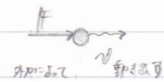
力学A シケプリ

1. 運動の法則

1-1. 運動の記述

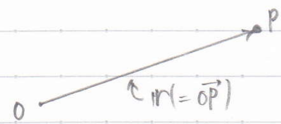
ある物体が外力によって引き起こされた運動状態の変化を定量的に記述する方法を学ぶ。具体的には位置や力をベクトルで表記し、式としてその関係を記述していく。



最終的には任意の時間変化する物理量をt(時間)のみの関数で表し、未来を予測できるようになるのが目標である。

- ベクトルの表記と(簡単な)演算

表記

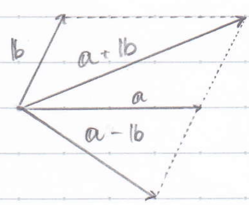


$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$: ボールド体 ← 主にこちらを使用する
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: 上に矢印

大きさは$(a=)|\mathbb{a}|$と表記する

演算

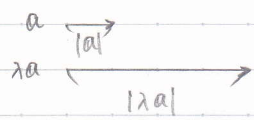
① 和・差



$\mathbb{a}+\mathbb{b}=\mathbb{b}+\mathbb{a}$ (交換則)
$(\mathbb{a}+\mathbb{b})+\mathbb{c}=\mathbb{a}+(\mathbb{b}+\mathbb{c})$ (結合則)

② スカラー倍

$\lambda \in \mathbb{R}$として、
"$\lambda\mathbb{a}$"は、$\mathbb{a}$と平行で長さが$\mathbb{a}$のλ倍のベクトル



$\lambda\mathbb{a} \parallel \mathbb{a}$
$|\lambda\mathbb{a}| = |\lambda||\mathbb{a}|$
$\lambda>0$のとき同じ向き、$\lambda<0$のとき逆向き

※零(ゼロ)ベクトルと逆ベクトル

- 零ベクトル

$\mathbb{0}$ ($\vec{0}$) : 大きさがゼロのベクトル(スカラーではない), $|\mathbb{0}|=0$

- 逆ベクトル

$-\mathbb{a}$: $\mathbb{a}$と大きさが等しく、向きが逆のベクトル, $\mathbb{a}+(-\mathbb{a})=\mathbb{0}$

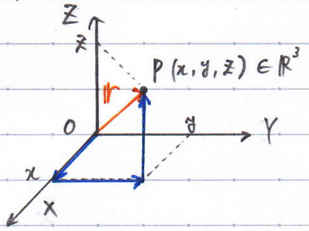
KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

◦ デカルト座標系

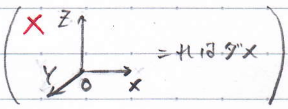
・基準となる点をO(オー)とする

・3次元空間内で3つの直交する座標をX軸，Y軸，Z軸とおく

・右手系(親指，人差し指，中指)であることに注意



$$\mathbb{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



・基底ベクトルについて

基底ベクトルとは各軸に平行で(正方向)大きさが1のベクトルのこと

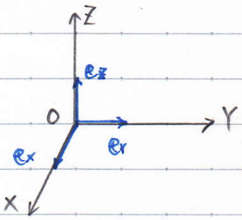
$$\begin{cases} \mathbb{e}_X : X軸正方向, & |\mathbb{e}_X| = 1 \\ \mathbb{e}_Y : Y軸正方向, & |\mathbb{e}_Y| = 1 \\ \mathbb{e}_Z : Z軸正方向, & |\mathbb{e}_Z| = 1 \end{cases}$$

これらを用いて，$\mathbb{r}$ を $\mathbb{e}_X, \mathbb{e}_Y, \mathbb{e}_Z$ の結合のみで表したとき，各基底ベクトルの係数がそれぞれ X, Y, Z の座標となる(これが本来座標の定め方)

$\overrightarrow{OP} = \mathbb{r}$，$P(x, y, z)$ のとき

$\mathbb{r} = x\mathbb{e}_X + y\mathbb{e}_Y + z\mathbb{e}_Z$

と表せる



◦ 位置の時間変化(速度と加速度)

・速度 ≡ 位置ベクトルの時間変化率(微小時間にどれだけ動くか)

$$\mathbb{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{r}(t+\Delta t) - \mathbb{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbb{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbb{r}}(t)$$

・加速度 ≡ 速度ベクトルの時間変化率

$$\mathbb{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{v}(t+\Delta t) - \mathbb{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbb{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbb{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\mathbb{r}}(t)$$

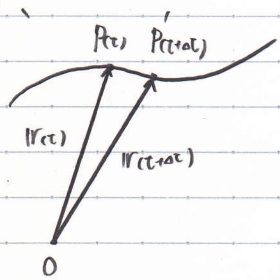
デカルト座標系において，$\mathbb{e}_X, \mathbb{e}_Y, \mathbb{e}_Z$ を用いて表せば，

$$\mathbb{r}(t) = x(t)\mathbb{e}_X + y(t)\mathbb{e}_Y + z(t)\mathbb{e}_Z \quad \text{↓tで微分}$$

$$\mathbb{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\mathbb{e}_X + \frac{dy(t)}{dt}\mathbb{e}_Y + \frac{dz(t)}{dt}\mathbb{e}_Z \quad \text{↓tで微分}$$

$$\mathbb{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\mathbb{e}_X + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\mathbb{e}_Y + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\mathbb{e}_Z$$

(※ここでは，$\mathbb{e}_X, \mathbb{e}_Y, \mathbb{e}_Z$ は t(時間)に依存しないので，係数のみをtで微分すれば良いことに注意)



1-2 運動の法則

ニュートンの3法則について取り扱う。これらは原理なので受け入れるしかない。

① 慣性の法則

物体に外力が働かないとき、その物体の速度は変化しない。
すなわち、このとき $\mathbb{v}(t)$ = 定数ベクトルとなり、等速直線運動か
静止し続ける。(もちろん $\mathbb{a}(t) = \frac{d\mathbb{v}(t)}{dt} = 0$)

② 運動方程式

物体の運動量(質量×速度)は外力の方向に沿って起こり、微小時間内
における運動量の単位時間あたりの変化の大きさは外力の大きさに等しい。
…というのが原義だが、簡単に言い直すと、
質量と加速度の積(ベクトルのスカラー倍)は、外力ベクトルに等しい。
式で表すと、

$$\frac{d\mathbb{P}(t)}{dt} = \mathbb{F} \Leftrightarrow m\frac{d\mathbb{v}(t)}{dt} = \mathbb{F} \Leftrightarrow m\ddot{\mathbb{r}} = \mathbb{F} \quad (\mathbb{P}(t) = m\mathbb{v}(t))$$

③ 作用・反作用の法則

すべての作用に対して、等しい大きさで反対方向の反作用が存在する
すなわち、
物体Aが物体Bに対して力 $\mathbb{F}$ を及ぼすならば、物体Bは物体Aに対して
力 $-\mathbb{F}$ を及ぼす。

※外力について

$\mathbb{F}$ … ベクトル量，作用・反作用の法則が成立する　　　今は知らなくて良い
種類は
- 基本的な力：万有引力，クーロン力(電磁力)(，強い相互作用，弱い相互作用)
- 有効的な力：摩擦力，弾性力，抵抗力，抗力など

(本来は上4つの相互作用が自然界での相互作用であり、全ての力(下の例など)はこれらの力の組み合わせであるが、ここでは割愛する。)

※質量について

ここでの質量は慣性質量である。一応軽く触れるが、あまり気にしなくてよい。
- 慣性質量 … 物体の慣性(物体の性質)の大きさが比例する、物質の量
- 重力質量 … 物体に働く重力の大きさが物質の量の大きさに比例することを利用して、重力を比較することによって計測された物質の量

今は区別しないことにする。

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

これら3法則が成立する座標系を**慣性座標系**と呼ぶ。

1-3 ベクトルの演算

物理で必要なベクトルの演算の基本。(全て既知だとは思いますが、念のため。)

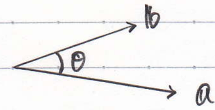
◦ 内積

定義：$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の内積は $\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = |\mathbb{a}||\mathbb{b}|\cos\theta$ (ただし、θ は2ベクトルのなす角)

↑スカラーであることに注意！

成立する法則

$$\begin{cases} \mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = \mathbb{b}\cdot\mathbb{a} & (\text{交換則}) \\ (\lambda\mathbb{a})\cdot\mathbb{b} = \lambda(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}) & (\text{スカラー倍}) \\ \mathbb{c}\cdot(\mathbb{a}+\mathbb{b}) = \mathbb{c}\cdot\mathbb{a} + \mathbb{c}\cdot\mathbb{b} & (\text{分配則}) \end{cases}$$

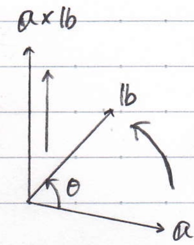


◦ 外積

定義：$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の外積ベクトルを $\mathbb{a}\times\mathbb{b}$ と表し、これは

- **向き**：$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ のいずれにも垂直，$\mathbb{a}\to\mathbb{b}$ に重ねるように回転させたとき、右ネジが進む向き。
- **大きさ**：$|\mathbb{a}||\mathbb{b}|\sin\theta$ (θ は上と同様)

のベクトル



法則

$$\begin{cases} \mathbb{a}\times\mathbb{b} = -\mathbb{b}\times\mathbb{a} & (\leftarrow \text{交換則は成立しないので注意!!}) \\ (\lambda\mathbb{a})\times\mathbb{b} = \lambda(\mathbb{a}\times\mathbb{b}) & (\text{スカラー倍}) \\ \mathbb{c}\times(\mathbb{a}+\mathbb{b}) = \mathbb{c}\times\mathbb{a} + \mathbb{c}\times\mathbb{b} & (\text{分配則}) \end{cases}$$

※ ベクトルのノルム(大きさ)関連について

$|\mathbb{a}|$ … $\mathbb{a}$ の「大きさ」を表すスカラー

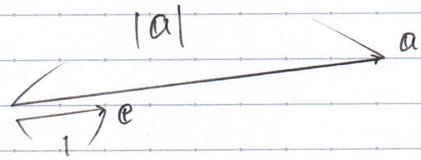
・ノルムによる規格化

$\mathbb{a}$ というベクトルがあったとき

$\mathbb{a}\cdot\mathbb{a} = |\mathbb{a}|\cdot|\mathbb{a}|\cdot\cos 0 = |\mathbb{a}|^2$

$|\mathbb{a}| \neq 0$ のとき

$\dfrac{\mathbb{a}}{|\mathbb{a}|} = \mathbb{e}$ ：大きさが1，方向は $\mathbb{a}$ と同方向のベクトル(単位ベクトル)



KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

※基底ベクトルの内積と外積（結構使うので覚えておく）

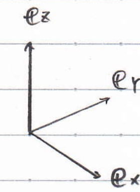
・内積

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1, & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1, & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 \\ \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0, & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0, & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0 \end{cases}$$

・外積

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = 0, & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = 0, & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = 0 \\ \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \end{cases}$$

↑もちろん左辺を逆にしたら右辺に − がつくことに注意!!



※内積と外積の成分表示

$\mathbf{a} = (a_x \ a_y \ a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x \ b_y \ b_z)$ とすると.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{e}_z + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{e}_z$$

これらは、$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z$ であることを用いて、上記の規則に従って計算すれば導出できる。

〈覚え方〉～外積の成分がどうしても覚えられない人のために～

①

	x	y	z	x
$\mathbf{a}$	a_x	a_y	a_z	a_x
$\mathbf{b}$	b_x	b_y	b_z	b_x

② $a_x b_y - a_y b_x$ ：z成分

③ $a_y b_z - a_z b_y$ ：x成分

④ $a_z b_x - a_x b_z$ ：y成分

① まず左のように $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の成分をならべる
② ⌣ の4つで $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の $ad-bc$（detですね）をする
いま、xとy成分で $ad-bc$ をしたので、出てくるのは、$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ のz成分
③,④：②のくりかえし

※覚えておくとただ嬉しいもの（自慢出来る）←本当は重要だけど、今回は出て来ないっぽい

・$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

Date

1-4. 運動の保存量・保存則

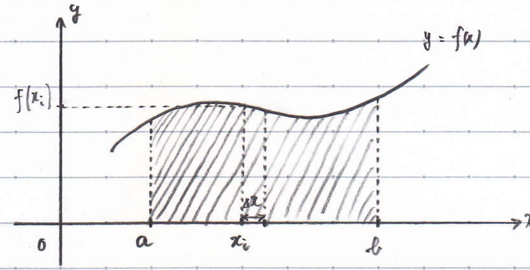
○積分

関数 $f(x)$ を x の区間 $[a, b]$ で積分する

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i\cdot\Delta x \ (i = 0, 1, \cdots, n)$$
$$(x_0 = a,\ x_n = b)$$

とすると、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$



また、基底ベクトルが t に依存しないときは、

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbb{F}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ F_x(t)\,\mathbb{e}_x + F_y(t)\,\mathbb{e}_y + F_z(t)\,\mathbb{e}_z \right\} dt$$
$$= \left\{ \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)\,dt \right\} \mathbb{e}_x + \left\{ \int_{t_1}^{t_2} F_y(t)\,dt \right\} \mathbb{e}_y + \left\{ \int_{t_1}^{t_2} F_z(t)\,dt \right\} \mathbb{e}_z$$

(1) 運動量の時間変化と力積

$\mathbb{P} \equiv m\mathbb{v}$ ：運動量（定義）

$$m\frac{d\mathbb{v}}{dt} = \mathbb{F}(t)$$
$$\therefore \frac{d(m\mathbb{v})}{dt} = \mathbb{F}(t)$$
$$\therefore \frac{d\mathbb{P}(t)}{dt} = \mathbb{F}(t)$$

両辺を t で積分して

$$\int_{t_1}^{t_2} d\mathbb{P}(t) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{F}(t)\,dt \quad \therefore \left[\mathbb{P}(t)\right]_{t_1}^{t_2} = \mathbb{P}(t_2) - \mathbb{P}(t_1) = \underline{\int_{t_1}^{t_2} \mathbb{F}(t)\,dt} \equiv \text{力積}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(t_2) - \mathbb{P}(t_1) = m\mathbb{v}(t_2) - m\mathbb{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{F}(t)\,dt \equiv \text{力積}}$$

運動量変化は、外力による力積に等しい

今回は出て来ないが、力積が 0 のとき、運動量保存則が成立する

(2) 角運動量の時間変化と力のモーメント

$\mathbb{L} \equiv \mathbb{r} \times \mathbb{p} = m\mathbb{r} \times \frac{d\mathbb{r}}{dt} = m\mathbb{r} \times \mathbb{v}$ ：角運動量（定義）

角運動量の時間変化を考える

$$\frac{d}{dt}\mathbb{L} = \underbrace{m\frac{d\mathbb{r}}{dt} \times \frac{d\mathbb{r}}{dt}}_{0} + m\mathbb{r} \times \frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2}$$ （上の定義式とライプニッツ則を用いた）

（外積も $\frac{d}{dt}(x \times y) = \frac{dx}{dt} \times y + x \times \frac{dy}{dt}$ が成立するので注意！）

$$= \mathbb{r} \times m\frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2}$$

$$= \mathbb{r} \times \mathbb{F}$$

$$\equiv \mathbb{M}$$ ：力のモーメント（定義） …(＊)

両辺 t で積分して

$$\int_{\mathbb{L}(t_1)}^{\mathbb{L}(t_2)} d\mathbb{L} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbb{r} \times \mathbb{F})\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{M}\, dt$$

$$\therefore \mathbb{L}(t_2) - \mathbb{L}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{M}\, dt$$

$\boxed{\mathbb{L}(t_2) - \mathbb{L}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbb{r} \times \mathbb{F})\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{M}\, dt,\ \mathbb{r} \times \mathbb{v} = \mathbb{M} : \text{力のモーメント}}$

角運動量の変化は外力のモーメント（能率）（の積）に等しい

実際は微分形（(＊)のほう）で使うことが多いかも…（今回はそう）

$\mathbb{r} \times \mathbb{F} = \mathbb{0}$ になるとき（すなわち $\mathbb{r}$ と $\mathbb{F}$ の方向が等しいときなど），

$\frac{d}{dt}\mathbb{L} = \mathbb{0}$，すなわち $\mathbb{L}$ が定ベクトルとなる。これを角運動量保存則と呼ぶ。

(3) 運動エネルギーの時間変化と外力による仕事

$K = \frac{m}{2}|\mathbb{v}|^2$ ：運動エネルギー

$$m\frac{d\mathbb{v}}{dt} = \mathbb{F}$$

両辺に $\mathbb{v}$ を内積する

$$m\mathbb{v} \cdot \frac{d\mathbb{v}}{dt} = \mathbb{F} \cdot \mathbb{v}$$

$$m\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\mathbb{v} \cdot \mathbb{v}\right) = \mathbb{F} \cdot \frac{d\mathbb{r}}{dt}$$

（$\mathbb{v} = v_x \mathbb{e}_x + v_y \mathbb{e}_y + v_z \mathbb{e}_z$ とおいて計算すれば，$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathbb{v} \cdot \mathbb{v}\right) = \mathbb{v} \cdot \frac{d\mathbb{v}}{dt}$ となる（各自やってください））

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}|\mathbb{v}|^2\right) = \mathbb{F} \cdot \frac{d\mathbb{r}}{dt}$$

両辺 t で積分して

$$\int_{K(t_1)}^{K(t_2)} dK = \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{F} \cdot \frac{d\mathbb{r}}{dt}\, dt \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{r}(t_1)}^{\mathbb{r}(t_2)} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = W \equiv \text{仕事}$$

$K = \frac{m}{2}|\mathbb{v}|^2$ を用いた

$$\therefore K(t_2) - K(t_1) = \int_{\mathbb{r}(t_1)}^{\mathbb{r}(t_2)} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

$\boxed{K(t_2) - K(t_1) = \frac{m}{2}|\mathbb{v}(t_2)|^2 - \frac{m}{2}|\mathbb{v}(t_1)|^2 = \int_{\mathbb{r}_1}^{\mathbb{r}_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} : \text{仕事}}$

運動エネルギーの変化は外力の仕事に等しい

（さて、ここではあえて外力による仕事が0のときに運動エネルギーが保存するとは言いません。理由としては、外力（ここではまだ重力などの保存力を含む）が無い物理現象を考える意味があまり無いことと、次の(4)で保存力のポテンシャルエネルギーを含めた総力学的エネルギー保存を扱うからです。）

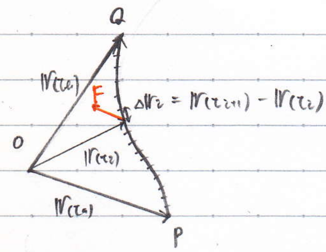
※(*)について

厳密には(*)のところを自明として通り抜けてはいけない。しかし、＝が成立するのは事実なので、面倒ならこの※は飛ばしても構わない。

・外力のする仕事

$$W_{外} = \int_{t_a}^{t_b} \mathbb{F}(t) \frac{d\mathbb{r}(t)}{dt} \cdot dt$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{F}(t_i) \frac{d\mathbb{r}(t_i)}{dt} \Delta t \quad \left(\Delta t = \frac{t_b - t_a}{N},\ t_i = t_a + i\Delta t,\ i = 0, 1, \cdots, N,\ t_0 = t_a,\ t_N = t_b \right)$$



ここで、$\frac{d\mathbb{r}(t_i)}{dt}$は微小量なので、

$$\frac{d\mathbb{r}(t_i)}{dt} \simeq \frac{\Delta\mathbb{r}_i}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (極限に飛ばせば \simeq が =)$$

よって

$$W_{外} = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{F}(t_i) \left(\frac{\Delta\mathbb{r}_i}{\Delta t} + O(\Delta t) \right) \Delta t$$

（もともとは $\frac{d\mathbb{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{r}(t+\Delta t) - \mathbb{r}(t)}{\Delta t}$ なので、$\frac{d\mathbb{r}(t_i)}{dt} \simeq \frac{\Delta\mathbb{r}_i}{\Delta t} + O(\Delta t)$ $(\Delta\mathbb{r}_i = \mathbb{r}(t_{i+1}) - \mathbb{r}(t_i))$）

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{\mathbb{F}(t_i) \Delta\mathbb{r}_i}_{=[t_i, t_{i+1}]における仕事}$$

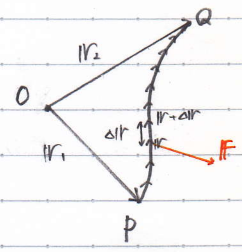
$$= \int_{\mathbb{r}(t_a)}^{\mathbb{r}(t_b)} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

これを**線積分**という

(4) 保存力とエネルギー保存則

右図でPからQまで外力に抗して（ほぼ同じ力をかけてゆっくり移動させる）物体を移動するのに要する仕事をW'とする

$$W'_{P \to Q} = -\int_{\mathbb{r}_1}^{\mathbb{r}_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$



このW'が始点(P)と終点(Q)のみで決まり、途中の経路に依らない外力$\mathbb{F}$を**保存力**という（これが保存力の定義）

始点と終点のみで決まるがゆえ、各保存力に対してポテンシャルエネルギーが定義できる。

$$\boxed{U(\mathbf{r}) \equiv -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \quad (\text{ただし、}\mathbf{r}_0\text{は基準点})}$$

これを用いて表せば、基準点を0として、

$$W' = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = -\left\{\int_0^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} - \int_0^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}\right\}$$

$$= U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) \quad \left(= \tilde{U}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\right)$$

(本来はW'をこのように($\mathbf{r}_2$の関数)−($\mathbf{r}_1$の関数)で表せるようなものを、ポテンシャルエネルギーと定義した、という順序だが、今は分かりやすいために順序を逆にした)

ここで、(3)より、$\mathbf{F}$が保存力のときは、

$$K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$
$$= -\left(U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)\right)$$
$$= -\left\{U(\mathbf{r}(t_2)) - U(\mathbf{r}(t_1))\right\}$$

$$\therefore K(t_2) + U(\mathbf{r}(t_2)) = K(t_1) + U(\mathbf{r}(t_1))$$

すなわち、$E = K + U = \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + U(\mathbf{r})$: 力学的エネルギー と定義すると、

Eは保存する

ことが分かる。

$$E = K + U = \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + U(\mathbf{r}) = \text{const.}(\text{一定}) : \text{力学的エネルギー}$$

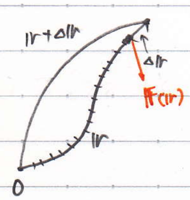
K : 運動エネルギー (kinetic energy), U : 位置エネルギー (potential energy)

力学的エネルギーは保存する(外力が保存力のとき)

(5) 外力とポテンシャルエネルギーの関係

(4)で定義した式と(3)より、

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$
$$= -\lim_{|\Delta\mathbf{r}_i|\to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{F}(\mathbf{r}_i)\Delta\mathbf{r}_i$$



であった。ここで $\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$ で $U(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})$ を定義すると、

$$U(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$
$$= -\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\Delta\mathbf{r} + O(|\Delta\mathbf{r}|^2) \simeq -\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\Delta\mathbf{r} \quad \cdots ①$$

(↑ $\Delta\mathbf{r}$の間は$\mathbf{F}(\mathbf{r})$はほぼ一定とみなした($\Delta\mathbf{r}\to 0$のとき))

一方、$\Delta U = U(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) - U(\mathbf{r})$ とおくと、

$$\Delta U = U(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) - U(\mathbf{r})$$
$$= U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y, z)$$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

$$
\begin{aligned}
&= U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y+\Delta y, z+\Delta z) \\
&\quad + U(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y, z+\Delta z) \\
&\quad + U(x, y, z+\Delta z) - U(x, y, z) \\
&\simeq \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z \quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

↑($\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ なら$=$)

(分かりにくいと思ったら、全微分 $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$ を思い出してくれればよい)

($\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$ を変形したと考えれば分かりやすいだろう。)

一方、①より、

$$-\mathbb{F}(\mathbb{r}) \cdot \Delta\mathbb{r} = -F_x(x,y,z)\Delta x - F_y(x,y,z)\Delta y - F_z(x,y,z)\Delta z \quad (\because \Delta\mathbb{r} = \Delta x\, \mathbb{e}_x + \Delta y\, \mathbb{e}_y + \Delta z\, \mathbb{e}_z)$$

$\cdots ①^*$

$①^*$と②より、Δx, Δy, Δzはそれぞれ独立なので、

$$
\begin{cases}
F_x(x,y,z) = -\dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \\
F_y(x,y,z) = -\dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} \\
F_z(x,y,z) = -\dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}
\end{cases}
$$

となることが分かる。従って、

$$
\begin{aligned}
\mathbb{F}(\mathbb{r}) &= F_x(x,y,z)\,\mathbb{e}_x + F_y(x,y,z)\,\mathbb{e}_y + F_z(x,y,z)\,\mathbb{e}_z \\
&= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbb{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbb{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbb{e}_z\right) \\
&= -\nabla U(\mathbb{r}) = -\mathrm{grad}\, U(\mathbb{r})
\end{aligned}
$$

と表せることが分かる。

gradientは既習のはずなので説明を省くが、

なぜgradient(勾配)と呼ばれるのか少し分かるかも…

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\mathbb{F}(\mathbb{r}) &= -\nabla U(\mathbb{r}) \\
&= -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}
\end{aligned}
}
$$

例題

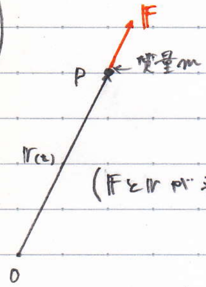
位置 $\boldsymbol{r}$ に働く外力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(|\boldsymbol{r}|)\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

← (これは $F(r)\,\boldsymbol{e}_r$ と表せる こう書くと意味が分かりやすいかも)

と表されるとき、中心力と呼ぶ

($F(|\boldsymbol{r}|)$とは、$\boldsymbol{F}$の大きさが$|\boldsymbol{r}|$のみで決まるということ)



($\boldsymbol{F}$と$\boldsymbol{r}$が平行)

(1) 質量 m の物体が外力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ のもとで運動するとき、角運動量 $\boldsymbol{L}$ が保存することを示せ。

(2) $F(|\boldsymbol{r}|) = k|\boldsymbol{r}|^{\alpha}$ のとき $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ は保存力であることを示せ。
また、このとき保存する力学的エネルギー E を求めよ。

解答

(1) $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(|\boldsymbol{r}|)\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{r}}$ より. $\left(\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + m\boldsymbol{r} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$
$$= m\boldsymbol{r} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$
$$= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$$ ← ここまでは覚えてても良いかも
$$= \boldsymbol{r} \times \left(F(|\boldsymbol{r}|)\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\right)$$
$$= \frac{F(|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|}\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}$$
$$= 0$$

よって $\boldsymbol{L}$ は一定、すなわち保存する。(ベクトルの向きと大きさが保存する)

(2) まず前準備として.

$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z$

$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\,\boldsymbol{e}_x + \Delta y\,\boldsymbol{e}_y + \Delta z\,\boldsymbol{e}_z$

より、

$$\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = \frac{x\Delta x + y\Delta y + z\Delta z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ここで、

(Δrが十分に小さいとき)

$$\Delta(r^2) = (r+\Delta r)^2 - r^2 = 2r\Delta r + (\Delta r)^2 \simeq 2r\Delta r$$
$$\Delta(r^2) = \Delta(x^2+y^2+z^2) \simeq (x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 + (z+\Delta z)^2 - (x^2+y^2+z^2)$$
$$= 2x\Delta x + 2y\Delta y + 2z\Delta z + \{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\}$$
$$\simeq 2(x\Delta x + y\Delta y + z\Delta z)$$

(Δrが十分に小さいとき)

これらより、$x\Delta x + y\Delta y + z\Delta z \simeq r\Delta r$ (Δrが十分に小さいとき)

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

従って

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\cdot\Delta\mathbf{r} = \frac{x\Delta x + y\Delta y + z\Delta z}{r} \simeq \frac{r\Delta r}{r} = \Delta r$$

$$\therefore \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}d\mathbf{r} = dr \cdots ①$$

本題に戻ると、2点P, Q間を外力に抗して動かす仕事を考えると、

$$W' = -\int_{\mathbf{r}_P}^{\mathbf{r}_Q}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$

$$= -\int_{\mathbf{r}_P}^{\mathbf{r}_Q}F(r)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= -\int_{r_P}^{r_Q}F(r)\,dr \quad (\because ①)$$

$$= -\int_{r_P}^{r_Q}k r^{\alpha}\,dr$$

$$= -\left[\frac{k}{\alpha+1}r^{\alpha+1}\right]_{r_P}^{r_Q}$$

$$= -\frac{k}{\alpha+1}\{(r_Q)^{\alpha+1}-(r_P)^{\alpha+1}\}$$

$$= -\frac{k}{\alpha+1}\{|\mathbf{r}_Q|^{\alpha+1}-|\mathbf{r}_P|^{\alpha+1}\}$$

よって W' は始点と終点の位置ベクトルのみによって定まる
(r_P と r_Q のみの関数)ので、$\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は保存力である。

そこで、

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{k}{\alpha+1}|\mathbf{r}|^{\alpha+1}$$

と取れば、

$$W' = U(\mathbf{r}_Q) - U(\mathbf{r}_P)$$

一方で、

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

$$\therefore m\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2\right) = \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\therefore K(\mathbf{r}_Q) - K(\mathbf{r}_P) = \int_{\mathbf{r}_P}^{\mathbf{r}_Q}\mathbf{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = -W' \quad \left(K(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 \text{ と定義した}\right)$$

より、

$$U(\mathbf{r}_Q) - U(\mathbf{r}_P) = K(\mathbf{r}_P) - K(\mathbf{r}_Q)$$

$$\therefore U(\mathbf{r}_Q) + K(\mathbf{r}_Q) = U(\mathbf{r}_P) + K(\mathbf{r}_P) = \text{const.} = E \text{ (保存)}$$

従って

$$E = \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 - \frac{k}{\alpha+1}|\mathbf{r}|^{\alpha+1} \cdots \text{(答)}$$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

※補足(授業範囲外なので飛ばすのが吉?)

rotという記号(rotation)を次のように定義する

$$\mathrm{rot}\,A = \nabla \times A$$

Fが保存力のとき

$$\mathrm{rot}\,F = \nabla \times \mathbb{F}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

$\Big(\because$ Fが保存力なら

$$\mathbb{F} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow x\text{のみの関数} \\ \leftarrow y\text{のみの関数} \\ \leftarrow z\text{のみの関数} \end{array}$$

$\Big)$

なので、本来これを示せば$\mathbb{F}$が保存力の証明となる。

2. 運動の解析

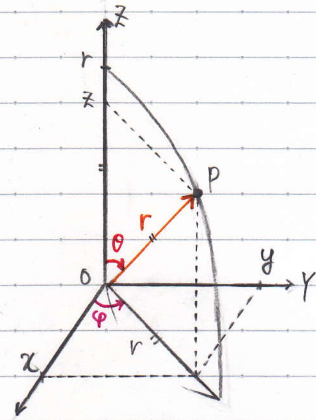
2-0. 極座標を用いた運動方程式

今までの運動方程式は xyz 座標空間で表現していた。
これを極座標を用いて表してみる。(中心力のとき)

。(例えば)中心力を扱うなら、

$$\mathbf{F} = F(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \quad (r = |\mathbf{r}|)$$

こういう力のとき r 自身が座標の1つになっている方が圧倒的に便利なので、極座標を用いるのがよい。



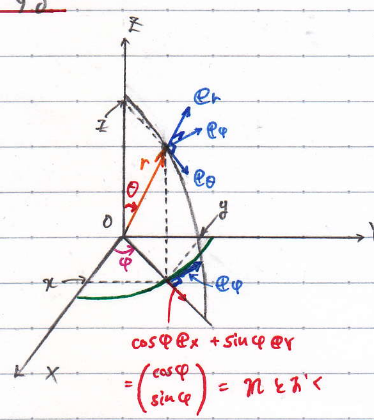
$\{r, \theta, \varphi\}$ と $\{x, y, z\}$ (右図参照)
を対応させると、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

(図を見ればすぐ分かるはず)
$(0 \leq \theta \leq \pi, \ 0 \leq \varphi < 2\pi)$

次に $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ を、$\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ を用いて表す
$\Delta\mathbf{r} = \Delta x\,\mathbf{e}_x + \Delta y\,\mathbf{e}_y + \Delta z\,\mathbf{e}_z$ であったのと同様に、
少しずらして考えると、$(r, \theta, \varphi \to r+\Delta r, \theta+\Delta\theta, \varphi+\Delta\varphi)$
右下図のようになる。
ここで、図より、
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ は $\mathbf{r}$ に依存する、すなわち t に依存する
ことに注意しておく



まず、

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x}{r}\mathbf{e}_x + \frac{y}{r}\mathbf{e}_y + \frac{z}{r}\mathbf{e}_z$$
$$= \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z$$

次に
$\mathbf{e}_\varphi$ は $\mathbf{n}$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転させたものなので、

$$\mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\mathbf{n}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$= -\sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y$$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

さらに、$\mathbb{e}_\theta$ は $\mathbb{e}_r$ と $\mathbb{e}_\varphi$ に垂直なので、右ネジに注意すると、

$$\mathbb{e}_\theta = \mathbb{e}_\varphi \times \mathbb{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \cos\theta\cos\varphi\,\mathbb{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\mathbb{e}_y - \sin\theta\,\mathbb{e}_z$$

ただし、$\mathbb{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbb{e}_x + \cos\varphi\,\mathbb{e}_y + 0\,\mathbb{e}_z$ とした。

以上まとめると、

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbb{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbb{e}_y + \cos\theta\,\mathbb{e}_z \\ \mathbb{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\mathbb{e}_x + \cos\theta\cos\varphi\,\mathbb{e}_y - \sin\theta\,\mathbb{e}_z \\ \mathbb{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbb{e}_x + \cos\varphi\,\mathbb{e}_y \end{cases}}$$

今度は $\mathbb{r}$, $\mathbb{v} = \dot{\mathbb{r}}$, $\mathbb{a} = \ddot{\mathbb{r}}$ を $\mathbb{e}_r$, $\mathbb{e}_\theta$, $\mathbb{e}_\varphi$ を用いて表す

まずその前に $\dot{\mathbb{e}}_r$, $\dot{\mathbb{e}}_\theta$, $\dot{\mathbb{e}}_\varphi$ を $\mathbb{e}_r$, $\mathbb{e}_\theta$, $\mathbb{e}_\varphi$ を用いて表す

$$\begin{cases} \dot{\mathbb{e}}_r = \cos\theta\cdot\dot{\theta}(\cos\varphi\,\mathbb{e}_x + \sin\varphi\,\mathbb{e}_y) - \sin\theta(\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\,\mathbb{e}_x - \cos\varphi\cdot\dot{\varphi}\,\mathbb{e}_y) \\ \qquad -\sin\theta\cdot\dot{\theta}\,\mathbb{e}_z \\ \quad = \cdots = \dot{\theta}\,\mathbb{e}_\theta + \sin\theta\cdot\dot{\varphi}\cdot\mathbb{e}_\varphi \\ \dot{\mathbb{e}}_\theta = \cdots = -\dot{\theta}\,\mathbb{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\mathbb{e}_\varphi \\ \dot{\mathbb{e}}_\varphi = \cdots = -\dot{\varphi}(\sin\theta\,\mathbb{e}_r + \cos\theta\,\mathbb{e}_\theta) \end{cases}$$

さて、準備が出来たので、$\mathbb{r}$, $\mathbb{v}$, $\mathbb{a}$ を $\mathbb{e}_r$, $\mathbb{e}_\theta$, $\mathbb{e}_\varphi$ を用いて表す

$$\mathbb{r} = r\,\mathbb{e}_r$$

$$\mathbb{v} = \dot{\mathbb{r}} = \dot{r}\,\mathbb{e}_r + r\,\dot{\mathbb{e}}_r = \underline{\dot{r}}\,\mathbb{e}_r + \underline{r\dot{\theta}}\,\mathbb{e}_\theta + \underline{r\sin\theta\cdot\dot{\varphi}}\,\mathbb{e}_\varphi$$
$$\equiv \underline{v_r}\,\mathbb{e}_r + \underline{v_\theta}\,\mathbb{e}_\theta + \underline{v_\varphi}\,\mathbb{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \mathbb{a} &= \ddot{\mathbb{r}} \\ &= \dot{\mathbb{v}} \\ &= \cdots = \underline{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)}\,\mathbb{e}_r + \underline{(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2)}\,\mathbb{e}_\theta \\ &\quad + \underline{(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta)}\,\mathbb{e}_\varphi \\ &\equiv \underline{a_r}\,\mathbb{e}_r + \underline{a_\theta}\,\mathbb{e}_\theta + \underline{a_\varphi}\,\mathbb{e}_\varphi \end{aligned}$$

(同じ色が同じもの)

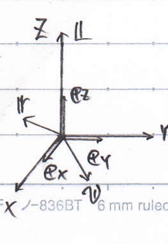
以上準備が整った。中心力下の運動方程式をこれらを用いて表す。

まず $\mathbb{F}(\mathbb{r})$ を中心力とすると、

$\mathbb{F}(\mathbb{r}) = F(r)\dfrac{\mathbb{r}}{r}$ (中心力の定義)

このとき〈例題〉(1) より、Fが中心力なら $\mathbb{L} = m(\mathbb{r}\times\mathbb{v})$ が一定なので、$\mathbb{L} = |\mathbb{L}|\,\mathbb{e}_z$ となるように $\{\mathbb{e}_x, \mathbb{e}_y, \mathbb{e}_z\}$ をとることが出来る

$\mathbb{L}$ が一定ということは、$\mathbb{L}$ に垂直な平面、すなわち、$\mathbb{r}$ と $\mathbb{v}$ で張られる平面は一定なので、物体の運動はこの平面上に限られる。いま、$\mathbb{L}$ と $\mathbb{e}_z$ は平行なので、この平面とは XY平面である。(運動を3次元から2次元に落とした)



KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

よって、極座標においても $\theta = \frac{\pi}{2}$ で一定としてよい。

(XY平面上のみでしか運動しないと定めたので、$\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$ としても一般性を失わない、ということ)

よって、

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi \\ y = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = 0 \\ v_\varphi = r\dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ a_\theta = 0 \\ a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r}(2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \end{cases}$$

より、

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{r} = r\mathbb{e}_r \\ \dot{\mathbb{r}} = \dot{r}\mathbb{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbb{e}_\varphi \\ \ddot{\mathbb{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbb{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\mathbb{e}_\varphi \end{cases}}$$

このとき、

$$\mathbb{L} = m(\mathbb{r} \times \dot{\mathbb{r}}) = m\{r\mathbb{e}_r \times (\dot{r}\mathbb{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbb{e}_\varphi)\}$$
$$= m r^2\dot{\varphi}\mathbb{e}_z \quad (\theta = \tfrac{\pi}{2} \text{ より、} \mathbb{e}_\theta = \mathbb{e}_\varphi \times \mathbb{e}_r = -\mathbb{e}_z)$$

また、$\mathbb{L}$ は $\mathbb{e}_z$ と平行なので、

$\mathbb{L} = |\mathbb{L}|\mathbb{e}_z$ と表した。$|\mathbb{L}| = L$ とおくと、

$$L = mr^2\dot{\varphi} \quad \therefore r^2\dot{\varphi} = \frac{L}{m} \cdots ①$$

以上から、XY平面での極座標の運動方程式は、

$$m\ddot{\mathbb{r}} = \mathbb{F}(\mathbb{r})$$

$$\therefore m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbb{e}_r + \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\mathbb{e}_\varphi = F(r)\mathbb{e}_r$$

$\mathbb{e}_r$ と $\mathbb{e}_\varphi$ は1次独立なので、

$$\boxed{\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F(r) \\ \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \end{cases}} \quad \begin{matrix} \cdots ② \\ \cdots ③ \end{matrix}$$

③より、$r^2\dot{\varphi} = $ 一定 $= h$ とおく (今は h は定数) …④

(これと①より、$\frac{L}{m} = $ 一定 $\therefore L = $ 一定 (角運動量保存))

④より、$\dot{\varphi} = \frac{h}{r^2}$ なので、これを②に代入して、

$$m\left(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}\right) = F(r)$$

$$m\ddot{r} = \frac{mh^2}{r^3} + F(r)$$ $r = r(t)$ についてのみの二階微分方程式になった!!

物理学として大事なこと

(もし、この式が解けて、$r = r(t)$ が具体的なもの関数として表せたら、$\dot{\varphi} = \frac{h}{r^2}$ より、$\varphi = \varphi(t)$ も具体的なもの関数として表せる。すなわち、運動を時間追跡できる!)

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

もし、Fが保存力なら、

$U(r) = -\int_{r_0}^{r} F(r)\,dr$ より、$\frac{d}{dr}U(r) = -F(r)$

$\therefore m\ddot{r} = \frac{mh^2}{r^3} - \frac{d}{dr}U(r) = \frac{d}{dr}\left(-\frac{mh^2}{2}\frac{1}{r^2}\right) - \frac{d}{dr}U(r) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{mh^2}{2}\frac{1}{r^2} + U(r)\right)$

両辺に $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ をかけて、

$m\dot{r}\ddot{r} = -\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{mh^2}{2}\frac{1}{r^2} + U(r)\right)$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{mh^2}{2}\frac{1}{r^2} + U(r)\right)$

$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mh^2}{2}\frac{1}{r^2} + U(r)\right) = 0$

$\therefore \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mh^2}{2}\frac{1}{r^2} + U(r) = const. = E_r$ (保存量) とおく

$\therefore E_r = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) + U(r)$

これは、

$\dot{r} = f(r, E_r, L)$ ($\dot{r}$ は r, E_r, L の関数ということ)

となり、いま E_r と L が一定より、

$\dot{r} =$ (r のみの関数) (tについての1階微分方程式)

となった。(より簡単に時間追跡出来るようになった!!)

2-1. 天体(惑星)の運動、ケプラーの法則と万有引力

この節では、ケプラーの法則の成立を前提とし、天体の運動を解析する。

・ケプラーの3法則 (これらはティコブラーエの観測データを基に、ケプラーが見出した)

第1：惑星は太陽を焦点の1つとする楕円軌道を描く。
第2：太陽と惑星を結ぶ直線分(動径)が単位時間あたりに掃く面積は一定である(面積速度が一定)。
第3：惑星が太陽のまわりを回る周期の2乗は、楕円軌道の長半径の3乗に比例する。(しかも、比例定数は惑星に依らず一定)

・楕円について、

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$ とする)

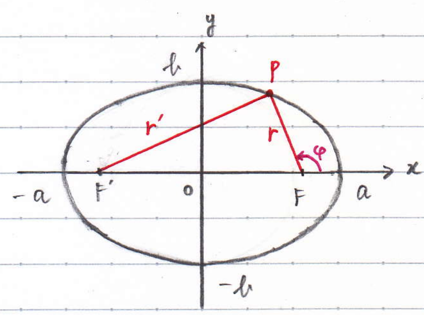
焦点 $F(c, 0)$ と $F'(-c, 0)$

ただし、$c \equiv \sqrt{a^2 - b^2}$

$\overline{FP} + \overline{F'P} = 2a$ (楕円の定義)

また、$\boxed{\varepsilon \equiv \frac{c}{a}}$ (離心率)、

$\boxed{\frac{b^2}{a} \equiv l}$



と定義しておく。(後で使う)

(ε と l は a, b, c によって定まるので、各楕円における定数)

極は焦点F

いま、$P(r, \varphi)$ とし、極座標で考える。このとき r' は r と φ で定まり、

$$r'^2 = (2c + r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2$$
$$= 4c^2 + 4cr\cos\varphi + r^2 \quad \cdots ①$$

一方定義より、

$$r + r' = 2a \qquad \therefore r'^2 = (r - 2a)^2 \cdots ②$$

①、②より、

$$4c^2 + 4cr\cos\varphi + r^2 = r^2 - 4ar + 4a^2$$

$$\therefore r = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{c}{a}\cos\varphi} = \frac{l}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

（これにより、l は $\varphi = \frac{\pi}{2}$ のときの r だと分かった）

$$\therefore \boxed{r = \frac{l}{1 + \varepsilon\cos\varphi}}$$ （楕円の極方程式表示）

また、皆さん御存じの通り、楕円はパラメータ θ を用いて媒介変数表示をすることが出来る

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (\theta \neq \varphi \text{ に注意})$$

ここで、

$$r^2 = (x - c)^2 + y^2$$
$$= (a\cos\theta - c)^2 + (b\sin\theta)^2$$
$$= \cdots = (a - c\cos\theta)^2 \quad (\because b^2 = a^2 - c^2)$$

$$\therefore r = a - c\cos\theta \ (> 0)$$
$$= a\left(1 - \frac{c}{a}\cos\theta\right)$$

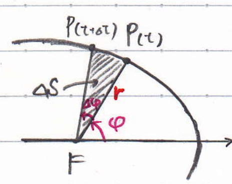
$$\therefore \boxed{r = a(1 - \varepsilon\cos\theta)}$$

（θ の図形的意味は高校数学で既習のはずなので省くが、直感的には分かりにくいので、媒介変数として受け入れよう）

・面積速度について.

$t \to t + \Delta t$ の間に動径の掃く面積を ΔS とすると、

$$\Delta S \fallingdotseq \frac{1}{2} r \cdot r\Delta\varphi \quad (\Delta t \to 0 \text{ なら} \fallingdotseq \text{が} =)$$



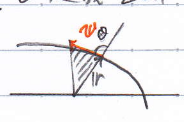
よって、面積速度は、

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$$

従って面積速度を

$$\boxed{\frac{dS(t)}{dt} \equiv \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}}$$

と定義出来る。



（$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$ とは左の斜線部の面積であり、これは、

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{v}|\sin(\pi - \theta) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}||\dot{\boldsymbol{r}}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}|$$

である）

$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$ = 一定のはずなので、(ケプラー第2法則) 2次元極座標で考えると、

$\mathbb{r} = r\mathbb{e}_r,\ \dot{\mathbb{r}} = \dot{r}\mathbb{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbb{e}_\varphi$ より、

$\mathbb{L} = m(\mathbb{r}\times\dot{\mathbb{r}}) = mr^2\dot{\varphi}\,\mathbb{e}_z \quad \therefore L = mr^2\dot{\varphi} \quad \therefore r^2\dot{\varphi} = \frac{L}{m}$ ($\mathbb{e}_z$は一定)

いま、$\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{L}{2m}$ が一定のはずなので、

Lが一定ということになる。

すなわち$\mathbb{L}$は一定 → 角運動量が保存しているので、中心力が存在しているのであろう。

○ケプラー第3法則成立からの考察

いま、$r^2\dot{\varphi}$ = 一定 $\equiv h$ とおくと、(すなわちhは定数)

$$\dot{S} = \frac{dS(t)}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{h}{2}$$

一周期をTとおくと、$\dot{S}\cdot T$ = (楕円の面積) なので、

$$T = \frac{\pi ab}{\dot{S}} = \frac{2\pi ab}{h}$$

従って、

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{h^2a^3}{4\pi^2a^2b^2} = \frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{h^2}{\frac{b^2}{a}} = \frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{h^2}{l}$$ = 惑星に依らず一定

すなわち $\frac{h^2}{l}$ は惑星に依らない定数となる。

○惑星の加速度からの考察

もし、運動を構成している力が中心力だとしたら、惑星の加速度は、

$$\ddot{\mathbb{r}} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)}_{a_r\text{とおく}}\mathbb{e}_r + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})}_{a_\varphi\text{とおく}}\mathbb{e}_\varphi$$

いま、$r^2\dot{\varphi}$ = const. なので、

$$a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$$

(従って $\ddot{\mathbb{r}} = a_r\mathbb{e}_r$ と分かる。これは加速度は太陽の方向であることを意味する。すなわち、運動方程式を考えれば、力も太陽の方向(向きはまだ不明)であることが分かる。これは力が中心力であることの裏付けとなる。)

$r^2\dot{\varphi} = h$ より、

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}$$

ここでケプラー第1法則より、$r = \frac{l}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ なので、

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{l}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\cdot\varepsilon(-\sin\varphi)\dot{\varphi} = \frac{h}{l}\varepsilon\sin\varphi \\ \ddot{r} = \frac{h}{l}\varepsilon\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} = \frac{h}{l}\left(\frac{l}{r}-1\right)\frac{h}{r^2} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{h^2}{l}\frac{1}{r^2} \end{cases}$$

であるから、

$$a_r = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{h^2}{l}\frac{1}{r^2}$$

そういえば、コレ惑星に依らない定数だった

従って．

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\frac{h^2}{\ell}\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r$$

$$\therefore \mathbf{F} = -m\frac{h^2}{\ell}\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r$$

ここで少し考える。質量mの惑星が太陽によって及ぼされる外力$\mathbf{F}$は、mに比例している。ニュートン第3法則より、この力$\mathbf{F}$にも反作用の力 $-\mathbf{F}$が存在し、作用・反作用の関係から、質量Mの太陽が惑星によって及ぼされる力は $-\mathbf{F}$ であり、これはMに比例しているはず。

mと$\frac{1}{r^2}$は各惑星に依存する値なので、$\frac{h^2}{\ell}$がMに比例するに違いない。

この比例定数をGとすれば（GはMやmに依らないとする。）

$$\frac{h^2}{\ell} = GM$$

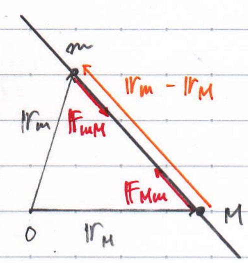
と書け、

$$\boxed{\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathbf{e}_r}$$

と書ける。

さらに中心力であることを考えれば、太陽の位置ベクトルを$\mathbf{r}_M$，惑星の位置ベクトルを$\mathbf{r}_m$として、

$$\underset{(\mathbf{F}_{mM})}{\mathbf{F}} = -GMm\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r = -GMm\frac{1}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M|^2}\cdot\frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M|}$$



これは実際にはどんな2物体間にも働く力であり、万有引力と呼ばれる。

2-1* 大きさのある物体の質点近似

ニュートンはプリンキピアを刊行するにあたって、ある1つのことが気がかりで1年延長してしまったらしい。それがこの「大きさのある物体を質点と見なしてよいか」である。実際に見ていくことにする。

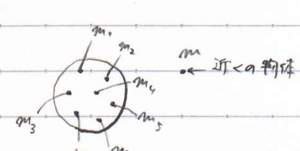
まず、万有引力は中心力，逆2乗則の保存力であるから、

$$U(\mathbf{r}) = -G\frac{Mm}{r} \quad (\text{基準は } |\mathbf{r}_0| \to \infty)$$

地球を半径R_0，密度一様ρの球体だとして、（質量はM）

$$M = \frac{4}{3}\pi R_0^3\rho$$

次に、物体が各微小点の合成だと考えると、



万有引力$\mathbf{F}(\mathbf{r})$は、この各点との力の合力と考えられ、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} -Gmm_i\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

従って

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} G m m_i \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}\cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{N}\left\{-G\frac{m m_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\right\}$$

実際は質量が一様に連続的に分布している(と仮定している)ので、

$$U(\mathbf{r}) = -\int_V G \frac{m\rho(\mathbf{r}')\, d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

と表せる。

※ 各点の万有引力は、(見やすいように近物体の質量 m と G を省く)

$$dm \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \rho(\mathbf{r}')\, dV \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \rho(\mathbf{r}')(d\mathbf{r}')^3 \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

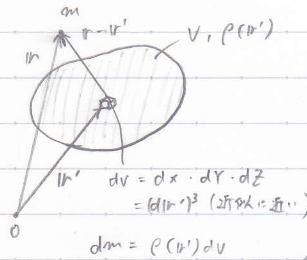
この力のポテンシャルエネルギーは、(ここから G と m を書く)

$$u = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = -Gm\rho(\mathbf{r}')(d\mathbf{r}')^3\cdot\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

これが無限個集まるので、

$$U(\mathbf{r}) = -\int_V G\frac{m\rho(\mathbf{r}')\, d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

となる。



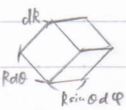
さて、実際に地球を考えてみよう。

半径 R、幅 dR の球殻を考える

(R は固定, $\theta \in [0, \pi)$ $\varphi \in [0, 2\pi)$)

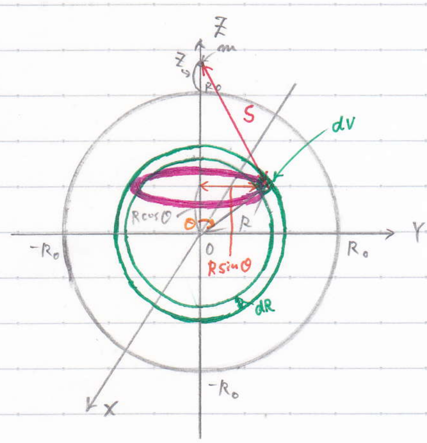
$\{x, Y, z\} \Rightarrow \{R, \theta, \varphi\}$ に変換

$dV = dx\,dY\,dZ = dR\cdot R\,d\theta\cdot R\sin\theta\, d\varphi$



また、

$$S = \sqrt{(r - R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2}$$
$$= \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\theta}$$



これらを用いて積分する

dV $\xrightarrow{\varphi で積分}$ ○ $\xrightarrow{\theta で積分}$ ◎ (球殻) $\xrightarrow{R で積分}$ ● (球)

$$U(r) = -\int_V \frac{Gm\rho}{S}\, dV \quad \left(\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}\right)$$

$$= -\int_0^{R_0} dR \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{Gm\rho}{S} R^2 \sin\theta\, d\varphi$$

$$= -\underset{(\varphi の積分)}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{Gm\rho}{S} R^2 \sin\theta\, d\varphi$$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

ここで、$\theta \to S$ へ置換する。

$$S = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}$$

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2Rr(-\sin\theta)}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\theta}} = \frac{Rr}{S}\sin\theta$$

θ	$0 \to \pi$
S	$r-R \to r+R$

$$\therefore d\theta = \frac{S}{Rr\sin\theta} dS$$

従って、

$$U(\mathbf{r}) = -2\pi \int_0^{R_0} dR \int_{r-R}^{r+R} \frac{Gm\rho}{S} \cdot R^2 \sin\theta \cdot \frac{S}{Rr\sin\theta} dS$$

$$= -2\pi \int_0^{R_0} dR \int_{r-R}^{r+R} \frac{Gm\rho R}{r} dS$$

$$= -2\pi \int_0^{R_0} \frac{2Gm\rho R^2}{r} dS$$

$$= -\frac{2\pi Gm\rho}{r} \left[\frac{2}{3}R^3\right]_0^{R_0}$$

$$= -\frac{Gm}{r}\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3$$

$$= -G\frac{mM}{r}$$

$$\therefore U(\mathbf{r}) = -G\frac{Mm}{r}$$

となった。これは、中心に全質量が集中していると考えても良い、ということ、すなわち、質点とみなして良いことになる。

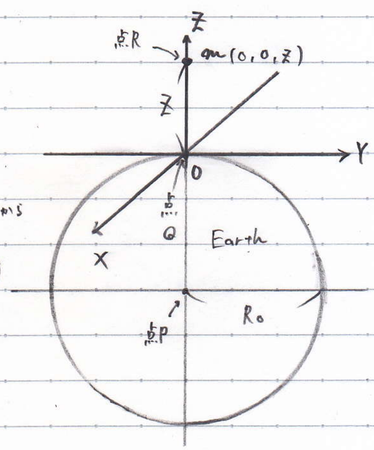
これを用いて、地球表面上の重力はどう表すのかを考察する。

$|z| \ll R_0$ として、

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{R_0 + z} = -\frac{GMm}{R_0(1+\frac{z}{R_0})} = -\frac{GMm}{R_0}\left(1+\frac{z}{R_0}\right)^{-1}$$

$$\simeq -\frac{GMm}{R_0}\left(1 - \frac{z}{R_0}\right) = \underbrace{-\frac{GMm}{R_0}}_{\text{PQ間の力のエネルギー}} + \underbrace{\frac{GMm}{R_0^2}z}_{\text{PRのポテンシャルエネルギーから PQ 〃 を引いたもの}}$$

ポテンシャル ⇒



$$\therefore U(z) \simeq m\left(\frac{GM}{R_0^2}\right)z$$ （zに比例するのか！それなら力は一定だ！）

$$= mgz$$

ただし、$\boxed{g \equiv \frac{GM}{R_0^2}}$

従って、

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

$$\therefore F_z = -\frac{d}{dz}U(z) = -mg$$

2-2. 万有引力による天体の運動

この節では万有引力が存在するということを前提として、運動を解析する。

・太陽の位置を0とすると、万有引力は、（Mが太陽の質量、mが惑星の質量）

$$\mathbb{F}(r) = -G\frac{Mm}{r^2}\cdot\left(\frac{\mathbb{r}}{r}\right) \quad \cdots (※)$$ （中心力かつ保存力）

中心力なので、$\mathbb{L}$は保存し、$\mathbb{L} = L\,\mathbb{e}_z$ となるように直交系$\{\mathbb{e}_x, \mathbb{e}_y, \mathbb{e}_z\}$をとると、惑星の運動はXY平面内に限られる。

そこで、XY平面内での2次元極座標で考える。$((r, \varphi, z)\{\mathbb{e}_r, \mathbb{e}_\varphi, \mathbb{e}_z\})$

（$\mathbb{r}$, $\dot{\mathbb{r}}$, $\ddot{\mathbb{r}}$ の $\mathbb{e}_r$, $\mathbb{e}_\varphi$ 表記は前やったので略します）

(※)より、運動方程式は、

$$m\left\{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbb{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\mathbb{e}_\varphi\right\} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathbb{e}_r \quad \cdots ①$$

$$\rightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -G\dfrac{Mm}{r^2} \\ r^2\dot{\varphi} = \text{定数} = h \text{ とおく} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} m\ddot{r} = m\dfrac{h^2}{r^3} - G\dfrac{Mm}{r^2} & \cdots ② \\ \dot{\varphi} = \dfrac{h}{r^2} & \cdots ③ \end{cases}$$

（中心力であることの現れ）

②の両辺に$\dot{r}$をかけて、

$$m\dot{r}\ddot{r} = \frac{dr}{dt}\left(m\frac{h^2}{r^3} - G\frac{Mm}{r^2}\right)$$

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}^2}{2}\right) = \frac{dr}{dt}\frac{d}{dr}\left(-\frac{m}{2}\frac{h^2}{r^2} + G\frac{Mm}{r}\right)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{r}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{m}{2}\frac{h^2}{r^2} + G\frac{Mm}{r}\right) \quad \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\frac{h^2}{r^2} - G\frac{Mm}{r}\right) = 0$$

従って、

$$\boxed{\underbrace{\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\frac{h^2}{r^2}}_{K}\underbrace{- G\frac{Mm}{r}}_{U} = \text{const.} = E}$$ とおく $(E = K + U)$（保存力であることの現れ）

$$K = \frac{m}{2}(\underbrace{\dot{r}^2}_{v_r^2} + \underbrace{r^2\dot{\varphi}^2}_{v_\varphi^2})$$

いま、これらより、

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{h}{r^2} \\ \dot{r}^2 = \dfrac{2}{m}\left\{E - \dfrac{m h^2}{2 r^2} + G\dfrac{Mm}{r}\right\} \end{cases}$$ である。

$E = \overbrace{\frac{m}{2}\dot{r}^2}^{K'\text{とおこう}} + V_{eff}(r)$ という、rの1次式とみなし、1次元的に運動する天体の力学的エネルギー保存則と解釈する。

$V_{eff}(r) = \dfrac{m}{2}\dfrac{h^2}{r^2} - G\dfrac{Mm}{r}$（有効ポテンシャル）と置くと、

$\dot{r} = 0$（すなわち $K' = 0$）となるのは $E = V_{eff}(r)$ のとき

$\dot{r} = 0\ (K' = 0)$ となる r を求めよう。（$r \neq 0$ かつ $r > 0$ とする）

$$E = \frac{m}{2}\frac{h^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$\therefore \frac{E}{r^2}\left\{r^2 + 2\left(\frac{GMm}{2E}\right)r - \frac{m}{2E}h^2\right\} = 0$$

$$\therefore r_\pm = -\frac{GMm}{2E} \pm \sqrt{\left(\frac{GMm}{2E}\right)^2 + \frac{m h^2}{2E}} = +\frac{GMm}{(-2E)} \pm \sqrt{\left(\frac{GMm}{-2E}\right)^2 - \left(\frac{m h^2}{-2E}\right)}$$ （$\sqrt{\ }$の中は正とする）

正となるように運動する

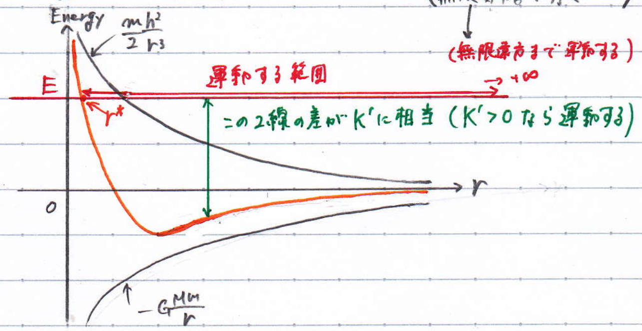
・$E < 0$ なら r_+, r_- ともに正

・$E > 0$ なら r_- のみ正で（r_* とする）

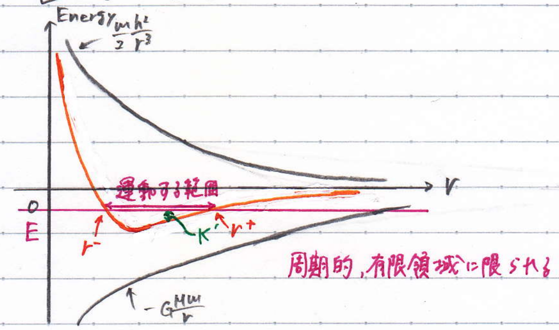
$$r_* = -\frac{GMm}{2E} + \sqrt{\left(\frac{GMm}{2E}\right)^2 + \frac{m h^2}{2E}}$$

グラフにすれば、

・E>0のとき



・E<0のとき



。ここからは、ケプラー3法則を式で証明していく

rがφ or tの関数であることを利用して、楕円軌道と時間依存性を考える。

$\boxed{\text{軌道}}$ (rはφの関数であることの利用)

$r = r(\varphi)$であるとして、

$$\begin{cases} \ddot{r} = \dfrac{h^2}{r^3} - GM\dfrac{1}{r^2} & \cdots (1) \\ r^2\dot{\varphi} = h\ (\text{定数}) & \cdots (2) \end{cases}$$

(運動方程式より) (ケプラー第2法則の証明(?))

いま、

いずれも(2)を使った

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -h\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r(\varphi)}\right)$$

$$\ddot{r} = -h\frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} = -h\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -h\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\dot{\varphi} = -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) \cdots (3)$$

(3)を(1)に代入して、

$$-\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{h^2}{r^3} - GM\frac{1}{r^2}$$

$$\therefore \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r} + \frac{GM}{h^2}$$

$\frac{GM}{h^2}$は定数なので、φで微分しても0となるから、左辺の( )の中に勝手にくっつけてしまってよい

$$\therefore \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{GM}{h^2}\right) = -\left(\frac{1}{r} - \frac{GM}{h^2}\right)$$

$X = \frac{1}{r} - \frac{GM}{h^2}$ とおくと、

$\frac{d^2X}{d\varphi^2} = -X$ (単振動の式になった!!)

$\therefore \frac{1}{r} - \frac{GM}{h^2} = X = A\cos(\varphi - \varphi_0)$ (Aとφ_0は初期値に依存する定数)

$$\therefore \frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + A\cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$\therefore r = \frac{1}{\frac{GM}{h^2} + A\cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \frac{Ah^2}{GM}\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$l = \frac{h^2}{GM}$, $\varepsilon = \frac{Ah^2}{GM}$ とおくと、

$$\therefore r = \frac{l}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}$$ (2次曲線の極方程式)

φ_0によってどこから始まるかが決まるが、ここではr^-から始めることにしよう (rが最小のところから始めれば楽)

$\varphi - \varphi_0$は結局ただの位相($[0, 2\pi)$)なので、$\varphi_0 = 0$としてしまえば楽になる。

よって、$\varphi_0 = 0$としてよく、$\varphi = 0$でrは最小値r^-、$\varphi = \pi$でrは最大値r^+をとる。

(結果的には$r^- = a - c$, $r^+ = a + c$となる)

すなわち、

$$\begin{cases} \varphi = 0 \text{ のとき } \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r^-} = \dfrac{1+\varepsilon}{l} \\ \varphi = \pi \text{ のとき } \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r^+} = \dfrac{1-\varepsilon}{l} \end{cases} \cdots (*)$$

なので、

$$\frac{1}{r^+ r^-} = \frac{1-\varepsilon^2}{l^2}$$

$$\therefore \varepsilon^2 = 1 - \frac{l^2}{r^+ r^-}$$

$r_\pm = \left(\dfrac{GMm}{-2E}\right) \pm \sqrt{\left(\dfrac{GMm}{-2E}\right)^2 - \left(\dfrac{mh^2}{-2E}\right)}$ より、$r^+ r^- = -\dfrac{mh^2}{2E}$ なので、

$$\varepsilon^2 = 1 - \left(\frac{-2El^2}{mh^2}\right) = 1 - \left\{\frac{-2E\,h^2}{m(GM)^2}\right\}$$

$E < 0$ なら、

$$\varepsilon^2 < 1 \quad \therefore \varepsilon < 1$$

従って $E < 0 \Rightarrow \varepsilon < 1$ ということが分かった。

☆ $\varepsilon < 1$: rは楕円軌道を描く $\left(\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1\right)$ (ケプラー第1法則の証明)

(これによって $r^- = a - c$, $r^+ = a + c$ と分かり、これらと(*)から $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, $l = \dfrac{b^2}{a}$ と分かる 図を描くと分かる(頑張ってかいてね))

※ $E > 0$ のときは…

$\varepsilon = \dfrac{h^2 A}{GM}$, $\varepsilon^2 > 1$ ∴ $\varepsilon > 1$ …①

rが最小となるのは $\varphi = \pi$ なので、$\varphi_0 = \pi$ とれば、

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{l}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \cdots ②$$

①, ②より、rは双曲線軌道を描くことが分かる。

$\boxed{\text{時間依存性}}$ (rはtの関数であることの利用)　(r^+とr^-は $r^2 + 2\left(\dfrac{GMm}{2E}\right)r - \dfrac{m}{2E}h^2 = 0$ の解)

$E = \dfrac{m}{2}\dot{r}^2 + \dfrac{m}{2}\dfrac{h^2}{r^2} - G\dfrac{Mm}{r}$ より、

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{m}{2}\frac{h^2}{r^2} + G\frac{Mm}{r}\right)} = \pm\sqrt{\left(-\frac{2E}{m}\right)\frac{(r^+ - r)(r - r^-)}{r^2}}$$

$$\therefore dt = \pm\sqrt{-\frac{m}{2E}} \cdot \frac{r\,dr}{\sqrt{(r^+ - r)(r - r^-)}} \quad (r^- < r < r^+) \cdots (A)$$

($\theta = 0$ で $r = r^-$, $\theta = \pi$ で $r = r^+$)

ここで、$r = \left(\dfrac{r^+ + r^-}{2}\right) - \left(\dfrac{r^+ - r^-}{2}\right)\cos\theta$ (受け入れましょう) とパラメタライズすると、

$$r^+ - r = \frac{r^+ - r^-}{2}(1 + \cos\theta), \quad r - r^- = \frac{r^+ - r^-}{2}(1 - \cos\theta)$$

となるので、

$$\therefore (r^+ - r)(r - r^-) = \left(\frac{r^+ - r^-}{2}\right)^2 (1 - \cos^2\theta) = \left(\frac{r^+ - r^-}{2}\right)\sin^2\theta \cdots (B)$$

また、$\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{r^+ - r^-}{2}\sin\theta$ ∴ $dr = \dfrac{r^+ - r^-}{2}\sin\theta\,d\theta \cdots (C)$

(A), (B), (C) より、

$$dt = \pm\sqrt{-\frac{m}{2E}}\left\{\left(\frac{r^+ + r^-}{2}\right) - \left(\frac{r^+ - r^-}{2}\right)\cos\theta\right\}d\theta$$

$$= \pm\sqrt{-\frac{m}{2E}}\, a(1-\varepsilon\cos\theta)d\theta \quad \left(\because\ r_1 = a-c,\ r_2 = a+c,\ \varepsilon = \frac{c}{a}\right)$$

両辺積分して、

$$t + t_0 = \pm\sqrt{-\frac{m}{2E}}\, a(\theta - \varepsilon\sin\theta)$$ (t_0は積分定数という名の初期値に依存する定数)

$t>0$なので + の方をとり、$t_0 = 0$として($\varphi_0 = 0$としたときと考え方は同じ)

$$t = \sqrt{-\frac{m}{2E}}\, a(\theta - \varepsilon\sin\theta) \quad \cdots (D)$$

$\theta = 2\pi$となるとき、$t = T$(周期)なので、

$$T = \sqrt{-\frac{m}{2E}}\, a\cdot 2\pi = \sqrt{\frac{GMm}{-2E}\cdot\frac{1}{GM}}\, a\cdot 2\pi = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}\, 2\pi \quad \cdots (E)$$

$\left(\because\ r^+ + r^- = -\frac{GMm}{E}\right.$ (解と係数の関係), $r^+ + r^- = a+c+a-c = 2a$
より、$\left. a = -\frac{GMm}{2E}\right)$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{-\frac{2E}{m}}\frac{1}{a}$ とすれば、(D)に代入して、

$$\boxed{\omega t = \theta - \varepsilon\sin\theta}$$ ケプラーの方程式

が導かれる。(εは平均角速度)

また、(E)より、

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{GM}{h^2}\cdot h^2 = \frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{h^2}{l}$$

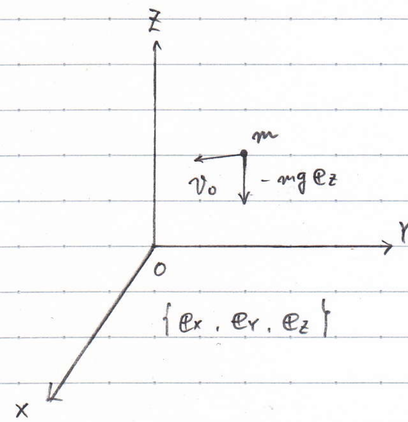
となり、$\frac{h^2}{l}$は惑星に依存しない定数であったことから、$\frac{a^3}{T^2}$が一定値であることが証明された。(ケプラー第3法則の証明)

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

2-3. 地球表面での物体の運動

今までは、宇宙規模の話だったが、ここからはぐっと身近な現象の考察を行う。

(1) 重力のみによる落体、振り子の運動



◦ 落体

前々節で述べたように、地球表面から高さ z のところにいる物体のポテンシャルエネルギーは、

$U(\mathbb{r}) = mgz + U_0$

(既に見たように、U_0 は $z=0$ における地球との万有引力のポテンシャルエネルギー)

よって、地球の引力(重力)は、

$\mathbb{F} = -\nabla U(\mathbb{r}) = -\frac{\partial U}{\partial z}\mathbb{e}_z = -mg\,\mathbb{e}_z$

従って、運動方程式は、

$m\ddot{\mathbb{r}} = -mg\,\mathbb{e}_z$ …①

成分ごとに分解すると、

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}} \quad \therefore \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \dot{x} = v_x^0 \\ \dot{y} = v_y^0 \\ \dot{z} = -gt + v_z^0 \end{cases} \quad \therefore \boxed{\begin{cases} x = v_x^0 t + x_0 \\ y = v_y^0 t + y_0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_z^0 t + z_0 \end{cases}}$$

($v_x^0, v_y^0, v_z^0, x_0, y_0, z_0$ は初期条件に依る定数)

また、① の両辺に $\dot{\mathbb{r}}$ を内積して、

$\dot{\mathbb{r}}\cdot m\ddot{\mathbb{r}} = \dot{\mathbb{r}}\cdot(-mg\,\mathbb{e}_z)$

$m(\dot{x}\cdot\ddot{x} + \dot{y}\cdot\ddot{y} + \dot{z}\cdot\ddot{z}) = -mg\dot{z}$

$\therefore \frac{d}{dt}\left\{m\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2}\right)\right\} = \frac{d}{dt}(-mgz)$

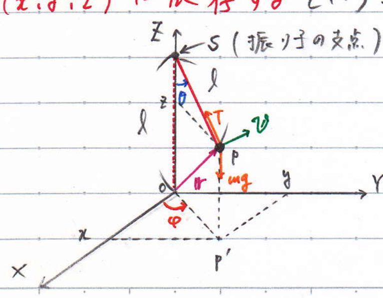
$\therefore \frac{d}{dt}\left\{m\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2}\right) + mgz\right\} = 0$

$\therefore \boxed{E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \text{const.} \quad (\text{エネルギー保存})}$

◦ 振り子

- 微小振動の場合：単振動に近似可能
- 一般の場合：運動方程式から解析していく

ここで重要なのが **糸の張力 T は定数ではなく、(x, y, z) に依存する** ということ！



$\mathbb{r} = x\,\mathbb{e}_x + y\,\mathbb{e}_Y + z\,\mathbb{e}_z$

$\mathbb{r}_s = l\,\mathbb{e}_z \quad (\mathbb{r}_s = \overrightarrow{OS})$

また、$|\mathbb{r} - \mathbb{r}_s| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-l)^2} = l$

運動方程式は、

$m\ddot{\mathbb{r}} = -mg\,\mathbb{e}_z + \mathbb{T}$ …①

$= -mg\,\mathbb{e}_z + T\cdot\frac{\mathbb{r}_s - \mathbb{r}}{|\mathbb{r}_s - \mathbb{r}|}$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled × 36 lines

ここで、$\{x, y, z\}$ を $\{l, \theta, \varphi\}$ で表すと、

$$\begin{cases} x = l\sin\theta\cos\varphi \\ y = l\sin\theta\sin\varphi \quad \cdots ② \\ z = l - l\cos\theta \quad (l\cos\theta = l - z) \end{cases}$$

また、$\mathbb{T}$ の x, y, z 成分は、

$$\mathbb{T} = (-T\sin\theta\cos\varphi, \ -T\sin\theta\sin\varphi, \ T\cos\theta)$$
$$= \left(-T\frac{x}{l}, \ -T\frac{y}{l}, \ -T\frac{z-l}{l}\right) \quad (\because ②)$$

これと①より、各成分ごとの運動方程式は、

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x} = -T\dfrac{x}{l} \\ m\ddot{y} = -T\dfrac{y}{l} \\ m\ddot{z} = T\dfrac{l-z}{l} - mg \end{cases}}$$

また、$|\mathbb{r} - \mathbb{r}_s|^2 = l^2 = x^2 + y^2 + (z-l)^2$ の両辺をtで微分して、

$$0 = 2\dot{x}x + 2\dot{y}y + 2\dot{z}(z-l)$$
$$= 2\dot{\mathbb{r}} \cdot (\mathbb{r} - \mathbb{r}_s)$$
$$\therefore 0 = 2\dot{\mathbb{r}} \cdot \frac{|\mathbb{r}_s - \mathbb{r}|}{T}\mathbb{T}$$

すなわち、$\dot{\mathbb{r}} \cdot \mathbb{T} = 0 \quad \therefore \underline{\dot{\mathbb{r}} \perp \mathbb{T}}$

(i) 微小振動のとき、

$|x| \ll l, \ |y| \ll l, \ |z| \ll l \longrightarrow$ 2次以上の微小量は無視できる

$$x^2 + y^2 + (z-l)^2 = l^2$$
$$\therefore (z-l)^2 = l^2 - (x^2+y^2)$$
$$\therefore l - z = \sqrt{l^2 - (x^2+y^2)} = l\left\{1 - \left(\frac{x^2+y^2}{l^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq l\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{l^2}\right)$$
$$\therefore z \fallingdotseq \frac{l}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{l^2} = \frac{l}{2}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{y}{l}\right)^2\right\} \fallingdotseq 0$$

すなわち、$\frac{x}{l}, \frac{y}{l}$ は残すが、z は無視可能 ($z \fallingdotseq 0$ より、$\dot{z} \fallingdotseq 0$, $\ddot{z} \fallingdotseq 0$)

これを適用させた運動方程式は、

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T\left(\dfrac{x}{l}\right) \quad \cdots (ア) \\ m\ddot{y} = -T\left(\dfrac{y}{l}\right) \quad \cdots (イ) \\ m\ddot{z} \fallingdotseq T - mg \quad \cdots (ウ) \end{cases}$$

($z \fallingdotseq 0$ を用いた)

また $\ddot{z} \fallingdotseq 0$ より、$T - mg \fallingdotseq m\ddot{z} \fallingdotseq 0 \quad \therefore T \fallingdotseq mg$

すなわち $T = mg \cdots$ (エ) と近似できる (Tを定数と見なす)

(エ) を (ア) と (イ) に代入すると、

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{g}{l}x \\ \ddot{y} = -\dfrac{g}{l}y \end{cases}$$

x方向とy方向の式は同じなので、x方向のみを考える。

$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x$ (← $m\ddot{x} = -kx$ ∴ $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$ を想起させる式)

$F(x) = -m\frac{g}{l}x$ なので保存力である。(x^n の $n=1$ ver.)

両辺に $\dot{x}$ をかけて、

$\dot{x}\ddot{x} = -\frac{g}{l}x\dot{x}$

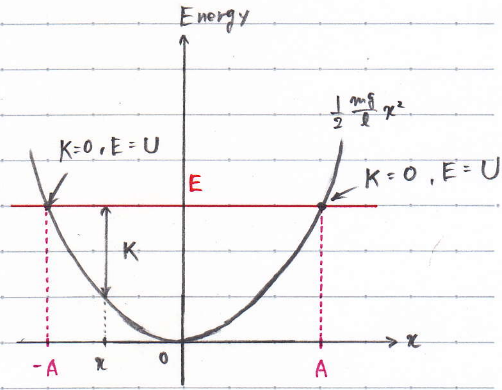
∴ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) = -\frac{g}{l}\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{2}\right)$

∴ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{g}{l}\right)x^2\right) = 0$

∴ $\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{g}{l}\right)x^2 = const. = \frac{E}{m}$ とおく

∴ $\boxed{E = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{x}^2}_{K} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{mg}{l}\right)x^2}_{U}}$

($U(x) = \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x^2$ より、
$-\frac{d}{dx}U(x) = -m\left(\frac{g}{l}\right)x = F(x)$
やはり保存力だったと確認)



$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = 0$ ($\dot{x} = 0$) のときの x を $x = A$ とおくと、

$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{l}\right)x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{l}\right)A^2$ (Aは振幅)

∴ $A = \sqrt{\frac{2E}{m}\left(\frac{l}{g}\right)}$ …(オ)

また、Aは $|x|$ の最大値なので、$x \in [-A, A]$

エネルギー保存則が求められた一方で、時間追跡を考察してみよう。

$K = \frac{m}{2}\dot{x}^2$ より、

$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}K}$

$= \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x^2\right)}$

$= \pm\sqrt{\frac{g}{l}(A^2 - x^2)}$ (∵(オ))

∴ $\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}(A^2 - x^2)}$

$dt = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{g}{l}(A^2 - x^2)}}dx$

両辺積分して、

$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\int\frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}$ (t_0は積分定数)

$x = A\cos\theta$ とおくと、$dx = -A\sin\theta\, d\theta$, $\sqrt{A^2 - x^2} = A\sin\theta$ なので、

$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\int d\theta = \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\theta$ (積分定数はt_0に集約した)

∴ $\theta = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}(t - t_0)$

∴ $x = A\cos\theta = A\cos\left\{\pm\sqrt{\frac{g}{l}}(t - t_0)\right\} = A\cos\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}(t - t_0)\right\}$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ とおくと、

∴ $x = A\cos[\omega(t - t_0)]$

以上から、

$\boxed{m\ddot{x} = -m\frac{g}{l}x \text{ の解は、} x(t) = A\cos[\omega(t - t_0)] = A^*\sin\omega t + B^*\cos\omega t \quad (\omega \equiv \sqrt{\tfrac{g}{l}})}$

↓

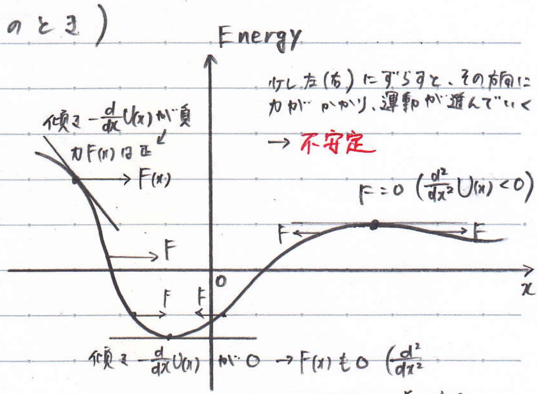
$\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x}$: 単振動(調和振動)の式

また、振動数νは、$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$、周期Tは、$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ なので、

振幅Aと周期Tに相関性がないことが分かる。← 振り子の等時性 という

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

※ 一般の1次元運動について（保存力のとき）



保存力 $F(x)$ の下では、

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx \Leftrightarrow F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

となる $U(x)$ が存在して、

$$m\ddot{x} = -\frac{d}{dx}U(x)$$

となる。

この $F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{dU(x)}{dx}$ が 0 になる点を

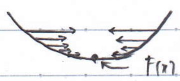
停留点（平衡点）という（多数あることもある）

このとき停留点には2種類あって

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{d^2}{dx^2}U(x_i) > 0 \ :\ \text{安定したつりあい} \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

$$< 0 \ :\ \text{不安定なつりあい}$$

（$\frac{d^2}{dx^2}U(x) > 0$ なら、$\frac{d}{dx}U(x)$ は単調増加、すなわち、$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x)$ は単調減少



← $\frac{d^2}{dx^2}U(x) < 0$ ならこの逆）

そして、安定な平衡点の近傍における微小振動は単振動になる。

$|x - x_0| \ll 1$（長さの単位）のとき　　$|x - x_0| \ll 1$ で3次以下は無視する

$$U(x) = U(x_0) + \underbrace{\boxed{\frac{d}{dx}U(x_0)}}_{= -F(x_0) = 0}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\underbrace{\boxed{\frac{d^2}{dx^2}U(x_0)}}_{> 0,\ = m\omega^2}(x - x_0)^2 + \cancel{\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dx^3}U(x_0)(x - x_0)^3} + \cdots$$

↑

$x = x_0$ を安定な平衡点とし、$x = x_0$ まわりでテイラー展開する

ポテンシャルエネルギーは $(x - x_0)$ の2次関数とみなせる

→ 力は $(x - x_0)$ の1次関数（かつ負）

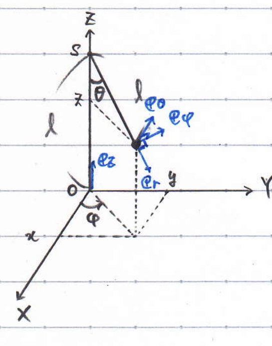
→ 解は $x = x_0 \cos[\omega(t - t_0)] + x_0$ の単振動の式となる

また、証明は難しいので省略するが、多自由度系でも安定な平衡点近傍では**単振動の重ね合わせ**となる。

(ii) 一般の場合

また極座標で考えた方が便利なので、極座標で考える。

$x, y, z \to (r), \theta, \varphi$ $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ に変換する



$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \sin\theta(\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y) - \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_\theta = \cos\theta(\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y) + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y \end{cases}$$

（前やったのと $\boldsymbol{e}_z$ の±が違うが、考え方は同じ）

t で微分したものを頑張って計算して $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ で表すと、

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi \\ \dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \cos\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi \\ \dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = -\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_r - \cos\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\theta \end{cases}$$

また図より、

$$\boldsymbol{e}_z = -\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta$$

これらを用いて.（lは定数であることに注意して）

$$\begin{cases} \mathbb{r} = l\,\mathbb{e}_z + l\,\mathbb{e}_r \\ \dot{\mathbb{r}} = l\,\dot{\mathbb{e}}_r = l(\dot\theta\,\mathbb{e}_\theta + \sin\theta\,\dot\varphi\,\mathbb{e}_\varphi) \\ \ddot{\mathbb{r}} = l\,\ddot{\mathbb{e}}_r = \cdots = l\{(-\dot\theta^2 - \sin^2\theta\,\dot\varphi^2)\mathbb{e}_r + (\ddot\theta - \sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2)\mathbb{e}_\theta \\ \qquad\qquad + (-\sin\theta\,\ddot\varphi - 2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi)\mathbb{e}_\varphi\} \end{cases}$$

また.

$$\begin{cases} -mg\,\mathbb{e}_z = mg\cos\theta\,\mathbb{e}_r - mg\sin\theta\,\mathbb{e}_\theta \\ \mathbb{T} = -T\,\mathbb{e}_r \end{cases}$$

以上から.運動方程式は.（$\ddot{\mathbb{r}}$と$\mathbb{e}_z$と$\mathbb{T}$が分かったので解析できるはず）

$$m\ddot{\mathbb{r}} = -mg\,\mathbb{e}_z + \mathbb{T}$$

成分ごとに分解すると.（$\mathbb{e}_r$, $\mathbb{e}_\theta$, $\mathbb{e}_\varphi$の係数比較をすると.）

$$\begin{cases} r : -ml(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi) = mg\cos\theta - T & \cdots(\alpha) \\ \theta : ml(\ddot\theta - \sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2) = -mg\sin\theta & \cdots(\beta) \\ \varphi : -ml(\sin\theta\,\ddot\varphi - 2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi) = 0 & \cdots(\gamma) \end{cases}$$

ここで.少し(γ)について考えてみよう。

(γ)式が解けるならば.(γ)式が成立するφが少なくとも1つ存在するはずである。

そこで試しに$\varphi=0$を代入すると.なんと(左辺)$=0$となる！

よって$\varphi=0$は(γ)式の解の1つなので.$\varphi=0$として進めていこう。

これを(α),(β)に代入すると.

$$\boxed{\begin{cases} -ml\dot\theta^2 = mg\cos\theta - T & \cdots(\alpha)^* \\ ml\ddot\theta = -mg\sin\theta & \cdots(\beta)^* \end{cases}}$$

（もし.$\sin\theta \simeq \theta$と近似すれば.$(|\theta| \ll \pi)$

$ml\ddot\theta \simeq -mg\theta$

$\varphi=0$より. $x = l\sin\theta \simeq l\theta$

$\therefore m\ddot x \simeq -m\frac{g}{l}x$

となる((i)と同じ)）

$(\beta)^*$より.

$$\ddot\theta = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

両辺に$\dot\theta$をかけて

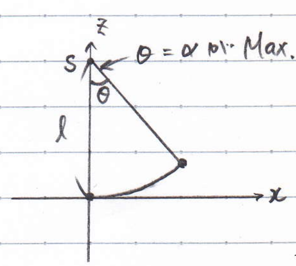
$$\dot\theta\ddot\theta = -\frac{g}{l}\sin\theta\cdot\dot\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot\theta^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{l}\cos\theta\right)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot\theta^2 - \frac{g}{l}\cos\theta\right) = 0$$

従って

$$\frac{1}{2}\dot\theta^2 - \frac{g}{l}\cos\theta = \text{const.}$$



$\dot\theta = 0$のときのθを$\theta=\alpha$とおくと.

$$\frac{1}{2}\dot\theta^2 - \frac{g}{l}\cos\theta = -\frac{g}{l}\cos\alpha$$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

このとき、

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{2\frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha)}$$

$$\therefore dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}}$$

省略

$$= \frac{1}{2}\frac{l}{g}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

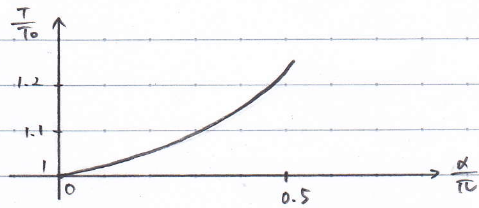
→ これらは、残念ながら、初等関数では表せない

両辺積分して、

$$T = 4\int_0^{\alpha}\frac{1}{2}\frac{l}{g}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\phi}}}$$

⎵ のところは、"第一種完全楕円積分"と呼ばれ、単調増加することが知られている。

よって、$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ として、



αは振幅に関係するので、振幅Tと周期Aに相関性があることが分かる。すなわち、振り子の等時性がやぶれる!!

※ちなみに、筆者の調べたところによると、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\sin^{2n}\frac{\alpha}{2}\right\}$$

となるそうです。(正確性は保証しませんが)

(参考: http://hooktail.sub.jp/mathInPhys/elliptical/)

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

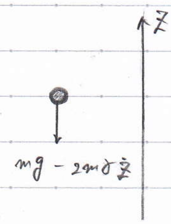
(2) 空気抵抗が存在する場合

・空気(流体)中では流体の粘性による抵抗力$\mathbb{F}$を受ける。
$|v| \ll 1$ (速さの単位) のとき $\mathbb{F}$ は v に比例し、
$\mathbb{F} = -6\pi a \eta v$ (aは球体の半径, ηは流体の粘性係数)
$= -2m\gamma v$ とパラメタライズすることにする。(γは定数)

○ 落体

運動方程式は、(z軸方向のみとする)

$$m\ddot{z} = -mg - 2m\gamma\dot{z} \quad (\because v = \dot{z}\, e_z)$$



以降 $\dot{z} = v$ と書くとすると、$\ddot{z} = \frac{dv}{dt}$ なので、

$$\ddot{z} = -g - 2\gamma v$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\gamma\left(v + \frac{g}{2\gamma}\right)$$

← $\frac{g}{2\gamma}$はtに関わらない定数なので勝手にくっつけて良いということは前やったはず

$$\frac{d\left(v + \frac{g}{2\gamma}\right)}{dt} = -2\gamma\left(v + \frac{g}{2\gamma}\right)$$

$$\therefore dt = -\frac{1}{2\gamma}\frac{d\left(v + \frac{g}{2\gamma}\right)}{\left(v + \frac{g}{2\gamma}\right)}$$

両辺積分して、

$$t + C = -\frac{1}{2\gamma}\log\left|v + \frac{g}{2\gamma}\right| \quad (Cは積分定数)$$

$$\therefore \left|v + \frac{g}{2\gamma}\right| = e^{-2\gamma(t+C)}$$

$$\therefore v + \frac{g}{2\gamma} = \pm e^{-2\gamma C} e^{-2\gamma t}$$ ※

$$= A e^{-2\gamma t} \quad (\pm e^{-2\gamma C}は定数となるはずなので、Aとおいた)$$

$t = 0$ で $v = v_0$ として、

$$A = v_0 + \frac{g}{2\gamma}$$

従って、

$$v(t) + \frac{g}{2\gamma} = \left(v_0 + \frac{g}{2\gamma}\right)e^{-2\gamma t}$$

$$v(t) = -\frac{g}{2\gamma} + \left(v_0 + \frac{g}{2\gamma}\right)e^{-2\gamma t}$$

$t \to +\infty$ で、

$$v_\infty = -\frac{g}{2\gamma}$$

※授業では

$$\left|v + \frac{g}{2\gamma}\right| = C' e^{-2\gamma t} \quad (C' = e^{-2\gamma C})$$

$t = 0$ で、$v = v_0$ として、

$$\left|v_0 + \frac{g}{2\gamma}\right| = C'$$

$$\therefore \left|v + \frac{g}{2\gamma}\right| = \left|v_0 + \frac{g}{2\gamma}\right| e^{-2\gamma t}$$

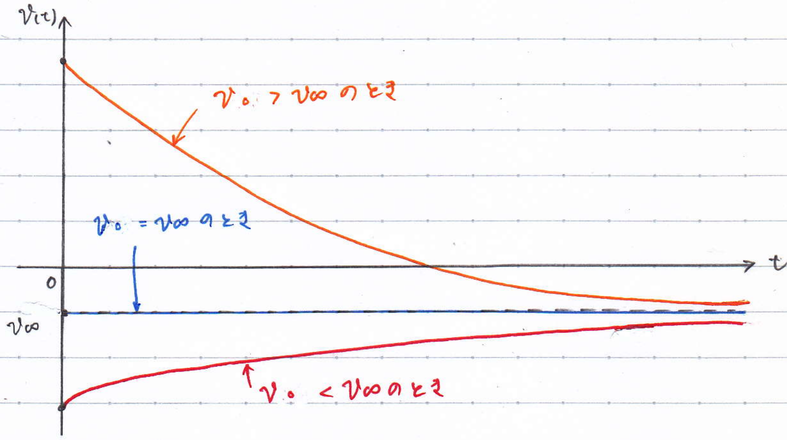
$v + \frac{g}{2\gamma} > 0$ なら、(右辺) > 0 になるはずなので、$v_0 + \frac{g}{2\gamma} > 0$
< 0 でも同様

$e^{-2\gamma t}$より、両辺の絶対値の中身の符号は一致するので、

$$v + \frac{g}{2\gamma} = \left(v_0 + \frac{g}{2\gamma}\right)e^{-2\gamma t}$$

としていたが、個人的に分かりにくい気がしたので、
筆者が以前学んだ方法で説明した。

これを図示すると、



さて、さらにこれをtで積分してみよう。

$$\dot{z}(t) = -\frac{g}{2\gamma} + \left(v_0 + \frac{g}{2\gamma}\right) e^{-2\gamma t}$$

tで積分して、

$$z(t) = -\frac{g}{2\gamma} t - \frac{1}{2\gamma}\left(v_0 + \frac{g}{2\gamma}\right) e^{-2\gamma t} + D \quad (D\text{は積分定数})$$

$t=0$ で $z(t) = z_0$ として、

$$z_0 = -\frac{1}{2\gamma}\left(v_0 + \frac{g}{2\gamma}\right) + D$$

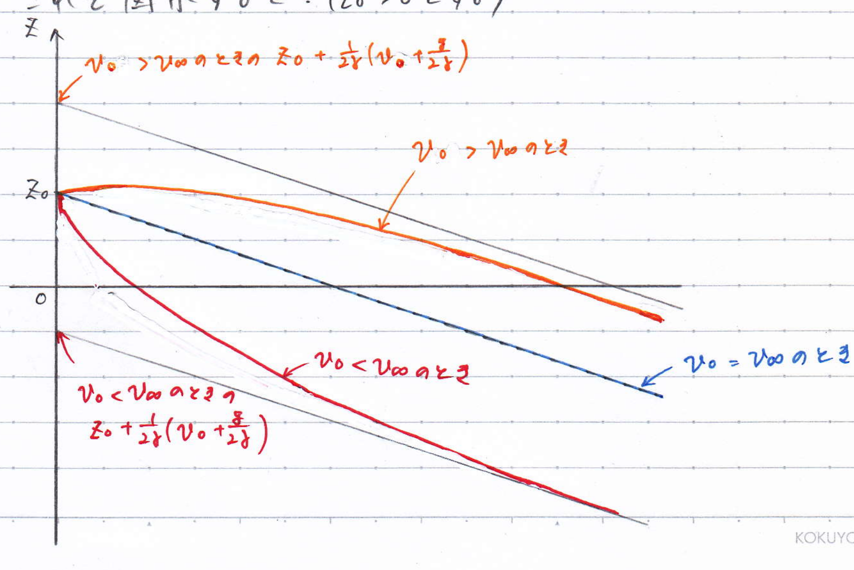
$$\therefore D = z_0 + \frac{1}{2\gamma}\left(v_0 + \frac{g}{2\gamma}\right)$$

従って、

$$z(t) = -\frac{g}{2\gamma} t - \frac{1}{2\gamma}\left(v_0 + \frac{g}{2\gamma}\right) e^{-2\gamma t} + z_0 + \frac{1}{2\gamma}\left(v_0 + \frac{g}{2\gamma}\right)$$

$$\therefore \underline{z(t) = z_0 - \frac{g}{2\gamma} t + \frac{1}{2\gamma}\left(v_0 + \frac{g}{2\gamma}\right)\left(1 - e^{-2\gamma t}\right)}$$

これを図示すると、($z_0 > 0$ とする)



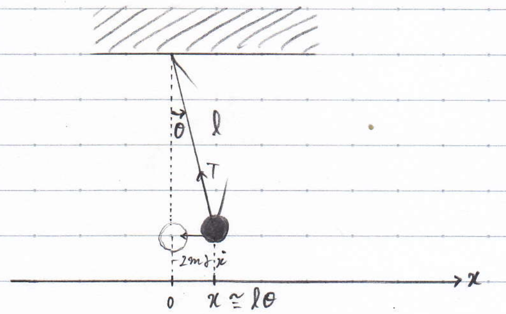
・振り子

微小近似のときのみを扱う。

以下、$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ とする

右図のように x 軸のみを考えるとすると、

運動方程式は、



$$m\ddot{x} = -m\frac{g}{l}x - 2m\gamma\dot{x}$$

$$= -m\omega_0^2 x - 2m\gamma\dot{x}$$

$$\therefore \ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\gamma\dot{x}$$

$$\therefore \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \cdots ①$$

これは x についての斉次2階線型微分方程式なので、以下のように解ける。

(右辺が定数 ($f(t)$ とかでない)　$\ddot{x}, \dot{x}, x$ が1次なので、$x_1(t), x_2(t)$ が解のときは $x_3(t) \equiv c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ も解になる　※あとで使う)

〈解法〉

① まず便利のため、解を複素数の範囲まで拡張する。

$x(t) \to z(t) = x(t) + y(t) \cdot i$

$z(t)$ が ① の解だとすると、① は "複素数として 0" なので、

実部も虚部も 0、すなわち ① の解となる。(0 じゃないと仮定するとすぐ矛盾しますね)

式でいえば、

$$\ddot{z}(t) + 2\gamma\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = 0$$

$$\therefore \{\ddot{x}(t) + i\ddot{y}(t)\} + 2\gamma\{\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)\} + \omega_0^2\{x(t) + iy(t)\} = 0$$

$$\therefore \ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \text{ かつ } \underbrace{\{\ddot{y}(t) + 2\gamma\dot{y}(t) + y(t)\}}_{0} i = 0$$

と自明である。

② では次に思い切って、$z(t) = ce^{\lambda t}$ (c, λ は複素定数) と仮定してみよう。

($\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$) とすると、

$e^{\lambda t} = e^{\lambda_1 t} \cdot e^{i\lambda_2 t} = e^{\lambda_1 t} \cdot \cos(\lambda_2 t) + i\sin(\lambda_2 t)$)

このとき、

$$\dot{z}(t) = \lambda ce^{\lambda t} = \lambda z(t)$$

$$\ddot{z}(t) = \lambda\dot{z}(t) = \lambda^2 z(t)$$

なので、$z(t)$ が ① の解とすると、

いかなるtでも成立する恒等式

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = (\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2) z(t) = 0$$

$z(t)$ は恒等的に 0 ではないので、

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\therefore \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

(i) $\gamma < \omega_0$ のとき.

$\lambda = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ (複素数解)

(ii) $\gamma > \omega_0$ のとき.

$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ (実数解)

(iii) $\gamma = \omega_0$ のとき

$\lambda = -\gamma = -\omega_0$ (実数重解)

の3パターンがある。ひとつずつ見ていくことにする。

(i) $\gamma < \omega_0$ のとき.

$$\lambda = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$
$$= -\gamma \pm i\omega \quad (\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \in \mathbb{R} \text{ とおいた})$$

このとき.

$$\begin{aligned} Z(t) &= ce^{\lambda t} \\ &= ce^{(-\gamma \pm i\omega)t} \\ &= ce^{-\gamma t} \cdot e^{\pm i\omega t} \\ &= ce^{-\gamma t}[\cos(\omega t) \pm i\sin(\omega t)] \end{aligned}$$

従って. $Z(t)$ が ① の解のとき.

$ce^{-\gamma t}\cos(\omega t)$ も $\pm ce^{-\gamma t}\sin(\omega t)$ も ① の解になる

ので、この2つを任意に重ね合わせて (④を用いた)、① の解 $x(t)$ は.

$$x(t) = e^{-\gamma t}[a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)] \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$\therefore \dot{x}(t) = -\gamma e^{-\gamma t}[a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)] + e^{-\gamma t}[-a\omega\sin(\omega t) + b\omega\cos(\omega t)]$$

$t = 0$ のとき $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$ とすると.

$$\begin{cases} x_0 = a \\ v_0 = -\gamma a + \omega b \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = x_0 \\ b = \frac{1}{\omega}(v_0 + \gamma x_0) \end{cases}$$

これらより.

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega}\sin(\omega t)\right] \quad (\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},\ \gamma < \omega_0)$$

(ちなみに $\omega < \omega_0$ より. 周期 T は. $T > T_0$
$\gamma \to 0$ とすると. $\omega \to \omega_0$ となる)

(ii) $\gamma > \omega_0$ のとき.

$$\lambda = -\gamma \pm \nu \quad (\nu = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \text{ とおいた}, \nu < \gamma)$$

このとき.

$$\begin{aligned} Z(t) &= ce^{\lambda t} \\ &= ce^{(-\gamma \pm \nu)t} \quad (\in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

(↑ c は実数とは言い切れないはずなのですが、板書ではこうなっていました。
λが実数なので. c も実数とみなしているのではないかと判断しました。)

従って $z(t)$ が ① の解のとき、
$ce^{-(\gamma+\nu)t}$ も $ce^{-(\gamma-\nu)t}$ も ① の解になる
($\gamma+\nu>0$ かつ $\gamma-\nu>0$ だが、$\gamma-\nu$ は非常に小さい数)
ので、この2つを任意に重ね合わせて(∵④)、① の解 $x(t)$ は、

$$x(t) = a_+ e^{-(\gamma+\nu)t} + a_- e^{-(\gamma-\nu)t} \quad (a_+, a_- \in \mathbb{R})$$
$$= e^{-\gamma t}\left(a_+ e^{-\nu t} + a_- e^{\nu t}\right) \leftarrow \text{これでもいいんだけど…}$$
$$= e^{-\gamma t}\left\{(a_+ + a_-)\frac{e^{\nu t}+e^{-\nu t}}{2} + (-a_+ + a_-)\frac{e^{\nu t}-e^{-\nu t}}{2}\right\}$$
$$= e^{-\gamma t}\left[a\cosh(\nu t) + b\sinh(\nu t)\right] \quad (a = a_+ + a_-,\ b = -a_+ + a_-)$$

$$\therefore \dot{x}(t) = -\gamma e^{-\gamma t}\left[a\cosh(\nu t) + b\sinh(\nu t)\right] + e^{-\gamma t}\left[a\nu\sinh(\nu t) + b\nu\cosh(\nu t)\right]$$

$t=0$ のとき $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$ とすると、

$$\begin{cases} x_0 = a \\ v_0 = -\gamma a + b\nu \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = x_0 \\ b = \dfrac{v_0 + \gamma x_0}{\nu} \end{cases}$$

これらより、

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[x_0\cosh(\nu t) + \frac{v_0+\gamma x_0}{\nu}\sinh(\nu t)\right] \quad (\nu = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2},\ \gamma > \omega_0)$$

これは、$\nu = i\omega$ とすると、
$\cosh(i\omega t) = \cos\omega t$, $\sinh(i\omega t) = i\sin\omega t$
より、(1) に一致する。

(iii) $\gamma = \omega_0$ のとき、
$\lambda = -\gamma = -\omega_0$
$z(t) = ce^{-\gamma t} = ce^{-\omega_0 t}$ の1つのみとなってしまった。これでは解けない。
何が悪かったかは唯1つ！ $z(t) = ce^{\lambda t}$ と仮定したのが悪かった。
反省せねばならない。
そこで定数変化法というのを用いて、係数を定数 c ではなく、
t の関数 $A(t)$ にしてみよう。(こう仮定すべきだった。)

$$z(t) = A(t)e^{-\omega_0 t}$$
$$\dot{z}(t) = \dot{A}(t)e^{-\omega_0 t} - \omega_0 A(t)e^{-\omega_0 t} = \left(\dot{A}(t) - \omega_0 A(t)\right)e^{-\omega_0 t}$$
$$\ddot{z}(t) = \ddot{A}(t)e^{-\omega_0 t} - \omega_0\dot{A}(t)e^{-\omega_0 t} - \omega_0\dot{A}(t)e^{-\omega_0 t} + \omega_0^2 A(t)e^{-\omega_0 t}$$
$$= \left(\ddot{A}(t) - 2\omega_0\dot{A}(t) + \omega_0^2 A(t)\right)e^{-\omega_0 t}$$

$z(t)$ が ① の解だとすると、$\gamma = \omega_0$ に注意して、

$$(\ddot{A} - 2\omega_0\dot{A} + \omega_0^2 A)e^{-\omega_0 t} + 2\omega_0(\dot{A} - \omega_0 A)e^{-\omega_0 t} + \omega_0^2 Ae^{-\omega_0 t} = 0$$
$$\therefore \ddot{A}e^{-\omega_0 t} = 0$$

$e^{-\omega_0 t} \neq 0$ より

$$\ddot{A}(t) = 0$$
$$\therefore \dot{A}(t) = a_0$$
$$\therefore A(t) = a_0 + a_1 t \quad (a_0, a_1 \text{ は積分定数}) \ (t \text{ の高々1次式})$$

すなわち、少なくとも

$A(t) = 1$, $A(t) = t$

のときの $x(t)$ は解である。つまり、(いずれも $\ddot{A}(t) = 0$ となるので OK)

$e^{-\omega_0 t}$ も $te^{-\omega_0 t}$ も ① の解になる

ので、この2つを任意に重ね合わせて (∵ ㊉)、① の解 $x(t)$ は、

$$x(t) = ae^{-\omega_0 t} + bte^{-\omega_0 t}$$

$$\dot{x}(t) = -a\omega_0 e^{-\omega_0 t} + be^{-\omega_0 t} - b\omega_0 te^{-\omega_0 t}$$

$t=0$ で $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$ とすると、

$$\begin{cases} x_0 = a \\ v_0 = -a\omega_0 + b \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = x_0 \\ b = v_0 + x_0\omega_0 \end{cases}$$

これらより、

$$x(t) = e^{-\omega_0 t}[x_0 + (v_0 + \omega_0 x_0)t] = e^{-\gamma t}[x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t] \quad (\gamma = \omega_0)$$

以上まとめると、$x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ として、

(i) $\gamma < \omega_0$ のとき、

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega}\sin(\omega t)\right],\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$: 減衰振動

$\gamma - \nu$ のときの弱い解も出てくる ↓

(ii) $\gamma > \omega_0$ のとき、

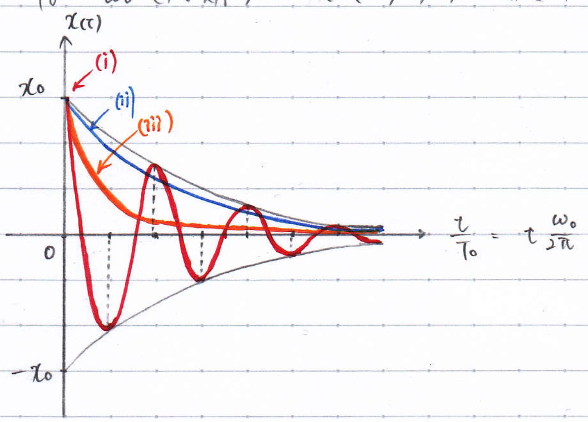
$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[x_0 \cosh(\nu t) + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\nu}\sinh(\nu t)\right],\ \nu = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$: 過減衰解

(iii) $\gamma = \omega_0$ のとき、

$$x(t) = e^{-\gamma t}[x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t]$$: 臨界減衰解

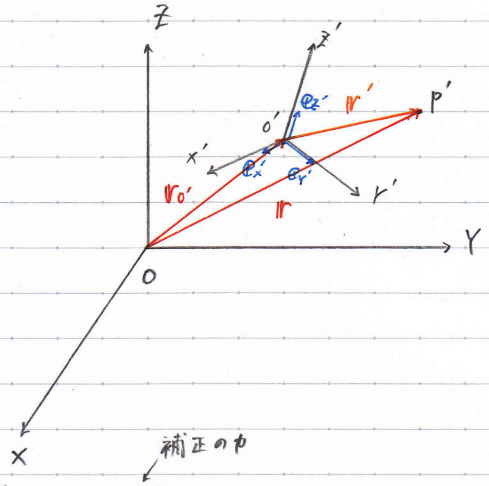
(↑ $v_0 \to 0$ だと $x(t) \fallingdotseq x_0 e^{-\gamma t}(1 + \gamma t)$ となる)

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (周期) として、グラフは次のようになる。



(3) 自転の効果

ここからは話が変わり"動く座標系"について考察する。
(1),(2)は地球上は固定座標系という前提のもと考えていた。
しかし実際は地球は自転しているので、相対的な運動であり、
慣性系でない、すなわち非慣性系なのである。
(P.3~4より、そのまま補正なしでは3法則が成立しない)
ではどうすれば慣性系と同じように扱えるか、数式を用いて見ていくことにする。



右図において
$O\{e_x, e_Y, e_Z\}$ を慣性系とし
新しく座標系 $O'\{e_x', e_Y', e_Z'\}$ を
とる (O'は新しい基準点かつ時間変化する)
とする。
また右図のように r_0', r, r' を定める。
このとき

$$\begin{cases} r = x e_x + y e_Y + z e_Z \\ r' = x' e_{x'} + y' e_{Y'} + z' e_{Z'} \\ r = r_0' + r' \end{cases}$$

$m\ddot{r} = F$ であるから、$\cancel{m\ddot{r}' = F}$ → $m\ddot{r}' = F + \overset{\text{補正の力}}{F'}$ であることはすぐわかる。

(もちろん、$r = r_0' + r'$ より

$$\begin{cases} \dot{r} = \dot{r}_0' + \dot{r}' \\ \ddot{r} = \ddot{r}_0' + \ddot{r}' \end{cases}$$

である)

ここで、
$r' = x' e_x' + y' e_Y' + z' e_Z'$ より、

$$\dot{r}' = \dot{x}' e_x' + \dot{y}' e_Y' + \dot{z}' e_Z' + \underbrace{x' \dot{e}_{x'} + y' \dot{e}_{Y'} + z' \dot{e}_{Z'}}_{(☆)} \quad \cdots (*)$$

(☆)で、時間変化するので、$e_{x'} \nparallel e_x$, $e_{Y'} \nparallel e_Y$, $e_{Z'} \nparallel e_Z$ とする
(☆)を $e_{x'}$, $e_{Y'}$, $e_{Z'}$ を用いて表すことが出来れば、極座標のときと同じように上手くいくはずなので、それを考えてみることにしよう。

以下、見やすいように、([内のみ)
$\{x, Y, Z\} \to \{1, 2, 3\}$, $\{e_{x'}, e_{Y'}, e_{Z'}\} \to \{e_1', e_2', e_3'\}$
と書くことにする。
このとき、(☆)を e_1', e_2', e_3'、すなわち $e_{x'}$, $e_{Y'}$, $e_{Z'}$ を
用いて表したいので、

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_1' = \omega_{11}\mathbf{e}_1' + \omega_{12}\mathbf{e}_2' + \omega_{13}\mathbf{e}_3' & \cdots \text{Ⓐ} \\ \dot{\mathbf{e}}_2' = \omega_{21}\mathbf{e}_1' + \omega_{22}\mathbf{e}_2' + \omega_{23}\mathbf{e}_3' & \cdots \text{Ⓑ} \\ \dot{\mathbf{e}}_3' = \omega_{31}\mathbf{e}_1' + \omega_{32}\mathbf{e}_2' + \omega_{33}\mathbf{e}_3' & \cdots \text{Ⓒ} \end{cases}$$

と書けるとする。(というか書けるはず。)

ここで、$\mathbf{e}_i'$ ($i=1,2,3$) は基底ベクトルなので、

$|\mathbf{e}_i'| = 1$ も用いると

$$\begin{cases} \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_i' = 1 & \cdots ① \\ \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j' = 0 \quad (i \neq j) & \cdots ② \end{cases}$$

であるから、

①を両辺tで微分して、

$\dot{\mathbf{e}}_i' \cdot \mathbf{e}_i' + \mathbf{e}_i' \cdot \dot{\mathbf{e}}_i' = 0$

$\therefore \mathbf{e}_i' \cdot \dot{\mathbf{e}}_i' = 0$

($\therefore \mathbf{e}_i' \perp \dot{\mathbf{e}}_i'$)

Ⓐに両辺$\mathbf{e}_1'$を、Ⓑに両辺$\mathbf{e}_2'$を、Ⓒに両辺$\mathbf{e}_3'$を内積すると、②も用いて、

$\omega_{11} = 0,\ \omega_{22} = 0,\ \omega_{33} = 0$

と分かる。

②を両辺tで微分して、

$\dot{\mathbf{e}}_i' \cdot \mathbf{e}_j' + \mathbf{e}_i' \cdot \dot{\mathbf{e}}_j' = 0$

$\therefore \dot{\mathbf{e}}_i' \cdot \mathbf{e}_j' = -\mathbf{e}_i' \cdot \dot{\mathbf{e}}_j$

Ⓐに両辺$\mathbf{e}_2'$、Ⓑに両辺$\mathbf{e}_1'$を内積した2式を比較、

Ⓑに両辺$\mathbf{e}_3'$、Ⓒに両辺$\mathbf{e}_2'$を内積した2式を比較、

Ⓒに両辺$\mathbf{e}_1'$、Ⓐに両辺$\mathbf{e}_3'$を内積した2式を比較

すると、②も用いて、

$$\left.\begin{aligned} \omega_{12} &= -\omega_{21} \equiv \omega_3(t) \\ \omega_{23} &= -\omega_{32} \equiv \omega_1(t) \\ \omega_{31} &= -\omega_{13} \equiv \omega_2(t) \end{aligned}\right\} \text{改めて定義する}$$

と分かる。

これら2つを用いて、Ⓐ、Ⓑ、Ⓒを書き直してみよう。

その前に $\boldsymbol{\omega} \equiv \omega_1\mathbf{e}_1' + \omega_2\mathbf{e}_2' + \omega_3\mathbf{e}_3'$ と定義することにしておく。

また $\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_1' + y'\mathbf{e}_2' + z'\mathbf{e}_3'$ と書けることも思い出しておくと、

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_1' = \omega_3\mathbf{e}_2' - \omega_2\mathbf{e}_3' \\ \dot{\mathbf{e}}_2' = -\omega_3\mathbf{e}_1' + \omega_1\mathbf{e}_3' \\ \dot{\mathbf{e}}_3' = \omega_2\mathbf{e}_1' - \omega_1\mathbf{e}_2' \end{cases}$$

と書けた。これらを用いて、(※)を書き直してみよう。

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

(※) : $x'\dot{e}_{1'} + y'\dot{e}_{2'} + z'\dot{e}_{3'}$

$$= x'(\omega_3 e_{2'} - \omega_2 e_{3'}) + y'(-\omega_3 e_{1'} + \omega_1 e_{3'}) + z'(\omega_2 e_{1'} - \omega_1 e_{2'})$$

$$= (\omega_2 z' - \omega_3 y')e_{1'} + (\omega_3 x' - \omega_1 z')e_{2'} + (\omega_1 y' - \omega_2 x')e_{3'}$$

$$= \omega \times r' \quad \cdots (※)'$$

と書ける。

従って [の前から続けると、

$$\frac{dr'}{dt} = \dot{r}' = \dot{x}' e_{x'} + \dot{y}' e_{y'} + \dot{z} e_{z'} + \omega \times r' \quad (\because (※)')$$

$$= \underbrace{\left(\frac{dx'}{dt}\right)e_{x'} + \left(\frac{dy'}{dt}\right)e_{y'} + \left(\frac{dz'}{dt}\right)e_{z'}}_{} + \omega \times r' \quad \cdots (♡)$$

($= \dfrac{d^*r'}{dt}$ と表記することにする
(すなわち $\dfrac{d^*}{dt}$ は、係数のみにて微分するということ))

となる。

この式の図形的意味はなんだろうか?

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{d^*r'}{dt} + \omega \times r'$$

より、

$$\Delta r' = \Delta^* r' + \underbrace{(\omega \times r')\Delta t}$$

(ここは、O'が固定系だとしたときの変位)

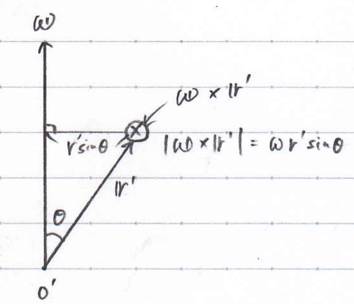
ここの大きさは、θをωとr'のなす角として、

$|\omega||r'| \sin\theta \cdot \Delta t$

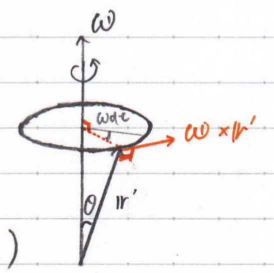
$= \underset{角度}{\omega\Delta t} \times \underset{半径}{r'\sin\theta}$ $(|\omega| = \omega,\ |r'| = r')$

角度 半径 と見なせそうだ

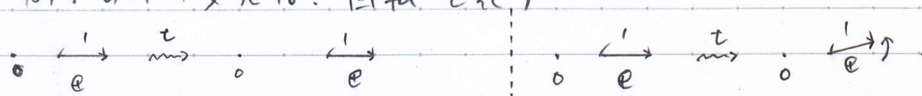
(ただし、ω:単位時間あたりの回転角の角速度)



つまり、右図のようにうまくωを定めたら、＿＿は回転を表していることが分かった。
(ωの方向が回転軸)
ωは**角速度ベクトル**と呼ばれる。



さて、これで何を言っているのか理解できた人はここは読み飛ばしてよい。(筆者は正直うまく理解できなかった)
そもそも基底ベクトルが時間変化するのは、回転のみである。なぜなら、ベクトルの時間変化とは、"長さ(大きさ)"と"方向"が時間tに依存して変化することを意味する。
しかし、基底ベクトルは長さ(大きさ)が"1"で固定されているので、"方向"しか変化しないのである。
"方向"のみの変化は、"回転"を表す



← これは時間に依存して"回転"している

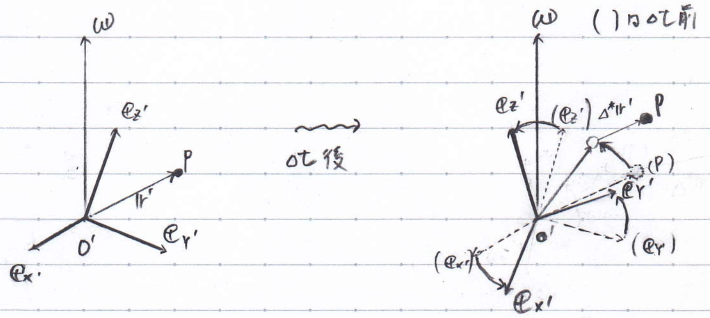
これは支点は動いているものの、e自体は変化なし

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

よって、実は $O'\{\mathbb{e}_{x'}, \mathbb{e}_{y'}, \mathbb{e}_{z'}\}$ は回転している座標系だったのだ。
(先に言ってくれなければ分かりにくいですよね…)
$\mathbb{r}'$ に座標の t 微分 $\left(\frac{d^*}{dt}\right)$ 以外に $\omega\times\mathbb{r}'$ という謎の項が発生したのはこのためである。

$$\omega\times\mathbb{r}' = \omega\times(x'\mathbb{e}_{x'} + y'\mathbb{e}_{y'} + z'\mathbb{e}_{z'})$$
$$= x'\cdot\omega\times\mathbb{e}_{x'} + y'\cdot\omega\times\mathbb{e}_{y'} + z'\cdot\omega\times\mathbb{e}_{z'}$$

と書き下せばなんとなく見えてくるだろうか。
$\mathbb{e}_{x'}$ も $\mathbb{e}_{y'}$ も $\mathbb{e}_{z'}$ も ω を軸として同じ角速度 ω で回転しているのである。便宜的に O' は回転のみとすると、
以下の図のようになる。



(視点は慣性系)

これで少し分かりやすくなったはずだ。

さて、元に戻ろう。これらを用いると $\mathbb{r}$ と $\dot{\mathbb{r}}$ は以下のように表せる。

$$\mathbb{r} = \mathbb{r}_{O'} + \mathbb{r}'$$
$$= \mathbb{r}_{O'} + (x'\mathbb{e}_{x'} + y'\mathbb{e}_{y'} + z'\mathbb{e}_{z'})$$
$$\dot{\mathbb{r}} = \dot{\mathbb{r}}_{O'} + \dot{\mathbb{r}}'$$
$$= \dot{\mathbb{r}}_{O'} + \frac{d^*\mathbb{r}'}{dt} + \omega\times\mathbb{r}' \quad (\because (♡))$$

よって、

$$\ddot{\mathbb{r}} = \ddot{\mathbb{r}}_{O'} + \underline{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^*\mathbb{r}'}{dt}\right)} + \underline{\frac{d}{dt}(\omega\times\mathbb{r}')}$$
$$= \ddot{\mathbb{r}}_{O'} + \underbrace{\left\{\frac{d^*}{dt}\left(\frac{d^*\mathbb{r}'}{dt}\right) + \omega\times\frac{d^*\mathbb{r}'}{dt}\right\}}_{\frac{d^*\mathbb{r}'}{dt}\text{も}\mathbb{e}_{x'},\mathbb{e}_{y'},\mathbb{e}_{z'}\text{の結合なので、♡を適用した}} + \underbrace{\left(\frac{d\omega}{dt}\times\mathbb{r}' + \omega\times\frac{d\mathbb{r}'}{dt}\right)}_{\text{ライプニッツ則に従った}}$$
$$= \ddot{\mathbb{r}}_{O'} + \left(\frac{d^*}{dt}\right)^2\mathbb{r}' + \omega\times\frac{d^*\mathbb{r}'}{dt} + \underbrace{\left(\frac{d^*\omega}{dt} + \omega\times\omega\right)}_{\omega\text{も}\mathbb{e}_{x'},\mathbb{e}_{y'},\mathbb{e}_{z'}\text{の結合なので、♡を適用した}}\times\mathbb{r}' + \omega\times\left(\frac{d^*\mathbb{r}'}{dt} + \omega\times\mathbb{r}'\right)$$
$$= \ddot{\mathbb{r}}_{O'} + \underbrace{\left(\frac{d^*}{dt}\right)^2\mathbb{r}'}_{\text{実はこれ、}O'\text{系での見かけの加速度}} + 2\omega\times\frac{d^*\mathbb{r}'}{dt} + \omega\times(\omega\times\mathbb{r}') + \frac{d^*\omega}{dt}\times\mathbb{r}' \quad (\because \omega\times\omega = \mathbb{0})$$

となる。

今、O系は慣性系と約束しているので、ニュートンの3法則がそのまま成立し、

$$m\frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2} = \mathbb{F}$$

このときO'系では、

$$m\frac{d^2\mathbb{r}_0'}{dt^2} + m\left(\frac{d^*}{dt}\right)^2\mathbb{r}' + 2m\omega\times\frac{d^*\mathbb{r}'}{dt} + m\omega\times(\omega\times\mathbb{r}') + m\frac{d^*\omega}{dt}\times\mathbb{r}' = \mathbb{F}$$

従って、これを整理して、O'系での運動方程式は、

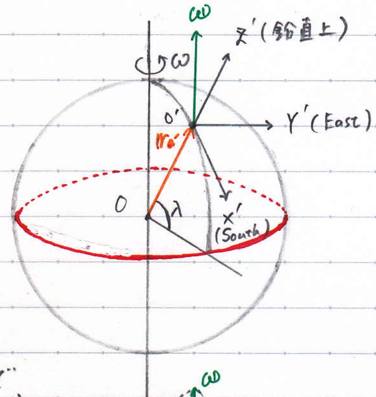
$$\boxed{m\left(\frac{d^*}{dt}\right)^2\mathbb{r}' = \mathbb{F} \underbrace{- m\frac{d^2\mathbb{r}_0'}{dt^2} - 2m\omega\times\frac{d^*\mathbb{r}'}{dt}}_{\text{コリオリの力}} \underbrace{- m\omega\times(\omega\times\mathbb{r}')}_{\text{遠心力}} \underbrace{- m\frac{d^*\omega}{dt}\times\mathbb{r}'}_{\text{角速度が変化することの効果}}} \quad \cdots ①$$

(通常はOとO'を一致させ、ωが定ベクトルであるとして、

$$m\left(\frac{d^*}{dt}\right)^2\mathbb{r} = \mathbb{F} - 2m\omega\times\frac{d^*\mathbb{r}}{dt} - m\omega\times(\omega\times\mathbb{r})$$

と書くことが多い(気がする)。)

さて、これを地球上の運動に当てはめていこう。
地球が角速度ωで自転しているとして、緯度λ地点での運動を考える。(すなわちωは定ベクトル)



右下図より、

$$\omega = -(\omega\cos\lambda)\mathbb{e}_{x'} + (\omega\sin\lambda)\mathbb{e}_{z'} \quad \cdots ②$$

また、

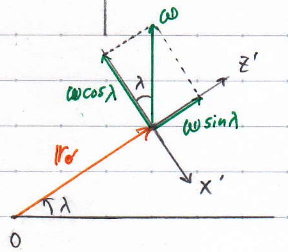
$$\mathbb{F} = -mg\,\mathbb{e}_z \quad \cdots ③$$

とする。(まだ重力のみ)
ここで、$\mathbb{r}_0'$はωを軸として、角速度ωで回転しているので、

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbb{r}_0'}{dt} = \omega\times\mathbb{r}_0' \\ \dfrac{d^2\mathbb{r}_0'}{dt^2} = \dfrac{d\omega}{dt}\times\mathbb{r}_0' + \omega\times\dfrac{d\mathbb{r}_0'}{dt} \\ \qquad = \omega\times(\omega\times\mathbb{r}_0') \quad \cdots ④ \end{cases}$$

← [ ]の前あたり思い出してもらえれば分かるはず

(∵ ωは定ベクトルなので、$\frac{d\omega}{dt} = 0$)



②より、④は、

$$\begin{aligned} \omega\times(\omega\times\mathbb{r}_0') &= \omega\times\{(-\omega\cos\lambda\,\mathbb{e}_{x'} + \omega\sin\lambda\,\mathbb{e}_{z'})\times r_0'\mathbb{e}_{z'}\} \\ &= \omega\times(\omega\cos\lambda\cdot r_0'\,\mathbb{e}_{y'}) \\ &= (-\omega\cos\lambda\,\mathbb{e}_{x'} + \omega\sin\lambda\,\mathbb{e}_{z'})\times(\omega\cos\lambda\cdot r_0'\,\mathbb{e}_{y'}) \\ &= -\omega^2\cos^2\lambda\cdot r_0'\,\mathbb{e}_{z'} - \omega^2\sin\lambda\cos\lambda\cdot r_0'\,\mathbb{e}_{x'} \\ &= -r_0'\omega^2(\cos\lambda\,\mathbb{e}_{z'} + \sin\lambda\,\mathbb{e}_{x'})\cos\lambda \quad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

となる。

以上、①,③,④,⑤と、$\frac{d\omega}{dt}=0$から、$\frac{d^*\omega}{dt}=0$であることより、

$$\begin{aligned} m\left(\frac{d^*}{dt}\right)^2\mathbb{r}' &= -mg\,\mathbb{e}_z \underbrace{- m r_0'\omega^2(\cos\lambda\,\mathbb{e}_{z'} + \sin\lambda\,\mathbb{e}_{x'})\cos\lambda}_{\text{重力の}\frac{1}{200}\text{くらい→無視}} \underbrace{- m\omega\times(\omega\times\mathbb{r}')}_{\text{地表近くでは重力の}\frac{1}{300}\text{くらい→無視}} \\ &\quad - 2m\omega\times\frac{d^*\mathbb{r}'}{dt} \\ &\fallingdotseq -mg\,\mathbb{e}_z \underbrace{- 2m\omega\times\frac{d^*\mathbb{r}'}{dt}}_{\text{残念ながらこれは無視できない}} \quad \cdots ⑥ \end{aligned}$$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

いま、②より、

$$-2m\omega\times\frac{d^*}{dt}\mathbb{r}' = -2m\omega(-\cos\lambda\,\mathbb{e}_{x'}+\sin\lambda\,\mathbb{e}_{z'})\times(\dot{x}'\mathbb{e}_{x'}+\dot{y}\,\mathbb{e}_{y'}+\dot{z}\,\mathbb{e}_{z'})$$
$$= 2m\omega\sin\lambda\,\dot{y}'\mathbb{e}_{x'} - 2m\omega(\cos\lambda\,\dot{z}'+\sin\lambda\,\dot{x}')\mathbb{e}_{y'} + 2m\omega\cos\lambda\,\dot{y}'\mathbb{e}_{z'}$$

なので、⑥は、

$$(m\ddot{x}')\mathbb{e}_{x'}+(m\ddot{y}')\mathbb{e}_{y'}+(m\ddot{z}')\mathbb{e}_{z'}$$
$$=(2m\omega\sin\lambda\,\dot{y}')\mathbb{e}_{x'}+\{-2m\omega(\cos\lambda\,\dot{z}'+\sin\lambda\,\dot{x}')\}\mathbb{e}_{y'}+(2m\omega\cos\lambda\,\dot{y}'-mg)\mathbb{e}_z \quad \cdots ⑥'$$

となる。

いまは $\mathbb{F} = -mg\,\mathbb{e}_z$ としていたので、⑥(⑥')が、地球の自転の影響を加味した落体の運動方程式となる。

さて、成分ごとに見ていこう。⑥'より、

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x}' = 2m\omega\sin\lambda\,\dot{y}' \\ m\ddot{y}' = -2m\omega(\cos\lambda\,\dot{z}'+\sin\lambda\,\dot{x}') \\ m\ddot{z}' = 2m\omega\cos\lambda\,\dot{y}' - mg \end{cases}}$$

コリオリ力は無視出来ないとはいえ、小さいのは確かなので、
$|\dot{z}'| \gg |\dot{x}'|, |\dot{y}'| (\simeq 0)$ と近似することにする。

従って、

$$\begin{cases} \ddot{x}' \fallingdotseq 0 \\ \ddot{y}' \fallingdotseq -2\omega\cos\lambda\,\dot{z}' \quad \cdots ⑦ \\ \ddot{z}' \fallingdotseq -g \quad \cdots ⑧ \end{cases}$$

$t=0$ で、$x'=y'=0$, $z'=h$, $\dot{y}'=\dot{z}'=0$ とすると、

⑧より、

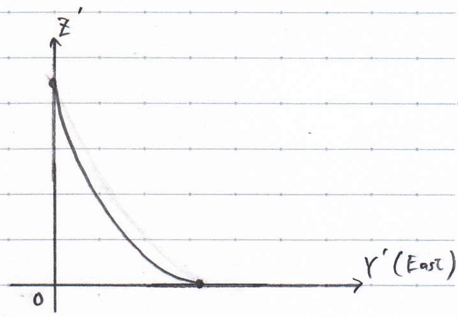
$$\dot{z}' = -gt \quad \therefore z' = h-\frac{1}{2}gt^2 \quad \cdots ⑨$$

これと⑦より、

$$\ddot{y}' = 2\omega\cos\lambda\cdot gt$$
$$\therefore \dot{y}' = \omega\cos\lambda\cdot gt^2$$
$$\therefore y' = \frac{1}{3}\omega\cos\lambda\cdot gt^3 \quad \cdots ⑩$$

⑨、⑩より、

$$y' = \frac{1}{3}\omega g\cos\lambda\left\{\frac{2(h-z')}{g}\right\}^{\frac{3}{2}}$$



物体はこの曲線に沿って落下していく。
この曲線をナイルの曲線という。

さて、今は外力は重力のみだったが、今度は、地球の自転の影響を加味した振り子の運動を見ていこう。
①の右辺に $\mathbb{T}$ をつければよいので、

$$m\left(\frac{d^*}{dt}\right)^2\mathbb{r}' = -mg\,\mathbb{e}_z - 2m\omega\times\frac{d^*\mathbb{r}'}{dt} + \mathbb{T} \quad \cdots ⑪$$

簡単のために、微小近似をする。すなわち

$z'\fallingdotseq 0$, $\dot{z}'\fallingdotseq 0$, $\ddot{z}'\fallingdotseq 0$ とする。

よって

mg に比べればはるかに小さい

$$m\ddot{z}' = -mg + 2m\omega\cos\lambda\,\dot{y}' + T$$
$$\fallingdotseq -mg + T$$

$\ddot{z}'\fallingdotseq 0$ より、$T\fallingdotseq mg$

従って、成分ごとの運動方程式は、（Tのx成分とy成分は前と同じ）

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x}' = -m\frac{g}{l}x' + 2m\omega\sin\lambda\,\dot{y}' \\ m\ddot{y}' = -m\frac{g}{l}y' - 2m\omega(\cos\lambda\,\dot{z}' + \sin\lambda\,\dot{x}') \\ m\ddot{z}' = 2m\omega\cos\lambda\,\dot{y}' \ (\fallingdotseq 0) \end{cases}}$$

（素直に単振動はする）

すなわち、$\dot{z}'\fallingdotseq 0$ も考えて

$$\begin{cases} \ddot{x}' = -\frac{g}{l}x' + 2\omega\sin\lambda\,\dot{y}' & \cdots ⑫ \\ \ddot{y}' = -\frac{g}{l}y' - 2\omega\sin\lambda\,\dot{x}' & \cdots ⑬ \end{cases}$$

⑬ $\times x'$ − ⑫ $\times y'$ より、

$$x'\ddot{y}' - y'\ddot{x}' = -2\omega\sin\lambda\,(x'\dot{x}' + y'\dot{y}')$$
$$\frac{d}{dt}(x'\dot{y}' - \dot{x}'y') = -\omega\sin\lambda\,\frac{d}{dt}(x'^2 + y'^2)$$

両辺tで積分して

$$x'\dot{y}' - \dot{x}'y' = -\omega\sin\lambda\,(x'^2 + y'^2) + C \quad (C\text{は積分定数})$$

$t=0$ で $x'=0$ かつ $y'=0$（O'を通る）とすると

$C=0$

$$\therefore x'\dot{y}' - \dot{x}'y' = -\omega\sin\lambda\,(x'^2+y'^2) \quad \cdots ⑭$$

ここで、

$$\begin{cases} x' = r'\cos\varphi \\ y' = r'\sin\varphi \end{cases}$$
（φはパラメーター、$r' = \sqrt{x'^2+y'^2}$、$\varphi\in[0,2\pi)$、$r=r(t)$、$\varphi=\varphi(t)$）

とおくと

$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{r}'\cos\varphi - r'\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y}' = \dot{r}'\sin\varphi + r'\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases}$$

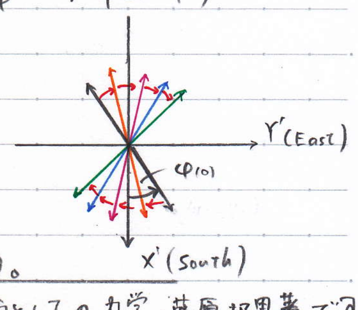
であるから、

$$x'\dot{y}' - \dot{x}'y' = r'\cos\varphi(\dot{r}'\sin\varphi + r'\dot{\varphi}\cos\varphi) - r'\sin\varphi(\dot{r}'\cos\varphi - r'\dot{\varphi}\sin\varphi)$$
$$= r'^2\dot{\varphi} \quad \cdots ⑮$$

⑭、⑮より、

$$r'^2\dot{\varphi} = -\omega\sin\lambda\cdot r'^2 \quad \therefore \dot{\varphi} = -\omega\sin\lambda$$

$$\therefore \varphi(t) = -(\omega\sin\lambda)\,t + \varphi(0)$$



すなわち、XY平面内で時計まわりに回転しながら単振動する。（北半球）これをフーコーの振り子という。

以上で終了です。お疲れ様でした。参考文献は「物理学序論としての力学」藤原邦男著です。

筆者：2016年度 理2−4組 力学A シケ対（3! Twitter：@km31115）

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines