線型代数学

寺田　至教官　試験対策

2015 年度入学　理科 2・3 類 20 組

【はじめに】

はじめまして。本シケプリを手に取っていただき、ありがとうございます。

本書は、2015 年度入学理科 2・3 類 20 組の数理科学基礎・線型代数学の寺田至~~らない~~先生に対応したシケプリになります。ただ、内容についてはおおよそどの先生でも同じ講義になっていると思いますので（一部順番が違ったり進度に差があったりするようですが)、他の先生が担当の場合でも参考になるかと思います。筆者は 3 回に分けてこのシケプリを編集していましたが、ここではすべてをひとまとめにしたバージョンとなっています。

第 1 章と第 2 章は「数理科学基礎」です。私たちの場合は共通資料の奇数番と偶数番で担当教員が分かれており、私は偶数番担当だったのでその範囲のシケプリを担当していました。内容としては、共通資料がしっかりしていたので、チェック程度のものを用意しました。共通資料やカリキュラムは今後変わる可能性があるので、利用する場合は注意してください。

第 3 章以降は線型代数学の内容になります。微積に比べ線型は、いかにも大学の数学、といった印象かもしれません。なにかイメージしにくい空間を扱うことが多いでしょう。だからこそ、基本的な部分をじっくり理解してください。内容が難しくなるにつれ、このシケプリでもなるべく解説部分を重視しています。時間をかけてゆっくり読んでいただければと思います。解説を重視したのは、私たちの線型の講義が 1 限だったことや、先生がレジュメや参考書指定をせずすべて板書展開だったことも要因としてあります。そういったニーズから、基本部分の解説は重視していますが、厳密な数学的議論は避けている部分が多いです。というか、そういうニーズのある人はシケプリじゃなくて専門書を読んだ方がいいと思うので、はい。そもそも「線型」と「線形」をごっちゃに書いているあたり、私のルーズさが伝わると思います。本当に、数強では全くありませんのでそこはご了承ください。

みなさんが無事単位を落とさず、駒場での生活を楽しんでいただけることを祈っております。

【参考文献】

日本評論社「線形代数講義」「線形空間入門」（梶原　健）

東京図書「線型代数入門講義」（長岡　亮介）

東京図書「線型代数学」（齋藤　正彦）

数学書房「テキスト理系の数学３　線形代数」（海老原　円）

【免責事項】

本シケプリは、本学前期試験数学において6割に満たない得点であった筆者の、**独断と偏見に基づいて**編集されている。利用の際は、以下のことに留意すること。

1　内容の真偽に関して、筆者は細心の注意を払っている**つもり**であるが、誤りを見つけた場合には速やかに筆者に報告すること。**なお、基本を理解してもらうことが目的のため、厳密な数学的議論は避けている箇所が多いが、数強の方はその点ご理解いただきたい。**

2　試験に出るかどうかについて、筆者は本シケプリ内で言及している箇所がある。しかしながら、試験をつくるのはあくまで教官であり筆者ではないため、**筆者は上記の箇所に関して一切の責任を負わない**。

3　前項のため、利用者は本シケプリを使用する場合、**各自の責任において**これを行い、また**（一定以上の成績をとりたいならば）各自で十分な試験対策を行う**こと。

4　本シケプリは「数理科学基礎」部分と「線型代数」部分に分かれているが、趣旨が異なっているので注意すること。前者は演習中心、後者は解説中心のため、ここから理解を始めてもよい。

5　本シケプリは寺田先生担当分の講義を受講している2015年度入学1年理科2・3類20組対象のものである。利用者は個人利用、共有をすることが認められているが、著作権の範囲内を守ること。

6　教員によって同じ線型代数学でも説明や内容が異なっている事例があるようである。他クラスの方のご利用も歓迎するが、その点には十分留意いただきたい。また、年度によってカリキュラム等が異なる場合もあるので、その点にも各自で注意すること。

目次

0.　数学記号の取り扱いについて（参考）

この項では、授業で取り扱った**数学記号**について主にとりあげます。基本的にはもう授業で出てきているので読み込む必要はないと思いますが、**試験勉強をしていく中で、また、後述する例題や解説等を読んでいく中で混乱が生じた場合は、ここに立ち戻って確認する**とよいと思います。*※この内容については、一部奇数番号の講義内容で主に取り扱ったものもあります。*

0.1.数の集合

$\mathbb{N}$：自然数　　$\mathbb{Z}$：整数　　$\mathbb{Q}$：有理数　　$\mathbb{R}$：実数　　$\mathbb{C}$：複素数

（一応、P：素数。ほとんど使わない。他にもいろいろあるが意味すら不明。）

（筆記する際も、**一画足して二重に**しておく。断りなしに用いてよい。）

0.2.集合論理（S1-1 講義なども参照）

$\equiv$　$:=$　$\Leftrightarrow$（上に def と書いてある）　：定義[definition]

$\Leftrightarrow$（上に iff と書いてあるかもしれない）　：同値[equivalence][if and only if]

※def はほぼ確実に書いてあります。何も書いていなければ iff と判断してください。

$F \Rightarrow G$　：条件 F は条件 G の十分条件、F は G の必要条件（注 1 参照）

$x \in P$　：x は集合 P の要素である・属する[belongs to]

$P \subset Q$　：集合 P は集合 Q に含まれる[be contained]

※$\notin$・$\not\subset$はそれぞれの否定を表します。

P＝｛＜条件 1＞｜＜条件 2＞｝　：集合 P は＜条件 1＞を満たし、かつ＜条件 2＞を満たす

※＜条件 1＞と＜条件 2＞が入れ替わっても意味は同じ。

$P \cap Q$　：集合 P と集合 Q の共通部分の集合

$P \cup Q$　：集合 P と集合 Q の和集合

$P \oplus Q$　：$P \cap Q = \phi$ である場合の、$P \cup Q$（直和という）

※講義で触れてもいないのに、過去に突然試験で出した先生がいたそうです。

0.3.記号論理

$\forall$　$^{\forall}x \in P; F(x)$　：「すべての、任意の」「集合 P に属する任意の元 x に対して、条件 $F(x)$が成り立つ」[For all]　（注 2 参照）

※；は，の場合もあります。また[ ]でくくっているだけの場合もあります。

$\exists$　$^{\exists}x \in P$ s.t. $F(x)$　：「少なくとも 1 つ」「集合 P に属する少なくともひとつの x が存在して、それが条件 $F(x)$を満たす」[There exists … such that …]

※s.t.を使わず上の∀のように書くこともあります。

$\therefore$　：「よって」「だから」「ゆえに」頭のなかでこれらのどれかを言いながら一個ずつ点を打ちましょう。例：「だ・か・ら」史跡でも天然記念物でも名所でもない。ましてや茶畑でもありません。

$\because$　：「なぜならば」

$P \wedge Q$　：命題 P　かつ　命題 Q[and]

$P \vee Q$　：命題 P　または　命題 Q[or]

注1：必要条件と十分条件

センター試験の際に苦しんだ人もいるかもしれませんが、一応確認しておきたいと思います。

例：条件P「$n>4$」　条件Q「$n^2>16$」

条件Qと同値なのは「$n>4$ または $n<-4$」です。

条件P「を満たすならば、必ず」条件Qが成り立つとき、まず P⇒Q と表します。

⇒は「ならば」と読めばいいことになります。

簡単には、[十分]⇒[必要]と覚えておけばいいようです。（チャート式IA参照）

PがQの十分条件であるとは、P「を満たすならば、必ず」Qが成り立つことで、

QがPの必要条件であるとは、P「を満たすためには、」Q「が成り立つことが必要」

と考えることができます。

注2：∀と∃の順番について

$$^{\forall}x\in \mathrm{R}\ [^{\exists}y\in \mathrm{R}\ [(x^2+1)\,y=1]\ ] \tag{0.1}$$

$$^{\exists}y\in \mathrm{R}\ [^{\forall}x\in \mathrm{R}\ [(x^2+1)\,y=1]\ ] \tag{0.2}$$

は違う命題です。実際こんな面倒なことを考えさせられることはないと思いますが、ややこしくなってきたときに確認したいこととして挙げておきたいと思います。

命題(0.1)については、任意の x に対して、＜式＞を満たす y がひとつあればよい。

→それぞれの x に対して、別々の y があればよい。

命題(0.2)については、x に依存しない y で、どんな x に対しても＜式＞を満たす y がある。

→＜式＞を満たす、普遍的な y が存在する。

1.　【S1 数理科学基礎・偶数番】講義まとめチェック編

この項では、**各講義の板書や教材**を簡潔にまとめています。例題は第 2 章にすべてまとめているので、ここには載っていません。重要部分のみピックアップしているので、その他の部分は必要に応じて各自教材を参照してください。また、基本的に筆者自身の板書から作成しているだけなので、自分で講義中ちゃんとノートをとっている場合はこの項に関しても特別読む必要はありません。第 2 章の例題へ進んでもらえればと思います。なお、**この項で紹介する公式や事項に対して、証明はつけていません。**証明についても、第 2 章にまとめてありますので、**いくつかの重要公式については必ず証明まで確認しておいてください。**

※明らかに高校範囲と思われるものは除いています。

1.1.複素数と代数学の基本定理(資 p.13-)

□ Z の共役は Z*でも表す。

□ $|Z|=|\bar{Z}|$　，　$Z\bar{Z}=|Z|^2$　，　$\bar{Z}=Z \Leftrightarrow Z\in R$　，　$\bar{Z}=-Z \Leftrightarrow Z\in$純虚数

□ 多項式 $P(x)$の次数を n 次とするとき、$n=\deg P(x)$と表す。

□ 最高次の係数が 1 に等しい多項式をモニックな多項式という。

□ $\deg(P(x)Q(x))=\deg P(x)+\deg Q(x)$　$P(x)Q(x)=0 \Leftrightarrow P(x)=0$ または $Q(x)=0$ ※式として

□ $\deg(P(x)+Q(x)) \leqq \max\{\deg P(x), \deg Q(x)\}$ ※＜となるのは $\deg P(x)=\deg Q(x)$で、最高次の項が打ち消しあうとき ex. $P(x)=2x+3$, $Q(x)=-2x+5$

□ (剰余定理)多項式 $P(x)$を $D(x)$で割ると考える。$\deg D(x)\geqq 1$ のとき、

$P(x)=D(x)Q(x)+R(x)$　　$\deg R(x)<\deg D(x)$

を満たす多項式 $Q(x)$と $R(x)$が、ただひとつ存在する。

※存在を調べるには、「整式の除法」で求められる。

□ (因数定理)$P(x)$が $x-a$ で割り切れる ⇔ $P(a)=0$「複素数 a が多項式 $P(x)$の根となる」

※根 a が実数の場合を実根、複素数で実数でない場合を虚根という。

□ (代数学の基本定理)多項式 $P(x)$が n 次の(n≧1)モニックな多項式のとき、

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\in C$（重複可）があって、$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$と既約分解される。

なお、これらは並べ替えを除いて一意である。

□ $P(x)$を上の形に表そうとするとき、実際には n 個のうち重複しているものがあることがある。このとき、$P(x)=(x-\gamma_1)^{d1}(x-\gamma_2)^{d2}\cdots(x-\gamma_m)^{dm}$ と表され、（γは相異なる複素数、d は 1 以上の整数）このとき d_i を根 γ_i の重複度という。重複度 1 の根を単根、重複度 2 以上の根を重根という。※なお、この場合で d1＋…＋dm＝$\deg P(x)$となっている。

1.2.種々の関数(資 p.29-)　👀理解し、覚えよう！使えるように。

1.2.1.三角関数

$\csc x$	$\dfrac{1}{\sin x}$	コセカント[cosecant]
$\sec x$	$\dfrac{1}{\cos x}$	セカント[secant]
$\cot x$	$\dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	コタンジェント[cotangent]

※定義域は、分母が 0 でないところ。

1.2.2.指数関数(e 関連)

e の定義：

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

また、$e^x = \exp x$ と表すこともある。[exponential]

1.2.3.双曲線関数[hyperbolic function]

$\sinh x$	$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\cosh x$	$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\tanh x$	$\dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

□　$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$, $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$, $\coth x = \frac{1}{\tanh x}$ 　である。

□　$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立つ。$(\cosh x, \sinh x)$ は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の $x>0$ の部分を動く。

□　$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

□　$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

□　$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$, $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$, $\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$

1.2.4.逆関数（逆三角関数・逆双曲線関数）の定義と性質

□　arcsin : [-1, 1] → R（sin の逆関数）

□　arctan : R → R（tan の逆関数）

□　arcsinh : R → R（sinh の逆関数）

□　arctanh：(-1, 1) → R（tanh の逆関数）

□　$\operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

□　$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$

1.2.5.逆関数の導関数

□（前提）$y = f(x)$に対して逆関数$g(x)$をとると$g'(x) = \frac{1}{f\prime(y)} = \frac{1}{f\prime(g(x))}$

□$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

□$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

□$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

□$\frac{d}{dx}\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2}$

ひとこと…

この項で紹介されている公式に関しては、

覚えるべきもの、覚えてしまった方が早いものがたいていです。

意義を理解した上で覚え、形がいろいろ変化しても適応できるようにしておきましょう。

1.3.座標空間と数ベクトル(資 p.41-)

□ $\mathbf{v}=(a_1, b_1, c_1)^T$, $\mathbf{w}=(a_2, b_2, c_2)^T$ がともに零ベクトルでないとき、ある零でない実数λを用いて $\mathbf{w}=\lambda\mathbf{v}$ が成り立つならば、**v** と **w** は平行であるとし、$\mathbf{v}\parallel\mathbf{w}$ で表す。

□ ベクトル $\mathbf{v}=(a_1, b_1, c_1)^T$ に対して、その大きさは$\|v\| = \sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2}$で表され、これをベクトル **v** のノルム（大きさ）ともいう。

□ ノルムが 1 のベクトルを単位ベクトルという。

□ 内積はベクトルのノルムを用いて、$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\frac{\|v+w\|^2-\|v\|^2-\|w\|^2}{2}$と表される。（展開すれば当然）

□ パラメータ表示と方程式は、連立方程式を解くことで変換できる。これについては、演習問題を解く中でやり方を体得しておくこと。

1.4.二変数関数のグラフ(資 p.61-)

□ 2 変数関数とは、2 つの独立変数の値から従属変数の値を定める規則のことである。
例：$z = x^2 - y^2$

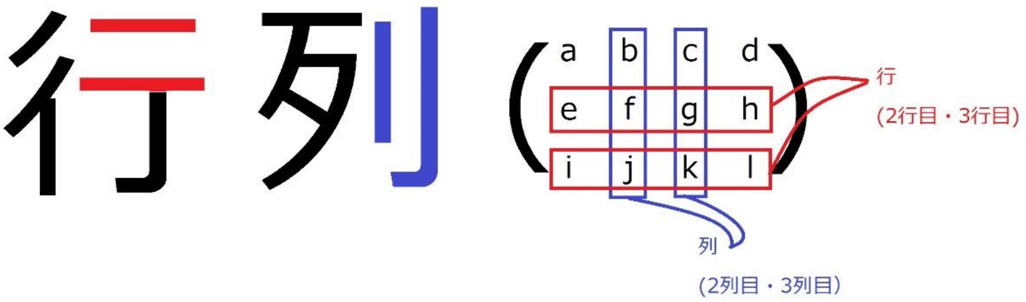
□ 与えられた関数式に対して、その式が意味を持つ範囲として自然に定義域（なるべく広い範囲で）が定められる場合がある。これを「自然な定義域」という。

□ 座標空間上に定義される空間図形をある平面で切って得られる断面を平面上に投影して得られる図形を、関数のグラフの等高線という。

□ ❝本章は、「二変数関数」に関する導入でしかなく、ここから試験問題が一定量以上出るとは考えにくく、むしろ 11 章「偏微分係数と接平面」において「二変数関数」が主に問われると考えたほうが自然であろう。また 12 章（1.6 参照）「線型写像と行列」にも関連した分野がある。ゆえに、このシケプリでは本章独自での練習問題を設定しない。もし求められるとすれば、「関数式」⇒「概形」の変換ができるかどうか、という点である。練習問題は主に奇数番シケプリの 11 章の分を参考にされたい。

1.5.行列とその演算(資 p.79-)

□ 行列 A に対して、その横の並びを A の行、縦の並びを A の列という。こんがらがった場合は、以下の図のように覚えるとよい。m個の行（縦幅）と、n 個の列（横幅）をもつとき、m×n 行列という。「m行・n 列」は「縦m番目・横n 番目」の順である。下図では、3 行 4 列の行列といえる。



□ 列と行の長さが一致している行列を正方行列といい、n × n であるとき、これを n 次正方行列という。正方行列において、左上から右下に至る部分の成分を対角成分、それ以外を非対角成分という。

□ 対角成分がすべて 1 で、それ以外がすべて 0 である正方行列を単位行列といい、n 次の単位行列を En と表す。

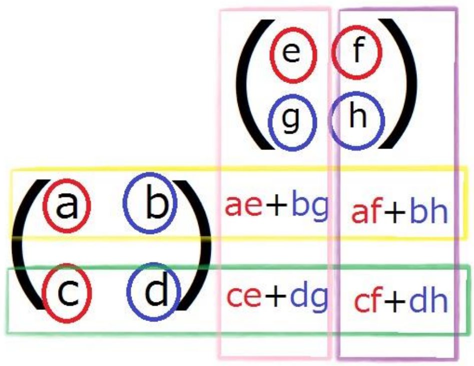
□ 行列の和やスカラー倍に関しては、これまでの演算法則が成立する。

□ 👀しかし、行列積には注意！

- 注意①掛け算の仕方自体が特殊。
- 注意②交換法則が不成立。
- 注意③AB＝O　⇒　A＝O または B＝O　が成り立たない。
- 注意④AB は、A の横幅と B の縦幅が一致しているとき定義される。すなわち、A はm×n 行列、B はn×p 行列であることが必要である。

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix}$$

□ 行列積を手計算する際は、慣れるまでは右図のようにすればよい。



□ 行列の写像に関しては、すべて 1.6 で扱う。

□ 1 次連立方程式を行列でとらえると、係数行列・拡大係数行列という概念が成立する。ただし、行列を用いて連立を解く（「掃き出し法」という）は今回の共通資料には載っていないので、行列と連立式の関係については考えなくてよいと思われる。

□ 正方行列 A については、行数と列数が一致するので、積 AA、AAA、…（べき乗）が考えられる。なお、A^0＝E（単位行列）である。

1.6. 線型写像と行列(資 p.97-)👀まず、写像について理解！

- □ 写像 F が線型写像であるとは、$\mathrm{F}(v+w)=F(v)+\mathrm{F}(w)$「和を保つ」と、$\mathrm{F}(\lambda v)=\lambda F(v)$「スカラー倍を保つ」を満たすことである。
- □ 上 2 つに代わり、$\mathrm{F}(\lambda v+\mu w)=\lambda F(v)+\mu\mathrm{F}(w)$を定義としてもよい。
- □ n 次元ベクトルにm×n 行列 A をかけることによって、写像が定義される。すなわち、「m×n 行列 A の定める R^n から R^m への写像は線型写像である」といえる。…③
- □ 特にm＝n のとき、R^n から R^n への線型写像を R^n の線型変換という。
- □ 線型変換の例として、恒等変換・拡大縮小・正射影などがある。
- □ ③とは逆に、「空間 Rn から Rm への写像 F が線型写像ならば、あるm×n 行列 A の定める写像に等しい（F＝A）」といえる。…④
- □ ④のとき、A によって F を表すことを行列表示、A のことを表現行列という。
- □ ④のとき、どんなベクトル v に対しても F(v)＝Av が成り立つから、A を求めるには v に標準的単位ベクトル e_1～e_n をとればよい。
- □ 平面上での変換として、以下の変換は覚えておきたい。

  - ➢ ①回転$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$…原点を軸として正の向き（反時計）に θ 回転
  - ➢ ②対称移動$\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$…平面上の直線 R（傾きパラメータ θ）に関して対称移動
  - ➢ ③平行移動$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x+x_0\\ y+y_0\end{pmatrix}$…すべての平面ベクトルを一斉に$\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$だけ平行移動
  - ➢ ④原点以外の点(x_0,y_0)を中心とする回転$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$
  - ➢ ③④は線型変換ではないことに注意。
  - ➢ （余談）複素数平面などを用いた従来の方法でもできる。
- □ 線型変換が全単射であるとき、逆写像がただひとつ存在する。これを逆変換という。
- □ 逆行列を求めるにあたって、(以降は 2 次正方行列$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$の場合とする)

  - ➢ 逆行列 A^{-1} とは、AA^{-1}=E（単位行列）を満たす行列のことである。
  - ➢ 余因子行列$\tilde{A}$とは、$\tilde{A}=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$を満たす行列のことである。
  - ➢ 行列式$\det A$とは、$\det A=ad-bc$を満たすスカラーのことである。
  - ➢ 逆行列が存在する条件は、$\det A\neq 0$ である。このとき、行列 A は正則行列という。
  - ➢ 逆行列は、$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\tilde{A}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$と計算すればよい。
- □ 2 次正方行列 A に対して、tr$A$=a+d と定める。このスカラーtr$A$ を行列 A の跡（トレース）という。
- □ サイズの大きな行列（3 次以上）の行列式や逆行列などは範囲外である。

1.7.総括

本項では、偶数番単元のそれぞれにおいて、簡単にポイントをまとめておきます。ただし、すべて筆者の個人的見解に基づく主観的なまとめとなっているので、試験に直結しているとは限らないことをあらかじめ了承しておいてください。

① **複素数と代数学の基本定理**：複素数と多項式の基本的な部分について取り扱っています。高校で習ったことが大半かと思いますので（複素平面は新課程範囲でしたが）ある程度扱えると思います。練習問題を解いておきましょう。

② **種々の関数**：ここが今回の範囲のネックになるかもしれません。arc 関数や hyperbolic 関数はおそらく初見だと思いますので、まずは**定義に沿って覚え**、使いこなせるようにしておいてください。特に、**e を用いた変形や、微分形**についても忘れないように。

③ **座標空間と数ベクトル**：ほぼすべて空間ベクトルの取り扱いになりますが、こちらもほぼ高校で扱っているかと思われます。(東大受験生なら、もしかしたら空間ベクトルはあまりやりこんでいないかも…) ただし、ここでのメインは**パラメータ表示と方程式表示**になります。**双方向での変換まで**、できるようにしておきましょう。

④ **二変数関数のグラフ**：正直、ここからどのように出題されるのか、筆者も予測がつきかねています（1.4 参照)。与えられた関数式から、**概形が想像つくように**（といっても、球面や円柱、円錐などしかないですが）しておく、くらいでしょうか。あとは、**回転形**であることもあるので、概形の記述の際には参考にしてください。

⑤ **行列とその演算**：現役生で、行列を扱ったことがない人は、ここは**基本事項**になるので、確実に使いこなせるよう練習してください。**とにかく慣れること**が重要ですので、たとえば旧課程の教科書やチャートなどがあれば、それも参考になるでしょう。

⑥ **線型写像と行列**：逆行列や回転行列などは旧課程で扱ったと思いますが、線型写像という概念はないと思います。奇数番で扱った**写像の概念について理解**したうえで、結局何を言っているのか (そんな大した意味はありません。むしろ、計算的な内容の方がここでは中心になります) を理解しておくようにしてください。あとは、逆行列などは結局計算なので、⑤と同様、新課程生はまず慣れる！

⑦ **全体として**：結局、全体の半分が偶数番の分野になります。その中でいえば、(共通資料)：(寺田 original) ＝３：２なわけで、共通資料範囲は**章末の「確認」レベル**であることを踏まえると、寺田 original のところで、筆者が 2 章で作った練習問題レベルが出る可能性はあります（つまり、少し共通よりレベル高)。まずは、共通資料の内容を理解し、(確認レベルの) 問題を解けるようにしておくこと、そして、必要に応じて 2 章の練習問題を解いておくと、だいたいなんとかなると思います。

2. 【S1 数理科学基礎・偶数番】演習例題編

この項では、これまで紹介してきた数理科学基礎の内容に関しての問題を載せてあります。第 1 章の冒頭にも記載したように、公式証明もある程度つけてあるので、チェックしておいてください。問題については、他の先生の数理科学基礎のテキスト、または自作のものからも出題しています。なお一部、上坂先生の数理科学基礎**演習**の教材から拝借したものもあります。(解答も丁寧ですし、レベル的にもおそらくちょうどいいので、HP に載っている問題集は見ておきましょう。そこにある奇数番「微分積分学」の問題プリントも、自学の参考になるかもしれません）なお、**テキストの例題に関しては、公式の解答が存在するのでそちらを参照してください。**

各問題についている☆は、チャート式や Focus Gold の難易度表示のイメージです。

申し訳ございませんが、公開用シケプリには解答は省略しております。

2.1. 分野別標準演習

ここでは、講義テーマごとに問題を並べてあります。

2.1.1. 複素数と代数学の基本定理

★★☆☆☆

下式の「剰余定理」に関して、これを満たす多項式 Q(x)と R(x)がただひとつに定まること（一意性）を証明せよ。

P(x)=D(x)Q(x) + R(x)　　ただし、degR(x)<degD(x)で、degD(x)≧1

タグ：剰余定理

★★★☆☆

下に述べる「代数学の基本定理」に関して、$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ が並べ替えを除いて一意であることを証明せよ。

多項式 P(x)が n 次の(n≧1)モニックな多項式のとき、

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n \in$ C（重複可）があって、P(x)＝(x- α_1) (x- α_2)…(x- α_n)と既約分解される。

タグ：代数学の基本定理

★★★☆☆

x^nを$(x-1)^2$で割ったときの余りを求めよ。（n は自然数とする）

タグ：剰余　因数

★★★☆☆

実数係数の n 次方程式$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$がある。この方程式が虚数解$\alpha$を解にもつとき、その共役複素数$\bar{\alpha}$も解にもつことを示せ。

タグ：複素数　共役　高次方程式

2.1.2. 種々の関数

★★☆☆☆

双曲線関数に関する以下の式が成り立つことを確かめよ。

（1）$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$　（2）$\frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x$

タグ：双曲線関数　加法　微分

★★★★☆

双曲線関数は、以下の性質（＊）を持つ。これを証明せよ。

（＊）

双曲線 C：$x^2-y^2=1$に対して、第一象限上の点(a, b)は曲線 C 上にあるとし、次の（イ）～（ハ）で囲まれる領域の面積の 2 倍を t とおく。

（イ）(0, 0)と(a, b)を結ぶ線分

（ロ）(0, 0)と(1, 0)を結ぶ線分

（ハ）曲線 C の(1, 0)から(a, b)までの部分

このとき、$a=\cosh t,\ b=\sinh t$が成り立つ。

タグ：双曲線関数　定義と性質　面積

★★★☆☆

逆三角関数について、以下の微分・積分をせよ。

（1）$\frac{d}{dx}\arctan x$　（2）$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (-a<x<a\,, a>0)$（積分定数 C を用いてよい。）

（3）$\int\arcsin x\,dx$

タグ：逆三角関数　微分と積分

★★☆☆☆

逆双曲線関数について、以下の微分をせよ。

（1）$\frac{d}{dx}\mathrm{arcsinh}\,x$　（2）$\frac{d}{dx}\mathrm{arctanh}\sqrt{x}\ (0<x<1)$

タグ：逆双曲線関数　微分

★☆☆☆☆

逆双曲線関数について、以下の等式を証明せよ。

$$\mathrm{arcsinh}\,x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

タグ：逆双曲線関数

★★☆☆☆

次の関数を、三角関数も逆三角関数も使わずに表せ。

（1） $\cos(\arcsin x)$　　　　　　　（2） $\sin(\arctan x)$

2.1.3.座標空間と数ベクトル

★★☆☆☆

三次元空間上に原点 O と A(1,2,1)、B(-2,-1,1)がある。

（1）　この 3 点 O、A、B からなる平面に対して垂直な単位ベクトルを求めよ。

（2）　ベクトル$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$の張る平行四辺形の面積を求めよ。

タグ：空間ベクトル　ベクトル積（外積）

★☆☆☆☆

平面 H の方程式が次のように与えられたとする。このとき、平面 H のパラメータ表示をパラメータ t_1、t_2 として求めよ。ただし、定数 a,b,c はすべて 0 ではないとする。

$$H : ax + by + cz + d = 0$$

タグ：パラメータ表示　変換

★★☆☆☆

以下の 3 つの平面 H1～H3 は、α、β を適当に選べば共通部分が直線になる。それを求めよ。

$$H1 : 3x + 6y + 9z = 60$$

$$H2 : 2x + 7y - \alpha z = 13$$

$$H3 : 2x + \beta y + 3z = 31$$

タグ：平面の方程式　交線

★☆☆☆☆

方程式$x + 2y + 3z = 0$　と　$3x - y + 2z = 0$　で決まるふたつの平面のなす角 θ（$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$）を求めよ。

タグ：平面のなす角　内積

2.1.4.二変数関数のグラフ

1.4 で述べた通り、省略する。

2.1.5.行列とその演算

★☆☆☆☆

次の正方行列の組 A と B に対して、AB と BA を計算せよ。

（1）$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$　（2）$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&6&4\\1&2&5\end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix}12&11&12\\22&46&46\\12&23&34\end{pmatrix}$

タグ：行列の積　一致と不一致

★★★☆☆

次の条件を満たす 2 次正方行列 A,B,C をすべて求めよ。

（1）$A^2=O$（零行列）　（2）$B^2=E$（単位行列）　（3）$C^2=C$

タグ：行列の取り扱い

2.1.6.線型写像と行列

★☆☆☆☆

次の写像$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$は線型写像かどうか答えよ。以下において、a,b,c は任意の実数を表す。

（1）$f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\b+c\end{pmatrix}$　（2）$f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$　（3）$f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\1+c\end{pmatrix}$

タグ：線型写像の定義

★★☆☆☆

ある写像 F が線型写像であることは、下の（＊）式を満たすことと同値であると考えてよい。これを証明せよ。

$$\mathrm{F}(\lambda v+\mu w)=\lambda F(v)+\mathrm{\mu F}(w)$$

タグ：線型写像の定義変形

★★★☆☆

（1）　xy 平面において、原点を中心に反時計回りに θ 回転させてから直線$y\cos\phi=x\sin\phi$に関して対称に移動させることは、ある直線$y\cos\psi=x\sin\psi$に関する対称移動に一致する。ψ を ϕ と θ を用いて表せ。

（2）　xy 平面において、直線$y\cos\phi=x\sin\phi$に関して対称に移動させてから原点を中心に反時計回りに θ 回転させることは、ある直線$y\cos\psi=x\sin\psi$に関する対称移動に一致する。ψ を ϕ と θ を用いて表せ。

タグ：回転行列　対称移動

2.2. 予想問題セット

数理科学基礎　学期末試験への 5 問

※ 実際の試験は、共通資料から 60%、各教員から 20%ずつとなっています。
あくまで、最後の仕上げとしての 5 題をセレクトしてみました。

設問 I　$x^5 = 1\ (x \in \mathbb{C})$　について、以下の問 1〜問 3 に答えよ。

問 1　根 x を極形式で求め、絶対値と偏角がわかるように複素平面上に図示せよ。ただし、実軸は Re、虚軸は Im で表せ。

問 2　根 x のうち 1 でないものをひとつ選び、これを α と書くことにする。このとき、$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$であることを証明し、この等式が成り立つことが図形的にどういう意味をもつのか、複素平面上で説明せよ。

問 3　$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)$の値を計算せよ。

設問 II　以下の各式を証明せよ。

問 1　$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{b}{a} + \arctan\frac{a-b}{a+b}$　（ただし、$a \neq 0$ かつ$\frac{b}{a} > -1$）

問 2　$\tanh(a+b) = \frac{\tanh a\ + \tanh b}{1+\tanh a \tanh b}$

設問 III　A(2,0,0), B(0,-4,0), C(0,0,3), P(1,1,1)について、以下の問 1・2 に答えよ。

問 1　3 点 A,B,C を通る平面の方程式を求めよ。また、その方程式をパラメータ t_1、t_2 を用いて表せ。

問 2　四面体 P-ABC の体積を求めよ。

設問 IV　次の 3 次正方行列 A に対して、AB=BA を満たす 3 次正方行列 B をすべて求めよ。

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

設問 V　以下の問 1〜4 に答えよ。なお、本大問を解くにあたり連動性に留意せよ。

問 1　2 次正方行列$P = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$の逆行列$P^{-1}$を計算せよ。

問 2　2 次正方行列$A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$に対し、$P^{-1}AP$を計算せよ。

問 3　自然数 n に対し、A^nを計算せよ。

問 4　ふたつの数列a_n, b_nに関する連立漸化式

$$a_{n+1} = 7a_n - 10b_n \qquad b_{n+1} = 3a_n - 4b_n$$

の解で、$a_1 = 3, b_1 = 1$を満たすものを求めよ。

設問は以上である。

3.　【S2 線型代数学①】講義編

今回は共通資料もない、シラバスもおおざっぱ、教科書指定もない、授業は進むということで、結局何なのか、というのがわかりにくいのではないかと思います。特に、授業を聞いている人ほどそう感じるのではないでしょうか。極力、「何をするためのものなのか」を意識して、解説重視で今回は作ってみました。

「授業計画」（数学部会 HP より）

数ベクトル空間を一般化したものである，**ベクトル空間**について学ぶ．また，ベクトル空間の間の写像で**和とスカラー倍の算法を保つ**ものとして**線型写像**を定義する．これは「数理科学基礎」で学んだものの**一般化になっている**．またベクトル空間の**部分空間**，線型写像の**核や像**とその性質について学ぶ．数ベクトル空間の場合，核は**連立一次方程式の解**全体に対応しているが，行列を用いて，それを具体的に求める方法について学ぶ．（太字化は筆者による）

3.1.ベクトル空間と線型写像

◆まず、数ベクトル空間とは？

「数理科学基礎」第 12 講の線型写像を思い出してください。シケプリにこんな問題があったと思います。

次の写像$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$は線型写像かどうか答えよ。以下において、a,b,c は任意の実数を表す。

（1）$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \end{pmatrix}$

この、$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$とか、$\begin{pmatrix} a+b \\ b+c \end{pmatrix}$が、数ベクトル空間です。定義としては、

□ **数ベクトル空間**：座標空間を一般化したもので、n×1 行列全体の集合。

と表すことができます。n＝1 のとき、集合は数直線を意味します。n＝2 のときは座標平面、n＝3 のときは座標空間ですね。いわゆる「3 次元」というやつです。一応、2 次元、3 次元に関しては「幾何ベクトル空間」という言葉もあります。実際に描くことができますからね。では、4 次元、5 次元、n 次元は…、ということですが、3 次元に生きている以上、具体的にイメージできないわけで、これを考察するために「数ベクトル空間」という概念を導入したわけです。

◆ベクトル、という言葉。ベクトル平面とは？

幾何ベクトル（平面ベクトル、空間ベクトル）において、以下の性質が成り立つのはわかると思います。

「ベクトル」の性質

＜ベクトル和＞a, b, c は任意のベクトルとする

（1）$a+b = b+a$

（2）$(a+b)+c = a+(b+c)$

（3）$a+0 = a$ となる、ベクトル 0 が存在する（これを「ゼロ元」という）

（4）$a+b = 0$ となる、ベクトル b が存在する（これを「逆元」という）

＜スカラー倍＞α, β は任意の実数とする

（5）$\alpha(a+b) = \alpha a+\alpha b$（分配法則）

（6）$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$（結合法則）

（7）$(\alpha+\beta)a = \alpha a+\beta a$（分配法則）

（8）$1 \cdot a = a$

さて、これから登場してくる「ベクトル空間」ですが、その集合の要素は「ベクトル」と呼ばれます。その条件は、実は上の 8 つの性質です。実際、今まで考えてきた幾何的なものとは似ても似つかないものですが、それらすべてが「ベクトル」であるため、「ベクトル空間」と呼ばれるわけです。

□ **ベクトル空間（線形空間）**: 上記の条件を満たす元の集合。

ということになります。要するに、抽象的になった、というわけですね。具体例とその検討については授業では触れられていましたが、ここに紙面を割く必要はないかと思います。

【注意】ベクトル空間は線形空間と同じです。参考書によっては後者で議論していることもありますので、自学の際は注意してください。

◆線形写像を、ベクトル空間内で再考する。

同じです。同じ。3 ページにも前回の復習として載せてありますが、「和」「スカラー積」を保つという条件を満たせば「線型写像」というのです。ただし、新しい概念があるのでそれだけ足しておきます。

□ **同型写像**：線型写像 f のうち、f が全単射であるもの。

□ **同型**：V と W の間に同型写像 f が存在するとき、V と W は同型である。これを$\mathbf{V} \cong \mathbf{W}$と表す。

◆部分空間について

□部分空間

W が V の部分空間であるとは、次の（１）～（３）を満たすことである。

（１）0∈W（0 は V のゼロ元）

（２）W の任意のベクトル a, b に対して、a+b∈W

（３）λ∈ℝ、a∈W のとき、λa∈W

やはりここは、数ベクトル空間、それも幾何ベクトル空間で考えてみるのがよさそうです。試しに、3 次元数ベクトル空間$\mathbb{R}^3$について考えましょう。これの部分空間は、{0}、原点を通る直線、原点を通る平面、空間全体です。さらに、部分空間の生成について考えましょう。

□部分空間の生成

（１）部分空間の「交わり」: W1、W2 が V の部分空間であるとき、W1∩W2 も V の部分空間

（２）部分空間の「和」: W1＋W2:={x1+x2 | x1∈W1, x2∈W2}も V の部分空間（3 個以上でも可）

（３）いくつかの元を含む最小の部分空間：$\{\alpha_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \mid a_1 \cdots a_k \in \mathbb{R}\}$も部分空間

たとえば、この定義から「次のベクトルは K（何らかの体）の部分空間に含まれるか」といった問題を作ることができますね。たぶん、後の演習問題に載せていると思います。

あと、（２）について少しだけ補足しておきます。（１）で、「W1∩W2 は V の部分空間になる」ことを述べましたが、「W1∪W2（和集合）」は「部分空間の『和』」（これを「和空間」という）とは違うものです。あくまで和空間 W1+W2 は、W1 と W2 の元を足し合わせたものの集合です。

◆像と核👀

V、W をベクトル空間とする。F : V→W を線形写像とする。このとき、

□ **像**：　ImF ≔ { F(v) | v∈V }

□ **核**：　KerF ≔ { v∈V | F(v)=0 }

であり、

（１）F が全射　⇔　ImF＝W

（２）F が単射　⇔　KerF＝0

（３）F(v)=F(v’)　⇔　v－v’∈KerF　⇔　v = v’ + v”, ∃v”∈KerF

を性質に持つ。

これが持つ意味、なぜこの概念を導入するかについては、次の単元で明らかになりますので、定義と性質は簡単に理解しておいてください。

◆ここまでのまとめ

ここまでは、概念の導入です。具体的な計算処理はこれらを活かして次以降出てくるのですが、ここで導入した概念はなかなか抽象的で、イメージしにくいと思います。ただ、ここが独立で試験に出されるとしてもそれほど難しいことは聞けませんので、演習問題ではこれらの概念を用いた証明問題を中心に構成されています。どちらかというと、これから先の連立方程式の解法がメインになってくるものと思われます。さらに、これからもまだまだたくさん概念が出てきますので、ひとつひとつ自分のものにしていってください。シケプリの末尾に、用語まとめも載せていますので、最終確認の際にはそれを用いてください。では、次へ移りましょう。

3.2.行基本変形を用いた行列計算

◆この章でやること

「行列方程式」を解くことを考えます。これを利用して、連立方程式を解くところまで行きます。そのために行う操作方法を理解し（なぜそういう変形をするのか）使えるように（ある種、機械的に）なることが大切です。

◆基本変形で RREF へ

まずは、行列の基本変形についてです。およそ大切なのは次の 3 つです。

基本変形

□**行和**　ⓘ+=ⓙ*α　：i≠j として、第 i 行に第 j 行の α 倍を加える

□**行積**　ⓘ*α　：第 i 行を α 倍する

□**行換**　ⓘ↔ⓙ　：第 i 行と第 j 行を交換する

用いている記号はこれから先、たまに解説で使うかもしれません。これらの記号は C 言語の代入演算子や演算子の記号です（一応）。では、具体的にどういう操作を加えれば、こういう変形ができるのでしょうか。そのために導入するのが、「基本行列」です。

基本行列

□**行和**：基本は単位行列だが、(i, j)成分だけαになっている

$$U_{ij}(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\alpha&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

□**行積**：基本は単位行列だが、(i, i)成分だけαになっている

$$D_i(\alpha)=\begin{pmatrix}1&&&&0\\&1&&&\\&&\ddots&&\\&&&\alpha&\\0&&&&1\end{pmatrix}$$

□**行換**：基本は単位行列だが、(i, i)(j, j)成分が 0 で、(i, j)(j, i)成分が 1 に入れ替わっている。

$$T_{ij}=\begin{pmatrix}1&&&&&&&0\\&\ddots&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&0&\cdots&&1&\\&&&\vdots&1&&&\\&&&&&\ddots&&\\&&&1&&&0&\\0&&&&&&&1\end{pmatrix}$$

これらをそれぞれもとの行列の「左から」かけてやることで、それぞれの操作を行うことができます。さらに、この操作ができる理由として、以下の定理も成り立ちます。それぞれ証明は割愛しますが、モデルケースを考えてみるとわかると思います。理解しにくければ、試してみてください。

あと、講義では U,D,T の文字で表していたのでそれに従いましたが、参考書によっては異なる文字を用いている場合があります。これは、基本行列を表す文字が特別決まっているわけではないからです。ちなみに、筆者は「ξ」が嫌いなのでαβを用いています。書きにくいじゃないですか…？

基本行列の性質

□$U_{ij}(\alpha)U_{ij}(\beta)=U_{ij}(\alpha+\beta)$
□$D_i(\alpha)D_i(\beta)=D_i(\alpha\beta)$
□${T_{ij}}^2=I_m$　（基本行列のサイズを m としている）
□基本行列はすべて可逆（正則、非特異）であり、

$$U_{ij}(\alpha)^{-1}=U_{ij}(-\alpha)\,,\ D_i(\alpha)^{-1}=D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)\,,\ {T_{ij}}^{-1}=T_{ij}$$

ここまでわかったところで（というか、性質なのでそうなるものなのですが）任意の(m, n)行列 A を RREF 行列に変換するやり方を示していきましょう。

そもそも、RREF 行列とは何かですが、既約行階段形[Reduced Row Echelon Form]です。以下のような行列のことです。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ast & \ast & 0 & \ast & 0 & 0 & \ast \\ & 1 & \ast & \ast & 0 & \ast & 0 & 0 & \ast \\ & & & & 1 & \ast & 0 & 0 & \ast \\ & & & & & & 1 & 0 & \ast \\ & & & & & & & 1 & \ast \\ & & & & & & & & \\ & & O & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

すなわち、

① 1 行目から 1 行ずつ下がるごとに、各行の最も左にある 0 でない成分の位置が右にずれて、最後には 0 行ベクトルばかりになる。

② 各行の一番左にある 0 でない成分は、存在すれば 1 に等しく、その成分を含む列の他の成分はすべて 0 である。

を満たす行列のことです。一応、同様のものが既約「列」階段形という名前で存在するようですが、今のところ既約「行」階段形だけしか使わないようです。

ここで、講義では重点的には導入していませんでしたが、ここで紹介しておくのが理解しやすいのではないかと思いますので、「階数[Rank]」を導入しておこうと思います。後で、使うことがあります。(そのやり方、講義では言ってなかったと思いますが)

□**階数[Rank]**：行列 A に対して、行列の基本変形を加えることによって RREF 行列にしたとき、各行の最も左にある 0 でない（つまり 1）（上図でいう赤い 1 のこと。これを「**かなめ**」という）成分の個数。または「**軸列**」の個数と考えてもよい。

さて、A（任意）→RREF にする話に戻りましょう。そもそも、A=O のとき A 自体が RREF ですので、以下 A≠O のときを考えます。

変形の手順◉◉

（1）左から順に見て、0 以外の成分をひとつでも含む最も左の列番号を j_1 とします。つまり、$j_1>1$ ならば、第 $1\sim j_1-1$ 列はすべて 0 ばかりの列であることになります。

（2）さて、第 j_1 列の 0 でない成分を 1 つ選びます。上の成分である必要はありませんので、この後の操作を考えると 1 があればベストでしょう。この成分を$(i_1, j_1)=c_1$ とおきます。$i_1>1$ のときは、【行換】を利用して第 1 行と i_1 行を交換します。すると、j_1 列は一番上が c_1 になるはずですね。

※【行換】左からT_{1,i_1}をかける

（3）この c_1 を、はじめの「かなめ」にしたいわけです。そこで、$c_1\neq 1$ のときは、【行積】を利用して 1 にしてやります。

※【行積】左から$D_1(\frac{1}{c_1})$をかける

（４）ここで、j_1 列の最上の行が 1 になりました。他の成分はすべて 0 でなければいけません。そこで、「$(1, j_1)$成分を軸にして j_1 列を掃き出す」という操作を行います。いま、j1 列の 2 行目以降を $b_2, b_3, \cdots, b_m$ とおきます。やるべきことは、「1 行目の b_2倍を 2 行目から引き、1 行目の b_3倍を 3 行目から引き、…1 行目の b_m倍を m 行目から引くこと」です。そのためには【行和】を使えばよいのです。

※【行和】左から$U_{m,1}(-b_m)\dots U_{2,1}(-b_2)U_{1,1}(-b_1)$をかける（順番は任意）

（５）これを繰り返せば、やがて RREF ができるはず。（ここにきて適当でごめんなさい）

さて、ここから行列方程式を解くためにはどう生かしていけばよいか、ということになりますね。まず、この基本変形の手順は今後かなり使う機会があるので、計算練習を積んでおいてください。項数が多いほど行列の積は複雑になりますので、慣れておくとよいと思います。

◆行基本変形による行列方程式の解法

定理

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$,$\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$が与えられたとき、$\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$に関する方程式$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$を考える。

行列 A とベクトル$\mathbb{b}$をあわせてできる拡大係数行列$\tilde{A}$に対して行基本変形を行い、RREF にしたとき、拡大係数行列のもと A、$\mathbb{b}$だった部分が A’、$\mathbb{b}'$になったとすると、解集合$\mathbb{x}$は$A'\mathbb{x} = \mathbb{b}'$をみたす。

さて、ここで具体的な連立方程式の解き方について、簡単に紹介しておくことにします。というのも、今回の「試験」で何を出すか、と言われれば**行列範囲においては**やはり連立方程式を解くか、逆行列を求めさせるか、それがあるかどうか判定させるか、といったところになるでしょう。すなわち「掃き出し法」が絡んだ問題がおそらく大半になるのではないでしょうか。となると少しでも、具体的なやり方について示しておくことが得策と思われます。ここからの「方法論」は、講義では重点的には扱っていませんので注意してください。

なお、これから具体例を示していくのですが、ただ読み進めるのではなく、自分で計算してみてください。いい練習になるはずです。

では、具体的にいきましょう。次の連立方程式を解け、と言われたとします。配布されたプリントよりも、もうちょっと単純なものを考えてみましょう。

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + z = -1 \\ -2x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

手順はこうです。

連立 1 次方程式の解法手順（1）

① 拡大係数行列を作る

② 行基本変形を用いて RREF 行列にする

$$\begin{cases} x+y=3 \\ -x+z=-1 \\ -2x-y+2z=-4 \end{cases}$$

$$➤\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$➤\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$➤\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$$

ということになります。RREF への変形手順は省略しました。次に、連立 1 次方程式が解を持つか、ということになります。これは 3 つ目から 4 つ目へということです。もちろん、ひとつひとつ連立式に直せば、3 つ目の式は

$$\begin{cases} 1x+0y+0z=1 \\ 0x+1y+0z=2 \\ 0x+0y+1z=0 \end{cases}$$

ということですから、解は 4 列目の$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$になります。では、次に解が【不定】になる場合について、具体例を挙げてみます。（1）の変形手順を用います。

$$\begin{cases} x-y-3z=1 \\ 2x+y=2 \\ x-z=1 \end{cases}$$

$$➤\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$➤\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$➤\begin{cases} x-z=1 \\ y+2z=0 \end{cases}$$

$$➤\begin{cases} x=z+1 \\ y=-2z \end{cases}$$

$$➤\begin{cases} x=\alpha+1 \\ y=-2\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

というように、パラメータ α を用いて解を表現することができます。先ほどの例とは違い解がひとつには定まりませんが「無数に存在する」場合を【不定】といいます。連立式に戻さずに解を直接求めるやり方もあるのですが、先に「解が存在しない」場合【不能】を考えます。

$$\begin{cases} x-y-3z=1 \\ 2x+y=1 \\ x-z=1 \end{cases}$$

これは、先ほどの連立式の定数項のみを変えた場合です。同じように変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、0=1（3 行目）となってしまいます。この場合は、【不能】であるといえます。さてここで、

違いを考えると次の条件が浮かび上がります。

定理

連立方程式の解が存在する条件は、係数行列の階数と拡大係数行列の階数が等しいことである。すなわち rankA＝rank[A, b]である。

申し訳ありませんが、本シケプリでは証明は省略させていただきます。必要十分条件ですので、両矢印を証明すればできるのですが、紙面の都合上。ちなみに、上で示した【不能】の式は、rankA=2 に対して rank[A, b]=3 ですので、解が存在しないといえます。

では、【不定】の例について、パラメータ表示へ持っていく方法論について示します。これは、筆者が本シケプリを執筆する際に主に用いている参考書（まえがき参照）の筆者が考案した方法だそうです。

連立 1 次方程式の解法手順（2）【不定】のとき

③ RREF の零でない行ベクトルを、その「かなめ」が対角成分になるように、n×(n+1)行列の中に並べ、対角成分のないところには-1 をかく

④ 解は、右端の列ベクトルを「特殊解」、③で-1 を書き足した列ベクトルを「基本解」としたものであり、空白の部分はすべて 0 としておく

□**基本解**：パラメータをつけた列ベクトル

□**特殊解**：パラメータをつけていない列ベクトル

ちょっとわかりにくいと思いますので、別の例を挙げてみます。めんどくさいのでもう RREF にしておきました。

$$\begin{cases} x + 2y + 3w = 4 \\ z + 5w = 6 \end{cases}$$

$$➤ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

一応確認として、rankA=rank[A, b]=2 ですので、解はありますが、変数 4 つに対して式 2 つですので、解は定まらないことがわかります。では、③と④の変形を行うと、

$$➤ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ & -1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ & & & -1 & \end{pmatrix}$$

$$➤ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ & 0 & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$➤ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、解が得られます。このやり方は具体的な数値計算問題を解くときに役に立ちますので、知っ

ておくといいと思います。さらに、次の公式もあります。検算などで使えます。

次元公式

連立方程式に対して、

（必要なパラメータの個数）＝（変数の個数）－（係数行列の階数）

が成り立つ。また、

（必要なパラメータの個数）は（基本解の個数）であり、（解の自由度）という。

具体的なやり方については、このくらいでしょうか。

◆正則性の判定と逆行列の求め方

もうひとつ、行基本変形を用いて行列変形をする具体例として、逆行列を求めるやり方があります。一応ですが、「逆行列」「正則」について確認しておきましょう。2×2 行列に関しては数理科学基礎のときに、やっています。やり方については、前のシケプリを参照してください。

□**逆行列（拡張定義）**：n 次正方行列 A に対して、AB＝BA＝In をみたす行列 B のこと。A^{-1} と表す。In は n 次の単位行列である。

□**正則行列**：逆行列が存在する正方行列のこと。

では、n 次に拡張したこの場合において、正則であるかをどう判定し、どうやって逆行列を求めればよいのか、ということになります。

正則性の判定と逆行列の求め方

① n 次正方行列 A に対して、行列(A | In)を行基本変形により RREF にする

② できあがった RREF 行列(A' | B')で、A'=In のとき A は可逆で A^{-1}＝B'、そうでなければ不可逆

と、シンプルであります。この根底には、以下の性質があります。（証明略）

正則行列の性質

n 次正方行列 A について、以下はすべて同値である。

① A は正則行列である

② rankA=n

③ A の RREF 形は In である

ということで、例を示します。

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$➤\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$➤\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

とすることができ、めでたく A'が I_3 となりましたので、B'が A の逆行列となります。

さて、数理科学基礎のときの逆行列の求め方を思い出してください。detA や、余因子行列なんて、覚えていますか？2 次であれば、あのやり方の方が圧倒的に簡単です。そして、3 次以上についてももちろん行列式は存在しますので、正則判定として detA≠0 というのもあります。3 次以上の行列式の求め方については慣れるまではややこしいですし、講義で紹介されていませんので、おそらく A セメスターで学ぶことになると思います。ここでも省略します。

◆連立式の解の多様性

講義で紹介していた内容ですが、少し趣旨を変えたタイトルをつけました。筆者自身、講義を聞いていてこの内容に入ったとき、急に Kernel が復活してきて頭の中に？がついたのですが、筆者なりの理解を示しておきます。（このあたりから、説明が本来とそれている可能性があります…）

これからの説明の前に、もう一度像と核を見直してください。さて、変数 n で式 m 個の連立方程式（つまり、係数行列 A が m, n となっている）について、

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

を 2 つの解であるとします。このとき、

$$Ax' - Ax = A(x' - x) = b - b = 0$$

であるから、$x' - x = v$とおけば vは KerA となるから、連立方程式の解全体の集合は、

$$\{x + v \mid v \in Ker(A)\}$$

で与えられます。さらに、これを

$$\begin{cases} x + 2y + 3w = 4 \\ z + 5w = 6 \end{cases}$$

$$➤\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$➤\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の例（先ほど挙げたものです）で見てみましょう。ここで、係数行列 A$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$を左からかける操作を写像 F_A とします。するとこれは、もともと$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$だったものを、$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$に変換したといえま

す。すなわち$F_A:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$と表せます。この逆、$\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$から$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$を求めようとするのが、連立方程式を解く、ということで、これは写像 F_A^{-1} という変換を加えたことになります。これを表すと、

$$F_A{}^{-1}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}=\left\{\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\0\\5\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\\6\\0\end{pmatrix}\ \middle|\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}=\begin{pmatrix}4\\0\\6\\0\end{pmatrix}+KerF_A$$

ということになります。なんだかややこしいですが、意味を理解しておいていただければと思います。（後でこの続きがありあますので）

◆ぼやき

ここからが線型の闇ですね。できるだけ噛み砕いて説明してみましたが…。がんばっていきましょう。「概念」を理解し、具体的な場合にどう適用されるか、処理できるようにしてください。ここを頑張ると差が付きます！（逆か…）

3.3.ベクトル空間の基底と線型写像の行列表示

◆この章でやること👀

3 次元の座標空間を扱うとき、**座標空間内の平面に新たに座標を設けて座標平面のように考える**ことができます（あまり経験はないかもしれませんが、できそうでしょ？）。それと同様に、「基底」という概念を用いることで**ある部分空間内に座標を導入します**。これにより、数ベクトル空間のように**「行列」を用いて線型写像を処理する**ことができます。こうして行列に変換された線型写像は「表現行列」と呼ばれるのですが、これは関数と同様に座標によって変わります。つまり、基底を取り換える、ということで、これを「基底の変換行列」といいます。

ここまでが、一連の流れなのですが、実は S2 ターム講義では最後の「変換行列」までやっていませんので、ここでも「表現行列」のところまで解説します。

ここから特に、概念的な部分に入ります。部分空間などイメージしにくいですが、何より上述したのが目標だということを常に頭に入れて、これから読み進めてください。

◆基底と生成系

理解しにくいかもしれません。ゆっくり立ち止まりながら読んでいただければと思います。

まずは、「基底」について定義を与えることから始めます。

□**基底**：一般のベクトル空間を$\mathbb{R}^n$と線型同型写像で結ぶもの。これにより一般のベクトル空間に関する問題が数ベクトルのものに、線型写像に関する問題が行列のものに、それぞれ翻訳される。

これではよくわからないと思いますので、具体的にいきましょう。2 次元のベクトル全体がなす空間$\mathbb{R}^2$を考えます（座標平面ですね）。ここから任意の元$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$を取り出すと、

$$\boldsymbol{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

を用いて、

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e_1}+x_2\boldsymbol{e_2}$$

と表すことができます。そもそも、$\mathbb{R}^2$の元ならば、どんなものでもこのように表すことはできます。直感的に考えればこれが基底です。ベクトル空間の表示方法を用いて抽象化すると、次の概念を定義することができます。

張る空間・生成系 ベクトル空間 V 上の$\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\cdots,\boldsymbol{v_n}$に対して、 $W=\{\,\mu_1v_1+\mu_2v_2+\cdots+\mu_nv_n \mid \mu_1\cdots\mu_n\in\mathbb{R}\,\}$ は V の部分空間であり、これを$\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\cdots,\boldsymbol{v_n}$の「張る」（生成する）部分空間という。また、$\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\cdots,\boldsymbol{v_n}$は W の生成系であるという。これを$<\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\cdots,\boldsymbol{v_n}>$と表す。

これを見て、生成系と基底の違いはどこなのか、と思うのではないでしょうか。$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e_1}+x_2\boldsymbol{e_2}$の式

を見ても、生成系の定義の式と同じように見えます。では、もうひとつ「一次独立」という概念を導入することで、違いを表現します。

“基底であるとは、生成系かつ一次独立であることと同値である”

これを直感的にいえば、基底というのは「無駄のない生成系」といえます。あとでちゃんとした一次独立の定義を述べますが、高校のベクトルで⊿OAB に対して「ベクトル OA とベクトル OB は一次独立だから…」という記述を書かされた覚えがあると思います。このイメージを持っておけばよいと思います。確かに、W をいくつかの v で表すとき、別に一次独立でない（たとえば、同じベクトル。つまり、「かぶっている」という感覚）ベクトル v を用いても生成系として表現することができます。しかし、それでは「無駄がある」ので、無駄のない形で空間を表現するのが、基底であるということです。

またここで、せっかくですのでひとつ定義を増やしておきます。このタイミングがわかりやすいかと思います。

□**次元[dimension]**：部分空間 W に対して、基底をなすベクトルの個数 m のこと。dimW=m と表す。

さっき$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2}$で表したのは「平面」でした。だから「二次元」と呼ばれるということです。もう少し、ここで紹介した概念を今までやったことに活かしましょう。前ページで書いていたことについて、

$$\left\{\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\0\\5\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\\6\\0\end{pmatrix} \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}=\begin{pmatrix}4\\0\\6\\0\end{pmatrix}+KerF_A$$

というのがあったかと思います。ここで、

$$\left\{\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\0\\5\\-1\end{pmatrix} \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}=KerF_A$$

ですから、$\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}3\\0\\5\\-1\end{pmatrix}$は $\mathrm{KerF_A}$ の生成系であるといえます。基底かどうかは、また一次独立の話をしてからですね。（要は、この 2 つのベクトルが一次独立であればよいのです。）

さらに、さきほど基底の定義を述べたときに、「これにより一般のベクトル空間に関する問題が数ベクトルのものに、線型写像に関する問題が行列のものに、それぞれ翻訳される。」というよくわからない一文を最後につけてありましたが、これについて見ておきます。

V をベクトル空間、$\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\cdots,\boldsymbol{v_n}\in\boldsymbol{V}$に対して、$\mathrm{s}=(\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\cdots,\boldsymbol{v_n})$とおきます。このとき、

$$L_S:\mathbb{R}^n\to V,\qquad (\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\cdots,\boldsymbol{x_n})^T\longmapsto \boldsymbol{x_1}\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{x_2}\boldsymbol{v_2}+\cdots+\boldsymbol{x_n}\boldsymbol{v_n}$$

というように、s の定める**「一次結合写像」**を作ることができます。で、このとき Ls は$\mathbb{R}^n$からVへの線型写像であることが示されます。証明は省略しますが、要するに Ls(x+y)=Ls(x)+Ls(y)やスカラー倍の証明（過去にもやってきた「2 つの条件」をクリアさせる証明法）をすればよいのです。

さて、ここで「像」と「核」の概念を再び持ち出してみます。まず、s の写像に対して、Ls が作る

像すなわち ImLs=< $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ >となります。次のことを理解してください。

特に、Ls が

全射　⇔　$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$が V の生成系
単射　⇔　KerLs＝{0}

まず全射のとき、写像の「先」の要素は s からすべて対応していますので、V の生成系であるというイメージはわきやすいかと思います。一方単射のとき、「先」の要素 1 つにつき、もとの要素からの手が 2 本以上集まっていないわけです。少し単射について、視点を変えてみます。

単射

写像 F:U→V について、任意の u_1, u_2∈U に対して、$F(u_1)＝F(u_2)$が成り立つならば、必ず $u_1＝u_2$ が成り立つとき、F は単射である。

数理科学基礎のとき、線型写像の「和」「スカラー積」の証明のところで写像 F(0)＝0 になることを示したと思います。これを自明としておきます。ここから、Ls(x)=Ls(y)とおくと、Ls(x-y)=Ls(x)-Ls(y)=0 となるので x-y∈KerLs=0 であり、x=y なので Ls は単射。一方、Ls(0)=0 で、Ls(x)=0⇔x=0 ですので、KerLs=0 となります。略証ですが、簡単に示しておきました。

　この Ls を、「線型写像」から「行列」に翻訳していきます。まず、ここまでの流れから、$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ が **V の基底であることは、Ls が線型同型写像であることと同値**です。この Ls というのは、$\mathbb{R}^n \to V$ というものでした。ここで、$(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \cdots, \boldsymbol{x_k})^T \mapsto \boldsymbol{x_1 v_1} + \boldsymbol{x_2 v_2} + \cdots + \boldsymbol{x_k v_k}$という変形を見直してください。これは、次の変形をしたのと同じだと考えることができます。すなわち、

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{pmatrix}$$

という行列を作ると、V=$\mathbb{R}^n$のとき A∈$M_{n,k}(\mathbb{R})$であり、

$$A\mathbb{x} = (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_k)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

の計算をしたのと同じです。（新たに k を設定しています。）つまり、線型写像 Ls は、行列 A を列ベクトルに左からかける、という行列の操作（F_A と表すことにします）に「翻訳」されたのです。ざっと言えば、こんな感じになります。

　さらにこのパターンについて、k=n とすれば、A は n 次正方行列となり、$v_1 = e_1$，$v_2 = e_2$，$\cdots v_n = e_n$とすると、$e_1 \dots e_n$は$\mathbb{R}^n$の基底のひとつになります。この e は、今まで 2 次や 3 次のとき「座標軸」として使ってきたものをイメージしてください。2.3 項のはじめでも導入に用いたものです。これを**標準基底**とよびます。この場合、正方行列 A は In となります。なので、F_Aは全単射であるといえます。

◆一次独立

ここまでで、基底や生成系の定義について簡単に述べ、性質についても少し紹介してきました。その中で少し、一次独立という概念がすでに出てきていましたので、ここではまずその定義を与えるところから始めます。先ほども述べたように、「⊿OAB の…」の具体例をイメージしておけばよいと思います。

□一次独立[linearly independent]：$\mu_1 \cdots \mu_n \in \mathbb{R}$として、$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n = 0$のとき、

$\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$しかないことを、$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$は一次独立であるという。そうでない場合を、**一次従属**であるという。

ということで、一次独立の定義を与えておきました。では、一次独立についていろいろ見ていきましょう。まずは一次独立かどうかの判定についてです。以下の命題をもとに考えます。

一次独立と階数

K^nのベクトル$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_m}$が一次独立であることは、n×m 行列$[\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_m}]$の階数が m に等しいことと同値である。

ここでは、証明は省略しておきます。

次に、一次独立、一次従属の違いを補題として示しておきます。

補題

$v_1 \sim v_{k-1}$が一次独立のとき、

① $v_1 \sim v_k$が一次独立　⇔　v_kが$v_1 \sim v_{k-1}$の一次結合で表せない

② $v_1 \sim v_k$が一次従属　⇔　v_kが$v_1 \sim v_{k-1}$の一次結合で表せる

一次結合とは、$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_{k-1}$のような感じです。

拡張して、$v_1 \sim v_k$が一次独立　⇒　どの一部も互いに一次独立である

証明はこれも省略します。後の演習問題のところでとりあげます。というのも、この分野で「具体的な計算」などを問わせるときあまり問題パターンができないことから、おそらく定義や性質の証明など抽象的なところが中心になると思われます。重点的に対策しておくべきでしょう。

最後に、生成するベクトル空間と基底の関係について、まとめておきます。

まとめ

ベクトル空間 V（φ を除く）は、有限個の一次独立なベクトルで生成され、この生成するベクトルを V の基底という。

さっきやってきたことですね。

◆生成系→基底

主な性質は、こんなところでしょうか。さて、ここで少し基底の求め方について、数ベクトル空間で見てみましょう。実際、数ベクトル空間の生成系から基底をとるとり方は掃き出し法と関係があるのですが、具体的に示してみます。

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & 3 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

この空間を構成するベクトル、つまり生成系を縦で見てみてください。この 6 つのベクトルがすべて一次独立なら、生成系は基底になるのでした。しかし、わかりやすい反例として、一番左と二番目のベクトルを見ると（それぞれ、$\mathbb{a}_1,\mathbb{a}_2$）$\mathbb{a}_2=-2\mathbb{a}_1$になっています。ということで一次従属です。もしかしたら、他にもあるかもしれませんが、この形ではわかりにくいですね（$\mathbb{a}_2$でも言われて初めて気づいたのではないでしょうか)。

これを RREF にすると、次のようになります。

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで約束は、左から見ていくことです。すると早速、$\mathbb{a}'_2=-2\mathbb{a}'_1$になっていることにサルでも気づくでしょう。そして、$\mathbb{a}'_3$は$\mathbb{a}_1$では表せず、$\mathbb{a}'_4$も同様であるといえます。ここから、$\mathbb{a}'_1,\mathbb{a}'_3,\mathbb{a}'_4$は一次独立であるとわかります。そして、RREF にすると、$\mathbb{a}'_5=2\mathbb{a}'_1+\mathbb{a}'_3$, $\mathbb{a}'_6=-\mathbb{a}'_1+3\mathbb{a}'_4$であることがわかりやすいですね。

しかしそもそも、A'で成り立っているこれらの関係は、A に戻しても成り立つのでしょうか。一応確認しておきましょう。ここで、A'を作るためにいくつかの基本行列を左からかけるわけですが、これをまとめて P としておきます。すると、A'=PA が成り立ちます。この逆方向の変形をするには、P の逆行列を考えて A=P^{-1}A'とすればよいわけです。こうして、それぞれの$\mathbb{a}'_k$ベクトルに P^{-1} をかけて変形すれば A においても、同じことがいえると示せます。

さて、こうして RREF にすることでどのベクトルどうしが一次独立なのかを示すことはできましたので、この例では$<\mathbb{a}_1,\mathbb{a}_2,\dots,\mathbb{a}_6>$の基底は$\mathbb{a}_1,\mathbb{a}_3,\mathbb{a}_4$であると、わかったわけです。15 ページで「次元」を導入しましたが（ちなみに講義では、この回で導入されました）基底のベクトルが 3 つということは、dimA=3 である、といえますね。

◆部分空間と基底の存在

これから考えていくのは、空間と部分空間で基底がどういう関係を持つのか、ということです。先に考えたいことを示しておきます。

基底の存在

V：有限個の元を基底に持つベクトル空間とし、W⊂V とする。このとき、部分空間 W は有限個の基底を持つ。…(#)

この後がんばって証明して得られることは、一見すると「当たり前」のことです。それを証明している、ということをあらかじめわかっておいてください。もしわからないなと思ったら、この項の最後の枠だけ確認すれば十分かもしれません。

まずは、上のことを証明するために補題を用意しました。

補題

ベクトル空間 V に$v_1 \sim v_k$が含まれていて、その部分空間に含まれる$w_1 \sim w_l$が$v_1 \sim v_k$の生成系に含まれるとき、すなわち、$v_1 \sim v_k \in V$, $w_1 \sim w_l \in < v_1, \dots, v_k >$のとき、
$l > k$ならば、$w_1 \sim w_l$は一次従属である。

後でもう一度用いる例なのですが、二次元の平面を考えてみてください。x と y の座標軸さえとれば、平面上のすべての位置を表せます（別に斜交平面でもいいですが）。だから OX と OY はベクトルとして一次独立であるといえます。しかし、もう一本ベクトルを導入すればこれは一次従属になってしまいます（OX と OY で表せる、ということです）。

このイメージを拡張したのがこの補題です。k 個のベクトル v で生成される生成系にℓ個のベクトル w が含まれている、といったところでℓが k より多い（さっきは 2 次元に 3 本目のベクトルを加えようとしたのでしたね）わけですから、ℓ個の中でかぶっている、一次従属なベクトルがあることになります。これを証明するわけです。（一次結合写像を用いるのですが、ここでは省略します。）

この証明により、一次独立な w（つまり基底）を作りたければ、k≧ℓであることが必要になりますから、**V が k 次元なら、その部分空間 W は高々k 次元である**、と結論づけられます。（この部分の議論はかなりおおざっぱにしています。ご注意ください。）

◆rank の表現

階数[rank]の定義は、8 ページで述べていますがそれ以外にもいくつか性質を持っています。ここでは、それらを挙げておこうと思います。

階数の性質

rankA は以下の性質も持つ。

① A の列が生成する$\mathbb{R}^n$の部分空間の次元に等しい。$\dim\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \dim\{Im\ F_A\}$

② $n - \dim\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\} = n - \dim\{Ker\ F_A\}$

③ Aの列のうち一次独立なものの個数の最大値

④ Aの列の極大一次独立系の元の個数

…A の列をいくつか一次独立であるように選び、もうひとつどれを加えても一次従属になる形

ここでは、紹介にとどめておきます。講義でもたしか紹介しただけだったはず。

◆線形写像の行列表示

これが最後の範囲になります。

まず、ベクトル空間 V,W と線形写像$f: V \to W$をおきます。V の基底を$B_V: \{v_1, \dots, v_n\}$ととると、線形同型写像

$$\varphi: \mathbb{R}^n \to V,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\, v_j$$

が得られます。いわば一般の n 次元空間の座標を、基底に基づいてφの変換をした、というイメージでしょうか。同様に W の基底$B_W: \{w_1, \dots, w_n\}$ととると、線形同型写像

$$\psi: \mathbb{R}^m \to W,\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \mapsto y_1 w_1 + \cdots + y_m w_m = \sum_{i=1}^{m} y_i\, w_i$$

を得ます。ここで、V から W への変換は先ほど f と定義しました。

次に、V や W の「コピー元」である$\mathbb{R}^n$と$\mathbb{R}^m$を通して f を考えてみるとどのように表現できるでしょうか。j=1~nとして、$f(v_j)$は W 上に移ります。W 上にあるということは、基底B_Wを用いて、

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_j$$

と書くことができます（$a_{ij} \in \mathbb{R}$）。このとき、φで$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$から移ってきた

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\, v_j = v \in V$$

に対して、

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \right) w_i$$

となります。これは$\mathbb{R}^n$上の$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$を、$\varphi$と$f$を用いて W 上に変換してきたわけです。ここで、$a_{ij}$の持つ意味を考えます。そして最右辺を見ると、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$によくわからない a なるものをかけて、ψを用いて W 上に変換した、とみることができます。すなわち、下図でいう K^n（R と同じと考えて差し支えありませんここでは）から W に持ってくるのに、右回りできたのが右辺、左回りできたのが左辺だった、ということです。

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & K^m \arrow[d, "\psi"] \\ V \arrow[r, "f"] & W. \end{tikzcd}$$

ですので、行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} l$$

に付随する線形写像$f_A(x) = Ax$を定義することができます。この A を、基底$\boldsymbol{B_V}, \boldsymbol{B_w}$に関する f の**表現行列**または**行列表示**と呼びます。

これは何を意味するのでしょうか。その答えが、この章の一番初めの節で書いた「線形写像を行列により処理する」ということです。もともとあった V→W の f は線形写像で、確かに変化することはわかりますがこれをどう処理すればよいのか、その実態はよくわからないと思います。イメージしづらいこの f を、f_Aで考えるとこれは単に行列 A に付随する線形写像ですから、A をかけるだけということでイメージもしやすいし、これを用いて処理をすることもできそうです。これが、この章で「基底」を定義し、それに準ずる形で「生成系」「一次独立/従属」を定義し、さらに「表現行列」まで持ってきたゆえんです。

これも初めの項で書いたことですが、表現行列は基底に依ります。赤文字部分を忘れないようにしてください。そしてこれを変換する、というのが次に学ぶことですが、これは A セメスターですね。

そして、表現行列の「合成」について、触れておきます。上に図を書きましたが、それを拡張してみました。この図からわかるように、基底B_V, B_Xに関するf, f'の表現行列は BA（行列の積）になります。

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[d] & K^m \arrow[r, "f_B"] \arrow[d] & K^\ell \arrow[d] \\ V \arrow[r, "f"] & W. \arrow[r, "f'"] & X \end{tikzcd}$$

もうひとつ、最後に定義を述べます。

線形写像の階数

φ：V→W が線形写像のとき、rank φ :=rankA　ただし、A は φ の表現行列。

さらにこのことから、表現行列は基底によるが、その rank は一定であるということもわかります。

4.【S2 線型代数学①】演習例題編

ここからは演習問題です。「で、結局試験で何出るん？」とよく聞かれますので、ある程度でそうなパターンを特に過去問や、他クラスの数理演習の教材から集約しました。

このクラスの演習の教材は上坂先生の例のサイトにありますので、そちらも目を通しておくとよいと思います。難しいですが、いい問題がそろっていると思います。

4.1.標準演習

4.1.1.基本計算問題

【例題 1】純粋な RREF 変形

1. 次の行列を, 行基本変形を何度か行うことにより被約行階段形の行列に変形せよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -7 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

行基本変形の過程は, 左からかける基本行列を記号で示し, 例えば $\xrightarrow{U_{13}(3)\times}$, $\xrightarrow{D_2(-1)\times}$, $\xrightarrow{T_{23}\times}$ のように一段階ずつ記せ. ただし, 例えば $U_{13}(3)$, $U_{23}(-2)$, $U_{43}(5)$ のように, $U_{ij}(\alpha)$ の形の行列で j が等しいものをかける操作を連続して行う場合は, まとめて $\xrightarrow{U_{43}(5)U_{23}(-2)U_{13}(3)\times}$ のように記してよい.

注 基本行列の記号は次の通りとする (本問では 4 次正方行列とし, 下の n は 4 とする).

$U_{ij}(\alpha)$ $(1 \leqq i, j \leqq n,\ i \neq j;\ \alpha \in \mathbb{R})$ — 単位行列の第 (i,j) 成分を α に変えた行列

$D_i(\xi)$ $(1 \leqq i \leqq n;\ \xi \in \mathbb{R},\ \xi \neq 0)$ — 単位行列の第 (i,i) 成分を ξ に変えた行列

T_{ij} $(1 \leqq i, j \leqq n,\ i \neq j)$ — 単位行列の第 (i,i), (i,j), (j,i), (j,j) 成分をそれぞれ 0, 1, 1, 0 に変えた行列

★☆☆☆☆

【分析】夏学期第 1 問で出された問題ですので、このタイプが出やすいかと思います。（シケ対任務不履行により直近の過去問が手に入りませんでした。そのため直近の傾向はわかりません。申し訳ありません。）このタイプは計算問題の一番基本になります。本番も計算中心ですから、このレベルを確実に合わせられるように、RREF 変形は確実に理解し、使いこなす（ミスしないように！）ことが求められます。同様の問題をいくつか入れておきます。

【類題 1.1】

次の行列 A に下の各(i)で指定された行変形を施した結果できる行列 B(i)と、P(i)A=B(i)となる行列 P(i)を i=1~5 に対してそれぞれ求めよ。

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&-1&1\\0&1&-2\\1&2&0\end{pmatrix}$$

(1) 第 2 行を 3 倍する

(2) 第 1 行と第 3 行を入れ替える

(3) 第 4 行に第 2 行の 2 倍を足す

(4) 第 2 行の 2 倍を第 1 行に足した後、第 1 行を第 4 行に足す

(5) A の第 1,2,3,4 行をそれぞれ B の第 4,1,2,3 行とする

★☆☆☆☆

【類題 1.2】

次の行列の階段行列とランクを求めよ。

(1)$\begin{pmatrix}-2&-4&-2&5\\3&1&8&2\\1&-4&7&9\end{pmatrix}$　　(2)$\begin{pmatrix}5&10&-20&11&-8&37\\2&4&-8&5&-5&15\\-3&-6&12&-6&3&-14\\4&8&-16&9&-7&31\end{pmatrix}$

★☆☆☆☆

【例題 2】連立方程式への応用

次の連立 1 次方程式を解け。

(1)$\begin{cases}3x+2y+3z=13\\4x+5y+10z=23\\2x+2y+4z=10\end{cases}$　　(2)$\begin{cases}5a+10b-10c-4d+13e=-7\\a+2b-2c+d+8e=-5\\-2a-2b+6c+9d+15e=-6\\2b+2c+8d+22e=-10\\-5a-6b+14c+17d+22e=-7\end{cases}$

★★☆☆☆

【分析】連立方程式を解くことは RREF 変形に毛の生えたようなものですので、計算問題としても出しやすいと思います。このタイプは検算もしやすいですから、ぜひ代入して確認したらいいと思います。それにしてもさっきから(2)はやりすぎですね、計算ミスありえる…。

一部改変したのは(2)の文字です。すべて添え字（もともとは x1〜x5）にするのは非常に面倒ですので、手を抜きました。

【類題 2.1】

(1) 次の連立 1 次方程式の解を行変形によってすべて求めよ。

$$\begin{cases} 3x - 4y + z - w = 0 \\ x - 2y - 3z - 3w = 0 \\ x - y + 2z + w = 0 \end{cases}$$

(2) 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x - 4y + z - w = a \\ x - 2y - 3z - 3w = -1 \\ x - y + 2z + w = 2 \end{cases}$$

が解を持つための a の値を求めよ。

(3) (2)で得た解を持つ連立式の解をすべて求めよ。

(4) 4 つの 3 項数ベクトルのなす集合

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

の部分集合 T で、次の条件を満たすものを一つ選び、それを証明せよ。

条件：T は 1 次独立で、S＼T のどのベクトルを T に付け加えても 1 次従属になる。

★★★☆☆

【例題 3】逆行列への応用

次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

★★☆☆☆

【分析】これも基本パターンです。ここまでの 3 つの「基本問題」から、どれかは出ると思います。これが中心になれば、いいのですが…。どれほどの比率でしょうか。

【類題 3.1】

2.　3 次正方行列 B があり，B に次の操作を (a) から (g) の順に行ったところ単位行列になったとする．このとき B の逆行列を求めよ．また，B を基本行列の積として表せ．

(a) 第 1 行を第 2 行に加える．

(b) 第 1 行の -2 倍を第 3 行に加える．

(c) 第 2 行に $\frac{1}{2}$ をかける．

(d) 第 2 行の -1 倍を第 3 行に加える．

(e) 第 3 行に -1 をかける．

(f) 第 3 行の -3 倍を第 1 行に加える．

(g) 第 3 行の -2 倍を第 2 行に加える．

ただし基本行列とは次の 3 種類の行列をいう（3 次の場合）．

(1)$U_{ij}(\alpha)(1 \leqq i, j \leqq 3, i \neq j, \alpha \in \mathbb{R})$　対角成分がすべて 1，(i,j) 成分が α，その他の成分がすべて 0.

(2)$D_i(\xi)(1 \leqq i \leqq 3, \xi \in \mathbb{R}, \xi \neq 0)$　対角成分が (i,i) 成分を除いて 1，(i,i) 成分が ξ，その他の成分がすべて 0.

(3)$T_{ij}(1 \leqq i, j \leqq 3, i \neq j)$　対角成分が (i,i) 成分と (j,j) 成分を除いて 1，(i,i) 成分と (j,j) 成分が 0，(i,j) 成分と (j,i) 成分が 1，その他の成分がすべて 0.

★★★☆☆

【類題 3.2】

次の行列の逆行列を行変形によって計算せよ。

(1)$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$　(2)$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 \\ -5 & 0 & 10 \\ 3 & -11 & 0 \end{pmatrix}$　(3)$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

★★☆☆☆

4.1.2.理論系発展問題

【例題 4】部分空間の判定

2 次元実ベクトル空間 R^2 の中で、次は線形部分空間になるか。

$$\mathrm{W} = \{(x, y) \mid 2x - 3y = 6\}$$

★☆☆☆☆

【分析】理論分野の一番の基本です。パターンとして、身につけておいてください。

【類題 4.1】

次の R^3 の部分集合は R^3 の部分空間か。

$$\mathrm{V}=\left\{\begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ a-b-c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ \ a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$$

★☆☆☆☆

【類題 4.2】

V を K-線形空間、U と W を V の K-部分線形空間とする。（K は R または C を表すものとする。）

このとき、U∩W も V の K-線形部分空間であることを証明せよ。

★★★☆☆

【例題 5】一次独立の判定

次のベクトルの組は一次独立か従属か判定せよ。さらに、従属ならばベクトルの間に成り立つ非自明な線型関係式を一つ求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

★★☆☆☆

【分析】これもひとつのパターンです。今回の範囲で新しく出てきた定義を簡単に試すことができる問題ではありますが、こういうのもあまり出ないのかも…。とりあえず、理解のために載せておきます。やることは単純ですので、そのまま次に進みます。

【例題 6】基底の判定

数ベクトル空間 K^n に対して、n 個のベクトル

$$e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_i=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}(i番目が1), e_n=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は K^n の基底であることを証明せよ。

★★☆☆☆

【分析】基底、あたりから何を言っているのかよくわからなかった人も多いと思います。出るならこういう形、というのをこれからいくつか問題で示しておくので、演習を通じて理解してもらえたらと思います。

【類題 6.1】

1．　(1) 次の連立 1 次方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 2 \\ -3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 8x_5 &= -2 \end{cases}$$

この問題では，以後 (1) の連立 1 次方程式の係数行列を A とおく．

(2)A の階数を求めよ．

(3)$\mathbb{R}^5$ の線形部分空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の次元と，その基底を 1 つ求めよ．

(4)A の第 1 列から第 5 列までをそれぞれ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ とおく．$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\left\{ \sum_{i=1}^{5} c_i \boldsymbol{a}_i \middle| c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R} \right\}$ の次元と，その基底を 1 つ求めよ．

★★★☆☆

【類題 6.2】

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が生成する$\mathbb{R}^4$の部分空間の基底を求めよ。ただし、基底はこの 4 つのベクトルの中から選べ。

★★☆☆☆

【例題 7】写像関連

線形写像$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$; $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$の像 Im$f$と核 Ker$f$の基底をそれぞれひと組求めよ。

★★★☆☆

【分析】像とか核とか、なかなか理解できていないと思います。正直あまり今回の試験範囲の中心、というわけではないのでここをついてくるような問題は少ないとは思うのですが、出ないわけでもなさそうなので、一応対策として。

【類題 7.1】

線形写像 f:V→W の像や核について、

(1) f の像 Imf は W の部分空間であること

(2) f の核 Kerf は V の部分空間であること

を、示せ。

★★★☆☆

【類題 7.2】

問 12. 次の線型写像 T について、像空間 $\mathrm{Im}\,(T) = T(\mathbb{R}^2)$ と核空間 $\mathrm{Ker}\,(T) = T^{-1}(\mathbf{o})$ の基底と次元を求めよ。

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, ここで、$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

★★★☆☆

【例題 8】表現行列

問 16. 線型写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ -x+3y \\ 2x+y \end{pmatrix}$ の、$\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ と $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ に関する表現行列を求めよ。

★★★☆☆

【類題 8.1】

$\mathbb{R}^3$の部分空間 V＝$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,; a+b=0 \right\}$および、行列 A＝$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$が定める線形写像$\varphi_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$について、

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$は V の基底であることを示せ。

(2) φ_Aによる V の像$\varphi_A(V)$は V に含まれることを示せ。

(3) φ_Aの定義域と値域を V に制限した線形写像 f:V→V に対して、V の基底 a,b に関する f の表現行列を求めよ。

4.2.実戦予想問題

予想といってもですね、今回本当に、何がどう出るのかさっぱりわからないわけです。そもそもカリキュラムは違うし、過去問手に入らないし、あの先生適当やし…。ということで、過去問から、今回の範囲にあたるものでいいものをいくつか持ってきましたので、それで代用したいと思います。最後にきて適当で申し訳ありません。

ではでは。

2. 4 行 5 列の行列 A と $\mathbb{R}^4$ の元 $\boldsymbol{b}$ があり, $\mathbb{R}^5$ の元 $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列が, 行基本変形を何度か行うことによって次の行列に変形されたとする.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c & p \\ 0 & 1 & b & 0 & d & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

ただし $a, b, c, d, e, p, q, r, s$ は定数である. このとき次の問に答えよ.

(a) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための, p, q, r, s に関する条件は何か.

(b) (a) の条件がみたされているとき, 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解全体の集合を,

$$\{\boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{l}_1 + \cdots + t_m\boldsymbol{l}_m \mid t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}\}$$

の形に表せ (m の値を具体的に示し, $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_m$ にはそれぞれ具体的なベクトル ($a, b, c, d, e, p, q, r, s$ を含んでよい) を書け). パラメーター $t_1, \ldots, t_m$ が組として違えば違う解を表すようにすること.

(c) $\mathbb{R}^5$ の線型部分空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の次元はいくつか ($\boldsymbol{0}$ は $\mathbb{R}^4$ の零ベクトル).

(d) $\operatorname{rank} A$ はいくつか.

(e) (a) の条件がみたされているときとみたされていないときのそれぞれについて, A の列全部と $\boldsymbol{b}$ とで生成される $\mathbb{R}^4$ の線型部分空間の次元を求めよ.

4. 次の文章をよく読み, 筋が通るように, それぞれの番号の空欄にあてはまることばまたは式を, 解答用紙に書け. 同じ番号の空欄には, 同じことばまたは式が入る. (違う番号の空欄に違うことばまたは式が入るとは限らない.) **この問題は, 答だけ書けばよい.**

一般に $n \times k$ 行列 B と C があり, B の第 j 列を $\boldsymbol{b}_j$ で表し, C の第 j 列を $\boldsymbol{c}_j$ で表すとき, n 次正方行列 X に対して $XB = C$ となるということは,

(*) $\qquad X\boldsymbol{b}_j = \overset{[1]}{\boxed{\quad}}$ が $j = 1, 2, \ldots, k$ の全てに対して成り立つ

ことを意味する. さらに,

(**) 記号を上の通りとするとき, 実数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ に対して

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{b}_j = \mathbf{0} \text{ が成り立てば } \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \overset{[1]}{\boxed{\quad}} = \mathbf{0} \text{ も成り立つ.}$$

ただし $\mathbf{0}$ は $\mathbb{R}^n$ の零ベクトルとする. なぜなら, $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{b}_j = \mathbf{0}$ が成り立っているとして両辺に行列 X をかけると, 左辺は $X\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{b}_j\right)$ となるが, 行列の計算の法則からこれは $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j (X\boldsymbol{b}_j)$ と変形でき, さらに (*) を使えば $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \overset{[1]}{\boxed{\quad}}$ となる. 一方右辺は $X \cdot \mathbf{0}$ となるが, 零ベクトルにはどんな行列をかけても零ベクトルになるからこれは $\mathbf{0}$ である. 同じものに同じ行列 X を左からかけたものどうしは等しいから, $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \overset{[1]}{\boxed{\quad}} = \mathbf{0}$ が成り立つ.

これを使うと, 例えば 1 つの 3 行 3 列の行列 A があるとき, これに行基本変形を何度か行って

(***) $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ にも $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ にも

変形できるということはありえないことが, 次のようにしてわかる. 行基本変形を行うことは左から基本行列をかけることだから, 行基本変形を何度か行うことは左からいくつかの基本行列の積をかけることになる. 基本行列はそれぞれ $\overset{[2]}{\boxed{\quad\quad}}$ をもち, $\overset{[2]}{\boxed{\quad\quad}}$ をもつ行列の積はまた $\overset{[2]}{\boxed{\quad\quad}}$ をもつから, A に行基本変形を何度か行って得られる行列は, どれも A に左から $\overset{[2]}{\boxed{\quad\quad}}$ をもつ行列をかけて得られる. 従って, 仮に B も C も A に行基本変形を何度か行って得られるとすると, $B = PA$, $C = QA$ (P, Q は $\overset{[2]}{\boxed{\quad\quad}}$ をもつ行列) とおくことができ, $C = \overset{[3]}{\boxed{\quad\quad}} B$ が成立する. そこで (**) を,

(**) の B として (***) の B をあてはめ,
(**) の C として (***) の C をあてはめ,
(**) の X としていまの $\overset{[3]}{\boxed{\quad\quad}}$ をあてはめる

というふうにして使おう. (***) の B の列 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の間には, 係数が "全部 0" ではない関係式の１つとして

$$\overset{[4]}{\square}\,\boldsymbol{b}_1 + \overset{[5]}{\square}\,\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_3, \text{ すなわち } \overset{[4]}{\square}\,\boldsymbol{b}_1 + \overset{[5]}{\square}\,\boldsymbol{b}_2 + \overset{[6]}{\square}\,\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}$$

という関係式が成立する ($\boldsymbol{0}$ は $\mathbb{R}^3$ の零ベクトル, 以下同様). (**) をいま言ったように適用すると, (***) の C の列 $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$ の間にも

$$(\#) \qquad \overset{[7]}{\square}\,\boldsymbol{c}_1 + \overset{[8]}{\square}\,\boldsymbol{c}_2 + \overset{[9]}{\square}\,\boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{0}$$

が成立するはずだが, (***) の C について実際 (#) の左辺を計算すると $\begin{pmatrix} \overset{[10]}{\square} \\ \overset{[11]}{\square} \\ \overset{[12]}{\square} \end{pmatrix}$ となり, $\boldsymbol{0}$ にはならない. 従って, A に何度か行基本変形を行って (***) の B にも C にも変形できるということはありえない.

4.3 4.2.の解説

2. $\left(A \mid \boldsymbol{b}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c & p \\ 0 & 1 & b & 0 & d & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$ ……(*)

(a) 解の存在条件は $\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}[A, \boldsymbol{b}]$ より $s = 0$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c & p \\ 0 & 1 & b & 0 & d & q \\ & & -1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e & r \\ & & & & -1 & \end{pmatrix}$ より $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \\ e \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) t_1, t_2 で表せるから dim 2　　(d) (a) より $\mathrm{rank}\,A = 3$.

(e) (*) を $\left(\boldsymbol{a}_1 | \boldsymbol{a}_2 | \boldsymbol{a}_3 | \boldsymbol{a}_4 | \boldsymbol{a}_5 | \boldsymbol{b}'\right)$ とすれば,

$\boldsymbol{a}_3 = a\boldsymbol{a}_1 + b\boldsymbol{a}_2$

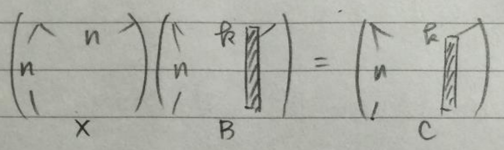
$\boldsymbol{a}_5 = c\boldsymbol{a}_1 + d\boldsymbol{a}_2 + e\boldsymbol{a}_4$

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は一次独立

$\boldsymbol{b}'$ について $s = 0$ のとき $p\boldsymbol{a}_1 + q\boldsymbol{a}_2 + r\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{b}'$ ▷ dim 3

$s \neq 0$ のとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ と一次独立 ▷ dim 4

4.



(1) c_j

(2) 正則性 ← 自信ない.

(逆行列)

(3) QP^{-1}

$\underbrace{2}_{(4)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \underbrace{3}_{(5)}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$

$2b_1 + 3b_2 \underbrace{-}_{(6)\ (-1)} b_3 = 0$

(4)〜(6)と同じ

(7) 2 (8) 3 (9) −1

$2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}}_{(10)\sim(12)}$

この2問については、標準演習に類題があったり、標準演習の方が難しかったりするかもしれません。むしろ、大問としての流れのあるものをピックアップすることが狙いですので。特に4番の方は、前回数理科学基礎の教員別問題の形に似ているなという直感から選びました。

5.【A 線型代数学②】講義編

5.1　基底と表現行列、変換行列（S2 内容の復習～第 1 回講義）

先学期は「表現行列」までやりました。ただ一般的な理解としてはその次に「変換行列」までをセットで学んでおきたいところです。A セメスターの解説は一応「変換行列」から始まるのですが、突然そこから始めるとなんだか唐突な感じがするかもしれませんので、まずは表現行列や、基底あたりの話の復習から始めましょう。さすがに行基本変形まではやりませんのでそのあたりが怪しい方は、ぜひ前回のシケプリをゆっくり読んでみてください。

さて、まず**基底は「座標軸」のようなものだ**と前回書きました。3 次元空間で言うなら、(1,0,0) (0,1,0) (0,0,1)があればそれらの組み合わせで空間上のすべての点が表現できます。別にこれがこんなきれいな形でなくても、例えば(1,1,0) (-2,-3,0) (0,0,2)でもいいわけです。数 B のベクトルで「斜交座標」とかやった覚えがあると思いますが、そういう座標軸でもアリということです。これを用いれば、3 次元上のベクトルはすべてこれらのスカラー倍の和で表せる、それが基底です。たとえば、(0,-1,10)なら

(0,-1,10)＝2×(1,1,0)＋1×(-2,-3,0)＋5×(0,0,2)

と表せますね。一般化すれば、$v \in V$を満たすベクトル v は

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

の形で一意的に表せる、ということです。ここでいうv_jが基底（n 個で構成されているので、n 次元）です。また x は係数です。これを、

$$v = (v_1, \cdots, v_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表してみましょう。

ちなみに、上坂先生の演習講義で Kn[x]とかで表されるパターンのとき混乱する方、多いかもしれませんので一応補足しておきます。あれは、講義でも説明があったように、n 次以下の x についての多項式でできる集合のことを表しています。たとえば、n＝2 の場合を考えてみてください。どんな基底が考えられるかと言えば、もっとも簡単な組として、$\langle 1\ x\ x^2 \rangle$が挙げられるでしょう。もしこの K2[x]の部分空間を考えるなら、一次の項がない部分空間を指定される場合もあります。その場合なら、$\langle 1\ x^2 \rangle$とすれば十分なわけです。

さて、3 次元における基底がなにも(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)に限られた話じゃないように、ある空間を張る基底は何通りもあります。そこで、この基底$(v_1, \cdots, v_n) = \mathcal{B}$を使って、同じ空間を張る別の基底$(v'_1, \cdots, v'_n) = \mathcal{B}'$を表現してみることを考えます。

各v'_jについて、

$$v'_j = (v_1 \quad \cdots \quad v_n)\begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$$

と表せるはずです。そもそもv'_jも v と同じ空間上にあるひとつのベクトルなわけですから、それ自体

が別の基底の組を用いたら表せる、ということです。

そして、これらをまとめれば、

$$(v'_1 \quad \cdots \quad v'_n) = (v_1 \quad \cdots \quad v_n)\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

と表せます。この赤字の行列のことを、$\mathcal{B}'$の$\mathcal{B}$に関する成分表示、または**基底の変換行列**と言います。

どうですか、ここはわかりやすい…わかりやすくない？

新しく変換行列をやりましたが、一応表現行列についても復習しておきますね。前回書いたように、表現行列の目的は「**線形写像を行列により処理する**」ことでした。

とても数学のシケプリにはふさわしくない、非数学的表現を使いますが（今に限ったことではないですが）、線型写像 f を使えばもとの空間 V から違う空間 W にぴょっと移すことができる、といったイメージですかね。ではここで、V を n 次元、W を m 次元ということにしておきましょう。さらに、もとの空間 V 上の点は基底$\mathcal{B}_V$を使って表せるとし、W は基底$\mathcal{B}_W$で表せるとします。すると、基底の組$\mathcal{B}_V$は線形写像 f でまとめてぴょっと移してやると、全部まとめて W 上に移ります。移ったということは、W 上の基底$\mathcal{B}_W$で表せるということですね。ここで、

$$f(\mathcal{B}_V) = (f(v_1) \quad \cdots \quad f(v_n))$$

と書くことにすると、各$f(v_j)$はさっき書いたように W 上の基底$\mathcal{B}_W$で表せるので、

$$f(v_j) = (w_1 \quad \cdots \quad w_m)\begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}$$

となります。これをまとめて、

$$(f(v_1) \quad \cdots \quad f(v_n)) = (w_1 \quad \cdots \quad w_n)\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

と表せます。この赤字の行列を、**f の Bv と Bw に関する表現行列**というわけです。

5.2　内積と正規直交基底、直交補空間（第２回・第３回講義）

この項を通じてトピックになるのは「ベクトル空間で『垂直』であるとはどういう状態か」ということです。ずっとこれについて議論しているのだという認識を持っておいてください。

そこでまず「内積」について考えてみましょう。実は今までやってきた内積はあくまで一例で、最も基本的なものです。Dot 積、または Euclid 積というそうです。もちろんこういうやつですね。

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

しかしこれはあくまで一例です。では、内積の抽象的な、本当の定義はどうなっているか、見てみましょう。ちなみに内積を考えるのは、ベクトルの「長さ」や「垂直」が活かせるからです。

内積の条件

① 双線形性

$$\langle \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$$

② 対称性（これは、実数空間上の場合）

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle$$

③ 正値性

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0, \qquad \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = 0$$

以上の条件を満たす$<,>$を内積と呼ぶことにします。これが本来の定義です。さらに、よく使うやつを 2 つ追加しておきます。

ひとつは、「ノルム」です。$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}$のことで、かつて触れたことがあるかと思います。注意としては、この根号の中をどうしても「先入観」で Euclid 積にしてしまうことです。今まで内積と言われれば Euclid 積を当然のように使ってきたわけですし、重々気を付けてください。

もうひとつは「直交」条件です。これは今までとは変わらず内積が 0 になればよい、ということです。こちらは今までと変わりませんので、今まで通りやっていけば構いません。

このように「抽象的な」内積概念を共有したのはなぜでしょうか。それは、これから「垂直」を考える次元が違うからです。今までは 3 次元までで考えました。たとえば、平面上で x 軸を引いて、y 軸を引いたらそれらが直交することくらい、誰でもイメージがつくことです。それが座標空間になって 3 次元になったとき、x 軸 y 軸両方に垂直になる形で z 軸が引けるっていうのも、わかると思います。そして、前のところで言ったように座標軸が基底だと考えれば、互いに垂直な形で基底をとれば、非常に効率のよい、扱いやすいものとなります。

しかし、x 軸 y 軸 z 軸すべてに垂直な形で 4 次元めの“座標軸”を引いてみてください。うーん、できませんよね。たとえば、部屋の天井の隅を見てください。角から 3 本の線が出ていると思います。ここにすべてに垂直な 4 本目を足す…、そう、我々が 3 次元に生きている限り、イメージすることは難しいのです。でも、紙の上、数字の上では、(1,0,0,0)とかにすればなんか 4 次元のことも表せるじゃないですか。ということで、頭の中で 4 つ目、5 つ目の座標軸をとっている感じを表したのが「正規直交基底」（Orthonormal Base）というやつです。当然、何次元になっても、座標軸どうしはすべて互いに直交している、そういう基底を考えるわけです。ということは、

$$v_j v_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1\ (j = k) \\ 0\ (j \neq k) \end{cases}$$

が成り立つ、ということです。つまり、

・各v_jのノルムは1

・異なるv_jとv_kは直交する

これが、正規直交基底の意味です。この、**高次元の座標軸、というイメージ**を結び付けて考えるようにしてくださいね。

実は、まだやってない（講義では取り扱っていない）標準内積というのがあるのですが、これをやるときに直交基底であることのメリットを説明したいと思います。

さてさて、ではどうやってこの正規直交基底を求められるのか、ということについて考えていきましょう。実は、普通の、というか別に直交でない基底から正規直交基底を求めることができます。これを Gram-Schmidt の直交化法といい、めんどくさいのですが、がんばってやり方をマスターしてください。まあ、掃き出し法的な感じですね。

Gram-Schmidt の直交化法

もとの基底を$v_1, \cdots, v_n$とする。

① v_1を正規化（ノルムを 1 にする）し、できたベクトルをw_1とする。

② $v'_2 = v_2 - < v_2, w_1 > w_1$により求めた$v'_2$を正規化し、$w_2$とする。

③ $v'_3 = v_3 - < v_3, w_1 > w_1 - < v_3, w_2 > w_2$により求めた$v'_3$を正規化し、$w_3$とする。

④ これを繰り返して、$(w_1, w_2, w_3, \cdots)$が正規直交基底になる。

演習のときに具体例を使ってやったと思うので、ここは大丈夫…ですかね。例は省略します。

最後に、直交補空間の話をしておきます。

直交補空間

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid 任意のw \in Wについて、\langle v, w \rangle = 0\}$$

を満たす$W^{\perp}$のことを、W の直交補空間という。

次の性質をみたす。

① $W \cap W^{\perp} = \{0\}$

② $W \oplus W^{\perp} = V$（⊕は「直和」を表す）

パターンとしては、直交補空間の基底をもとの空間の基底から求めさせることが多いかと思います。そのときは、基底が内積 0 になることを活かせばよい、ということになります。

5.3　行列式（第４回～第７回講義）

Ａセメスターで全然線形代数を勉強してなくても､行列式という言葉は聞き覚えがあると思います。ここで数理科学基礎のシケプリを見てみましょう。

□　逆行列を求めるにあたって、（以降は２次正方行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の場合とする）

- 逆行列 A^{-1} とは、$AA^{-1}=E$（単位行列）を満たす行列のことである。
- 余因子行列$\tilde{A}$とは、$\tilde{A}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$を満たす行列のことである。
- 行列式$\det A$とは、$\det A = ad-bc$を満たすスカラーのことである。
- 逆行列が存在する条件は、$\det A \neq 0$ である。このとき、行列 A は正則行列という。
- 逆行列は、$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\tilde{A}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$と計算すればよい。

なんか、この頃のシケプリの方がまとまっていてわかりやすいなぁと反省していますが、この頃の内容に比べてどうしても説明が必要になるのです…長文なのはごめんなさい。（いや、こんないらんことをだらだら書いているからでは…というツッコミは正解。）

さてさて、「逆行列」をやるときに「行列式」を学びましたね。このやり方は、あくまで２次正方行列のときだということを理解してください。

ということは、これを拡張した概念について考えたい、ということになります。なので、まず導入として３次正方行列の逆行列をとりあえず紹介してみたいと思います。講義ではこの部分は至っていなかったのですが、これから使う機会があるかもしれませんので、３次くらいならぱっと計算できるようにしておいてもいいかもしれません。

３次正方行列の行列式

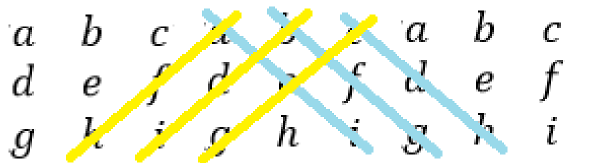
$$det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi$$

えっ、って感じでしょうか。ちょっとでもマシな覚え方を一応、書いておきますね。

① 行列の右と左にひとつずつ同じ行列を書く。

② もとの行列の第一行の a, b, c から右下に青線をたどるように３数をかけて、それぞれ足す。

③ 逆に左下に黄線をたどるようにかけて、引いていく。



これで、上に書いた公式と同じ経路をたどれると思います。ということでしたが、こうやって求めてはみたところで行列式ってなんやねんってことになりますよね。

そこで行列式に定義を与えようと思うのですが、ちょっとややこしいので先にイメージしやすいように、その意義を説明したいと思います。さらにその前提として、行列式のもつ性質で重要なものを列挙します。（順番がややこしくてごめんなさい。この順番がたぶん理解しやすいはず。）

行列式の性質

（各行・各列に関する）線形性…①

（各行・各列に関する）交代性…②

正規性…③

③については、あまり意識しないでかまいません。要するに detIm=1 ということです。

①について見てみましょう。

そもそも、これまで線形代数とか、線形写像とか、線形空間とかいろいろやってきましたが、「線形」ってなんやって話です。そこで今まで何度もやってきた「**和とスカラー倍を保つ**」ということが思い出されます。

確かに、今まで筆者も解説の随所にこの表現を使ってきました。でも、これがどう「線形」なのか、っていうことについては、説明できていなかったかもしれません。簡単に言えば、「和とスカラー倍を保つ」というのは一次関数的である、ということです。イメージしてみてください。放物線に和もスカラー倍も保てません。一定の割合で増えていく line だからこそ、和とスカラー倍を保つことができる…言葉足らずでごめんなさい。

さてさて、今回の①も例にもれず「和とスカラー倍を保つ」わけです。つまり、

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_i} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_n} \end{vmatrix} \quad \cdots①(A)$$

と、

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \vdots \\ \mu\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_n} \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_n} \end{vmatrix} \quad \cdots①(B)$$

が成り立つということです。上の 2 つで a は行として表示していますが、列の場合も同じ関係が成り立ちます。あと、便宜的に | A |=det A で表していますので注意してください（これからも)。

　ここで大切なことは、

| X+Y | = | X | + | Y | 　ではない！！

ということです。イメージ的にはなんかそっちの方があってそうですが、実はそうでもないのでここを間違えないようにしてください。スカラー倍も同じです。

　次に、②「交代性」について見てみましょう。これは、

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

が成り立つことを言います。入れ替えたら、マイナスがつくということです。ここで、さらに②に付随する性質②'も出てきます。
②'…同じ行、列を含む行列の行列式は 0
上でいう、$a_i = a_j$のときです。このとき、

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

なわけですから、X＝-X ということで、X=0 ですよね。
　この性質を理解しておいて、行列式とは何たるかという説明に移ります。

> 数学における行列式（ぎょうれつしき、英: determinant）とは、①正方行列に対して定義される量で、歴史的には②行列が表す一次方程式の可解性を判定する指標として導入された。幾何的には線型空間上の自己準同型に対して定義され、③線型変換によって空間の体積要素が何倍に変わるかという概念を抽象化したものと見なすことができる。④行列の可逆性を判定する指標として線型代数学における最も重要な指標の一つと見なされている。
>
> Wikipedia「行列式」（2015.10.15 閲覧）

　だいたい、たいてい線形代数の教科書ってこんな感じでよくわからない言葉を並べるからよくないと思うのですが、とりあえず今説明しておけばイメージがしやすいであろう概念だけ説明します。特に、線形空間との関連については、これからもし講義で扱われれば書きます（シラバス的には扱わないはずです）が、ややこしいので今はとりあえず省きます。
　まずは①「正方行列に対して定義される」というところですが、これは前に 2 次正方行列でやったときにちょっと扱ったかもしれません。これはどちらかというと前提なので、普通に頭に入れておいてください。
　次に②「行列が表す一次方程式の可解性を判定する指標」ということですが、可解性というと「解があるかどうか」ということです。これが、今みなさんに一番理解してもらいやすい「行列式の意義」だと思います。
　連立方程式というと、

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = p_1 \\ a_2x + b_2y = p_2 \end{cases}$$

ですね。わかりやすいように、2 次でやります。この解は、$a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$のとき

$$x=\frac{p_1b_2-b_1p_2}{a_1b_2-b_1a_2}, \qquad \mathrm{y}=\frac{a_1p_2-a_2p_1}{a_1b_2-b_1a_2}$$

となります。ここで、列ベクトル

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$$

をとってみます。すると連立方程式はまとめて

$$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}$$

と書けます。このとき、さっきやった行列式の性質をうまく利用すれば、x を（まあ、y はほっといてね）取り出すことができるのですが、こんな行列式$|\,(x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}) \quad \boldsymbol{b}\,|$を設定しましょう。（なんで？と言わず、まあするんです。昔の人ががんばって思いついたってことです。）すると、

$$|\,(x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}) \quad \boldsymbol{b}\,|=|x\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}|+|y\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{b}|=x|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}|+y|\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{b}|=x|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}|$$

と変形できます。一気にいきましたが、

$$\begin{aligned}|\,(x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}) \quad \boldsymbol{b}\,| &= |x\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}|+|y\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{b}| && \text{…線形性①(A)より}\\ &= x|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}|+y|\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{b}| && \text{…線形性①(B)より}\\ &= x|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}| && \text{…交代性②'より}\end{aligned}$$

ということです。これより、

$$|\boldsymbol{p} \quad \boldsymbol{b}|=x|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}|$$

が成り立つので（$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}$です）、

$$x=\frac{|\boldsymbol{p} \quad \boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}|}=\frac{det\begin{pmatrix}p_1 & b_1\\p_2 & b_2\end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix}}$$

になるというわけです。という感じで（3 次以降も、めんどくさそうですがなんとかできそう）連立方程式の解を考えることができる、というわけです。先ほど可解性と書いたのは、分母の$det\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix}$ですね。これがゼロにならない、すなわち前のページにも書いた$a_1b_2-b_1a_2\neq 0$と同じです。これが可解性、ということになります。3 次以降も同じです。

こういう風に行列式の性質を使うんだ、とわかればイメージしやすいのではないでしょうか。

さて、次の③「線型変換によって空間の体積要素が何倍に変わるか」は紹介だけ。へぇー。そういうこともできるのか、というくらいでいいと思います。

最後に④です。これはまさに 1 ページで思い出した通り、$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\tilde{A}$ということです。余因子行列については講義ではまだ扱っていないのでここでもやらないでおこうと思います。

では続いて、行列式の定義をやっていきましょう。

行列式

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

そもそもこの厳つさが嫌な感じですよね。最初にこれを紹介してしまうかどうか迷ったのですが、さすがにこれを出しておかないとこれから説明することがどうつながるのかわけわからなくなって

しまいそうなので、書くだけ書いておきますね。これでわかるよね？っていうつもりは毛頭ないので安心してください。

まずは、σ から説明します。これ、そもそも読み方「シグマ」ですからね？Σの小文字です。

置換

n個の元からなる集合 X から X 自身への全単射$\sigma: X \to X$をn文字の置換という。

慣例的に σ らしいのですが、τ や ρ を用いることもあるそうです。

n個の元からなる集合 X というと通例、{1,2,⋯,n}を考えます。以下でも断りのない限りこれを考えます。要は、この 1 から n までの文字をバラバラに並び替えている、というイメージを持ってください。だから、$\sigma(1) = i_1, \sigma(2) = i_2, \cdots, \sigma(\mathrm{n}) = i_n$という風になるとき、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

と表します。たとえば、n=3 のとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ということです。もちろん、置換の仕方は n!通りありますね。この n!全体の集合を Sn と表します。さらに、上段の並びは必ずしも 1,2,⋯,n という並びでなくてもいいのです。つまり、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

はすべて同じ、ということになります。ただしもちろん、1→3、2→1、3→2 の対応関係は保っていなければなりません。

次に置換 σ の符号[signature]について説明します。

符号[signature]

数式による定義を以下にまず示す。記号Πは、()内のすべてをかけ合わせる記号である。

$$\mathrm{sgn}(\sigma) \coloneqq \prod_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \right)$$

これを、別の方法で定義すると、

$$\mathrm{sgn}(\sigma) \coloneqq \begin{cases} 1 \cdots \text{転倒数[t]が偶数} \\ -1 \cdots \text{転倒数[t]が奇数} \end{cases} = (-1)^t$$

ここで、**転倒数（逆転数ともいう）**とは、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

において$i < j$「なのに」$i_i > i_j$となっている（:=「転倒」）(i, j)の個数のことである。

Πを用いた定義が何を言っているのか、具体例を通じて見てみましょう。

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$のとき、(i, j)=(1,2), (1,3), (2,3)があります。よって、

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \right) = \frac{\sigma(2) - \sigma(1)}{2 - 1} \cdot \frac{\sigma(3) - \sigma(1)}{3 - 1} \cdot \frac{\sigma(3) - \sigma(2)}{3 - 2} = -1$$

となります。このとき、転倒しているのは(1,2)だけですので、転倒数が奇数、よって-1 ということにもなりますね。

ここまでの内容がわかれば、一応最初の定義

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

も、わからなくはない、ということになります。

この置換というのは「全単射」つまり「写像」ですので、それに付随する性質も合わせて紹介しておきます。

置換に関する補足

①合成写像$\sigma \circ \tau$を置換の**積**とよび、記号$\sigma\tau$で表す。

②σの逆写像σ^{-1}を**逆置換**とよぶ。

③恒等写像 id を**恒等置換**とよぶ。

だいたいわかるとは思いますが、一応それぞれ具体例を簡単に示しておきます。

まず①について、$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$とすると、

$$\sigma\tau(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 3$$

みたいな感じです。同様に、$\sigma\tau(2) = 1$,$\sigma\tau(3) = 2$ですから、

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

が得られます。

次に、②は$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$に対して、$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ということです。例えば、$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$とすると、（ちょっとわかりやすいように、増やしておきました）

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ということになります。

最後に③の「恒等置換」ですが、これは「そのまま」ということです。つまり、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

ということです。

だいたい、補足はこれくらいにしておいていいと思います。深い話をしだすときりがありません。私がいらないと思ったところはばっさりとカットする。これが一年を通じてこのシケプリシリーズでテーマにしてきたことですので。

では、ここからは行列式の求め方に移ります。ここは演習の講義でも重点的に解説があり、またレポートでもやらされたところですので、みなさんレポートをしっかりやっているならできると思います。

やることは①行基本変形、列基本変形で 1 と 0 の行か列を作る→②行列のサイズを減らす→③くりかえす、というだけです。今まで行基本変形をしてきたことは数知れずと思いますが、あれって何をしていたのかもう一度確認してみましょう。

基本行列

□**行和**（i≠j として、第 i 行に第 j 行の α 倍を加える）：基本は単位行列だが、(i, j)成分だけ α になっている

$$U_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \color{red}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

□**行積**（第 i 行を α 倍する）：基本は単位行列だが、(i, i)成分だけ α になっている

$$D_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \color{red}{\alpha} & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

□**行換**（第 i 行と第 j 行を交換する）基本は単位行列だが、(i, i)(j, j)成分が 0 で、(i, j)(j, i)成分が 1 に入れ替わっている。

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \color{red}{0} & \cdots & & \color{red}{1} & \\ & & & \vdots & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & \color{red}{1} & & & \color{red}{0} & \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

これらの行列を左からかけるのが行基本変形のやり方でした。ちなみに、右からかけるのが列基本変形です。これらを利用して行列式を求めていくのですが、それぞれを左や右にかけることで行列式がどう変化するか、というのだけ押さえておきましょう。

基本変形と行列式の変化

□行和：どこにどの何倍を加えても、**1 倍**。

□行積：α 倍したら、行列式も **α 倍**。

□行換：交換したら、行列式は**－1 倍**。

さて、何を目的にこれをすればいいのかということになりますが、次に目指す形は、

一番左の列が 1, 0, 0, ⋯, 0 か、一番上の行が 1, 0, 0, ⋯, 0

です。そして、$\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & b \\ 0 & & & \\ \vdots & & X & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$か$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a & & & \\ \vdots & & X & \\ b & & & \end{pmatrix}$になったら左と上はバッサリ切って、サイズが 1 小

さい行列 X を取り出せばいいのです。もとの行列と行列 X は行列式が等しくなります。a から b はなんでもいいです。

　こうして行列のサイズを減らしていき、最終的に 3×3、それを覚えてなければ 2×2 になれば最後は行列式の計算にもっていけば終わりですね。

5.4　余因子展開（第 8 回講義）

行列式を求めるとき、基本変形で最左列か最上行を 1,0,0…0 にする話をしました。これから説明する余因子展開というやり方は、これが他の行や列だったときにも成り立つ、やり方のことです。つまり、前回のやり方をさらに一般化したやり方、ということになります。

順を追って、定義を示していきます。

(i, j)小行列式

n 次正方行列の i 行と j 列を除いてできる n-1 次正方行列を $A_{i,j}$ と表し、これの行列式 $\det A_{i,j}$ を、(i, j)小行列式という。

参考書によっていろいろな表し方があるようですが、ここでは我らが寺田~~心~~至さんの板書に従っておきました。

余因子

以下のように定義する。

$$\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

さて、ここまでやったところで、これを行列式の求め方に応用する「余因子展開」を説明します。

余因子展開

i 行について、

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{A}_{ij}$$

j 列について、

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\tilde{A}_{ij}$$

が成り立つ。

では、具体例で考えてみましょう。次の行列式を求めたいとします。

$$\det\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 \\ 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

ここでは、一番左の列について余因子展開をしてみます。（なるべく 0 が多いところの方が楽でいいですよね。この場合なら、一番上の行や一番右の列でやってもいいです。）

$$\det\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 \\ 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

$$= a(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix} + c(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$$
$$= a(a^3 - 2abc) - c(a^2b - b^2c)$$
$$= a^4 - 3a^2bc + b^2c^2$$
という風にすればよいのです。

最後に、余因子展開のメリットについて、「帰納的な」変形ができる、ということが挙げられます。おそらく演習の問題で体感したと思いますので深くは取り上げませんが（演習パートで取り上げるはず）、もし余因子展開した後の形がもとの行列と同じような形（なんかひとつ減った的な）だったなら、漸化式を作ることもできるでしょうし、帰納的にサイズを小さくしていくこともできる、という発想です。

5.5　固有値・固有ベクトル・対角化（第 9 回～第 12 回）

◆固有値とは

ここからはまた新しい分野に入っていきます。

さて、今まで行列とかベクトルとかを至らないなりにやってきたのが線型代数でした。ここで、あるベクトル v に行列 A を作用させる、すなわち左からかけるということは、v を行列 A によって変換する、ということに相当する、というのを学びました。すなわち、

$$Av \quad = \quad \boxed{\text{変換後のベクトル}}$$

ということです。この変換には、いろいろな操作が含まれます。ベクトルは向きが変わることも、長さが変わることも、もしかしたら変化しないかもしれません。

一方、v をスカラー倍すると、ベクトルは向きが変わらず、長さだけが変わる、というのは高校以来の常識でしょう。すなわち、

$$\lambda v \quad = \quad \boxed{\text{長さだけが変わったベクトル}}$$

となります。

ここで、もし行列 A による変換によって、長さだけが変わった場合、

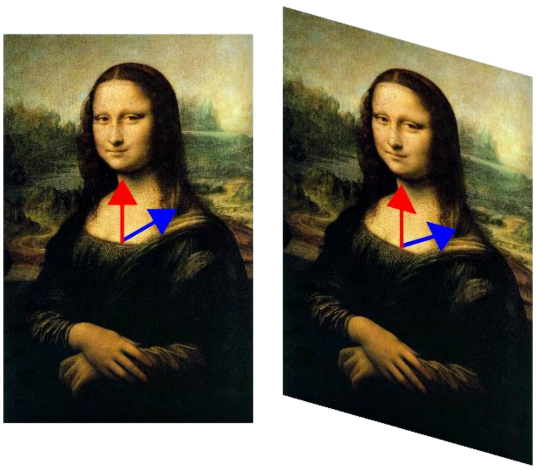
$$Av \quad = \quad \lambda v$$

が成り立ちます。

このλを、行列 A の**固有値[eigenvalue]**、v を行列 A の**固有ベクトル[eigenvector]**といいます。

みなさんご存知ドイツ語の eigen が由来です（なぜドイツ語と英語の混ざったような言葉になっているのか、気になるという方は藤野 et al., 1998 を読んでみるとよいかと）。

いまいちイメージがつきにくいと思いますので、例を示してみます。



右の図を見てください。左がモナ・リザ、右がそれを平行四辺形に変形したものです。左から右への変換が、行列を用いてできるんだというのは上述した通りです。では、この変換がある行列 A によって行われたとしましょう。モナ・リザ上の任意のベクトルは A によって傾モナになったわけですが、その中で図中の赤いベクトルは、傾モナでも向きが変わっていないことが見て取れます。一方、青いベクトルは、向きが変わっていますね。このように、同じ変換 A を与えたときに、向きが変わらない変化をする、いわば「行列 A に選ばれた」ベクトルが必ず存在し、これを固有ベクトルとしたわけです。

では、これらを求めるやり方についてやっていきましょう。

定義 $Av=\lambda v$ より、これを移項して、

$$(A-\lambda \mathrm{In})v=\mathbf{0}$$

（In が出てきたのは、v でくくるためです。A-λ だと[行列]-[スカラー]になってしまいます。）
　これが自明な解 v＝0 以外の解を持つ（注意：0 ベクトルは固有ベクトルには含みません）
⇔行列(A-λIn)が一次従属　⇔正則ではない　⇔**det(A-λIn)＝0** となります。
　ここはわかりにくかったら結果だけ覚えてください。要するに、

固有値・固有ベクトルの求め方

1　特性方程式 **det(A-λIn)＝0** を解く。得られる解が固有値。
2　解 λ_i をそれぞれ特性方程式に代入し、対応する v を求める。これが固有ベクトル。

ということです。

◆対角化のやり方

　さて、これらを使って次にやりたいのは対角化です。
　で、対角化とは何か、ということですが、もとの行列に変形を加えて、対角行列にするということです。対角行列とは、

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

の形になっている行列のことです。こうすることのメリットとは？ということですが、あとでやりますが、例えば累乗が簡単にできる、といったことが挙げられます。
　では、対角化のやり方を紹介します。
　まず原理として、証明は省略しますが、先に求めた固有ベクトルは「互いに一次独立」です。なので、行列$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$は正則行列となります。
　次に、A の固有値と固有ベクトルとの間にはそれぞれ、

$$\mathrm{A}v_i = \lambda_i v_i$$

の関係が成り立ちます。これらをまとめて書くと、

$$\mathrm{A}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_n v_n)$$

さらに、

$$(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_n v_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と変形でき、固有ベクトルをひとつにまとめて書いた$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$＝P とすると、

$$\mathrm{AP} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となります。P が正則であることはさっき証明されましたので、遠慮なく P^{-1} を左からかけて、

$$\mathbf{P^{-1}AP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

を得ます。これが対角化です。

　ここまでの流れをまとめて、具体的にやってみましょう。

例題　A＝$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$のとき、固有値、固有ベクトルを求め、A を対角化せよ。

A の特性方程式は、

$$\Phi_A(x) = \det(xE - A) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 6 & x-5 \end{vmatrix} = x(x-5) - (-6) = x^2 - 5x + 6$$

これが 0 になるとき、x＝2,3 であるから、固有値は 2 と 3 である。

x＝2 のとき、$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$を解いて、$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$を得る。

同様に、x＝3 のとき、$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$を得る。これらが固有ベクトルである。

したがって、P＝$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$とすれば、対角行列

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を得る。■

◆これからやることは…

　ということで、うまく対角化ができる例を示してみました。

　しかしながら、世の中そうもいかないことは多いものです。私もそんなことを日々実感…なんのことでしょうか、はい、というわけで、次の場合をやってみます。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (90 度回転行列)}$$

$$\Phi_A(x) = \det(xE - A) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1$$

ということで、固有値が$\pm i$となってしまいます。

　今まで考えてきた行列の世界は実数行列でしたので、ここで複素数行列にまで範囲を広げる必要が出てきました。

　では、補足していくように少しずつ深めていきます。

◆固有空間とは

　まず、そもそも、たぶんみなさん気づいていたと思いますが、固有ベクトルは必ず任意定数を持ちます。例えば、例題でやった A＝$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$を考えてみましょう。途中で固有ベクトルを得るときに、

x＝2 のとき、$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$を解いて、$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$を得る。

としました。この行列積は、

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$$

ということで、確かに$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$は解のひとつですが、他にも $t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$であればなんでも成り立つ式になっています。ですから、固有ベクトルは無数にあって、そのひとつを取り出したにすぎないということです。

　さて、これについてもう少し深めてみましょう。

少し復習。この無数にある固有ベクトルの「集合」はどう表記できるでしょうか。純粋に考えると、2 次元上の直線（$y=2x$）を表すということになります。これが、基底と空間、ということになりますね。

さらに、例題で得た解は$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$でした。このふたつのベクトルを基底とすれば、一次独立ですから、これらが張る空間は二次元の平面になります。このように、固有ベクトルを基底として、それらによって張られる空間を**固有空間**といいます。基底とか張る空間とか、イメージしづらいですが以前の内容を参照してください。

◆対角化の可能性

話は変わって、**対角化可能性**について考えていきます。対角化の順序を復習すると、

①行列の固有値を求める。
②固有ベクトルが線型独立となる。
③変換行列は正則行列となり、逆行列が存在する。
④対角行列が得られる。

といったところでしょうか。そこで、この流れの中で対角化の可能性に寄与する部分はどこか考えてみると、②ということがわかります。固有ベクトルが線型独立となりさえすれば、変換行列は正則行列となりますから、対角化することができます。

　では、n 次として、線型独立な n 本の固有ベクトルが得られない場合とは、どういう場合でしょうか。つまり、固有値が n 個得られない場合、と置き換えてよいでしょう。

　すると、特性方程式が「重解」を持つとき、という場合が思いつきます。そこで、例を挙げてみましょう。

例題　$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$　は対角化可能か。

　省略しますが、特性方程式を解くと A の固有値は $\lambda=1,2$（2 重解）となります。

a) $\lambda=1$ のとき

$\begin{pmatrix} 5-1 & -7 & 3 \\ 3 & -5-1 & 3 \\ 3 & -7 & 5-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$　を解いて（一応確認ですが、拡大係数行列を作って、掃き出し法を適用します）

$x=y=z=t$ となり、固有ベクトルは$t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$となります。

b) λ＝2 のとき

経過は省略しますが、固有ベクトル$\begin{pmatrix}7\\3\\0\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$を得ることができます。

こうして得られた 3 本の固有ベクトルは線型独立ですから、対角化は可能ということになります。

一方、もうひとつ例を挙げてみます。

例題　$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ は対角化可能か。

特性方程式を解くと A の固有値はλ＝2（2 重解）となります。

λ＝2 のとき、得られる固有ベクトルは$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$の一本だけです。これでは正則な変換行列が作れません。つまり、対角化不可能なのです。

ここで両者を比較してみましょう。同じように 2 重解を持つ場合でも、それに伴う固有ベクトルが 2 本得られなければ、対角化可能ではないということです。

そもそも、長々と書いてみましたが直感的にわかることだと思います。代数学の基本定理によれば、n 次方程式は重複も含めて n 個の解をもちます。それらに対応してひとつずつ固有ベクトルが得られれば、ちゃんと n 次の変換行列が作れます。

あえて、定理としてまとめるなら、

対角化可能性

A$\in M_n(\mathbb{C})$　において、

$m_i{}'$：α_i固有空間の次元

m_i：固有値α_iの重複度（＝$\Phi_A(x)$の根の重複度）

とするとき、

A が対角化可能　⇔　$m_i'=m_i$

ということになります。過去問で、「次の行列 A が対角化可能か判別し、可能なら変換行列と対角化された行列を一組求めよ」という問題がありますが（だいたい、こういう問題って可能じゃないと問題ほとんど成り立ちませんしどうせ可能なんでしょうが）、こういうときはこの条件を考えてみてください。

◆複素行列と対角化

さらに話は変わり、いよいよ複素行列に話を広げたときどうなるかについて考えていきます。たいていの定義はそのまま拡張できますが、いくつか追加で与えるべき定義があります。

まずは、内積について。複素数に拡張すると、ある問題が起こります。ここで、直交補空間の話を想起してみます。直交補空間とは、

$$W^{\perp}=\{v\in V\mid \text{任意の}w\in W\text{について、}\langle v,w\rangle=0\}$$

を満たす$W^{\perp}$のことで、$W \cap W^{\perp} = \{0\}$を満たします。

つまり、同じベクトルどうしの内積で 0 になるのは、0 ベクトルのときだけ、ということです。しかし、たとえば、$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$を考えてみると、いわゆる内積$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = (i \quad 1)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$となってしまいます。そこで、実数の場合の内積の性質をよりよく(?)受け継ぐ、エルミート内積というものを導入します。

エルミート内積

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{y}$$

※$\boldsymbol{x}^T\overline{\boldsymbol{y}}$とする流儀もある。

以下の性質も合わせて、押さえておきましょう。

エルミート内積の性質

①右の成分については、線型。つまり$(x, y_1+y_2)=(x, y_1)+(x, y_2)$で、$(x, \lambda y)= \lambda(x, y)$

②左の成分については、共役線型。つまり$(x, y_1+y_2)=(x, y_1)+(x, y_2)$で、$(x, \lambda y)=\overline{\lambda}(x, y)$

③エルミート性。つまり$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$

あとで、複素行列の場合の正規直交化をやるときに重要になるのですが、この内積のやり方がノルムを求めるときにも用いられますので、注意してください。

とまあ、なんかおおげさにエルミート内積とか言ってみましたが、要するに複素行列の内積のときは片方を共役複素数にしてね、ってことです。

次に、ユニタリ行列についてまとめます。

V：有限次元複素ベクトル空間　　　(,)：エルミート内積

$\mathcal{B}$：V の(,)に関する正規直交基底　　φ：V→V 線型変換　　A：φの$\mathcal{B}$に関する行列表示

$(\varphi(v), \varphi(w)) = (v, w)$　のとき、φを(,)に関する**ユニタリ変換**という。

φが(,)を保つとき、A*A=In となり（A*を A の**随伴行列**という）、

これをみたす A を**ユニタリ行列**という。すなわち、$A^* = A^{-1}$ である。

一方、A*＝A となる A を**エルミート行列**という。

一気に定義を並べたので、何のことやらと思ったかもしれませんが、とりあえずこの辺は軽くスルーしてもらっても構いません。

重要なことは、ユニタリ行列は対角化可能だ、ということです。実は、今までのやり方では複素行列は対角化できません。なので、そのために必要なステップが、このユニタリ行列なのです。

ちなみに、対角化ができない行列の場合も、対角化の次善の策として三角化や、Jordan 標準形に直す、というやり方があります。これについては、もし今学期で解説があれば、次回まとめます。

明らかに話がややこしくなってきましたので、ここで最後に整理します。

対角化のまとめ

◆実数行列の場合

→対角化可能性を満たしていれば、固有ベクトルを並べた変換行列を作れば対角化できる。

→対角化不可能なのはけっこう例外的。

◆複素数行列の場合

→対角化できるのは、エルミート行列の場合。※正しくは、正規行列の場合。

→エルミート行列は、適当なユニタリ行列を用いて対角化できる。

→ユニタリ行列は正規直交基底からなるので、グラムシュミットする。

さらにまとめると…

対角化	方法１	方法２
実数行列	○（ふつうこのやり方で）	○（注１）
複素数行列	×	○（必ずこのやり方で）

◆方法１

①特性方程式を解いて固有値を求める。

②固有値に対応する固有ベクトルを求める。

③変換行列Ｐがわかり、対角化ができる。

◆方法２

①特性方程式を解いて固有値を求める。

②固有値に対応する固有ベクトルを求める。

③グラムシュミットの直交化法により、正規直交基底を求める。

④ユニタリ行列Ｐがわかり、対角化ができる。

（注１）「直交行列を求めて」という指示があれば、こっちで直交行列Ｐを求めてください。（この問われ方は、演習で扱いましたね。）

5.6　2 次形式（第 12 回講義と補足）

ここは範囲に入るかどうか、かなり怪しいところではあります。というのも、講義の最後ちょっとを使って解説はしたのですが、本当にさわりの部分だけでしたし、問題に出せるほど解説したかというと…という感じです。（ここから、試験後書きました）載せたのは、結局期末試験に出たからです。とはいえ実際、問題は 2 次形式の知識がなくても力技で解けるからです。

(1)　$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$とおくとき、$P^T AP = D$をみたす 2 次実直交行列 P と 2 次対角行列 D の組を 1 つ求めよ。

(2)　(1)を考慮して、$2x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$のグラフが楕円であるか双曲線であるか判別せよ。

これからのカリキュラムが、どこまで 2 次形式を扱えるかわかりませんが、この範囲を深入りして解説するのは避け、とりあえずこの問題を解説する形にしようと思います。

そもそも 2 次形式は「対角化の応用」に位置付けられる分野になります。この問題のように、(1)は今まで紹介してきたそのままのやり方です（黄色で強調したところを参照)。一応、P が実直交行列になっていることくらいは気を付けてください。なぜこの指定があるかは、「**対称行列は直交行列によって対角化できる**」という定理が背景にあるのですね。

では、一応(1)の計算をしてみます。

A の特性方程式は

$$\Phi_A(x) = \det(xE - A) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^2 - 1 = 0$$

を解いて、x=1,3 です。

それぞれの固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$です。すでに直交ですので正規化だけしておけば（しなくても対角行列は得られますが)

P=$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$と D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$が得られます。

ここまでは何ら問題はないかと思います。では、(2)を見てみます。

「(1)を考慮して」

という言葉に引っかかったのではないでしょうか。おそらく期末試験では多くの人は高校数学を駆使して解いたのではないかと思います。そして現に、そんなに難しいことではないでしょう。

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\,, Y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y$$

とおけば、$X^2 + 3Y^2 = 1$と変形できます。新課程の人なら複素数平面の範囲でしょうか。とりあえず、こういう感じでやれば、問題なく解けるわけです。

さて、(1)を考慮してみましょう。

何か、形が似ていませんか？そう考えると、

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\mathrm{D}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\,,Y=\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y,X^2+3Y^2=1$$

完　全　に　一　致

ですね。(1)を、(2)の導入として利用した答案が求められていたというわけです。

一般化していきましょう。

2 文字 x, y として考えます。2 次同次式は一般に、

$$ax^2+2bxy+cy^2$$

と表せます。いま、

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix},\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

とすれば、

$$ {}^t\boldsymbol{v}A\boldsymbol{v}$$

と表せます。A は対称行列なので、適当な直交行列 P を用いて対角化できることから、

$$P^{-1}AP=B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

となるようにします。さらに、$P^{-1}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}x\prime\\ y\prime\end{pmatrix}$をみたすように w を設定すると、

$$ {}^t\boldsymbol{v}A\boldsymbol{v}= {}^t(P\boldsymbol{w})A(P\boldsymbol{w})= {}^t\boldsymbol{w}\left({}^tPAP\right)\boldsymbol{w}= {}^t\boldsymbol{w}B\boldsymbol{w}=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2$$

と変形することができ、たしかにさっきの具体例が一般的にも成り立つことが示されました。一般化のところを応用すれば、変数が増えても同様にすることができます。

本当にさわりの部分だけですが、とりあえずここまでにしておきます。

6.　【A 線型代数学②】演習例題編

おそらく、みなさん線形演習の問題はちゃんと解いている（普段の講義なら(*)がついているところだけで十分）と思うので、ほとんどの方はそれ相応のレベルに達していると思って大丈夫です。

もっと点が取りたい方には、正直申し訳ありませんがどのレベルまで出るのかよくわからないし筆者のレベルを超えた問題はもちろん作れませんので、何とも言い難いところではあります。というわけで、このあたりが取れれば「良」は取れるだろうというレベルの問題を集めています。「優」を狙う方は、至氏の出してくる応用問題に立ち向かってください。

計算問題（便宜的にこう表現しましたが）として出る可能性のある単元は
①表現行列・変換行列
②正規直交化
③行列式
④対角化
くらいです。はい。もう、なんかできそうですよね。

※過去問についての免責事項

ここで取り上げた過去問は確実に今回の範囲と関係するものです。今年度数学部会のカリキュラムが大きく変わり、以前より範囲が少なくなっております。そのため、手に入れた過去問は一応ワンドラに入れていますが、その利用にあたっては各自の責任で行ってください。多くは範囲外ですので解答を作ることはしません。

【例題 1】変換行列

V=$\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$の基底$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$から$\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\9\\2\end{pmatrix}$への変換行列を求めよ。

【例題 2】表現行列

線型変換$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}3x-2y\\x\end{pmatrix}$を、$p_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$で構成される基底で表現せよ。

【例題 3】正規直交基底・直交補空間

6.　$V=\mathbb{R}^4$ とし, W を $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$ の生成する V の $\mathbb{R}$ 線型部分空間とする.

(1) $\mathbb{R}^4$ の標準内積の W への制限に関する, W の正規直交基底を (ひと組) 求めよ.
(2) $\mathbb{R}^4$ の標準内積に関する W の直交補空間の基底を (ひと組) 求めよ.

【例題 4】行列式

3. (1) 次の行列 C の行列式を求めよ．ただし x は実数の定数とする．

$$C = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ -1 & x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

(2)C が逆行列をもたないような実数 x をすべて求めよ．

【例題 5】対角化

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．A が対角化可能かどうか判別し，対角化可能なら PAP^{-1} が対角行列になるような 4 次正方行列 P と，対角行列 PAP^{-1} を一組求めよ．

【類題 1】

漸化式$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$を満たす実数列空間$\mathrm{P}_0$において、$e_1 = \{1,0,-6,-30,\ldots\}, e_2 = \{0,1,5,19,\ldots\}$とし、数列の項を 1 項ずらすという線型変換 $\mathrm{S}: \mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_0$ を考える。

(1) $\langle e_1, e_2 \rangle$は線型変換 P_0 の基底をなすことを示せ。

(2) 変換 S を、$a_1 = \{1,2,4,8,\ldots\}, e_2 = \{1,3,9,27,\ldots\}$で作られる基底について表せ。

【類題 2】

1. n を自然数とし，可逆な n 次実正方行列 P を 1 つ固定するとき，写像 $F: M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ を $F: A \mapsto PAP^{-1}$ ($^\forall A \in M_n(\mathbb{R})$) によって定める．

(1) F は $\mathbb{R}$ 線型写像であることを示せ．

(2) さらに，F は $\mathbb{R}$ 線型同型写像であることを示せ．

(3) $n = 2$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ として上の F を考える．さらに $M_2(\mathbb{R})$ の基底として $\mathcal{A} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ をとる (E_{ij} は (i,j) 成分だけが 1 で他の成分がすべて 0 の行列，ここでは 2 次正方行列)．基底 $\mathcal{A}, \mathcal{A}$ に関する F の表現行列 (行列表示) を求めよ．

【類題 3】

5. V を 3 次元の $\mathbb{R}$-線型空間, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を V の基底とする. $(\ ,\ )$ を V 上の内積で次をみたすものとする.

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) = 2, \quad (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = 0, \quad (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3) &= \frac{2}{3}, \\
(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) = \frac{2}{3}, \quad (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) &= 0, \\
(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_3) &= \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

($i > j$ のときの $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$ の値は書いてないが, $\mathbb{R}$-線型空間の内積の対称性より, これらの値も決まっている.) この内積に関する V の正規直交基底を一組求めよ (各元を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合として表せ).

【類題 4】

5. (1) t を実数とするとき, 次の行列 A の行列式の値を t の式で表せ.

$$
A = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & 0 \\ -1 & t & -1 & 0 \\ 0 & -1 & t & -2 \\ 0 & 0 & -1 & t \end{pmatrix}
$$

(A の $(3,4)$ 成分と $(4,3)$ 成分は異なる.)

(2) 上の行列 A を係数行列とする, $\mathbb{R}^4$ の元 $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外にも解をもつような実数 t の値をすべて求めよ ($\boldsymbol{0}$ は $\mathbb{R}^4$ の零ベクトル). 2 重根号が出てもはずさないでよい.

【類題 5】

5. $A = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$ に関して次の問に答えよ.

(1) 可逆な 2 次行列 P と 2 次の対角行列 D の組で, $P^{-1}AP = D$ をみたすものを 1 つ求めよ.

(2) n を自然数とするとき, A^n の各成分を n の式で表せ.

【おわりに】

ここまでおつかれさまでした。最後の試験もがんばってくださいね！