-\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}u^{-\frac{1}{2}} & \frac{3}{2}s^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}s^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{2}}u^{-\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2}s^{-\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2}s^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}} & \frac{3}{2}s^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

この行列式は、

$$\frac{2}{\sqrt{stu}}$$

よって、求める体積は、

$$2\int_1^2 ds\int_1^2 dt\int_1^2 du\frac{1}{\sqrt{stu}}$$

$$=2\left[2s^{\frac{1}{2}}\right]_1^2\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^2\left[2u^{\frac{1}{2}}\right]_1^2$$

$$= 16\left(\sqrt{2} - 1\right)^{3}$$

となる。

§10 二変数関数の広義積分

第一問　二変数関数の広義積分
以下の問いに答えよ。
(1)
$$0 \leq y \leq x$$
の領域で
$$\frac{1}{(1+x+y)^3}$$
を広義積分せよ。
(2)
$$x^2 + y^2 \leq 1$$
の領域で
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$
を広義積分せよ。
(3)
$$x^2 \leq y \leq x \ without \ (0,0)$$
の領域で
$$\frac{x \sin y}{y}$$
を広義積分せよ。

ポイント
(1) 極限を取ると領域が一致するような列D_nを考えるのが第一歩です。値は常に正の数になっているので、そのまま積分して問題ないです。
(2) (1)とやることは大体同じですが、変数変換したほうが容易に解けます。
(3) yを先に積分すると死にます。

解答
(1)
$$D_n = \{(x,y) | 0 \leq y \leq x, x \leq n\}$$
とする。これは題意の領域に収束する増大列である。
よって、求める積分値は、
$$\iint_D \frac{1}{(1+x+y)^3} dxdy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{1}{(1+x+y)^3} dxdy$$
$$= \int_0^\infty dx \int_0^{y=x} dy \frac{1}{(1+x+y)^3}$$
$$= \frac{1}{4}$$

(2)

$$D_n = \left\{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1 - \frac{1}{n}\right\}$$

とする。これは題意の領域に収束する増大列である。
よって、求める積分値は、

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy$$

さて、

$$\iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} dr \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$
$$= 2\pi \left\{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

よって、求める積分値は$n \to \infty$して、

$$2\pi$$

(3)

$$D_n = \left\{(x,y) | x^2 \leq y \leq x, \frac{1}{n} \leq y \leq 1 - \frac{1}{n}\right\}$$

とする。これは題意の領域に収束する増大列である。
よって、求める積分値は、

$$\iint_{D_n} \frac{x \sin y}{y} dxdy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \iint_D \frac{x\sin y}{y} dxdy$$

$$= \int_0^1 dy \int_y^{x=\sqrt{y}} dx \frac{x\sin y}{y}$$

$$= \frac{1}{2}(1-\sin 1)$$

第二問　e^{-x^2}の積分

(1) 広義積分せよ。

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

(2) 領域Dを第一象限とする。広義積分せよ。

$$\int_D (x+y)e^{-x^2-y^2}dxdy$$

ポイント

(1) 授業と全く同じ問題ですが、木田先生が「今日はこれさえ覚えればいい。」というぐらい重要らしいので、載せておきます。

(2) おまけ。

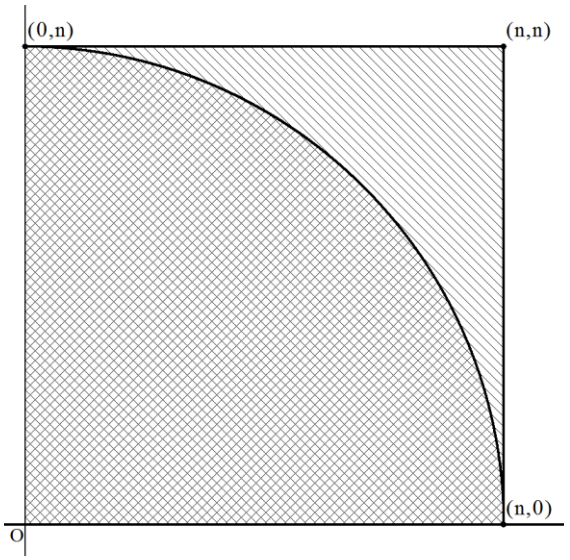
解答

(1)

$\mathrm{D}=\{x\geq 0, y\geq 0\}$とする。この時、領域$D_n, E_n$を以下の図のように定めれば、($D_n$が傾き負の斜線、$E_n$が傾き正の斜線)

$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$と$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$はともにDに収束する増大列である。したがって、連続関数$f: D\to\mathbb{R}^2$に対して、これが収束するならば、

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{E_n} f(x,y)dxdy \ldots \mathfrak{A}$$



$$f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$$

とする。

左辺について、

$$\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$$=\int_0^n e^{-x^2}dx\int_0^n e^{-y^2}dy$$

$$=\left(\int_0^n e^{-x^2}dx\right)^2$$

よって$n\to\infty$のとき、

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2$$

右辺について、極座標に変数変換すると、

$$\iint_{E_n} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^n re^{-r^2}dr$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-n^2}\right)$$

よって$n\to\infty$のとき、

$$\frac{\pi}{4}$$

$\mathfrak{A}$より、

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(2)

$$\int_D (x+y)e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_{y=0}^\infty e^{-y^2}dy\int_{x=0}^\infty\left(xe^{-x^2}+ye^{-x^2}\right)dx$$

ところで、

$$\int_0^\infty\left(xe^{-x^2}+ye^{-x^2}\right)dx$$

$$=\int_0^\infty xe^{-x^2}dx+y\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

となるので、(1)を利用して、

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}y$$

よって、

$$\int_D (x+y)e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}y\right)e^{-y^2}dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y^2}dy + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty ye^{-y^2}dy$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

第三問　必ずしも0以上ではない関数の広義積分
領域$D=[0,\infty)\times[0,\infty)\setminus(0,0)$内で次の広義積分をせよ。

$$\iint_D \frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{x+y}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

ポイント
形からして明らかに極座標にする問題です。原点でも広義積分する必要があることに注意して解いてください。

解答
与式を極座標変換すると、

$$\iint_D \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}e^{-r}\sin r\,drd\theta$$

である。

$$f(r,\theta)=e^{-r}\sin r$$

とし、

$$f_+=\max\{f(r),0\}$$
$$f_-=-\min\{f(r),0\}$$

と定める。
さて、ここで増大列

$$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{(x,y)|\frac{1}{n^2}\le x^2+y^2\le(2\pi n)^2\right\}$$

を考えると、

$$\iint_D \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}e^{-r}\sin r\,drd\theta$$
$$=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}e^{-r}\sin r\,drd\theta$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n^2}}^{2\pi n}f_+dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta-\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n^2}}^{2\pi n}f_-dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$$

さて、

$$\int_{\frac{1}{n^2}}^{2\pi n}f_+dr$$

について、この式を変形すると、

$$\int_{\frac{1}{n^2}}^{2\pi n} f_+ dr = \int_0^{2\pi n} f_+ dr + \int_0^{\frac{1}{n^2}} f_+ dr$$

左辺第一項目について考える。

$$\int e^{-r} \sin r \, dr = -\frac{1}{2} e^{-r} (\sin r + \cos r) + C$$

である。

この時、

$$\int_0^{2\pi n} f_+ dr = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} e^{-r} \sin r \, dr = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} e^{-\pi} + \frac{1}{2}\right) (e^{-2\pi})^{n-1}$$

なのだから、

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi n} f_+ dr = \frac{e^{-\pi} + 1}{2(1 - e^{-2\pi})}$$

よって、

$$\int_{\frac{1}{n^2}}^{2\pi n} f_+ dr = \int_0^{2\pi n} f_+ dr + \int_0^{\frac{1}{n^2}} f_+ dr$$

より両辺を$n \to \infty$にすれば、

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\frac{1}{n^2}}^{2\pi n} f_+ dr = \frac{e^{-\pi} + 1}{2(1 - e^{-2\pi})}$$

同様に、

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\frac{1}{n^2}}^{2\pi n} f_- dr = \frac{e^{-2\pi} + e^{-\pi}}{2(1 - e^{-2\pi})}$$

である。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} d\theta$$

について考える。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta} d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\theta} d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

以上より、

$$\iint_D \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} e^{-r} \sin r \, dr d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \log \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

参考

別にf_+とf_-に分けなくても解けますが、一応定義に従いました。

§11 各点収束と一様収束

第一問　各点収束と一様収束
次の関数列$f_n(x)$は$f(x)$に各点収束するか、また一様収束するか。
(1)

$$f_n, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ f_n(x) = \frac{n^3x^3}{1+n^2x^2}\ f(x) = 0$$

(2)

$$\mathrm{f_n}, \mathrm{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \mathrm{f_n}(x) = \frac{\sin(nx)}{n}\ f(x) = 0$$

ポイント
各点収束と一様収束の違いを理解するための問題です。

解答
(1)
すべてのxに関して、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3x^3}{1+n^2x^2} = 0$$

なので、各点収束である。一方$\varepsilon = 0.1$とし、任意に$n = L$を定めると、

$$x = \frac{1}{L}$$

のとき、

$$f_L\left(\frac{1}{L}\right) - f\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{1}{2} > 0.1$$

であるから、一様収束ではない。
(2)

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{\sin(nx)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

したがって、一様収束である。また、一様収束であるから各点収束でもある。

§12 巾級数

第一問
次の巾級数の収束半径を求めよ。
(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

ポイント
ダランベールの収束判定法を用いて、計算するだけです。

解答
(1)

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

と定めると、

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
$$= e$$

よって、収束半径は、e
(2)

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

と定めると、

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$
$$= \infty$$

よって、収束半径は、∞

第二問　無限級数
関数$f(x)$を

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$$

で定めたとき、

$$\int_0^{\pi}f(x)dx$$

を求めよ。

ポイント
関数の形が特殊なので、シグマを積分の外に出して計算します。この際、$f(x)$が一様収束であることを示さなければいけません。

解答

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{2^k}$$

とおく。この関数は、

$$\left|\frac{\sin kx}{2^k}\right|\leq\frac{1}{2^k}$$

で、

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$$

なので、優関数の定理より、関数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$は一様収束。よって、

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}f_n(x)dx=\int_0^{\pi}f(x)dx$$

が成り立ち、与式は、

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}f_n(x)dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{2^n}$$

である。

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{2^n}$$

を実際に積分すると、

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n \cdot 2^{n-1}}\ when\ n\ is\ odd \\ 0\ when\ n\ is\ even \end{cases}$$

つまり求める無限級数は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}(2n-1)}$$

さて、テイラー展開により以下の式が成り立つ。

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

ここでxをx^2に置き換えて、

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2}$$

収束半径が1だから、その範囲内で両辺を積分すると、

$$\int_0^x \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

左辺を計算すると、

$$\frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

両辺に、

$$x = \frac{1}{2}$$

を代入して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)} = \frac{1}{2}\log 3$$

両辺二倍して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}(2n-1)} = \log 3$$

つまり、答えは$\log 3$である。