# 線形数学 I・II 演習問題

# 目 次

# 線形数学 I 演習問題　第 1 回　写像

1. 以下で与えられる写像が, 全射, 単射, 全単射であるかどうか, 理由とともに答えよ.

(1) $f_1 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f_1(x) = \sin x$　　(2) $f_2 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \boldsymbol{R}$, $f_2(x) = \sin x$

(3) $f_3 : \boldsymbol{R} \to [-1, 1]$, $f_3(x) = \sin x$　　(4) $f_4 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $f_4(x) = \sin x$

(5) $f_5 : \boldsymbol{R} \to (\text{平面})$, $f_5(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-t \end{pmatrix}$　　(6) $f_6 : (\text{平面}) \to (\text{平面})$, $f_6\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x-y+1 \\ 4x-2y-1 \end{pmatrix}$

2. 実数 $a$, $b$, $c$ (ただし $a \neq 0$) に対し, $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = ax^2 + bx + c$ で与えられる 2 次関数とする.

(1) $(f \circ f)(x)$ を求めよ.

(2) $(f \circ f)(x) - x$ を $x$ の多項式とみたとき, $(f \circ f)(x) - x$ を $f(x) - x = ax^2 + (b-1)x + c$ で割ったときの商と余りを求めよ.

(3) $(f \circ f)(x) - x$ を $f(x) - x = ax^2 + (b-1)x + c$ で割ったときの商を $g(x)$ とする. 2 次方程式 $f(x) - x = 0$, $g(x) = 0$ の判別式をそれぞれ $D$, $D'$ とするとき, $D'$ を $a$ と $D$ だけを用いた式で表せ.

(4) 2 次方程式 $f(x) - x = 0$ と $g(x) = 0$ が共通の解をもつためには, $g(x) = 0$ が重解をもつことが必要十分であることを示せ.

(5) 4 次方程式 $(f \circ f)(x) - x = 0$ の相異なる実数解の個数が $D$ の値により, どのように変化するか調べよ.

(6) 2 次方程式 $g(x) = 0$ の解を $\alpha$, $\beta$ とするとき, $f \circ f$ の導関数の $\alpha$, $\beta$ における値 $(f \circ f)'(\alpha)$, $(f \circ f)'(\beta)$ を $D$ だけを用いた式で表せ.

(7) 4 次関数 $f \circ f$ が相異なる 3 つの値で極値をとるための条件を $D$ と $b$ を用いて表せ.

3. 実数 $a$, $b$ に対し, 関数 $\mu_a, \tau_b : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $\mu_a(x) = ax$, $\tau_b(x) = x + b$ で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 合成関数 $\tau_b \circ \mu_a$, $\mu_a \circ \tau_b$ によって, 実数 $x$ は, それぞれどのような値に写されるか答えよ.

(2) $\mu_a \circ \tau_b = \tau_{ab} \circ \mu_a$ であることを示せ.

(3) 関数 $\sigma : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $\sigma(x) = x^2$ で定め, $a$, $b$, $c$ を実数とする. 合成関数 $\sigma \circ \tau_b$, $\mu_a \circ (\sigma \circ \tau_b)$, $\tau_c \circ (\mu_a \circ (\sigma \circ \tau_b))$ によって, 実数 $x$ は, それぞれどのような値に写されるか答えよ.

(4) 0 でない実数 $\alpha$ と実数 $\beta$, $\gamma$ に対し, $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ で与えられる 2 次関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を考える. このとき, 等式 $f = \tau_c \circ (\mu_a \circ (\sigma \circ \tau_b))$ が成り立つような $a$, $b$, $c$ を, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ を用いて表せ.

4. 平面のベクトル $\boldsymbol{p}$ と 2 次正方行列 $A$ が与えられたとき, 写像 $f : (\text{平面}) \to (\text{平面})$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ で定める. $A$ が逆行列をもつとき, $f$ は全単射であることを示し, $f$ の逆写像によるベクトル $\boldsymbol{y}$ の像を $A$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{p}$ を用いて表せ.

5. $a, b, c, d, p, q, r, s \in \boldsymbol{R}$ とし, $ad - bc$ と $ps - qr$ はともに 0 でないとする. 実数の部分集合 $X$, $Y$ を

$$X = \begin{cases} \boldsymbol{R} & c = 0 \\ \left\{ x \in \boldsymbol{R} \,\middle|\, x \neq -\frac{d}{c} \right\} & c \neq 0 \end{cases}, \qquad Y = \begin{cases} \boldsymbol{R} & r = 0 \\ \left\{ x \in \boldsymbol{R} \,\middle|\, x \neq -\frac{s}{r} \right\} & r \neq 0 \end{cases}$$

によって定め, 関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$, $g : Y \to \boldsymbol{R}$ をそれぞれ $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $g(x) = \dfrac{px+q}{rx+s}$ で定義する.

(1) $f(x) \in Y$ を満たす $x \in X$ 全体からなる $X$ の部分集合を $Z$ とするとき, $Z$ を求めよ.

(2) 関数 $\tilde{f} : Z \to Y$ を $\tilde{f}(x) = f(x)$ で定義する. このとき, 合成関数 $g \circ \tilde{f} : Z \to \boldsymbol{R}$ が定義されるが, $x \in Z$ に対して, $a$, $b$, $c$, $d$, $p$, $q$, $r$, $s$ と $x$ を用いて $(g \circ \tilde{f})(x)$ を表せ.

6. (発展問題) 平面のベクトル $\boldsymbol{p}$ と 2 次正方行列 $A$ が与えられたとき, 写像 $f : (\text{平面}) \to (\text{平面})$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ で定める. この写像が全射ならば, $A$ は逆行列をもつことを示せ.

# 第 1 回の演習問題の解答

1. (1) $f_1(x)=\sin x=2$ となる $x$ は存在しないため, $f_1$ は全射ではない. $f_1(0)=\sin 0=0$, $f_1(\pi)=\sin\pi=0$ だから $f_1(0)=f_1(\pi)$ となるため, $f_1$ は単射でもない.

(2) $f_2(x)=\sin x=2$ となる $x$ は存在しないため, $f_2$ は全射ではない. $\sin x$ は区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ で単調に増加するため, $f_2$ は単射である.

(3) $\sin x$ は $-1$ から $1$ の間のすべての値をとるため, $f_3$ は全射である. $f_3(0)=\sin 0=0$, $f_3(\pi)=\sin\pi=0$ だから $f_3(0)=f_3(\pi)$ となるため, $f_3$ は単射ではない.

(4) $x$ が $-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ に増加すれば, $\sin x$ は 単調に増加して, $-1$ から $1$ の間のすべての値をとるため, $f_4$ は全単射である.

(5) $t$ が実数全体を動けば, $f_5(t)=\begin{pmatrix}1+t\\2-t\end{pmatrix}$ を位置ベクトルとする点は, $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\end{cases}$ によってパラメータ表示される直線全体を動く. この直線は原点を通らないため, $f_5(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ を満たす実数 $t$ は存在しない. 従って $f$ は全射ではない. $f_5(s)=f_5(t)$ ならば $\begin{pmatrix}1+s\\2-s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t\\2-t\end{pmatrix}$ だから, この等式の両辺の第 1 成分どうしは等しい. 故に $1+s=1+t$ より, $s=t$ が得られるため, $f_5$ は単射である.

(6) 平面のベクトル $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ に対し, $f_6\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ となるベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ があるとすれば, $f_6$ の定義より, $\begin{pmatrix}2x-y+1\\4x-2y-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ だから, $\begin{cases}2x-y+1=p & \cdots(i)\\4x-2y-1=q & \cdots(ii)\end{cases}$ が成り立つ. これを $x$, $y$ の連立方程式とみて, $(ii)$ から $(i)$ の両辺を 2 倍したものを引けば $-3=q-2p$ が得られる. 従って, ベクトル $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ に対し, $f_6\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ となるベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が存在すれば, $p$, $q$ は $q=2p-3$ を満たさなくてはならない. とくに $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ の場合は $q=2p-3$ が満たされないため, $f_6\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ となるベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が存在しない. 故に $f_6$ は全射ではない. $f_6\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=f_6\left(\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)$ ならば $\begin{pmatrix}2x-y+1\\4x-2y-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x'-y'+1\\4x'-2y'-1\end{pmatrix}$ だから $\begin{cases}2x-y=2x'-y' & \cdots(i)\\4x-2y=4x'-2y' & \cdots(ii)\end{cases}$ が成り立つ. $(ii)$ は $(i)$ の両辺を 2 倍した式だから, $(i)$ が成り立てば $(ii)$ も成り立ち, $f_6\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=f_6\left(\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)$ が成り立つ. よって $f_6\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=f_6\left(\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)$ が成り立つためには $(i)$ が成り立つことが必要十分である. ここで, $x=y=0$, $x'=1$, $y'=2$ の場合を考えると $(i)$ が成り立つため, $f_6\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)=f_6\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$ となり, $f_6$ は単射ではないことがわかる.

2. (1) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax^2+bx+c)=a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c=$
$a^3x^4+2a^2bx^3+a(b^2+2ac+b)x^2+b(2ac+b)x+c(ac+b+1)$

(2) $(f\circ f)(x)-x=a^3x^4+2a^2bx^3+a(b^2+2ac+b)x^2+(2abc+b^2-1)x+c(ac+b+1)=$
$(ax^2+(b-1)x+c)(a^2x^2+a(b+1)x+ac+b+1)$ だから $(f\circ f)(x)-x$ を $f(x)-x=ax^2+(b-1)x+c$ で割ったときの商は $a^2x^2+a(b+1)x+ac+b+1$ であり, 余りは 0 である.

(3) $D=(b-1)^2-4ac$ であり, (2) から $g(x)=a^2x^2+a(b+1)x+ac+b+1$ だから $D'=a^2(b+1)^2-4a^2(ac+b+1)=a^2(b^2-2b+1-4ac-4)=a^2((b-1)^2-4ac-4)=a^2(D-4)$ である.

(4) $f(x)-x=0$ と $g(x)=0$ は共通の解 $\alpha$ をもつと仮定すれば, $\begin{cases} a\alpha^2+(b-1)\alpha+c=0 & \cdots(i) \\ a^2\alpha^2+a(b+1)\alpha+ac+b+1=0 & \cdots(ii) \end{cases}$
が成り立つ. $(ii)$ から $(i)$ の両辺を $a$ 倍したものを引けば $2a\alpha+b+1=0$ が得られるため $\alpha=-\dfrac{b+1}{2a}$ である. これを $(i)$ に代入して, 両辺を $-4a$ 倍すれば $(b-1)^2-4ac-4=0$ が得られる. この等式の左辺は $D-4$ に等しいため, (3) の結果から $D'=a^2(D-4)=0$ となり, $g(x)=0$ は重解をもつ.

逆に $g(x)=0$ が重解をもつならば, (3) の結果から $a^2(D-4)=D'=0$ となるため, $(b-1)^2-4ac-4=D-4=0$ である. このとき, $\alpha=-\dfrac{b+1}{2a}$ は $f(\alpha)-\alpha=0$ と $g(\alpha)=0$ を満たすため, $f(x)-x=0$ と $g(x)=0$ は共通の解 $\alpha=-\dfrac{b+1}{2a}$ をもつ.

(5) $(f\circ f)(x)-x$ は 2 次式 $f(x)-x$ と $g(x)$ の積に因数分解し, $f(x)-x=0$ と $g(x)=0$ が共通の解をもつのは $g(x)=0$ が重解をもつ場合に限る. $f(x)-x=0$ は $D<0$, $D=0$, $D>0$ の場合にそれぞれ 0, 1, 2 個の相異なる実数解をもち, $D'=a^2(D-4)$ だから, $g(x)=0$ は $D<4$, $D=4$, $D>4$ の場合にそれぞれ 0, 1, 2 個の相異なる実数解をもつ. $D=4$ の場合の $g(x)=0$ の重解は $f(x)-x=0$ の解でもあることに注意すれば, $(f\circ f)(x)-x=0$ の相異なる実数解の個数は, $D<0$ ならば 0 個, $D=0$ ならば 1 個, $0<D\leqq 4$ ならば 2 個, $D>4$ ならば 4 個である.

(6) $(f\circ f)'(x)=4a^3x^3+6a^2bx^2+a(b^2+2ac+b)x+b(2ac+b)$ だから $(f\circ f)'(x)$ を $g(x)$ で割れば $(f\circ f)'(x)=(4ax+2b-4)g(x)-b^2+2b+4ac+4=(4ax+2b-4)g(x)-D+5$ が得られるため, $(f\circ f)'(\alpha)=(f\circ f)'(\beta)=-D+5$ である.

(7) $(f\circ f)''(x)=12a^3x^2+12a^2bx+a(b^2+2ac+b)=12a^3\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+a(-2b^2+2ac+b)$ だから $-2b^2+2ac+b\geqq 0$ ならば $(f\circ f)'$ は単調増加または単調減少である. この場合, $(f\circ f)'$ の値が 0 になるのは 1 回だけなので, $f\circ f$ が相異なる 3 つの値で極値をとることはない. $-2b^2+2ac+b<0$ の場合, $(f\circ f)''(x)=0$ の 2 つの解を $\lambda$, $\mu$ とすれば $\lambda+\mu=-\dfrac{b}{a}$, $\lambda\mu=\dfrac{b^2+2ac+b}{12a^2}$ である. $(f\circ f)'(x)=(f\circ f)''(x)\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{b}{6a}\right)-\dfrac{D-1}{3}(2ax+b)$ だから $(f\circ f)'(\lambda)(f\circ f)'(\mu)=\dfrac{(D-1)^2}{9}(2a\lambda+b)(2a\mu+b)=\dfrac{(D-1)^2}{27}(-2b^2+2ac+b)$ が得られる. $(f\circ f)'(\lambda)$, $(f\circ f)'(\mu)$ の一方が 3 次関数 $(f\circ f)'$ の極大値で他方が極小値だから $(f\circ f)'(x)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつためには, これらが異符号であることが必要十分である. また, この場合 $(f\circ f)'(x)=0$ のそれぞれの解の前後で $(f\circ f)'$ の符号が変わるため, $f\circ f$ は相異なる 3 つの値で極値をとる. 従って求める条件は $D\neq 1$ かつ $-2b^2+2ac+b<0$ である. ここで, $-2b^2+2ac+b=-\dfrac{1}{2}(D+3b^2-1)$ だから, この条件は $D$ と $b$ を用いて「$1-3b^2<D<1$ または $D>1$」と表される.

3. (1) $(\tau_b\circ\mu_a)(x)=\tau_b(\mu_a(x))=\tau_b(ax)=ax+b$, $(\mu_a\circ\tau_b)(x)=\mu_a(\tau_b(x))=\mu_a(x+b)=a(x+b)$.

(2) 上の結果から, 任意の実数 $x$ に対して $(\mu_a\circ\tau_b)(x)=a(x+b)=ax+ab$, $(\tau_{ab}\circ\mu_a)(x)=ax+ab$ だから $(\mu_a\circ\tau_b)(x)=(\tau_{ab}\circ\mu_a)(x)$ が成り立つ. 従って $\mu_a\circ\tau_b=\tau_{ab}\circ\mu_a$ が成り立つ.

(3) $(\sigma\circ\tau_b)(x)=\sigma(\tau_b(x))=\sigma(x+b)=(x+b)^2$, $(\mu_a\circ(\sigma\circ\tau_b))(x)=\mu_a((\sigma\circ\tau_b)(x))=\mu_a((x+b)^2)=a(x+b)^2$, $(\tau_c\circ(\mu_a\circ(\sigma\circ\tau_b)))(x)=\tau_c(\mu_a\circ(\sigma\circ\tau_b))(x))=\tau_c(a(x+b)^2)=a(x+b)^2+c$.

(4) $f(x)=\alpha\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ だから (3) の結果から $a=\alpha$, $b=\dfrac{\beta}{2\alpha}$, $c=\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ である.

4. 平面の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対し, $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ となるベクトル $\boldsymbol{x}$ があれば, $A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{y}$ だから $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p}$ であり, $A$ は逆行列をもつため, $\boldsymbol{x}=A^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p})$ である. 逆に $\boldsymbol{x}=A^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p})$ ならば $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}=AA^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p})+\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p})+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{y}$ だから $f$ は全射である. $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}')$ ならば $A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}=A\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{p}$ より $A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}'$ であり, この両辺に左から $A$ の逆行列をかければ $vx=\boldsymbol{x}'$ が得られるため, $f$ は単射でもある. 故に $f$ は全単射である.

上でみたように, 平面の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対し, $\boldsymbol{x}=A^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p})$ によってベクトル $\boldsymbol{x}$ を定めれば $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ となるため, $f$ の逆写像によるベクトル $\boldsymbol{y}$ の像は $A^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p})$ である.

5. (1) $r=0$ の場合は $Y=\boldsymbol{R}$ だから, $Z=X$ である. $r\neq 0$ の場合を考える. $ar+cs=0$ ならば $a=-\dfrac{cs}{r}$ だから $ad-bc=-\dfrac{c(br+ds)}{r}$ であり, 仮定 $ad-bc\neq 0$ から $br+ds\neq 0$ である. 一方 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=-\dfrac{s}{r}$ ならば

$(ar+cs)x = -(br+ds)$ だから, $ar+cs=0$ ならば $\dfrac{ax+b}{cx+d} = -\dfrac{s}{r}$ を満たす $x \in X$ は存在しない. 従って $r \neq 0$ かつ $ar+cs=0$ の場合も $Z = X$ である. $ar+cs \neq 0$ ならば $\dfrac{ax+b}{cx+d} = -\dfrac{s}{r}$ を満たす $x$ は $-\dfrac{br+ds}{ar+cs}$ のみで, $r \neq 0$ かつ $ad-bc \neq 0$ ならば $-\dfrac{br+ds}{ar+cs} \neq -\dfrac{d}{c}$ だから, $Z = \left\{x \in \boldsymbol{R} \,\middle|\, x \neq -\frac{br+ds}{ar+cs}, -\frac{d}{c}\right\} = X - \left\{-\frac{br+ds}{ar+cs}\right\}$ である. 以上の結果をまとめると, $Z = \begin{cases} X & r(ar+cs)=0 \\ X - \left\{-\frac{br+ds}{ar+cs}\right\} & r(ar+cs) \neq 0 \end{cases}$ となる.

(2) $(g \circ \tilde{f})(x) = g(\tilde{f}(x)) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right) = \dfrac{p\frac{ax+b}{cx+d}+q}{r\frac{ax+b}{cx+d}+s} = \dfrac{(ap+cq)x+bp+dq}{(ar+cs)x+br+ds}$.

6. $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とおくと, $f$ は全射だから, $f(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{p}$, $f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{p}$ を満たす平面のベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ がある. $f(\boldsymbol{x}_1) = A\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{p}$, $f(\boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{p}$ だから $f(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{p}$, $f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{p}$ より $A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_2$ が成り立つ. ここで, $A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$ とおくと $A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1$ より $\begin{cases} ax+by=1 & \cdots(i) \\ cx+dy=0 & \cdots(ii) \end{cases}$ が成り立ち, $A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_2$ より $\begin{cases} az+bw=0 & \cdots(iii) \\ cz+dw=1 & \cdots(iv) \end{cases}$ が成り立つ. $(i)$ の両辺を $d$ 倍したものから $(ii)$ の両辺を $b$ 倍したものを引けば $(ad-bc)x = d$ が得られ, $(ii)$ の両辺を $a$ 倍したものから $(i)$ の両辺を $c$ 倍したものを引けば $(ad-bc)y = -c$ が得られる. 同様に $(iii)$ の両辺を $d$ 倍したものから $(iv)$ の両辺を $b$ 倍したものを引けば $(ad-bc)z = -b$ が得られ, $(iv)$ の両辺を $a$ 倍したものから $(iii)$ の両辺を $c$ 倍したものを引けば $(ad-bc)w = a$ が得られる. 従って, もし $ad-bc=0$ ならば $a=b=c=d=0$ となり $A$ は零行列になる. このとき $f$ は平面のすべてのベクトルを $\boldsymbol{p}$ に写すため, $f$ は全射であるという仮定に反する. 故に $ad-bc \neq 0$ だから $A$ は逆行列をもつ.

# 線形数学 I 演習問題　第 2 回　平面ベクトル・空間ベクトル

1. (1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を零でない平面のベクトルとする. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{a}$ の実数倍であるためには $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ を零でない空間のベクトルとする. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{a}$ の実数倍であるためには $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_3 - a_3b_1 = a_2b_3 - a_2b_1 = 0$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

2. (1) $y = ax + b$ によって表される平面上の直線を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ の形にパラメータ表示せよ.

(2) $x = c$ によって表される平面上の直線を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ の形にパラメータ表示せよ.

(3) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ でパラメータ表示される平面上の直線の方程式を求めよ.

3. 次の 2 点 A, B を通る直線のパラメータ表示と方程式を求めよ.

(1) $\mathrm{A}(2,1,5)$, $\mathrm{B}(-1,3,4)$　(2) $\mathrm{A}(1,1,3)$, $\mathrm{B}(2,1,-1)$　(3) $\mathrm{A}(1,1,5)$, $\mathrm{B}(1,7,5)$

4. 次の 3 点 A, B, C を通る平面のパラメータ表示を求めよ.

(1) $\mathrm{A}(3,1,1)$, $\mathrm{B}(2,0,-1)$, $\mathrm{C}(4,1,2)$　(2) $\mathrm{A}(1,-1,3)$, $\mathrm{B}(2,-1,4)$, $\mathrm{C}(3,-1,-1)$

(3) $\mathrm{A}(3,4,5)$, $\mathrm{B}(-1,4,2)$, $\mathrm{C}(2,0,3)$

5. 次の各方程式で与えられた平面のパラメータ表示を求めよ.

(1) $x + 2y - z = 3$　(2) $3x - z = 1$　(3) $x = 2$　(4) $x - y - 3z = 0$

6. 次のパラメータ表示で与えられた平面の方程式を求めよ.

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$　(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$　(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. 次の各 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を通る平面の方程式を求めよ.

(1) $\mathrm{A}(2,1,-2)$,  $\mathrm{B}(1,3,-9)$,  $\mathrm{C}(4,2,2)$　(2) $\mathrm{A}(2,3,4)$,  $\mathrm{B}(0,9,12)$,  $\mathrm{C}(5,4,6)$

(3) $\mathrm{A}(2,1,5)$,  $\mathrm{B}(-1,2,-4)$,  $\mathrm{C}(0,-1,-1)$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $T_A$ によって, 直線 $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = z - 5$ が写される直線の方程式を求めよ.

(2) 平面 $x + 3y + 3z + 1 = 0$ に平行な 2 つのベクトルで, 互いに他方の実数倍でないものを求め, この平面をパラメータ表示せよ.

(3) $T_A$ によって, 平面 $x + 3y + 3z + 1 = 0$ が写される平面のパラメータ表示を求めよ.

(4) $T_A$ によって, 平面 $x + 3y + 3z + 1 = 0$ が写される平面の方程式を求めよ.

9. 空間の 2 本の直線 $l$, $m$ が $l : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = z - 5$, $m : x - 2 = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+1}{3}$ で与えられているとする.

(1) $l$ と $m$ は同一平面上にないことを示せ.

(2) $l$ と $m$ の両方に垂直に交わる直線の方程式を求めよ.

10. 空間の 2 本の直線 $l : \dfrac{x-a}{2} = y = \dfrac{z-1}{3}$, $m : \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-b}{-2} = \dfrac{z-2}{4}$ が, 原点を通る同一平面に含まれるように, 定数 $a, b$ の値を定めよ.

11. 空間において $x - y + 2z = 1$, $2x + y - z = -1$ によって与えられる平面を考える. このとき以下の問いに答えよ.
(1) 与えられた 2 つの平面の交線をパラメータ表示せよ.
(2) (1) で求めた交線を $l$ とするとき, $l$ と $xy$ 平面との交点を通り, $l$ に垂直な平面の方程式を求めよ.

12. $a$ を実数の定数とし, $A = \begin{pmatrix} 2a+3 & a+1 \\ -a-10 & -a-3 \end{pmatrix}$ とする. $T_A$ により動かない原点以外の点が存在するような $a$ の値を求めよ. さらに $T_A$ により動かない原点からの距離が 1 である点の座標を求めよ.

13. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ を零でないベクトルとし, 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} ac & bc \\ ad & bd \end{pmatrix}$ を考える.
(1) $T_A$ によって平面全体は原点を通る直線に写されることを示し, この直線の方向ベクトルを求めよ.
(2) $T_A$ によって原点に写される点全体からなる集合は原点を通る直線であることを示し, この直線の方向ベクトルを求めよ.

14. (発展問題) $a, b$ は実数の定数とし, 少なくとも一方は 0 でないとする. $A = \begin{pmatrix} 1-ab & a^2 \\ -b^2 & 1+ab \end{pmatrix}$ とおくとき, $T_A$ により, それ自身に写される直線をすべて求めよ.

# 第 2 回の演習問題の解答

1. (1) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ が成り立つとする．$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ だから $a_1$ か $a_2$ の一方は 0 でない．$a_1 \neq 0$ の場合, $t = \dfrac{b_1}{a_1}$ とおくと $b_1 = ta_1$ であり, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ より, $b_2 = ta_2$ だから $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a}$ が成り立つ．同様に $a_2 \neq 0$ の場合, $t = \dfrac{b_2}{a_2}$ とおけば $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a}$ が成り立つことがわかる．故に $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ の実数倍である．逆に $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a}$ ならば $b_1 = ta_1$ かつ $b_2 = ta_2$ だから $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1ta_2 - a_2ta_1 = 0$ が成り立つ．

(2) $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_3 - a_3b_1 = a_2b_3 - a_2b_1 = 0$ が成り立つとする．$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ だから $a_1, a_2, a_3$ のいずれかは 0 でない．$a_1 \neq 0$ の場合, $t = \dfrac{b_1}{a_1}$ とおくと $b_1 = ta_1$ であり, $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_3 - a_3b_1 = 0$ より, $b_2 = ta_2$ かつ $b_3 = ta_3$ だから $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a}$ が成り立つ．同様に $a_2 \neq 0$ の場合は $t = \dfrac{b_2}{a_2}$ とおき, $a_3 \neq 0$ の場合は $t = \dfrac{b_3}{a_3}$ とおけば $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a}$ が成り立つことがわかる．故に $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ の実数倍である．逆に $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a}$ ならば $j = 1,2,3$ に対して $b_j = ta_j$ だから $a_ib_j - a_jb_i = a_ita_j - a_jta_i = 0$ $(1 \leqq i < j \leqq 3)$ が成り立つ．

2. (1) $x = t$ とおけば $y = at + b$ だから $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ at+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ である．

(2) $y = t$ とおけば $x = c$ だから $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} x = p + ut \cdots (i) \\ y = q + vt \cdots (ii) \end{cases}$ だから $(i)$ の両辺を $v$ 倍したものから $(ii)$ の両辺を $u$ 倍したものを引けば, $vx - uy = pv - qu$ が得られるため, 求める直線の方程式は $vx - uy - pv + qu = 0$ である．

3. (1) 方向ベクトルは $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 方程式は $-\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = -z+5$.

(2) 方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, 方程式は $x - 1 = -\dfrac{z-3}{4}$, $y = 1$.

(3) 方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 方程式は $x = 1$, $z = 3$.

4. (1) 平面に平行なベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) 平面に平行なベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(3) 平面に平行なベクトルは $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5. (1) 与えられた平面は $(3,0,0)$ を通り, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は法線ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直だから, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) 与えられた平面は $(0,0,-1)$ を通り, $\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ は法線ベクトル $\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ に垂直だから, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

(3) 与えられた平面は $(2,0,0)$ を通り, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ は法線ベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ に垂直だから, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(4) 与えられた平面は $(0,0,0)$ を通り, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ は法線ベクトル $\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ に垂直だから, $\boldsymbol{x}=s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

6. (1) $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ の両方に垂直で, 点 $(1,0,1)$ を通るため, $-2x+y+z=-1$.

(2) $\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ の両方に垂直で, 点 $(1,2,3)$ を通るため, $x+y-4z=-9$.

(3) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ の両方に垂直で, 点 $(1,2,3)$ を通るため, $z=3$.

7. (1) $\begin{pmatrix}-1\\2\\-7\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$ は平面に平行, $\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ はこれらに垂直で, 与えられた平面は A を通るため, $3x-2y-z=6$.

(2) $\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ は平面に平行, $\begin{pmatrix}1\\7\\-5\end{pmatrix}$ はこれらに垂直で, 与えられた平面は A を通るため, $x+7y-5z=3$.

(3) $\begin{pmatrix}-3\\1\\-9\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-6\end{pmatrix}$ は平面に平行, $\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ はこれらに垂直で, 与えられた平面は A を通るため, $3x-z=1$.

8. (1) 与えられた直線の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ であり, 点 $(3,1,5)$ を通るため, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ とパラメータ表示される. $A\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\21\\37\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ だから, 与えられた直線は $T_A$ によって $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\21\\37\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ でパラメータ表示される直線に写る. この直線の方程式は $x-10=\dfrac{y-21}{2}=\dfrac{z-37}{4}$ である.

(2) 与えられた平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ で, このベクトルに垂直なベクトルが与えられた平面に平行なベクトルである. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ に垂直であるためには $x+3y+3z=0$ であることが必要十分だから, 例えば $\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ と

$\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ に垂直で, 互いに他方の実数倍ではない. 与えられた平面は $(-1,0,0)$ を通り, $\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ に平行だから $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ とパラメータ表示される.

(3) $A\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ だから, (2) の結果から 与えられた平面は $T_A$ によって $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ でパラメータ表示される平面に写される.

(4) 与えられた平面が $T_A$ によって写された平面を $H$ とする. $H$ の法線ベクトルを $\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$ とおけば, (3) の結果から, このベクトルは $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ に垂直だから, $u$, $v$, $w$ は連立方程式 $\begin{cases}u-w=0\cdots(i)\\2u-3w=0\cdots(ii)\end{cases}$ の解である. $(i)$, $(ii)$ より $u=w=0$ で $w$ は任意の実数だから, 例えば $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ は $H$ の法線ベクトルである. (3) の結果から $H$ は点 $(-1,-1,-1)$ を通るため, $H$ の方程式は $y+1=0$ である.

9. (1) $l$, $m$ の方向ベクトルはそれぞれ, $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ で与えられる. これらのベクトルは平行ではなく, $l$ は $\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$ を通るため, もし, $l$, $m$ を両方とも含む平面 $H$ が存在すれば $H$ は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ によってパラメータ表示される平面である. $m$ は $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ を通り, $H$ に含まれるため, $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ を満たす実数 $s$, $t$ が存在する. この等式の各成分を比較すれば, $\begin{cases}2s+t=-1\cdots(i)\\-s+2t=-1\cdots(ii)\\s+3t=-6\cdots(iii)\end{cases}$ が得られる. $(i)$, $(ii)$ を $s$, $t$ についての連立方程式とみれば, $s=-\dfrac{1}{5}$, $t=-\dfrac{3}{5}$ であるが, このとき $s+3t=-2$ となって $(iii)$ は成り立たない. 従って $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ を満たす実数 $s$, $t$ は存在しないことになって矛盾が生じる. 故に $l$ と $m$ は同一平面上にはない.

(2) $l$, $m$ は, それぞれ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ によってパラメータ表示される直線

だから, 求める直線と $l$, $m$ との交点を, それぞれ A, B とすると, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 2s+3 \\ -s+1 \\ s+5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} t+2 \\ 2t-1 \\ 3t-1 \end{pmatrix}$ と表せる. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} t-2s-1 \\ 2t+s-2 \\ 3t-s-6 \end{pmatrix}$ は直線 $l$, $m$ の方向ベクトルと垂直になるので, それらとの内積はともに 0 となる. $l$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の内積は $3t-6s-6$ であり, $m$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の内積は $14t-3s-23$ だから, 連立方程式 $\begin{cases} 3t-6s-6=0 \\ 14t-3s-23=0 \end{cases}$ が得られる. この解は $s=-\dfrac{1}{5}$, $t=\dfrac{8}{5}$ だから, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} \frac{18}{5} \\ \frac{11}{5} \\ \frac{19}{5} \end{pmatrix}$ である. 従って $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり, 求める直線は A を通って $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルとするため, 求める方程式は $x-\dfrac{13}{5} = y-\dfrac{6}{5} = -z+\dfrac{24}{5}$ である.

10. $l$, $m$ を含み, 原点を通る平面を $H$ とすると, $H$ の法線ベクトルは $l$ の方向ベクトルと $m$ の方向ベクトルの両方に垂直である. $l$, $m$ の方向ベクトルはそれぞれ, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ で与えられるため, $H$ の法線ベクトルを $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ とすれば $\begin{cases} 2u+v+3w=0 & \cdots(i) \\ 5u-2v+4w=0 & \cdots(ii) \end{cases}$ が成り立つ. $(i)$, $(ii)$ から $v$ を消去すれば, $9u+10w=0$ だから, $u=10$, $w=-9$ によって $u$, $w$ を定め, $(i)$ から $v=-2u-3w=7$ で $v$ を定めれば $(i)$ と $(ii)$ は成り立つため, $H$ は $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする, 原点を通る平面である. 従って $H$ の方程式は $10x+7y-9z=0$ で与えられる. $l$, $m$ はそれぞれ点 $(a,0,1)$, $(1,b,2)$ を通るため, これらの点は $H$ の上にある. 故に $10a-9=0$, $10+7b-18=0$ が成り立つため, $a=\dfrac{9}{10}$, $b=\dfrac{8}{7}$ である.

11. (1) 与えられた平面の交線は, 連立方程式 $\begin{cases} x-y+2z=1 & \cdots(i) \\ 2x+y-z=-1 & \cdots(ii) \end{cases}$ を満たすベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を位置ベクトルとする点全体からなる. $(i)$, $(ii)$ から $z$ を消去すれば $5x+y=-1$ が得られ, $(i)$, $(ii)$ から $y$ を消去すれば $3x+z=0$ が得られる. 従って, $x=t$ とおけば, $y=-5t-1$, $z=-3t$ だから与えられた平面の交線は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -5t-1 \\ -3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ によってパラメータ表示される.

(2) $l$ と $xy$ 平面との交点は $l$ の点で, $z$ 座標が 0 になる点である. (1) で求めた $l$ のパラメータ表示では $-3t=0$, すなわち $t=0$ のときの $l$ の点 $(0,-1,0)$ が $l$ と $xy$ 平面との交点である. (1) の結果より $l$ の方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ で, 求める平面はこのベクトルを法線ベクトルとし, $(0,-1,0)$ を含むため, その方程式は $x-5(y+1)-3z=0$, 従って $x-5y-3z-5=0$ である.

12. $T_A$ により動かない原点以外の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすれば $A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ より, $A$ が 1 を固有値にもつことが必

要十分である．$A$ の固有値は $x$ についての 2 次方程式 $x^2-ax-a^2+2a+1=0$ の実数解であるから, $A$ が 1 を固有値にもつための条件は $2+a-a^2=0$, すなわち $a=2$ または $a=-1$ である．$a=2$ の場合, $A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ を満たす長さが 1 のベクトルは $\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ であるから, 求める点の座標は $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ および $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ である．$a=-1$ の場合, $A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ を満たす長さが 1 のベクトルは $\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ であるから, 求める点の座標は $\left(\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ および $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ である．

13. (1) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ とおく．任意の $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2$ に対し, $T_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}c(ax+by)\\d(ax+by)\end{pmatrix}=(ax+by)\boldsymbol{b}$ だから, $T_A(\boldsymbol{x})$ は原点を通って方向ベクトルが $\boldsymbol{b}$ の直線上にある．故に平面全体は $T_A$ によって $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする, 原点を通る直線に写される．

(2) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ならば, (1) より $T_A(\boldsymbol{x})=(ax+by)\boldsymbol{b}$ であり, $\boldsymbol{b}$ は零ベクトルでなないので, $\boldsymbol{x}$ が $T_A$ によって原点に写されるためには, $ax+by=0$ であることが必要十分である．さらに, $ax+by=0$ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ が垂直であることを意味するため, $ax+by=0$ が成り立つことは $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}$ と垂直なベクトル (例えば $\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$) に平行であることと同値である．従って $T_A$ によって原点に写される点全体からなる集合は, $\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする原点を通る直線である．

14. $A$ の固有値は $t^2-2t+1=0$ の解である 1 のみである．1 に対する $A$ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とすれば, $\begin{pmatrix}1-ab & a^2\\-b^2 & 1+ab\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ だから, $x$, $y$ は連立方程式 $\begin{cases}a(-bx+ay)=0\cdots(i)\\b(-bx+ay)=0\cdots(ii)\end{cases}$ の解である．$a$, $b$ の一方は 0 でないため, この連立方程式は, 1 つの方程式 $-bx+ay=0$ と同値である．とくに, $x=a$, $y=b$ はこの方程式の解だから, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ は 1 に対する $A$ に対する固有ベクトルである．故に, $T_A$ によってそれ自身に写される直線の方向ベクトルは $\boldsymbol{v}$ である．$l$ を, $\boldsymbol{v}$ を方向ベクトルとする任意の直線とすれば, $l$ は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}$ という形にパラメータ表示される．$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は直交するため, 平面の任意のベクトルは $x\boldsymbol{v}+y\boldsymbol{w}$ の形に表される．そこで $\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{v}+\mu\boldsymbol{w}$ と表せば, $A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$, $A\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}a(a^2+b^2)-b\\b(a^2+b^2)+a\end{pmatrix}=(a^2+b^2)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ より $A\boldsymbol{p}=A(\lambda\boldsymbol{v}+\mu\boldsymbol{w})=\lambda A\boldsymbol{v}+\mu A\boldsymbol{w}=\lambda\boldsymbol{v}+\mu(a^2+b^2)\boldsymbol{v}+\mu\boldsymbol{w}=\boldsymbol{p}+\mu(a^2+b^2)\boldsymbol{v}$ である．従って $l$ は $T_A$ によって $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}+\left(t+\mu(a^2+b^2)\right)\boldsymbol{v}$ とパラメータ表示される直線に写される．この直線の方向ベクトルも $\boldsymbol{v}$ で, $\boldsymbol{p}$ を位置ベクトルとする点を通るため, この直線は $l$ と一致する．故に $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする任意の直線は $T_A$ によってそれ自身に写される．

# 線形数学 I 演習問題　第 3 回　行列の積

1. 行列の積について, 次の $\boxed{\phantom{ア}}$ にあてはまる行列を以下の行列の中から選び, その記号を答えよ.

(1) $\boxed{ア} \times \boxed{イ}$ はスカラー ($1 \times 1$ 行列) になる.　(2) $\boxed{ウ} \times \boxed{エ}$ は $1 \times 2$ 行列になる.

(3) $\boxed{オ} \times \boxed{カ}$ は 2 次元数ベクトル ($2 \times 1$ 行列) になる.　(4) $\boxed{キ} \times \boxed{ク}$ は $1 \times 3$ 行列になる.

(5) $\boxed{ケ} \times \boxed{コ}$ は 4 次元数ベクトル ($4 \times 1$ 行列) になる.　(6) $\boxed{サ} \times \boxed{シ}$ は $2 \times 3$ 行列になる.

(7) $\boxed{ス} \times \boxed{セ}$ は逆行列をもつ 2 次正方行列である.　(8) $\boxed{ソ} \times \boxed{タ}$ は $4 \times 3$ 行列になる.

(9) $\boxed{チ} \times \boxed{ツ}$ は逆行列をもたない 2 次正方行列である.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 以下の行列の積を計算せよ. ただし $a$ は定数とする.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

3. (1) 3 次正方行列 $A$ の逆行列が $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ で与えられるとき, $AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 $X$ を求めよ.

(2) 3 次正方行列 $B$ の逆行列が $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ で与えられるとき, $BY = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 $Y$ を求めよ.

4. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $J^n$ を求めよ.　(2) $(aE_3 + J)^n$ を求めよ.　(3) $(J + a\,{}^tJ^2)^{3n}$ を求めよ.　(4) $(J^2 + a\,{}^tJ)^{3n}$ を求めよ.

5. (1) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5$ を $\boldsymbol{R}^5$ の基本ベクトルとし, $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_4 & \boldsymbol{e}_5 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_1 \end{pmatrix}$ とおくとき, $A^5$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ を $\boldsymbol{R}^4$ の基本ベクトルとし, $4 \times 5$ 行列 $A$ を $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_4 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}$ で定めるとき, $(A\,{}^tA)^5$ を求めよ.

6. $A$, $B$ を 3 次交代行列とする. $A$ が零行列でないとき, $AB = BA$ が成り立つためには $B$ が $A$ の実数倍であることが必要十分であることを示せ.

7. $\alpha$ は 0 でない実数とし, $A$ は $A^2 = 2\alpha A - \alpha^2 E_n$ を満たす $n$ 次正方行列とする.

(1) $A^k = a_k A + b_k E_n$ の形に表せることを示し, $a_{k+1}$, $b_{k+1}$ を $a_k$, $b_k$ の式で表せ.

(2) 数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ の一般項を求めることにより, $A^k$ を $A$, $E_n$, $k$, $\alpha$ を用いて表せ.
(ヒント. 数列 $\{a_{k+1}-\alpha a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は等比数列になり, 数列 $\left\{\dfrac{a_k}{\alpha^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ は等差数列になることを示せ.)

8. $\alpha$ を実数の定数とする. $P=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ とおくとき以下の問いに答えよ.

(1) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ に対し, $AP=xA+yP+zE_2$ を満たすような 実数 $x$, $y$, $z$ が存在するためには $c=0$ であることが必要十分であることを示せ.

(2) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}p & q\\ 0 & r\end{pmatrix}$ とする. $a\neq d$ の場合, $Q=uA+vP+wE_2$ を満たす $u$, $v$, $w$ を, $\alpha$, $a$, $b$, $d$, $p$, $q$, $r$ を用いて表せ.

9. $X$ を単位行列のスカラー倍ではない 2 次正方行列とする. 2 次正方行列 $A$ が $AX=XA$ を満たせば, $A=\alpha E_2+\beta X$ を満たすスカラー $\alpha$, $\beta$ が存在することを示せ.

10. $N_n$ を, 第 1 列が零ベクトル, $2\leqq j\leqq n$ に対し, 第 $j$ 列が $n$ 次元基本ベクトル $\boldsymbol{e}_{j-1}$ である $n$ 次正方行列とし, $X=\left(x_{ij}\right)$ を $m\times n$ 行列とする.

(1) $N_n^l$ を求めよ.

(2) $X$ が $N_mX=O$ を満たすための条件を求めよ.

(3) $X$ が $XN_n=O$ を満たすための条件を求めよ.

(4) $X$ が $N_mX=XN_n$ を満たすための条件を求めよ.

(5) $a\neq b$ のとき, $(aE_m+N_m)X=X(bE_n+N_n)$ ならば $X$ は零行列であることを示せ.

11. $n_1, n_2, \dots, n_k$ を正の整数, $a_1, a_2, \dots, a_k$ を相異なる実数とし, $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$ とおく.

$$A=\begin{pmatrix}a_1E_{n_1} & & & \text{\Large 0}\\ & a_2E_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & a_kE_{n_k}\end{pmatrix}$$

とおくとき $n$ 次正方行列 $X$ が $AX=XA$ を満たせば, $X$ は次のような形の行列であることを示せ.

$$X=\begin{pmatrix}X_1 & & & \text{\Large 0}\\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & X_k\end{pmatrix}\quad (\text{ただし, } X_i \text{ は } n_i \text{ 次正方行列})$$

12. $I$, $J$, $K$ を次で与えられる 4 次正方行列とする.

$$I=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(1) $I^2=J^2=K^2=-E_4$, $IJ=-JI=K$, $JK=-KJ=I$, $KI=-IK=J$ が成り立つことを示せ.

(2) $A=aE_4+bI+cJ+dK$ $(a,b,c,d\in\boldsymbol{R})$ に対し, $\overline{A}=aE_4-bI-cJ-dK$, $\|A\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ とおくと, $A\overline{A}=\overline{A}A=\|A\|^2E_4$ が成り立つことを示せ.

(3) $\boldsymbol{H}$ を $aE_4+bI+cJ+dK$ $(a,b,c,d\in\boldsymbol{R})$ と表される 4 次正方行列全体の集合とする. このとき $A,B\in\boldsymbol{H}$ ならば $AB\in\boldsymbol{H}$ であることを示し, $A\in\boldsymbol{H}$ が零行列でなければ $A$ は正則行列で, $A^{-1}\in\boldsymbol{H}$ であることを示せ.

(4) $X^2+E_4=O$ を満たす $X\in\boldsymbol{H}$ をすべて求めよ.

## 第 3 回の演習問題の解答

1. (1) ア : $G$, イ : $F$　(2) ウ : $I$, エ : $E$　(3) オ : $H$, カ : $B$　(4) キ : $G$, ク : $H$　(5) ケ : $E$, コ : $F$
(6) サ : $H$, シ : $C$　(7) ス : $H$, セ : $A$　(8) ソ : $E$, タ : $H$　(9) チ : $F$, ツ : $G$

2. (1) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&3&-2\\4&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&4\\-1&4&0\\5&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12&6&0\\-1&-3&14\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&22&27\\22&29&36\\27&36&45\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\a&0&0&0\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\a&0&0&0\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\a&0&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\a&0&0&0\\0&a&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{pmatrix}=aE_4$

(5) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&3\\3&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&2\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&-4\\2&0&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&18\\1&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&-4\\2&0&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&4&-7\\35&-2&-39&22\\31&2&-27&11\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&3\\3&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&2\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&3&-1\\1&-2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&18\\1&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&3&-1\\1&-2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&6&-1\\18&-38&-3&19\\15&-28&3&14\end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix}1&-1&4\\3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\1&3&-1\\-1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\0&2\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&7&2\\1&9&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\0&2\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&37\\-1&23\end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix}-1&-1&3\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\1&2&-1\\-1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-3\\0&2\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-10&0\\1&6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-3\\0&2\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-8\\2&13\end{pmatrix}$

3. (1) $AX=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\\1&-1\end{pmatrix}$ の両辺に左から $A^{-1}$ をかければ, $X=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&1&-2\\-2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&-1\\0&-2\end{pmatrix}$.

(2) $BY=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-1\\1&1\end{pmatrix}$ の両辺に左から $B^{-1}$ をかければ, $Y=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&-2\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\-2&-5\\3&-6\end{pmatrix}$.

4. (1) $J^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $J^3=O$ だから $n\geqq 3$ ならば $J^n=O$ である.

(2) $aE_3$ と $J$ の積は交換可能 ($(aE_3)J=J(aE_3)=aJ$) だから二項定理 $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_kx^{n-k}y^k$ の $x$, $y$ に, それぞれ $aE_3$, $J$ を代入した等式 $(aE_3+J)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(aE_3)^{n-k}J^k$ が成り立つ. $k\geqq 3$ ならば $J^k=O$ であること

に注意すれば, $(aE_3+J)^n = a^nE_3 + na^{n-1}J + \dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}J^2 = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$.

(3) (1) の結果より ${}^tJ^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $(J+a{}^tJ^2)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aE_3$ である. 従って $(J+a{}^tJ^2)^{3n} = (aE_3)^n = a^nE_3$.

(4) (1) の結果より $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $(J^2+a{}^tJ)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = a^2E_3$ である. 従って $(J^2+a{}^tJ)^{3n} = (a^2E_3)^n = a^{2n}E_3$.

5. (1) $A$ が表す 1 次変換 $T_A : \boldsymbol{R}^5 \to \boldsymbol{R}^5$ を考えれば, $j=1,2,3,4,5$ に対し, $T_A(\boldsymbol{e}_j) = A\boldsymbol{e}_j = (A$ の第 $j$ 列$)$ だから $T_A(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_2$, $T_A(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_4$, $T_A(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_5$, $T_A(\boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{e}_3$, $T_A(\boldsymbol{e}_5) = \boldsymbol{e}_1$ である. 従って, 各 $\boldsymbol{e}_j$ は

$$\boldsymbol{e}_1 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_2 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_4 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_3 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_5 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_4 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_3 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_5 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_1 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_5 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_1 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_2 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_4 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_3$$
$$\boldsymbol{e}_4 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_3 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_5 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_1 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_2 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_4 \quad \boldsymbol{e}_5 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_1 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_2 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_4 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_3 \overset{T_A}{\mapsto} \boldsymbol{e}_5$$

と写されるため, $\bigl(A^5$の第 $j$ 列$\bigr) = A^5\boldsymbol{e}_j = T_{A^5}(\boldsymbol{e}_j) = T_A\circ T_A\circ T_A\circ T_A\circ T_A(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_j$ が $j=1,2,3,4,5$ に対して成り立つ. 従って $A^5 = E_5$ である.

(2) $\boldsymbol{R}^5$ の基本ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3, \boldsymbol{e}'_4, \boldsymbol{e}'_5$ で表せば, ${}^tA = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_3 & \boldsymbol{e}'_1+\boldsymbol{e}'_5 & \boldsymbol{e}'_4 & \boldsymbol{e}'_2 \end{pmatrix}$ だから $A{}^tA = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & 2\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_4 \end{pmatrix}$ である. 従って $A{}^tA\boldsymbol{e}_j = (A{}^tA$ の第 $j$ 列$) = \begin{cases} \boldsymbol{e}_j & j \neq 2 \\ 2\boldsymbol{e}_j & j = 2 \end{cases}$ だから, $\Bigl((A{}^tA)^5$ の第 $j$ 列$\Bigr) = (A{}^tA)^5\boldsymbol{e}_j = \begin{cases} \boldsymbol{e}_j & j \neq 2 \\ 2^5\boldsymbol{e}_j & j = 2 \end{cases}$ となるため, $(A{}^tA)^5 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & 32\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_4 \end{pmatrix}$ である.

6. $A = (a_{ij})$ が 3 次交代行列ならば $a_{ji} = -a_{ij}$ が任意の $i, j = 1,2,3$ について成り立つため, とくに $a_{ii} = -a_{ii}$ より $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ である. そこで $a_{32} = a$, $a_{13} = b$, $a_{21} = c$ とおくと $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ と表される. 同様に, 3 次交代行列 $B$ は $B = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$ と表される. このとき $AB = \begin{pmatrix} -bq-cr & bp & cp \\ aq & -ap-cr & cq \\ ar & br & -ap-bq \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -bq-cr & aq & ar \\ bp & -ap-cr & br \\ cp & cq & -ap-bq \end{pmatrix}$ だから成分を比較して $AB = BA$ が成り立つためには $bp-aq = ar-cp = cq-br = 0$ が成り立つことが必要十分である. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とおくと, 第 2 回の演習問題の 2 番の (2) と, 上のことから, $AB = BA$ が成り立つためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ の実数倍であることが必要十分である. 明らかに $B$ が $A$ の実数倍であることと, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ の実数倍であることは同値だから, $AB = BA$ が成り立つためには $B$ が $A$ の実数倍であることが必要十分である.

7. (1) まず $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ は明らか. また $A^2 = 2\alpha A - \alpha^2 E_n$ だから $a_2 = 2\alpha$, $b_2 = -\alpha^2$. $k$ による帰納法

で, $A^k=a_kA+b_kE_n$ を仮定すれば, この両辺に $A$ をかけて $A^{k+1}=a_kA^2+b_kA=a_k(2\alpha A-\alpha^2E_n)+b_kA=(2\alpha a_k+b_k)A-\alpha^2a_kE_n$ だから $a_{k+1}=2\alpha a_k+b_k$, $b_{k+1}=-\alpha^2a_k$ とおけば $A^{k+1}=a_{k+1}A+b_{k+1}E_3$ となって, $k+1$ の場合も主張は成立する.

(2) 上の結果から $a_{k+2}=2\alpha a_{k+1}+b_{k+1}=2\alpha a_{k+1}-\alpha^2a_k$. 従って, $a_{k+2}-\alpha a_{k+1}=\alpha(a_{k+1}-\alpha a_k)$ となるため, 数列 $\{a_{k+1}-\alpha a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は初項 $a_2-\alpha a_1=\alpha$, 公比 $\alpha$ の等比数列である. 故に $a_{k+1}-\alpha a_k=\alpha^k$ であり, この両辺を $\alpha^{k+1}$ で割ると, $\dfrac{a_{k+1}}{\alpha^{k+1}}-\dfrac{a_k}{\alpha^k}=\dfrac{1}{\alpha}$ だから, 数列 $\left\{\dfrac{a_k}{\alpha^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ は初項 $\dfrac{a_1}{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$, 公差 $\dfrac{1}{\alpha}$ の等差数列になる. 従って, $\dfrac{a_k}{\alpha^k}=\dfrac{k}{\alpha}$ だから $a_k=k\alpha^{k-1}$, $b_k=-\alpha^2a_{k-1}=(1-k)\alpha^k$. 以上から $A^k=k\alpha^{k-1}A+(1-k)\alpha^kE_n$.

8. (1) $AP=\begin{pmatrix}a\alpha & a+b\alpha\\ c\alpha & c+d\alpha\end{pmatrix}$, $xA+yP+zE_2=\begin{pmatrix}ax+\alpha y+z & bx+y\\ cx & dx+\alpha y+z\end{pmatrix}$ より $AP=xA+yP+zE_2$ ならば $a\alpha=ax+\alpha y+z$, $a+b\alpha=bx+y$, $c\alpha=cx$, $c+d\alpha=dx+\alpha y+z$ である. もし $c$ が $0$ でなければ, 3 番目の式から, $\alpha=x$ となり, 1 番目の式から $z=-\alpha y$, 4 番目の式から $c=\alpha y+z=0$ となって矛盾が生じる. 従って $c=0$ である.

$c=0$ の場合, $AP=\begin{pmatrix}a\alpha & a+b\alpha\\ 0 & d\alpha\end{pmatrix}$, $xA+yP+zE_2=\begin{pmatrix}ax+\alpha y+z & bx+y\\ 0 & dx+\alpha y+z\end{pmatrix}$ より $x=\alpha$, $y=a$, $z=-a\alpha$ と定めれば $AP=xA+yP+zE_2$ が成り立つ.

(2) $\begin{pmatrix}p & q\\ 0 & r\end{pmatrix}=uA+vP+wE_2$ とすると, $au+\alpha v+w=p$, $bu+v=q$, $du+\alpha v+w=r$ だから $u=\dfrac{p-r}{a-d}$, $v=\dfrac{q(a-d)-b(p-r)}{a-d}$, $w=\dfrac{ar-dp-q\alpha(a-d)+b\alpha(p-r)}{a-d}$.

9. $X=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ とする. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ に対し, $AX-XA=\begin{pmatrix}br-cq & aq+b(s-p)-dq\\ -ar+c(p-s)+dr & -br+cq\end{pmatrix}$ である. $q=r=0$ の場合, 仮定から $p\neq s$ だから, 上式から $AX=XA$ ならば $b=c=0$ である. このとき, $A=\dfrac{dp-as}{p-s}E_2+\dfrac{a-d}{p-s}X$ だから, $\alpha=\dfrac{dp-as}{p-s}$, $\beta=\dfrac{a-d}{p-s}$ と定めればよい. $q\neq 0$ の場合, 上式から $AX=XA$ ならば $c=\dfrac{br}{q}$, $d=a-\dfrac{b(p-s)}{q}$ が成り立つため, $A=\dfrac{1}{q}\begin{pmatrix}aq & bq\\ br & aq-bp+bs\end{pmatrix}=\dfrac{aq-bp}{q}E_2+\dfrac{b}{q}X$ である. 従って, $q\neq 0$ の場合は $\alpha=\dfrac{aq-bp}{q}$, $\beta=\dfrac{b}{q}$ と定めればよい. $r\neq 0$ の場合, $AX=XA$ ならば $b=\dfrac{cq}{r}$, $d=a-\dfrac{c(p-s)}{r}$ が成り立つため, $A=\dfrac{1}{r}\begin{pmatrix}ar & cq\\ cr & ar-cp+cs\end{pmatrix}=\dfrac{ar-cp}{r}E_2+\dfrac{c}{r}X$ である. 従って, $r\neq 0$ の場合は $\alpha=\dfrac{ar-cp}{r}$, $\beta=\dfrac{c}{r}$ と定めればよい.

10. (1) $N_n=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_{n-1}\end{pmatrix}$ だから $N_n\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}\mathbf{0} & j=1\\ \boldsymbol{e}_{j-1} & 2\leqq j\leqq n\end{cases}$ である. 従って $N_n^l\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}\mathbf{0} & 1\leqq j\leqq l\\ \boldsymbol{e}_{j-l} & l+1\leqq j\leqq n\end{cases}$ だから, $1\leqq l\leqq n-1$ ならば $N_n^l$ は第 1 行目から第 $l$ 行目までがすべて零ベクトルで, $l+1\leqq j\leqq n$ に対し, 第 $j$ 行目が $\boldsymbol{e}_j$ である行列であり, $l\geqq n$ ならば $N_n^l$ は零行列である.

(2) $N_mX$ の第 $i$ 行は, $i<m$ ならば $X$ の第 $i+1$ 行に等しく, 第 $m$ 行は零である. 従って $N_mX=O$ であるためには, $X$ の第 1 行以外の行がすべて零であることが必要十分である.

(3) $XN_n$ の第 $j$ 列は, $j>1$ ならば $X$ の第 $j-1$ 列に等しく, 第 1 列は零である. 従って $XN_n=O$ であるためには, $X$ の第 $n$ 列以外の列がすべて零であることが必要十分である.

(4) $N_mX-XN_n$ は以下で与えられるため, $N_mX=XN_n$ であるためには $2\leqq i\leqq m$ に対して $x_{i1}=0$, $1\leqq j\leqq n-1$ に対して $x_{mj}=0$ かつ $1\leqq i\leqq m-1$, $1\leqq j\leqq n-1$ に対して $x_{i+1\,j+1}=x_{ij}$ が成り立つことが必要

十分である.

$$N_mX - XN_n = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22}-x_{11} & \cdots & x_{2j}-x_{1j-1} & \cdots & x_{2n}-x_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i+1\,1} & x_{i+1\,2}-x_{i1} & \cdots & x_{i+1\,j}-x_{ij-1} & \cdots & x_{i+1\,n}-x_{in-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2}-x_{m-1\,1} & \cdots & x_{mj}-x_{m-1\,j-1} & \cdots & x_{mn}-x_{m-1\,n-1} \\ 0 & -x_{m1} & \cdots & -x_{mj-1} & \cdots & -x_{mn-1} \end{pmatrix}$$

$m \leqq n$ の場合, $j-i<n-m$ ならば $x_{ij}=0$ である. 実際 $i=m$ ならば $1 \leqq j \leqq n-1$ に対して $x_{mj}=0$ だから主張は成り立ち, $k<i \leqq m$ かつ $j-i<n-m$ ならば $x_{ij}=0$ が成り立つと仮定すれば, $j-k<n-m$ のとき, $k+1 \leqq m$ かつ $(j+1)-(k+1)=j-k<n-m$ だから $x_{kj}=x_{k+1\,j+1}=0$ である. $a_i=x_{m-i\,n}$ とおけば, $1 \leqq j \leqq m$ に対して $x_{1\,n-m+j}=x_{2\,n-m+j+1}=\cdots=x_{i\,n-m+i+j-1}=\cdots=x_{m-j+1\,n}=a_{j-1}$ であり, $N_m^l$ に対して (1) の結果を用いれば, 次の等式が得られる.

$$\begin{pmatrix} x_{1\,n-m+1} & x_{1\,n-m+2} & \cdots & x_{1\,n-m+j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{2\,n-m+1} & x_{2\,n-m+2} & \cdots & x_{2\,n-m+j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i\,n-m+1} & x_{i\,n-m+2} & \cdots & x_{i\,n-m+j} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{m\,n-m+1} & x_{m\,n-m+2} & \cdots & x_{m\,n-m+j} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{j-1} & \cdots & a_{m-1} \\ & a_0 & \cdots & a_{j-2} & \cdots & a_{m-2} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & \text{\huge 0} & & a_0 & \cdots & a_{m-i} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & a_0 \end{pmatrix} = \sum_{l=0}^{m-1} a_l N_m^l$$

故に, 求める条件は $X = \begin{pmatrix} O & \sum_{l=0}^{m-1} a_l N_m^l \end{pmatrix} = \sum_{l=0}^{m-1} a_l \begin{pmatrix} O & N_m^l \end{pmatrix}$ と表されることである.

$m \geqq n$ の場合, $i>j$ ならば $x_{ij}=0$ である. 実際 $j=1$ ならば $2 \leqq i \leqq m$ に対して $x_{i1}=0$ だから主張は成り立ち, $1 \leqq j<k$ かつ $j<i$ ならば $x_{ij}=0$ が成り立つと仮定すれば, $k<i$ のとき, $j \leqq k-1<i-1$ だから $x_{ik}=x_{i-1\,k-1}=0$ である. $b_j=x_{1\,j+1}$ とおけば, $1 \leqq j \leqq m$ に対して $b_{j-1}=x_{1j}=x_{2j+1}=\cdots=x_{i\,j+i-1}=\cdots=x_{n-j+1\,n}$ であり, $N_n^l$ に対して (1) の結果を用いれば, 次の等式が得られる.

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{j-1} & \cdots & b_{n-1} \\ & b_0 & \cdots & b_{j-2} & \cdots & b_{n-2} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & \text{\huge 0} & & b_0 & \cdots & b_{n-i} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & b_0 \end{pmatrix} = \sum_{l=0}^{n-1} b_l N_n^l$$

故に, 求める条件は $X = \begin{pmatrix} \sum_{l=0}^{n-1} b_l N_n^l \\ O \end{pmatrix} = \sum_{l=0}^{n-1} b_l \begin{pmatrix} N_n^l \\ O \end{pmatrix}$ と表されることである.

(5) 次の等式が成り立つため, $(aE_m+N_m)X = X(bE_n+N_n)$ ならば $(a-b)x_{i1}+x_{i+1\,1}=0$ $(i=1,2,\ldots,m-1)$, $(a-b)x_{m1}=0$, $(a-b)x_{ij}+x_{i+1\,j}-x_{ij-1}=0$ $(i=1,2,\ldots,m-1,\ j=2,3,\ldots,n)$, $(a-b)x_{mj}=x_{mj-1}$

$(j=2,3,\ldots,n)$ である.

$$(aE_m+N_m)X=\begin{pmatrix} ax_{11}+x_{21} & ax_{12}+x_{22} & \cdots & ax_{1j}+x_{2j} & \cdots & ax_{1n}+x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ax_{i1}+x_{i+1\,1} & ax_{i2}+x_{i+1\,2} & \cdots & ax_{ij}+x_{i+1\,j} & \cdots & ax_{in}+x_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ax_{m-1\,1}+x_{m1} & ax_{m-1\,2}+x_{m2} & \cdots & ax_{m-1\,j}+x_{mj} & \cdots & ax_{m-1\,n}+x_{mn} \\ ax_{m1} & ax_{m2} & \cdots & ax_{mj} & \cdots & ax_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X(bE_n+N_n)=\begin{pmatrix} bx_{11} & bx_{12}+x_{11} & \cdots & bx_{1j}+x_{1j-1} & \cdots & bx_{1n}+x_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ bx_{i1} & bx_{i1}+x_{i1} & \cdots & bx_{ij}+x_{ij-1} & \cdots & bx_{in}+x_{in-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ bx_{m-1\,1} & bx_{m-1\,2}+x_{m-1\,1} & \cdots & bx_{m-1\,j}+x_{m-1\,j-1} & \cdots & bx_{m-1\,n}+x_{m-1\,n-1} \\ bx_{m1} & bx_{m2}+x_{m1} & \cdots & bx_{mj}+x_{mj-1} & \cdots & bx_{mn}+x_{mn-1} \end{pmatrix}$$

従って $a\neq b$ ならば $x_{m1}=0$, $x_{i-1\,1}=-\dfrac{x_{i1}}{a-b}$ $(i=2,3,\ldots,m)$, $x_{mj}=\dfrac{x_{mj-1}}{a-b}$ $(j=2,3,\ldots,n)$ より $x_{i1}=x_{mj}=0$ $(i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n)$ である. さらに $x_{ij}=\dfrac{-x_{i+1\,j}+x_{ij-1}}{a-b}$ $(i=1,2,\ldots,m-1,\ j=2,3,\ldots,n)$ より $j-i$ による帰納法で $x_{ij}=0$ であることが示される. 実際 $j-i=1-m$ の場合は $(i,j)=(m,1)$ の場合に限られるため, 主張が成り立ち, $j-i=k-1$ $(2-m\leqq k\leqq n-2)$ ならば $x_{ij}=0$ と仮定すれば, $j-i=k$ のとき, $j-(i+1)=(j-1)-i=k-1$ より $x_{i+1\,j}=x_{ij-1}=0$ だから $x_{ij}=\dfrac{-x_{i+1\,j}+x_{ij-1}}{a-b}=0$ である. 故に $(aE_m+N_m)X=X(bE_n+N_n)$ ならば $X$ は零行列である.

11. $A$, $X$ の $(i,j)$ 成分をそれぞれ $a_{ij}$, $x_{ij}$ とし, $\nu_1=0$, $\nu_s=n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}$ $(s=2,3,\ldots,k)$ とおく. さらに, $a_{\nu_p+i\,\nu_q+j}$, $x_{\nu_p+i\,\nu_q+j}$ $(i=1,2,\ldots,n_p,\ j=1,2,\ldots,n_q)$ を $(i,j)$ 成分とする $n_p\times n_q$ 行列をそれぞれ $A_{pq}$, $X_{pq}$ とする. $AX$, $XA$ の $(i,j)$ 成分をそれぞれ $y_{ij}$, $z_{ij}$ とし, $y_{\nu_p+i\,\nu_q+j}$, $z_{\nu_p+i\,\nu_q+j}$ $(i=1,2,\ldots,n_p,\ j=1,2,\ldots,n_q)$ を $(i,j)$ 成分とする $n_p\times n_q$ 行列をそれぞれ $Y_{pq}$, $Z_{pq}$ とすれば,

$$y_{\nu_p+i\,\nu_q+j}=\sum_{s=1}^{n}a_{\nu_p+i\,s}x_{s\,\nu_q+j}=\sum_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{n_t}a_{\nu_p+i\,\nu_t+s}x_{\nu_t+s\,\nu_q+j}=\sum_{t=1}^{k}(A_{pt}X_{tq}\text{ の }(i,j)\text{ 成分})$$
$$z_{\nu_p+i\,\nu_q+j}=\sum_{s=1}^{n}x_{\nu_p+i\,s}a_{s\,\nu_q+j}=\sum_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{n_t}x_{\nu_p+i\,\nu_t+s}a_{\nu_t+s\,\nu_q+j}=\sum_{t=1}^{k}(X_{pt}A_{tq}\text{ の }(i,j)\text{ 成分})$$

より $Y_{pq}=\sum\limits_{t=1}^{k}A_{pt}X_{tq}$, $Z_{pq}=\sum\limits_{t=1}^{k}X_{pt}A_{tq}$ が成り立つ. 仮定から $p\neq q$ ならば $A_{pq}$ は零行列であり, $A_{pp}=a_pE_{n_p}$ だから, 上式より $Y_{pq}=A_{pp}X_{pq}=a_pX_{pq}$, $Z_{pq}=X_{pq}A_{qq}=a_qX_{pq}$ が得られる. $AX=XA$ ならば, すべての $p,q=1,2,\ldots,k$ に対して $Y_{pq}=Z_{pq}$ だから $a_pX_{pq}=a_qX_{pq}$ すなわち $(a_p-a_q)X_{pq}=O$ である. 仮定から $p\neq q$ ならば $a_p\neq a_q$ だから $X_{pq}$ は零行列である. 従って $X_i=X_{ii}$ とおけば $X_i$ は $n_i$ 次正方行列であり, $X$ は $X=\begin{pmatrix} X_1 & & & \text{\Large 0} \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & X_k \end{pmatrix}$ の形の行列である.

12. (1) $L=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ とおけば $L^2=-E_2$ であり, $I=\begin{pmatrix}L&O\\O&-L\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}O&-E_2\\E_2&O\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}O&-L\\-L&O\end{pmatrix}$ だから $I^2=\begin{pmatrix}L&O\\O&-L\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L&O\\O&-L\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L^2&O\\O&(-L)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-E_2&O\\O&-E_2\end{pmatrix}=-E_4$, $J^2=\begin{pmatrix}O&-E_2\\E_2&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&-E_2\\E_2&O\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4$, $K^2 = \begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-L)^2 & O \\ O & (-L)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4$,
$IJ = \begin{pmatrix} L & O \\ O & -L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix} = K$, $JK = \begin{pmatrix} O & -E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & O \\ O & -L \end{pmatrix} = I$,
$KI = \begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & O \\ O & -L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & (-L)^2 \\ -L^2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix} = J$, $JI = J(JK) = J^2K = -E_4K = -K$,
$KJ = K(KI) = K^2I = -E_4I = -I$, $IK = I(IJ) = I^2J = -E_4J = -J$.

(2) $A\overline{A} = (aE_4+bI+cJ+dK)(aE_4-bI-cJ-dK) = a(aE_4+bI+cJ+dK)E_4-b(aE_4+bI+cJ+dK)I-c(aE_4+bI+cJ+dK)J-d(aE_4+bI+cJ+dK)K = a^2E_4^2+abIE_4+acJE_4+adKE_4-abE_4I-b^2I^2-bcJI-bdKI-acE_4J-bcI-c^2J^2-cdKJ-adE_4K-bdIK-cdJK-d^2K^2 = a^2E_4+abI+acJ+adK-abI+b^2E_4-bcJI-bdKI-acJ-bcIJ+c^2E_4-cdKJ-adK-bdIK-cdJK+d^2E_4 = (a^2+b^2+c^2+d^2)E_4-bc(IJ+JI)-cd(JK+KJ)-bd(KI+IK) = \|A\|E_4$. $b$, $c$, $d$ をそれぞれ $-b$, $-c$, $-d$ で置き換えれば, 上式より $\overline{A}A = (aE_4-bI-cJ-dK)(aE_4+bI+cJ+dK) = (aE_4+(-b)I+(-c)J+(-d)K)(aE_4-(-b)I-(-c)J-(-d)K) = (a^2+(-b)^2+(-c)^2+(-d)^2)E_4 = \|A\|^2E_4$.

(3) $A = aE_4+bI+cJ+dK, B = pE_4+qI+rJ+sK \in \boldsymbol{H}$ ならば $AB = (aE_4+bI+cJ+dK)(pE_4+qI+rJ+sK) = p(aE_4+bI+cJ+dK)E_4+q(aE_4+bI+cJ+dK)I+r(aE_4+bI+cJ+dK)J+s(aE_4+bI+cJ+dK)K = apE_4^2+bpIE_4+cpJE_4+dpKE_4+aqE_4I+bqI^2+cqJI+dqKI+arE_4J+brIJ+crJ^2+drKJ+asE_4K+bsIK+csJK+dsK^2 = apE_4+bpI+cpJ+dpK+aqI-bqE_4-cqK+dqJ+arJ+brK-crE_4-drI+asK-bsJ+csI-dsE_4 = (ap-bq-cr-ds)E_4+(bp+aq-dr+cs)I+(cp+dq+ar-bs)J+(dp-cq+br+as)K \in \boldsymbol{H}$ である. $A \neq O$ ならば $|A| \neq 0$ だから, (2) の結果より $A\left(\dfrac{1}{\|A\|^2}\overline{A}\right) = \left(\dfrac{1}{\|A\|^2}\overline{A}\right)A = E_4$ だから, $A$ は正則で, $A^{-1} = \dfrac{1}{\|A\|^2}\overline{A} = \dfrac{a}{\|A\|^2}E_4 + \dfrac{-b}{\|A\|^2}I + \dfrac{-c}{\|A\|^2}J + \dfrac{-d}{\|A\|^2}K \in \boldsymbol{H}$ である.

(4) $X = xE_4+yI+zJ+wK$ $(x,y,z,w \in \boldsymbol{R})$ とおけば $X^2 = (x^2-y^2-z^2-w^2)E_4+2xyI+2xzJ+2xwK$ だから $X^2+E_4 = O$ であるためには $x^2-y^2-z^2-w^2 = -1$ かつ $xy = xz = xw = 0$ であることが必要十分である. もし $x \neq 0$ ならば $y = z = w = 0$ であるが, このとき一つ目の方程式から $x^2 = -1$ となるため, $x$ が実数であるという仮定に反する. 従って $x = 0$ であり, $y$, $z$, $w$ が $y^2+z^2+w^2 = 1$ を満たすことが必要十分である. このとき, $y = \cos\varphi$, $\sqrt{z^2+w^2} = \sin\varphi$ $(0 \leqq \varphi \leqq \pi)$ とおけば $z^2+w^2 = \sin^2\varphi$ だから $z = \sin\varphi\cos\psi$, $w = \sin\varphi\sin\psi$ $(0 \leqq \psi < 2\pi)$ とおくことができる. 従って $X^2+E_4 = O$ を満たす $X \in \boldsymbol{H}$ 全体からなる集合は $\{\cos\varphi I+\sin\varphi\cos\psi J+\sin\varphi\sin\psi K \,|\, 0 \leqq \varphi \leqq \pi,\ 0 \leqq \psi < 2\pi\}$ で与えられる.

## 線形数学 I 演習問題　第 4 回　正方行列・1 次写像

1. 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \bigl(a_{ij}\bigr)$ を $n$ 次上半三角行列とする.

(1) $B = \bigl(b_{ij}\bigr)$ も $n$ 次上半三角行列ならば $AB$ も上半三角行列であり, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し, $AB$ の $(i, i)$ 成分は $a_{ii}b_{ii}$ であることを示せ.

(2) $A$ が正則行列であるためには, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $a_{ii} \neq 0$ であることが必要十分であり, $A$ が正則行列ならば $A$ の逆行列も上半三角行列であることを示し, このとき $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $A$ の逆行列の $(i, i)$ 成分は $\dfrac{1}{a_{ii}}$ であることを示せ.

3. $n$ 次正方行列 $A$ に対し, $A^m = O$ となる自然数 $m$ が存在すれば, $E_n + A$ は正則行列であることを示せ.

4. 1 次写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ はベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ に写すとするとき, $f$ を表す行列を求めよ.

5. $a$ を定数とする. $f : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4$ をそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 - a \end{pmatrix}$ に写す 1 次写像とする. このとき, $f$ を表す行列を求めよ.

6. $a, b, \alpha, \beta$ を実数の定数とし, $ax + by + z = 0$ で表される $\boldsymbol{R}^3$ の平面を $H$ とする. $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f$ が条件「$\boldsymbol{x}$ が $H$ に平行なベクトルならば $f(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}$ であり, $\boldsymbol{x}$ が $H$ に垂直ならば $f(\boldsymbol{x}) = \beta\boldsymbol{x}$」を満たすとき, $f$ を表す行列を求めよ.

7. $a, b, \alpha, \beta$ を実数の定数とし, 以下で与えられる $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に平行で, 原点を通る平面を $H$ とする. $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f$ が条件「$\boldsymbol{x}$ が $H$ に平行なベクトルならば $f(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}$ であり, $\boldsymbol{x}$ が $H$ に垂直ならば $f(\boldsymbol{x}) = \beta\boldsymbol{x}$」を満たすとき, $f$ を表す行列を求めよ.

(1) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 2a - 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ 1 - a^2 \\ 2a^2 - 2a + 1 \end{pmatrix}$　(2) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$

8. (1) 2 次正方行列 $A$ の表す $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換 $T_A$ は, 直線 $y = 2x$ を直線 $y = -x$ の上に写し, 点 $(1, 1)$ を $(1, 1)$ に写す. さらに $A$ の行列式の値が 4 であるとき, これらの条件をすべて満たす行列 $A$ を求めよ.

(2) 2 次対称行列 $B$ の表す $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換 $T_B$ は, 直線 $y = x$ を直線 $y = \dfrac{1}{2}x$ の上に写し, 直線 $y = 2x$ を直線 $y = -2x$ の上に写す. さらに $B$ の行列式の値が 5 であるとき, これらの条件をすべて満たす行列 $B$ をすべて求めよ.

9. $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{R}^3$ の零でないベクトルとし, $\boldsymbol{v}$ を方向ベクトルとして原点を通る $\boldsymbol{R}^3$ の直線 を $\ell$, $\boldsymbol{v}$ に垂直で原点を通る $\boldsymbol{R}^3$ の平面を $P$ とする.

(1) $\boldsymbol{R}^3$ の各点 $\boldsymbol{p}$ を $\ell$ に下した垂線の足に対応させる写像を表す行列を求めよ.

(2) $\boldsymbol{R}^3$ の各点 $\boldsymbol{p}$ を $P$ に下した垂線の足に対応させる写像を表す行列を求めよ.

(3) $\ell$ に関する対称移動を表す行列を求めよ.

(4) $P$ に関する対称移動を表す行列を求めよ.

10. $\boldsymbol{R}^3$ において, 方程式 $\dfrac{x-1}{2}=y+1=\dfrac{z-2}{-1}$ が表す直線を $\ell$ とする. このとき, 次の条件 (1), (2) を両方とも満たす $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ を表す行列を求めよ.

(1) $\boldsymbol{x}$ が $\ell$ に平行なベクトルならば $f(\boldsymbol{x})=3\boldsymbol{x}$ である.

(2) $\boldsymbol{x}$ が $\ell$ に垂直なベクトルならば $f(\boldsymbol{x})=-2\boldsymbol{x}$ である.

11. $\boldsymbol{R}^3$ の 2 つの単位ベクトル $\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ を考える.

(1) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{e}_3$ の両方に垂直で, 第 1 成分が正の単位ベクトルを求めよ. このベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする.

(2) $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{e}_3$ の両方に垂直な単位ベクトル, $\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}$ の両方に垂直な単位ベクトルであり, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{z}$ の第 1 成分は負であるとするとき, これらの成分を求めよ.

(3) 1 次写像 $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ は $f(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}$, $f(\boldsymbol{w})=\boldsymbol{z}$, $f(\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{u}$ を満たすとする. このとき, $f$ を表す行列を求めよ.

12. $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ とおき, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を含んで原点を通る平面を $H$ とする. このとき, 次の条件 (1), (2), (3) を満たす $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ を表す行列を求めよ.

(1) $\boldsymbol{x}$ が $H$ に含まれるベクトルならば $f(\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{x}$ である.

(2) $\boldsymbol{x}$ が $H$ に垂直なベクトルならば $f(\boldsymbol{x})$ も $H$ に垂直である.

(3) $H$ に平行な平面 $H'$ $(H'\neq H)$ で, $f$ によって $H'$ は $H'$ に写されるものがある.

13. $f:\boldsymbol{R}^4\to\boldsymbol{R}^4$ は $2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_4$ を $\boldsymbol{e}_1$ に, $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ を $\boldsymbol{e}_2$ に, $\boldsymbol{e}_2+a\boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{e}_3$ に, $(2a-1)\boldsymbol{e}_3+2\boldsymbol{e}_4$ を $\boldsymbol{e}_4$ に写す 1 次写像とする. $f$ を表す行列を $A$ とするとき, $A$ の逆行列を求めよ.

14. $\varphi,\psi\in\boldsymbol{R}$ に対し, $S_\varphi$ を原点を中心として反時計方向に $\varphi$ だけ回転させる回転移動とし, $T_\psi$ を方向ベクトルが $\begin{pmatrix}\cos\psi\\\sin\psi\end{pmatrix}$ で原点を通る直線に関する対称移動とする.

(1) 合成写像 $T_\psi\circ S_\varphi$, $S_\varphi\circ T_\psi$ はともに原点を通る直線に関する対称移動であることを示し, それぞれの対称移動の軸となる直線の方向ベクトルで長さが 1 であるものを 1 つずつ答えよ.

(2) $\varphi',\psi'\in\boldsymbol{R}$ が $S_{\varphi'}\circ T_{\psi'}=T_\psi\circ S_\varphi$ を満たすための条件を求めよ.

15. (発展問題) $c$, $d$ を実数の定数とする. $\boldsymbol{R}^2$ の二つのベクトル $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$ に対し, $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の積 $\boldsymbol{u}*\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u}*\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}xz+cyw\\xw+yz+dyw\end{pmatrix}$ で定めるとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}$ を固定したとき, 対応 $\boldsymbol{u}\mapsto\boldsymbol{u}*\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換であり, $\boldsymbol{u}$ を固定したとき, 対応 $\boldsymbol{v}\mapsto\boldsymbol{u}*\boldsymbol{v}$ も $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換であることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{i}\in\boldsymbol{R}^2$ で, $\boldsymbol{i}*\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{e}_1$ を満たすものが存在するための条件を求め, このとき $\boldsymbol{i}$ を求めよ.

(3) $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{R}^2$ で, $\boldsymbol{n}*\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}$ を満たすものが存在するための条件を求め, このとき $\boldsymbol{n}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{R}^2$ で, $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}*\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}$ を満たすものが存在することと, $\boldsymbol{0}$ とも $\boldsymbol{e}_1$ とも異なるベクトル $\boldsymbol{p}$ で $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$ を満たすものが存在することは同値であることを示せ.

(5) $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{R}^2$ で, $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}*\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}$ を満たすものが存在するための条件を求め, このとき $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ を求めよ.

(6) (5) で求めた条件のもとで, $\boldsymbol{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q}$ の形に表されることを示し, $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ を満たす零でないベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の組をすべて求めよ.

# 第 4 回の演習問題の解答

1. (1) $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とおけば, $AB=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ だから $AB=E_2$ となるためには, $a+b=0$ が成り立つことが必要十分である. 従って, $b=-a$ だから $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ である.

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & d & e\\ 0 & 1 & f\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ とおけば $AB=\begin{pmatrix}1 & a+d & b+af+e\\ 0 & 1 & c+f\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ だから $AB=E_3$ となるためには, $a+d=b+af+e=c+f=0$ が成り立つことが必要十分である. 従って, $d=-a$, $f=-c$, $e=-af-b=ac-b$ だから $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ である.

(3) $A=\begin{pmatrix}1 & a & b & c\\ 0 & 1 & d & e\\ 0 & 0 & 1 & f\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & g & h & i\\ 0 & 1 & j & k\\ 0 & 0 & 1 & l\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ とおけば $AB=\begin{pmatrix}1 & a+g & b+aj+h & c+bl+ak+i\\ 0 & 1 & d+j & e+dl+k\\ 0 & 0 & 1 & f+l\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ だから $AB=E_4$ となるためには, $a+g=b+aj+h=c+bl+ak+i=d+j=e+dl+k=f+l=0$ が成り立つことが必要十分である. 従って, $g=-a$, $j=-d$, $l=-f$, $h=-aj-b=ad-b$, $k=-dl-e=df-e$, $i=-bl-ak-c=ae+bf-adf-c$ だから $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -a & ad-b & ae+bf-adf-c\\ 0 & 1 & -d & df-e\\ 0 & 0 & 1 & -f\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ である.

2. (1) $AB=\begin{pmatrix}c_{ij}\end{pmatrix}$ とおく. 仮定から $i>k$ ならば $a_{ik}=0$ だから, $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum\limits_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}$ である. さらに仮定から $k>j$ ならば $b_{kj}=0$ だから, $i>j$ ならば上式から $c_{ij}=0$ であり, $c_{ii}=a_{ii}b_{ii}$ である. 故に $AB$ は $(i,i)$ 成分が $a_{ii}b_{ii}$ である上半三角行列である.

(2) $A$ が正則行列のとき, $A^{-1}=\begin{pmatrix}a'_{ij}\end{pmatrix}$ とおけば, $(i)$ より $AA^{-1}$ の $(i,i)$ 成分は $a_{ii}a'_{ii}$ である. 一方, $AA^{-1}=E_n$ だから $a_{ii}a'_{ii}=1$ が $i=1,2,\ldots,n$ に対して成り立つため, $a_{ii}\neq 0$ であり, $a'_{ii}=\dfrac{1}{a_{ii}}$ が成り立つ.

$i=1,2,\ldots,n$ に対して $a_{ii}\neq 0$ であると仮定して, $i,j=1,2,\ldots,n$ に対して $b_{ij}$, $b'_{ij}$ を次のように定める. $i>j$ ならば $b_{ij}=b'_{ij}=0$ とおき, $i=1,2,\ldots,n$ に対して $b_{ii}=b'_{ii}=\dfrac{1}{a_{ii}}$ とおく. 帰納的に $j-i\leqq r-1$ $(1\leqq r\leqq n-1)$ を満たす $i$, $j$ に対して $b_{ij}$ と $b'_{ij}$ が定義されたと仮定して, $j-i=r$ のとき, $b_{ij}$ と $b'_{ij}$ を $b_{ij}=-\dfrac{1}{a_{ii}}\sum\limits_{k=i+1}^{j}a_{ik}b_{kj}$, $b'_{ij}=-\dfrac{1}{a_{jj}}\sum\limits_{k=i+1}^{j}b_{ik}a_{kj}$ によって定義する. そこで, $B=\begin{pmatrix}b_{ij}\end{pmatrix}$, $B'=\begin{pmatrix}b'_{ij}\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}c_{ij}\end{pmatrix}$, $B'A=\begin{pmatrix}c'_{ij}\end{pmatrix}$ とおく. $i>k$ ならば $a_{ik}=0$, $k>j$ ならば $b_{kj}=0$ だから, $i>j$ ならば $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum\limits_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}=0$, $i>k$ ならば $b'_{ik}=0$, $k>j$ ならば $a_{kj}=0$ だから, $i>j$ ならば $c'_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}b'_{ik}a_{kj}=\sum\limits_{k=i}^{n}b'_{ik}a_{kj}=0$, $i=j$ ならば $b_{ii}=b'_{ii}=\dfrac{1}{a_{ii}}$ より $c_{ii}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum\limits_{k=i}^{n}a_{ik}b_{ki}=a_{ii}b_{ii}=1$, $c'_{ii}=\sum\limits_{k=1}^{n}b'_{ik}a_{ki}=\sum\limits_{k=i}^{n}b'_{ik}a_{ki}=b'_{ii}a_{ii}=1$, $i<j$ ならば $b_{ij}$, $b'_{ij}$ の定義から $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum\limits_{k=i}^{j}a_{ik}b_{kj}=0$ $c'_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}b'_{ik}a_{kj}=\sum\limits_{k=i}^{j}b'_{ik}a_{kj}=0$ である. 従って $AB=B'A=E_n$ が成り立つため, $B'=B'E_n=B'(AB)=(B'A)B=E_n=B$ が得られる. 故に $AB=BA=E_n$ だから $B$ は $A$ の逆行列なるため, $A$ は正則行列である.

3. $B = E_n - A + A^2 + \cdots + (-1)^k A^k + \cdots + (-1)^{m-1}A^{m-1} = E_n + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k A^k$ とおけば,

$$(E_n + A)B = B + AB = E_n + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k A^k + A\left(E_n + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k A^k\right) = E_n + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k A^k + A + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k A^{k+1}$$
$$B(E_n + A) = B + BA = E_n + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k A^k + \left(E_n + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k A^k\right)A = E_n + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k A^k + A + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k A^{k+1}$$

であり,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k A^k + A + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k A^{k+1} &= A + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k A^k + \sum_{k=2}^{m}(-1)^{k-1} A^k \\ &= A - A + \sum_{k=2}^{m-1}(-1)^k A^k + \sum_{k=2}^{m-1}(-1)^{k-1} A^k + (-1)^{m-1}A^m \\ &= \sum_{k=2}^{m-1}((-1)^k + (-1)^{k-1})A^k = \sum_{k=2}^{m-1}(-(-1)^{k-1} + (-1)^{k-1})A^k = O\end{aligned}$$

だから, $(E_n+A)B = B(E_n+A) = E_n$ が得られる. 従って, $E_n+A$ は正則で, その逆行列は $B = E_n + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k A^k$ である.

4. $f(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(2\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ だから

$$f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdots (1), \quad f(\boldsymbol{e}_2) + f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots (2), \quad 2f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdots (3)$$

(3) から $f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ であり, これを (1), (2) に代入して $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ を得る. 従って, $f$ を表す行列は $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ である.

5. 前問と同様に, $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2-a \end{pmatrix}$ だから

$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots (1)$, $f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdots (2)$, $f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots (3)$,

$f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_3) - f(\boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2-a \end{pmatrix} \cdots (4)$ である. $(2)-(1)$, $(1)-(3)$, $(3)-(4)$ を計算すれば, $f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$,

$f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}$ だから $f$ を表す行列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & a \end{pmatrix}$ である.

5. $a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ は $H$ の法線ベクトルだから, 仮定と $f$ の線形性から次の等式が成り立つ.

$$af(\boldsymbol{e}_1) + bf(\boldsymbol{e}_2) + f(\boldsymbol{e}_3) = \beta(a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \ \cdots (*)$$

$\boldsymbol{e}_1 - a\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2 - b\boldsymbol{e}_3$ は $H$ の法線ベクトルに垂直なベクトルだから, $H$ に平行である. 従って仮定と $f$ の線形性から次の等式 $f(\boldsymbol{e}_1) - af(\boldsymbol{e}_3) = \alpha(\boldsymbol{e}_1 - a\boldsymbol{e}_3)$, $f(\boldsymbol{e}_2) - bf(\boldsymbol{e}_3) = \alpha(\boldsymbol{e}_2 - b\boldsymbol{e}_3)$ が成り立ち, $f(\boldsymbol{e}_1) = af(\boldsymbol{e}_3) + \alpha(\boldsymbol{e}_1 - a\boldsymbol{e}_3)$, $f(\boldsymbol{e}_2) = bf(\boldsymbol{e}_3) + \alpha(\boldsymbol{e}_2 - b\boldsymbol{e}_3)$ だから, これらを $(*)$ に代入すれば次の等式が得られる.

$$(a^2 + b^2 + 1)f(\boldsymbol{e}_3) = a(\beta - \alpha)\boldsymbol{e}_1 + b(\beta - \alpha)\boldsymbol{e}_2 + (a^2\alpha + (b^2 + 1)\beta)\boldsymbol{e}_3$$

故に $f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{a(\beta-\alpha)}{a^2+b^2+1} \\ \frac{b(\beta-\alpha)}{a^2+b^2+1} \\ \frac{(a^2+b^2)\alpha+\beta}{a^2+b^2+1} \end{pmatrix}$ だから $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{(b^2+1)\alpha+a^2\beta}{a^2+b^2+1} \\ \frac{ab(\beta-\alpha)}{a^2+b^2+1} \\ \frac{a(\beta-\alpha)}{a^2+b^2+1} \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} \frac{ab(\beta-\alpha)}{a^2+b^2+1} \\ \frac{(a^2+1)\alpha+b^2\beta}{a^2+b^2+1} \\ \frac{b(\beta-\alpha)}{a^2+b^2+1} \end{pmatrix}$ であり, $f$ を表す行列は以下で与えられる.

$$\begin{pmatrix} \frac{(b^2+1)\alpha+a^2\beta}{a^2+b^2+1} & \frac{ab(\beta-\alpha)}{a^2+b^2+1} & \frac{a(\beta-\alpha)}{a^2+b^2+1} \\ \frac{ab(\beta-\alpha)}{a^2+b^2+1} & \frac{(a^2+1)\alpha+b^2\beta}{a^2+b^2+1} & \frac{b(\beta-\alpha)}{a^2+b^2+1} \\ \frac{a(\beta-\alpha)}{a^2+b^2+1} & \frac{b(\beta-\alpha)}{a^2+b^2+1} & \frac{(a^2+b^2)\alpha+\beta}{a^2+b^2+1} \end{pmatrix}$$

6. (1) $(1 - a^2)\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 - (a^2 - 3a + 1)\boldsymbol{e}_3$ と $\boldsymbol{v} - a\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_2 - (a - 1)\boldsymbol{e}_3$ はともに $H$ 上のベクトルだから, 仮定と $f$ の線形性から次の等式が得られる.

$$f(\boldsymbol{e}_1) - (a^2 - 3a + 1)f(\boldsymbol{e}_3) = \alpha(\boldsymbol{e}_1 - (a^2 - 3a + 1)\boldsymbol{e}_3) \ \cdots (i)$$
$$f(\boldsymbol{e}_2) - (a - 1)f(\boldsymbol{e}_3) = \alpha(\boldsymbol{e}_2 - (a - 1)\boldsymbol{e}_3) \ \cdots (ii)$$

一方, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ を $H$ の両方に垂直なベクトルとすれば $(\boldsymbol{w}, (1-a^2)\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}-a\boldsymbol{u}) = 0$ より $p = r(a^2-3a+1)$, $q = r(a - 1)$ が得られるため, とくに $r = 1$ の場合を考えると $\begin{pmatrix} a^2 - 3a + 1 \\ a - 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a^2 - 3a + 1)\boldsymbol{e}_1 + (a - 1)\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ は平面 $H$ に垂直である. 故に, 仮定と $f$ の線形性から次の等式が得られる.

$$(a^2 - 3a + 1)f(\boldsymbol{e}_1) + (a - 1)f(\boldsymbol{e}_2) + f(\boldsymbol{e}_3) = \beta((a^2 - 3a + 1)\boldsymbol{e}_1 + (a - 1)\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \ \cdots (iii)$$

$(i)$, $(ii)$ から $f(\boldsymbol{e}_1) = (a^2 - 3a + 1)f(\boldsymbol{e}_3) + \alpha(\boldsymbol{e}_1 - (a^2 - 3a + 1)\boldsymbol{e}_3)$, $f(\boldsymbol{e}_2) = (a - 1)f(\boldsymbol{e}_3) + \alpha(\boldsymbol{e}_2 - (a - 1)\boldsymbol{e}_3)$ だから, これらを $(iii)$ に代入すれば

$$((a^2 - 3a + 1)^2 + (a - 1)^2 + 1)f(\boldsymbol{e}_3) = (\beta - \alpha)(a^2 - 3a + 1)\boldsymbol{e}_1 + (\beta - \alpha)(a - 1)\boldsymbol{e}_2 + (\alpha(a^4 - 6a^3 + 12a^2 - 8a + 2) + \beta)\boldsymbol{e}_3$$

が得られるため, $f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{(\beta-\alpha)(a^2-3a+1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \\ \frac{(\beta-\alpha)(a-1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \\ \frac{\alpha((a^2-3a+1)^2+(a-1)^2)+\beta}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \end{pmatrix}$ である. 従って $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha((a-1)^2+1)+\beta(a^2-3a+1)^2}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \\ \frac{(\beta-\alpha)(a-1)(a^2-3a+1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \\ \frac{(\beta-\alpha)(a^2-3a+1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} \frac{(\beta-\alpha)(a-1)(a^2-3a+1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \\ \frac{\alpha((a^2-3a+1)^2+1)+\beta(a-1)^2}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \\ \frac{(\beta-\alpha)(a-1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \end{pmatrix}$ が得られる. 故に $f$ を表す行列は以下で与えられる.

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha((a-1)^2+1)+\beta(a^2-3a+1)^2}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} & \frac{(\beta-\alpha)(a-1)(a^2-3a+1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} & \frac{(\beta-\alpha)(a^2-3a+1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \\ \frac{(\beta-\alpha)(a-1)(a^2-3a+1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} & \frac{\alpha((a^2-3a+1)^2+1)+\beta(a-1)^2}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} & \frac{(\beta-\alpha)(a-1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \\ \frac{(\beta-\alpha)(a^2-3a+1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} & \frac{(\beta-\alpha)(a-1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} & \frac{\alpha((a^2-3a+1)^2+(a-1)^2)+\beta}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \end{pmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_1+a\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_3$ だから, 一般に $f(\boldsymbol{u})=\alpha\boldsymbol{u}$, $f(\boldsymbol{v})=\alpha'\boldsymbol{v}$ ならば $f$ の線形性から次の等式が得られる.

$$f(\boldsymbol{e}_1)+af(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3)=\alpha(\boldsymbol{e}_1+a\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\ \cdots(i),\qquad f(\boldsymbol{e}_2)+bf(\boldsymbol{e}_3)=\alpha'(\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_3)\ \cdots(ii)$$

一方, $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の両方に垂直なベクトルとすれば $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=0$ より $p+aq+r=q+br=0$ である. 従って, $p=r(ab-1)$, $q=-br$ となるため, とくに $r=1$ の場合を考えると $\begin{pmatrix}ab-1\\-b\\1\end{pmatrix}=(ab-1)\boldsymbol{e}_1-b\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ は平面 $H$ に垂直である. 故に, 仮定と $f$ の線形性から

$$(ab-1)f(\boldsymbol{e}_1)-bf(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3)=\beta((ab-1)\boldsymbol{e}_1-b\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\ \cdots(iii)$$

である. $(i)$ から $(ii)$ の両辺を $a$ 倍したものを辺々引けば $f(\boldsymbol{e}_1)-(ab-1)f(\boldsymbol{e}_3)=\alpha\boldsymbol{e}_1+a(\alpha-\alpha')\boldsymbol{e}_2+(\alpha-ab\alpha')\boldsymbol{e}_3$ だから $f(\boldsymbol{e}_1)=(ab-1)f(\boldsymbol{e}_3)+\alpha\boldsymbol{e}_1+a(\alpha-\alpha')\boldsymbol{e}_2+(\alpha-ab\alpha')\boldsymbol{e}_3$ であり, $(ii)$ より $f(\boldsymbol{e}_2)=-bf(\boldsymbol{e}_3)+\alpha'(\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_3)$ だから, これらを $(iii)$ に代入すれば

$$((ab-1)^2+b^2+1)f(\boldsymbol{e}_3)=(ab-1)(\beta-\alpha)\boldsymbol{e}_1+(b(\alpha'-\beta)-a(ab-1)(\alpha-\alpha'))\boldsymbol{e}_2+(b^2\alpha'+\beta-(ab-1)(\alpha-ab\alpha'))\boldsymbol{e}_3$$

が得られるため, $f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}\frac{(ab-1)(\beta-\alpha)}{(ab-1)^2+b^2+1}\\ \frac{b(\alpha'-\beta)-a(ab-1)(\alpha-\alpha')}{(ab-1)^2+b^2+1}\\ \frac{b^2\alpha'+\beta-(ab-1)(\alpha-ab\alpha')}{(ab-1)^2+b^2+1}\end{pmatrix}$ である. 従って $f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}\frac{\alpha(b^2+1)+\beta(ab-1)^2}{(ab-1)^2+b^2+1}\\ \frac{a\alpha(b^2+1)-b\beta(ab-1)-\alpha'(a+b)}{(ab-1)^2+b^2+1}\\ \frac{\alpha(b^2+1)+\beta(ab-1)-b\alpha'(a+b)}{(ab-1)^2+b^2+1}\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}\frac{b(ab-1)(\alpha-\beta)}{(ab-1)^2+b^2+1}\\ \frac{b^2\beta+ab\alpha(ab-1)-\alpha'(ab-2)}{(ab-1)^2+b^2+1}\\ \frac{b(-\beta+\alpha(ab-1)-\alpha'(ab-2))}{(ab-1)^2+b^2+1}\end{pmatrix}$ が得られる. 故に $f$ を表す行列は

$$\begin{pmatrix}\frac{\alpha(b^2+1)+\beta(ab-1)^2}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b(ab-1)(\alpha-\beta)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{(ab-1)(\beta-\alpha)}{(ab-1)^2+b^2+1}\\ \frac{a\alpha(b^2+1)-b\beta(ab-1)-\alpha'(a+b)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b^2\beta+ab\alpha(ab-1)-\alpha'(ab-2)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b(\alpha'-\beta)-a(ab-1)(\alpha-\alpha')}{(ab-1)^2+b^2+1}\\ \frac{\alpha(b^2+1)+\beta(ab-1)-b\alpha'(a+b)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b(-\beta+\alpha(ab-1)-\alpha'(ab-2))}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b^2\alpha'+\beta-(ab-1)(\alpha-ab\alpha')}{(ab-1)^2+b^2+1}\end{pmatrix}$$

である. とくに $\alpha'=\alpha$ の場合, 上の行列は次のような対称行列になる.

$$\begin{pmatrix}\frac{\alpha(b^2+1)+\beta(ab-1)^2}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b(ab-1)(\alpha-\beta)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{(ab-1)(\beta-\alpha)}{(ab-1)^2+b^2+1}\\ \frac{b(ab-1)(\alpha-\beta)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{\alpha(a^2b^2-2ab+2)+b^2\beta}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b(\alpha-\beta)}{(ab-1)^2+b^2+1}\\ \frac{(ab-1)(\beta-\alpha)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b(\alpha-\beta)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b^2\alpha+\beta+\alpha(ab-1)^2}{(ab-1)^2+b^2+1}\end{pmatrix}$$

7. (1) $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とおく. $T_A$ は直線 $y=2x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を直線 $y=-x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ に平行なベクトルに写すため, $T_A\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ を満たす実数 $k$ がある. 従って $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ より $a+2b=k$, $c+2d=-k$ が成り立つ. また $T_A\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ より, $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ だから $a+b=1$, $c+d=1$ である. 故に $\begin{cases}a+2b=k\\a+b=1\end{cases}$, $\begin{cases}c+2d=-k\\c+d=1\end{cases}$ であり, それぞれ $a$ と $b$, $c$ と $d$ に関する連立方程式とみれば, $a=-k+2$, $b=k-1$, $c=k+2$, $d=-k-1$ が得られる. さらに, $A$ の行列式の値が $4$ であることから $ad-bc=4$ が成り

立つため, 上の結果を代入して, $-2k = 4$ を得る. 従って $k = -2$ だから $a = 4$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 1$ となり, $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(2) $B$ は 2 次対称行列だから $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とおける. $T_B$ は直線 $y = x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を直線 $y = \frac{1}{2}x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行なベクトルに写すため, $T_B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす実数 $k$ が存在し, $T_B$ は直線 $y = 2x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を直線 $y = -2x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ に平行なベクトルに写すため, $T_B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = l\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ を満たす実数 $l$ がある. 従って $B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ より $a + b = 2k$, $b + c = k$ が成り立ち, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = l\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ より $a+2b = l$, $b+2c = -2l$ が成り立つ. 故に $\begin{cases} a + b = 2k \\ a + 2b = l \end{cases}$, $\begin{cases} b + c = k \\ b + 2c = -2l \end{cases}$ であり, それぞれ $a$ と $b$, $b$ と $c$ に関する連立方程式とみれば, 前者から $a = 4k - l$, $b = -2k + l$ が得られ, 後者から $b = 2k + 2l$, $c = -k - 2l$ が得られる. よって $b = -2k + l = 2k + 2l$ だから $l = -4k$ となるため, $a = 8k$, $b = -6k$, $c = 7k$ である. さらに, $B$ の行列式の値が 5 であることから $ac - b^2 = 5$ が成り立つため, 上の結果を代入して, $20k^2 = 5$ を得る. 従って $k = \pm\frac{1}{2}$ だから $a = 4$, $b = -3$, $c = \frac{7}{2}$ または $a = -4$, $b = 3$, $c = -\frac{7}{2}$ となり, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ または $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ である.

8. (1) $\ell$ に下した垂線の足を $t\boldsymbol{v}$ とすれば, $t\boldsymbol{v} - \boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{v}$ は垂直だから $(t\boldsymbol{v} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) = 0$. 従って, $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすれば, $t = \dfrac{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} = \dfrac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2}$. このとき $t\boldsymbol{v} = \dfrac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\begin{pmatrix} a^2x + aby + acz \\ abx + b^2y + bcz \\ acx + bcy + c^2z \end{pmatrix}$ だから, 求める行列は $\dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ である.

(2) $P$ に下した垂線の足を $\boldsymbol{q}$ とすれば, $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{v}$ は平行だから $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} = s\boldsymbol{v}$ とおける. $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{v}$ は垂直だから $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) = 0$. この式に $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} + s\boldsymbol{v}$ を代入すれば, $(\boldsymbol{p} + s\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$. 従って, $s = -\dfrac{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} = -\dfrac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2}$. このとき $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} + s\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \dfrac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\begin{pmatrix} (b^2 + c^2)x - aby - acz \\ -abx + (a^2 + c^2)y - bcz \\ -acx - bcy + (a^2 + b^2)z \end{pmatrix}$ だから, 求める行列は $\dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$ である.

(3) $\ell$ に関して $\boldsymbol{p}$ と対称なベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすれば, $\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{p}$ から $\ell$ に下した垂線の足だから $\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}) = \dfrac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2}\boldsymbol{v}$ である. 従って, $\boldsymbol{r} = \dfrac{2(ax + by + cz)}{a^2 + b^2 + c^2}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{p} = \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\begin{pmatrix} (a^2 - b^2 - c^2)x + 2aby + 2acz \\ 2abx + (-a^2 + b^2 - c^2)y + 2bcz \\ 2acx + 2bcy + (-a^2 - b^2 + c^2)z \end{pmatrix}$ だから, 求める行列は $\dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & -a^2 + b^2 - c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & -a^2 - b^2 + c^2 \end{pmatrix}$ である.

(4) $P$ に関して $\boldsymbol{p}$ と対称なベクトルを $\boldsymbol{u}$ とすれば, $\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u})$ が $\boldsymbol{p}$ から $P$ に下した垂線の足だから $\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{p} - \frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}\boldsymbol{v}$ である. 従って $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} - \frac{2(ax+by+cz)}{a^2+b^2+c^2}\boldsymbol{v} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}(-a^2+b^2+c^2)x-2aby-2acz\\ -2abx+(a^2-b^2+c^2)y-2bcz\\ -2acx-2bcy+(a^2+b^2-c^2)z\end{pmatrix}$ だから, 求める行列は $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}-a^2+b^2+c^2 & -2ab & -2ac\\ -2ab & a^2-b^2+c^2 & -2bc\\ -2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2\end{pmatrix}$ である.

9. $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = 2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ は $\ell$ に平行なベクトルであり, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ と $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_3$ はともに $\ell$ に垂直である. 従って仮定から $f(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3) = 3(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)$, $f(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3) = -2(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$, $f(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_3) = -2(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_3)$ が成り立つため, $f$ の線形性から

$$2f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_2)-f(\boldsymbol{e}_3) = 6\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3,\ f(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3) = -2\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3,\ f(\boldsymbol{e}_1)+2f(\boldsymbol{e}_3) = -2\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_3$$

が得られる. 2 つ目の式と 3 つ目の式から $f(\boldsymbol{e}_2) = -f(\boldsymbol{e}_3)-2\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3$, $f(\boldsymbol{e}_1) = -2f(\boldsymbol{e}_3)-2\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_3$ だから, これらを 1 つ目の式に代入すれば $f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{7}{6}\end{pmatrix}$ が得られるため, 上式から $f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{4}{3}\\\frac{7}{6}\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ を得る. 故に $f$ を表す行列は $\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3}\\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{5}{3} & \frac{7}{6} & \frac{7}{6}\end{pmatrix}$ である.

10. (1) $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{e}_3$ と垂直だから $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}$ とおける. このとき $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{1}{3}(a+2b)$ だから $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{u}$ に垂直であるためには $a+2b=0$ であることが必要十分で, さらに $\boldsymbol{v}$ が単位ベクトルであることから $a^2+b^2=1$ である. $b = -\frac{a}{2}$ を $a^2+b^2=1$ に代入し, 仮定から $a>0$ だから $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ が得られる. 従って $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ だから $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ である.

(2) $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{e}_3$ と垂直だから $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}c\\d\\0\end{pmatrix}$ とおける. このとき $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2c-d)$ だから $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{v}$ に垂直であるためには $2c-d=0$ であることが必要十分で, さらに $\boldsymbol{w}$ が単位ベクトルであることから $c^2+d^2=1$ である. $d=2c$ を $c^2+d^2=1$ に代入し, 仮定から $c<0$ だから $c = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ が得られる. 従って $b = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ だから $\boldsymbol{w} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ である. $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ とおけば $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}) = \frac{1}{3}(p+2q+2r)$, $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{z}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2p-q)$ だから $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に垂直であるためには $p+2q+2r=0$ かつ $2p-q=0$ であることが必要十分で, さらに $\boldsymbol{z}$ が単位ベクトルであることから $p^2+q^2+r^2=1$ である. $q=2p$, $r = -\frac{p}{2}-q = -\frac{5p}{2}$ を $p^2+q^2+r^2=1$ に代入し, 仮定から $p<0$ だから $p = -\frac{2}{3\sqrt{5}}$ が得られる. 従って $q = -\frac{4}{3\sqrt{5}}$, $r = \frac{5}{3\sqrt{5}}$ だから $\boldsymbol{z} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\-4\\5\end{pmatrix}$ である.

(3) $\boldsymbol{v} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)$, $\boldsymbol{w} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2)$ だから, $f$ の線形性と仮定から $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_2)) = f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$, $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-f(\boldsymbol{e}_1) - 2f(\boldsymbol{e}_2)) = f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{z}$ が成り立つ. 従って $2f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_2) = \sqrt{5}\boldsymbol{v}$, $f(\boldsymbol{e}_1) + 2f(\boldsymbol{e}_2) = -\sqrt{5}\boldsymbol{z}$ だから, (1), (2) の結果から $f(\boldsymbol{e}_1) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{v} - \boldsymbol{z}) = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{z}) = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -10 \end{pmatrix}$ が得られる. また, $f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{u} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ だから $f$ を表す行列は $\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 & -2 & 5 \\ -2 & 11 & 10 \\ -5 & -10 & 10 \end{pmatrix}$ である.

11. $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の両方に垂直なベクトルとすれば $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = 0$ より $p + r = q - r = 0$ である. 従って, $p = -r$, $q = r$ だから, とくに $r = 1$ の場合を考えると $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ は平面 $H$ に垂直である. 仮定から $f(\boldsymbol{w})$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に垂直だから $H$ の法線ベクトル $\boldsymbol{w}$ の実数倍で, $f(\boldsymbol{w}) = k\boldsymbol{w}$ を満たす実数 $k$ がある. $H$ と平行な平面 $H'$ は $\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{w} + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ ($a$ は 0 でない定数) の形にパラメータ表示され, $a\boldsymbol{w}$ を位置ベクトルとする $H'$ 上の点は $f$ によって $f(a\boldsymbol{w}) = ak\boldsymbol{w}$ に写されるため, $H'$ が $f$ によって $H'$ に写されるならば $ak\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{w} + b\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v}$ を満たす実数 $b$, $c$ がある. このとき $a(k-1)\boldsymbol{w} = b\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v}$ で, この等式の両辺と $\boldsymbol{w}$ との内積を考えれば, $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = 0$ より $a(k-1)\|\boldsymbol{w}\|^2 = b(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) + c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = 0$ が得られるが, $a \neq 0$ で $\|\boldsymbol{w}\|^2 = 3$ だから, $k = 1$ である. 故に $f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$ だから $-f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2) + f(\boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \cdots (*)$ が成り立つ.

一方, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$ だから仮定から $f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_3) = 2(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3)$, $f(\boldsymbol{e}_2) - f(\boldsymbol{e}_3) = 2(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3)$ が得られるため $f(\boldsymbol{e}_1) = 2(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) - f(\boldsymbol{e}_3)$, $f(\boldsymbol{e}_2) = 2(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3) + f(\boldsymbol{e}_3)$ である. これらを $(*)$ に代入して $f(\boldsymbol{e}_3)$ について解けば $f(\boldsymbol{e}_3) = \dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_1 - \dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_2 + \dfrac{5}{3}\boldsymbol{e}_3$ が得られるため, $f(\boldsymbol{e}_1) = \dfrac{5}{3}\boldsymbol{e}_1 + \dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_2 + \dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_3$, $f(\boldsymbol{e}_2) = \dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_1 + \dfrac{5}{3}\boldsymbol{e}_2 - \dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_3$ である. 以上から $f$ を表す行列は $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ である.

12. 仮定から $A(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{e}_1$, $A(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2$, $A(\boldsymbol{e}_2 + a\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_3$, $A((2a-1)\boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{e}_4$ だから $A\big(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_4 \;\; \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \;\; \boldsymbol{e}_2 + a\boldsymbol{e}_3 \;\; (2a-1)\boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4\big) = \big(\boldsymbol{e}_1 \;\; \boldsymbol{e}_2 \;\; \boldsymbol{e}_3 \;\; \boldsymbol{e}_4\big) = E_4$. 従って,

$$A^{-1} = (2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_4 \;\; \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \;\; \boldsymbol{e}_2 + a\boldsymbol{e}_3 \;\; (2a-1)\boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 3 \\ 1 & 0 & 2a-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. (1) $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $Q(\psi) = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}$ とおけば $S_\varphi$, $T_\psi$ はそれぞれ $R(\varphi)$, $Q(\psi)$ によって表される 1 次変換である. 従って $T_\psi \circ S_\varphi$, $S_{\varphi'} \circ T_{\psi'}$ は, 加法定理を用いれば, それぞれ

$$Q(\psi)R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\psi - \varphi) & \sin(2\psi - \varphi) \\ \sin(2\psi - \varphi) & -\cos(2\psi - \varphi) \end{pmatrix}$$
$$R(\varphi)Q(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\psi + \varphi) & \sin(2\psi + \varphi) \\ \sin(2\psi + \varphi) & -\cos(2\psi + \varphi) \end{pmatrix}$$

によって表される 1 次変換である. 従って $T_\psi \circ S_\varphi$, $S_\varphi \circ T_\psi$ はそれぞれ $\begin{pmatrix} \cos\big(\psi - \frac{\varphi}{2}\big) \\ \sin\big(\psi - \frac{\varphi}{2}\big) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\big(\psi + \frac{\varphi}{2}\big) \\ \sin\big(\psi + \frac{\varphi}{2}\big) \end{pmatrix}$ を方向ベク

トルとする原点を通る直線に関する対称移動である．

(2) $T_\psi \circ S_\varphi$, $S_{\varphi'} \circ T_{\psi'}$ はそれぞれ, 行列 $\begin{pmatrix} \cos(2\psi-\varphi) & \sin(2\psi-\varphi) \\ \sin(2\psi-\varphi) & -\cos(2\psi-\varphi) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos(2\psi'+\varphi') & \sin(2\psi'+\varphi') \\ \sin(2\psi'+\varphi') & -\cos(2\psi'+\varphi') \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換だから $S_{\varphi'} \circ T_{\psi'} = T_\psi \circ S_\varphi$ が成り立つためには $\cos(2\psi'+\varphi') = \cos(2\psi-\varphi)$ かつ $\sin(2\psi'+\varphi') = \sin(2\psi-\varphi)$ が成り立つことが必要十分である．従って, 求める条件は $2(\psi'-\psi)+\varphi'+\varphi$ が $2\pi$ の整数倍になることである．

14. (1) $\boldsymbol{u} * \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} xz+cyw \\ xw+yz+dyw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & cw \\ w & z+dw \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & cy \\ y & x+dy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ だから対応 $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{u}*\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{u}*\boldsymbol{v}$ はそれぞれ行列 $\begin{pmatrix} z & cw \\ w & z+dw \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x & cy \\ y & x+dy \end{pmatrix}$ で表される $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換である．

(2) $\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ とおく．$\boldsymbol{i}*\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} u^2+cv^2 \\ 2uv+dv^2 \end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{i}*\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{e}_1$ は $\begin{cases} u^2+cv^2 = -1 & \cdots(i) \\ 2uv+dv^2 = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$ と同値である．$(ii)$ より $v=0$ または $2u+dv=0$ であるが, $v=0$ ならば $(i)$ より $u^2=-1$ が得られ, $u$ が実数であることに反する．故に $u = -\dfrac{dv}{2}$ であり, $(i)$ に代入すれば $\left(\dfrac{d^2}{4}+c\right)v^2 = -1$ が得られるため $\dfrac{d^2}{4}+c < 0$ すなわち $d^2+4c<0$ であることがわかる．逆に $d^2+4c<0$ の場合, $u = -\dfrac{dv}{2}$, $(d^2+4c)v^2 = -4$ より $\gamma = \sqrt{\dfrac{-1}{d^2+4c}}$ とおけば $(u,v) = (\pm d\gamma, \mp 2\gamma)$ (複号同順) だから $\boldsymbol{i} = \pm\begin{pmatrix} d\gamma \\ -2\gamma \end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{i}*\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{e}_1$ が成り立ち, $\boldsymbol{i}*\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{e}_1$ を満たす $\boldsymbol{i}$ は $\pm\begin{pmatrix} d\gamma \\ -2\gamma \end{pmatrix}$ に限られる．従って $d^2+4c<0$ が $\boldsymbol{i}*\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{e}_1$ を満たすものがあるための条件である．

(3) $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ とおく．$\boldsymbol{n}*\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} u^2+cv^2 \\ 2uv+dv^2 \end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{n}*\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} u^2+cv^2 = 0 & \cdots(i) \\ 2uv+dv^2 = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$ と同値である．$(ii)$ より $v=0$ または $2u+dv=0$ であるが, $v=0$ ならば $(i)$ より $u=0$ が得られ, $\boldsymbol{n}$ が $\boldsymbol{0}$ でないあることに反する．故に $u = -\dfrac{dv}{2}$ であり, $(i)$ に代入すれば $\left(\dfrac{d^2}{4}+c\right)v^2 = 0$ が得られ, $v \neq 0$ だから $\dfrac{d^2}{4}+c = 0$ すなわち $d^2+4c=0$ であることがわかる．このとき, $v=2k$ とおけば $u=-dk$ だから $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{n} = k\begin{pmatrix} -d \\ 2 \end{pmatrix}$ という形のベクトルである．従って $d^2+4c=0$ が $\boldsymbol{n}*\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ を満たすものがあるための条件であり, $\boldsymbol{n}*\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{n}$ は $k\begin{pmatrix} -d \\ 2 \end{pmatrix}$ ($k$ は 0 でない実数) で与えられる．

(4) $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^2$ で, $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}*\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$ を満たすものが存在すれば, $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{e}_1$ である．実際, もし $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{e}_1$ ならば $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e}_1*\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}*\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ となり, $\boldsymbol{q}$ が $\boldsymbol{0}$ でないことと矛盾する．逆に $\boldsymbol{0}$ とも $\boldsymbol{e}_1$ とも異なるベクトル $\boldsymbol{p}$ で $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$ を満たすものが存在するとき, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{p}$ とおけば $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{e}_1$ より $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$ であり, (1) の結果を用いると $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}*(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{p}*\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{q}*\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p})*(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p})*\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p})*\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_1*\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_1*\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}*\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$ が得られる．

(5) (4) の結果から $\boldsymbol{0}$ とも $\boldsymbol{e}_1$ とも異なるベクトル $\boldsymbol{p}$ で $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$ を満たすものが存在する条件を求めればよい．$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a^2+cb^2 \\ 2ab+db^2 \end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$ が成り立つためには $a$, $b$ が $\begin{cases} a^2+cb^2 = a & \cdots(i) \\ 2ab+db^2 = b & \cdots(ii) \end{cases}$ を満たすことが必要十分である．もし $b=0$ ならば $(i)$ より $a$ は 0 または 1 となって $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{e}_1$ に等しくなる．従って $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_1$ ならば $b \neq 0$ であり, $(ii)$ より $a = \dfrac{1-db}{2}$ が得られる．これを $(i)$ に代入すれば $(d^2+4c)b^2 = 1$ が得られるため $d^2+4c>0$ であることがわかる．逆に $d^2+4c>0$ ならば $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{d^2+4c}}$ とおけば $b^2 = \lambda^2$, $a = \dfrac{1-db}{2}$ だから $b = \pm\lambda$, $a = \dfrac{1 \mp d\lambda}{2}$ であり, $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$ を満たす $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \frac{1-d\lambda}{2} \\ \lambda \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} \frac{1+d\lambda}{2} \\ -\lambda \end{pmatrix}$ で与えられ, $\lambda \neq 0$ だから $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{0}$ とも $\boldsymbol{e}_1$ とも異なる．以上から, 求める条件は $d^2+4c>0$ である．

$d^2+4c>0$ のとき, $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{R}^2$ が $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}*\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}$ を満たすとき, (4) の解答の前半でみたように, $\boldsymbol{p}$ は $\mathbf{0}$ とも $\boldsymbol{e}_1$ とも異なり, 同様に $\boldsymbol{q}$ も $\mathbf{0}$ とも $\boldsymbol{e}_1$ とも異なるため, 上で示したことから, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ は $\begin{pmatrix}\frac{1-d\lambda}{2}\\ \lambda\end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix}\frac{1+d\lambda}{2}\\ -\lambda\end{pmatrix}$ のいずれかである. もし, $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}$ ならば $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}=\mathbf{0}$ となって $\boldsymbol{p}\neq\mathbf{0}$ に矛盾する. 従って $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{q}$ だから $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}\frac{1-d\lambda}{2}\\ \lambda\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}\frac{1+d\lambda}{2}\\ -\lambda\end{pmatrix}$ または $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}\frac{1+d\lambda}{2}\\ -\lambda\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}\frac{1-d\lambda}{2}\\ \lambda\end{pmatrix}$ である. いずれの場合にしても, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p}$ が成り立つため $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}*(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}=\mathbf{0}$ である.

(6) もし $\boldsymbol{q}=k\boldsymbol{p}$ を満たす実数 $k$ が存在すれば $k\boldsymbol{p}=k(\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}*(k\boldsymbol{q})=\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}=\mathbf{0}$ が得られるため, $k=0$ または $\boldsymbol{p}=\mathbf{0}$ である. 前者の場合は $\boldsymbol{q}=\mathbf{0}$ となるため, いずれにしても $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ が $\mathbf{0}$ でないことと矛盾する. 同様に $\boldsymbol{p}=k\boldsymbol{q}$ を満たす実数 $k$ も存在しない. 従って $\boldsymbol{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q}$ の形に表される. $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^2$ が $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ を満たすとし, $\boldsymbol{a}=s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=u\boldsymbol{p}+v\boldsymbol{q}$ と表すと (1) の結果と $\boldsymbol{q}*\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}=\mathbf{0}$ から

$$\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=(s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q})*(u\boldsymbol{p}+v\boldsymbol{q})=u(s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q})*\boldsymbol{p}+v(s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q})*\boldsymbol{q}=su\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p}+tu\boldsymbol{q}*\boldsymbol{p}+sv\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}+tv\boldsymbol{q}*\boldsymbol{q}=su\boldsymbol{p}+tv\boldsymbol{q}$$

だから $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}=\mathbf{0}$ であるためには $su=tv=0$ であることが必要十分である. $s=0$ の場合, $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$ だから $t\neq0$ となるため $v=0$ である. また $u=0$ の場合, $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$ だから $v\neq0$ となるため $t=0$ である. 故に $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ を満たす零でないベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の組は $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(x\boldsymbol{p},y\boldsymbol{q})$ または $(y\boldsymbol{q},x\boldsymbol{p})$ ($x$, $y$ は $0$ でない実数) で与えられる.

# 線形数学 I 演習問題　第 5 回　連立 1 次方程式

1. 次の連立 1 次方程式の解を求めよ．ただし, $a$ は定数とする．

(1) $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+4y-3z=5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ 3x-2y+4z=1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-4y=1 \\ 3x+5y=2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x-3y-2z=-1 \\ 2x-2y-3z=-1 \\ x+5y=1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ 3x+4y-z=1 \\ 5x+6y-z=3 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} 2x-5y+3z=7 \\ x-3y+2z=1 \\ 4x-5y+z=18 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x+2y+z=-1 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} 2x-y-z=12 \\ x-3y+2z=1 \\ 4x-5y+z=18 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x+4y-z=1 \\ 5x+6y-z=1 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} 3x-y-4z=-5 \\ x+y-z=-2 \\ x+5y=-3 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} 2x+5y+3z=4 \\ 3x+8y+5z=5 \\ 3x+5y+2z=11 \end{cases}$

(12) $\begin{cases} 3x-5y-5z=-4 \\ 2x-2y-3z=-3 \\ 5x+y-6z=-7 \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ -2x+3y+z=1 \end{cases}$

(14) $\begin{cases} x+y-z=6 \\ 2x+4y+6z=-2 \\ -3x-2y+z=5 \end{cases}$

(15) $\begin{cases} (a-2)x-y-2z=0 \\ -x+(a-2)y+2z=0 \\ -2x+2y+(a+1)z=0 \end{cases}$

(16) $\begin{cases} x-y=-2 \\ 3x-y+z=-2 \\ 2x-y+2z=-1 \\ y-z=1 \end{cases}$

(17) $\begin{cases} x+y+2z+3w=6 \\ x+2y-z+4w=8 \end{cases}$

(18) $\begin{cases} 3x+2y+z+w=4 \\ 5x+y+2z+3w=6 \end{cases}$

(19) $\begin{cases} 2x-4y-5w=9 \\ 4x+3y+11z-2w=4 \\ 5x+2y+12z-4w=7 \end{cases}$

(20) $\begin{cases} x+2y-3z-2w=3 \\ x+3y+z-w=2 \\ 2x+5y-2z-3w=5 \end{cases}$

(21) $\begin{cases} 2x+3y-4z-w=1 \\ x+y-z+2w=2 \\ y-2z-5w=a \end{cases}$

(22) $\begin{cases} x-2y+4z-w=-6 \\ 3x+12y-6z+w=8 \\ 5x-y+11z-3w=3 \end{cases}$

(23) $\begin{cases} x+2y+z+2w=1 \\ 2x-y-3z-w=-3 \\ -x+8y+9z+8w=9 \end{cases}$

(24) $\begin{cases} x+2y+4z-6w=1 \\ 3x+y+7z+7w=8 \\ x+9y+21z+19w=14 \\ 2x+7y+11z+5w=-1 \end{cases}$

(25) $\begin{cases} x-3y+3z+2w=-7 \\ 4x+3y-2z+w=8 \\ 5x+2y+z+3w=3 \\ 5x+6y+z+3w=7 \end{cases}$

(26) $\begin{cases} 3x+2y-3z+w=-2 \\ 4x+3y-4z+2w=-1 \\ 2x+y+2z-w=4 \\ 6x+3y+2z-2w=5 \end{cases}$

(27) $\begin{cases} x+2y-w=-1 \\ -x+y+2z=3 \\ 2x+z+w=8 \\ x-2y-z+w=2 \end{cases}$

(28) $\begin{cases} 3y+3z-2w=-4 \\ x+y+2z+3w=2 \\ x+2y+3z+2w=1 \\ x+3y+4z+2w=-1 \end{cases}$

(29) $\begin{cases} 2x+4y+z-w=1 \\ x+2y-z+w=2 \\ 2x+y+z+2w=-2 \\ x+3y+2z-3w=0 \end{cases}$

(30) $\begin{cases} x+z+2w=6 \\ -2x+y+4z+w=3 \\ 4x-3y-4z+w=-3 \\ -x+y+2z+w=4 \end{cases}$

(31) $\begin{cases} 2x+3y+2z+w=1 \\ 4x+2y-z+w=2 \\ -2x-y-z-2w=-1 \\ 2x+y+2z+3w=1 \end{cases}$ (32) $\begin{cases} x+y+2z+w=-1 \\ x+y+3z+2w=2 \\ 2x-2y+2z-w=-1 \\ -x+y+w=1 \end{cases}$ (33) $\begin{cases} y-z+w=-4 \\ x+2y+z+w=-1 \\ 2x+y+5z+6w=3 \\ x+y+2z+2w=1 \end{cases}$

(34) $\begin{cases} 2x+y+2z+3w=1 \\ -x-y+2z+2w=2 \\ 3x+y+2w=1 \\ 4x+2y-z+w=0 \end{cases}$ (35) $\begin{cases} x+2y-z+3w=3 \\ -x-y+3z-6w=-3 \\ 2x+3y-z+3w=3 \\ x+2y+w=2 \end{cases}$ (36) $\begin{cases} x+2y+4z-6w=-7 \\ 3x+y+7z+7w=9 \\ x+9y+11z+19w=11 \\ 2x+7y+11z+5w=a \end{cases}$

(37) $\begin{cases} 2x-y-z+2w=a \\ -x+2y-z-w=b \\ -x-y+2z-w=c \end{cases}$ (38) $\begin{cases} x+2y-z+3w+4v=5 \\ z-2w+4v=-2 \\ 2x+4y-z+3w+2v=5 \end{cases}$ (39) $\begin{cases} x+2y+3z+w=1 \\ 2x+5y+8z+3w=3 \\ x+3y+5z+2w=a+3 \\ 4x+3y+2z+aw=a \end{cases}$

(40) $\begin{cases} 3x-2y+z+v=2 \\ x-y+z-2w+v=1 \\ 2x+y-3z+w+3v=2 \end{cases}$ (41) $\begin{cases} 2y+4z+2w=2 \\ -x+y+3z+2w=2 \\ x+2y+3z+w=b \\ -2x-y+aw=1 \end{cases}$

(42) $\begin{cases} x+2y-2z+w+3v=2 \\ 2x+y+2z+v=3 \\ -2x-3y+2z-w+2v=1 \end{cases}$ (43) $\begin{cases} x-2y+z+aw=\frac{a+5}{2} \\ 2x+y-3az=-1 \\ -x-y+2az+2w=0 \\ -2x+2y+(a-1)z-(a+2)w=b \end{cases}$

(44) $\begin{cases} x+2y-z+3w-2v=1 \\ 2x+4y+z+3w-3v=2 \\ -x-2y+2z-4w-v=1 \\ 3x+6y+6w-5v=3 \end{cases}$ (45) $\begin{cases} 11x+12y+13z+14u+15v=a \\ 6x+7y+8z+9u+10v=0 \\ x+2y+3z+4u+5v=0 \\ x+4y+9z+16u+25v=b \end{cases}$

2. 以下の連立 1 次方程式が解をもつような, 定数 $a$, $b$, $p$, $q$, $r$, $s$ に関する条件を求め, 解を求めよ.

(1) $\begin{cases} 2x+z=p \\ x+2y+z+w=q \\ -y-w=r \\ x+y-z+4w=s \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-3y-3z+w=p \\ x-2y-2z+2w=q \\ 2x-5y-5z+3w=r \\ x-y-z+3w=s \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x-y+z+w=p \\ 2x-3y+z-w=q \\ -x-y-2z-2w=r \\ 2x-5y+aw=s \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x-2y+3z-w=p \\ 2x-3y+az=q \\ 3x-5y+(a+3)z-w=r \\ 4x-7y+(a+6)z-2w=s \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x+y-2w=p \\ 2x-y+3z-2w=q \\ 3x+3z-4w=r \\ 4x+y+3z-6w=s \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x-y-z=p \\ -2x+y-2z+w=q \\ -y-4z+w=r \\ -x-3z+w=s \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 2x+z=p \\ x+4y-z+w=q \\ -y-w=r \\ x+y+z+2w=s \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x-2y+z-w=p \\ x+y-z+2w=q \\ -2x+y-w=r \\ 3y-2z+3w=s \end{cases}$ (9) $\begin{cases} x+y=p \\ y+w=q \\ x+z=r \\ z+w=s \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x+2y-z=p \\ y+3z-2w=q \\ x+3y+2z-2w=r \\ x+y-4z+2w=s \end{cases}$ (11) $\begin{cases} x+2y+2z+w=p \\ x+3y+z+2w=q \\ 3x+7y+5z+4w=r \\ 2x+5y+3z+3w=s \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x-2y+2z-w=p \\ x-y-z+2w=q \\ 2x-3y+z+w=r \\ -x+3y-5z+4w=s \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x+2y+2z+w=p \\ x-y+z+2w=q \\ 2x+y+az+w=r \\ 3x+2y+4z+aw=s \end{cases}$ (14) $\begin{cases} x+y+az=p \\ x-z=q \\ bx-y-z=r \end{cases}$ (15) $\begin{cases} ax+y+z=p \\ x+ay+z=q \\ x+y+az=r \end{cases}$

(16) $\begin{cases} ax+y+z+w=p \\ x+ay+z+w=q \\ x+y+az+w=r \\ x+y+z+aw=s \end{cases}$ (17) $\begin{cases} x-y+z+2w=p \\ y-z-w=q \\ 2x-y+az+3w=r \\ ax-2y+2z+3w=s \end{cases}$ (18) $\begin{cases} x+ay=p \\ y+az=q \\ z+aw=r \\ x+3y+3z+w=s \end{cases}$

(19) $\begin{cases} x+2y-3z-w=p \\ 2x-3y+z=q \\ 3x-y-2z-w=r \\ (5-4a)x-(a+4)y+(5a-1)z+(2a-1)w=s \end{cases}$ (20) $\begin{cases} x+y-az+(a-2)w=p \\ -x-y+z+(2-a)w=q \\ -2x+(a-3)y+2z+2w=r \\ (a+1)x+2y-2z-2w=s \end{cases}$

(21) $\begin{cases} x-y+z-w=p \\ x-2y-2z+2w=q \\ 2x-3y-z+w=r \\ (a+b)x-(a+2b)y+(a-2b)z-(a-2b)w=s \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+(k+1)y+2kz=k+1 \\ (k-1)x+(3k-1)y+kz=k-1 \\ (2k-1)x+(7k-1)y+3kz=3k-1 \end{cases}$ の解が 2 組以上あるような定数 $k$ の値を求め, その場合の解を求めよ.

4. $\lambda$ を定数とし, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} (\lambda-3)x-y-2z=0 \\ -x+(\lambda-3)y+2z=0 \\ -2x+2y+\lambda z=0 \end{cases}$ が $x=y=z=0$ 以外の解をもつような $\lambda$ の値を求め, 求めた $\lambda$ の各値に対し, この方程式の解を求めよ.

## 第 5 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -z = -1 \end{cases}$ と同値である. $y = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -2t + 4 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{2}{7}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + \frac{10}{7}z = \frac{1}{7} \\ y + \frac{1}{7}z = -\frac{2}{7} \end{cases}$ と同値である. $z = 7t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -10t + \frac{1}{7} \\ y = -t - \frac{2}{7} \\ z = 7t \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x = -1 \\ 0 = 5 \\ -y = -1 \end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x - \frac{5}{4}z = -\frac{1}{4} \\ y + \frac{1}{4}z = \frac{1}{4} \end{cases}$ と同値である. $z = 4t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = 5t - \frac{1}{4} \\ y = -t + \frac{1}{4} \\ z = 4t \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + z = -15 \\ y - z = 4 \\ 0 = 4 \end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(6) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 7 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x - z = 16 \\ y - z = 5 \\ 0 = -21 \end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(7) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 3 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 4 & -4\\ 0 & -4 & 4 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 4 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x+z=16\\ y-z=1\\ 0=3\end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(8) $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 12\\ 1 & -3 & 2 & 1\\ 4 & -5 & 1 & 18\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 12\\ 4 & -5 & 1 & 18\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 5 & -5 & 10\\ 0 & 7 & -7 & 14\end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$

$\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 7 & -7 & 14\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 7\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-z=7\\ y-z=2\end{cases}$ と同値である. $z=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=t+7\\ y=t+2\\ z=t\end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(9) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 1\\ 5 & 6 & -1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2 & -2\\ 0 & -4 & 4 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 4 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x+z=-1\\ y-z=1\end{cases}$ と同値である. $z=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=-t-1\\ y=t+1\\ z=t\end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(10) $\begin{pmatrix}3 & -1 & -4 & -5\\ 1 & 1 & -1 & -2\\ 1 & 5 & 0 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}} \begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & -3\\ 1 & 1 & -1 & -2\\ 3 & -1 & -4 & -5\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & -3\\ 0 & -4 & -1 & 1\\ 0 & -16 & -4 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$

$\begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & -3\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & -16 & -4 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{7}{4}\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-\frac{5}{4}z=-\frac{7}{4}\\ y+\frac{1}{4}z=-\frac{1}{4}\end{cases}$ と同値である. $z=4t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=5t-\frac{7}{4}\\ y=-t-\frac{1}{4}\\ z=4t\end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(11) $\begin{pmatrix}2 & 5 & 3 & 4\\ 3 & 8 & 5 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 11\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}} \begin{pmatrix}2 & 5 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 2 & 11\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 2 & 11\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 2\\ 0 & -4 & -4 & 8\end{pmatrix} \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -4 & -4 & 8\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 7\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-z=7\\ y+z=-2\end{cases}$ と同値である. $z=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=t+7\\ y=-t-2\\ z=t\end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(12) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 & -4 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 1 行から}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{4 倍したものを引く}]{\text{第 3 行から第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x-3y-2z=-1 \\ 4y+z=-1 \\ 0=2 \end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & 7 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行を 2 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -29 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x+z=18 \\ y+z=-7 \\ 0=-29 \end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(14) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ -3 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & -14 \\ 0 & 1 & -2 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{6}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式の解は $\begin{cases} x=-12 \\ y=13 \\ z=-5 \end{cases}$ で与えられる.

(15) $\begin{pmatrix} a-2 & -1 & -2 \\ -1 & a-2 & 2 \\ -2 & 2 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & (a-1)(a-3) & 2(a-3) \\ -1 & a-2 & 2 \\ 0 & -2(a-3) & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}$

$\begin{pmatrix} -1 & a-2 & 2 \\ 0 & (a-1)(a-3) & 2(a-3) \\ 0 & -2(a-3) & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2-a & -2 \\ 0 & (a-1)(a-3) & 2(a-3) \\ 0 & -2(a-3) & a-3 \end{pmatrix} \cdots (*)$ より, $a=3$ ならば $(*)$ は

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり, $a \neq 3$ ならば $(*) \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2-a & -2 \\ 0 & -2(a-3) & a-3 \\ 0 & (a-1)(a-3) & 2(a-3) \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行を } \frac{1}{a-3} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を } -\frac{1}{2(a-3)} \text{ 倍して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2-a & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a-1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-a-2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{a+3}{2} \end{pmatrix} \cdots (**)$. $a=-3$ ならば $(**) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq \pm 3$ ならば

$(**) \xrightarrow[\frac{2}{a+3}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a+2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 以上から, $a=\pm 3$ のときに $x=y=z=0$ 以外の解をもつ. $a=3$ のとき, $x=s+2t$, $y=s$, $z=t$ ($s$, $t$ は任意) を解にもち, $a=-3$ のとき, $x=-\dfrac{1}{2}t$, $y=\dfrac{1}{2}t$, $z=t$ ($t$ は任意) を解にもつ.

(16) $\begin{pmatrix}1&-1&0&-2\\3&-1&1&-2\\2&-1&2&-1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-1&0&-2\\0&2&1&4\\0&1&2&3\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}}\begin{pmatrix}1&-1&0&-2\\0&1&-1&1\\0&1&2&3\\0&2&1&4\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&3&2\\0&0&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{5}{3}\\0&0&3&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x=-\frac{1}{3}\\y=\frac{5}{3}\\3z=2\end{cases}$ と同値である. 従って解は $\begin{cases}x=-\frac{1}{3}\\y=\frac{5}{3}\\z=\frac{2}{3}\end{cases}$ で与えられる.

(17) $\begin{pmatrix}1&1&2&3&6\\1&2&-1&4&8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&2&3&6\\0&1&-3&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&5&2&4\\0&1&-3&1&2\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x+5z+2w=4\\y-3z+w=2\end{cases}$ と同値である. $z=s$, $w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=-5s-2t+4\\y=3s-t+2\\z=s\\w=t\end{cases}$ $(s,\,t$ は任意) で与えられる.

(18) $\begin{pmatrix}3&2&1&1&4\\5&1&2&3&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}}\begin{pmatrix}3&2&1&1&4\\2&-1&1&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 1 行から}}\begin{pmatrix}1&3&0&-1&2\\2&-1&1&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1&3&0&-1&2\\0&-7&1&4&-2\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x+3y-w=2\\-7y+z+4w=-2\end{cases}$ と同値である. $y=s$, $w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=-3s+t+2\\y=s\\z=7s-4t-2\\w=t\end{cases}$ $(s,\,t$ は任意) で与えられる.

(19) $\begin{pmatrix}2&-4&0&-5&9\\4&3&11&-2&4\\5&2&12&-4&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 3 行から}}\begin{pmatrix}2&-4&0&-5&9\\4&3&11&-2&4\\1&-1&1&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 1 行と第 3 行}}\begin{pmatrix}1&-1&1&-2&3\\4&3&11&-2&4\\2&-4&0&-5&9\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-1&1&-2&3\\0&7&7&6&-8\\0&-2&-2&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{3 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&-1&1&-2&3\\0&1&1&3&1\\0&-2&-2&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1&0&2&1&4\\0&1&1&3&1\\0&0&0&5&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&4\\0&1&1&3&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&1&0&-2\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は

$\begin{cases}x+2z=3\\y+z=-2\\w=1\end{cases}$ と同値である. $z=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=-2t+3\\y=-t-2\\z=t\\w=1\end{cases}$ $(t$ は任意) で与えられる.

(20) $\begin{pmatrix}1&2&-3&-2&3\\1&3&1&-1&2\\2&5&-2&-3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&-3&-2&3\\0&1&4&1&-1\\0&1&4&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-11&-4&5\\0&1&4&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-11z-4w=5\\y+4z+w=-1\end{cases}$ と同値である. $z=s$, $w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=11s+4t+5\\y=-4s-t-1\\z=s\\w=t\end{cases}$

($s$, $t$ は任意) で与えられる.

(21) $\begin{pmatrix}2&3&-4&-1&1\\1&1&-1&2&2\\0&1&-2&-5&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}\begin{pmatrix}1&1&-1&2&2\\2&3&-4&-1&1\\0&1&-2&-5&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&-1&2&2\\0&1&-2&-5&-3\\0&1&-2&-5&a\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&7&5\\0&1&-2&-5&-3\\0&0&0&0&a+3\end{pmatrix}$ より, $a\neq-3$ ならば与えられた方程式は解を持たず, $a=-3$ ならば

与えられた方程式は $\begin{cases}x+z+7w=5\\y-2z-5w=-3\end{cases}$ と同値である. $z=s$, $w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=-s-7t+5\\y=2s+5t-3\\z=s\\w=t\end{cases}$ ($s$, $t$

は任意) で与えられる.

(22) $\begin{pmatrix}1&-2&4&-1&-6\\3&12&-6&1&8\\5&-1&11&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-2&4&-1&-6\\0&18&-18&4&26\\0&9&-9&2&33\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{2 倍したものを引く}]{\text{第 2 行から第 3 行を}}$

$\begin{pmatrix}1&-2&4&-1&-6\\0&0&0&0&-40\\0&9&-9&2&33\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-2y+4z-w=-6\\0=-40\\9y-9z+2w=33\end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解

を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(23) $\begin{pmatrix}1&2&1&2&1\\2&-1&-3&-1&-3\\-1&8&9&8&9\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&1&2&1\\0&-5&-5&-5&-5\\0&10&10&10&10\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&2&1&2&1\\0&1&1&1&1\\0&10&10&10&10\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-z=-1\\y+z+w=1\end{cases}$ と同値である. $z=s$, $w=t$

とおけば, 解は $\begin{cases}x=s-1\\y=-s-t+1\\z=s\\w=t\end{cases}$ ($s$, $t$ は任意) で与えられる.

(24) $\begin{pmatrix}1&2&4&-6&1\\3&1&7&7&8\\1&9&21&19&14\\2&7&11&5&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&4&-6&1\\0&-5&-5&25&5\\0&7&17&25&13\\0&3&3&17&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第行を}}\begin{pmatrix}1&2&4&-6&1\\0&1&1&5&-1\\0&7&17&25&13\\0&3&3&17&-3\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & -10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{10}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -18 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 与えられた方程式の解は $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = 2 \\ w = 0 \end{cases}$ である.

(25) $$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 15 & -14 & -7 & 36 \\ 0 & 17 & -14 & -7 & 38 \\ 0 & 21 & -14 & -7 & 42 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 17 & -14 & -7 & 38 \\ 0 & 21 & -14 & -7 & 42 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 17 & -14 & -7 & 38 \\ 0 & 21 & -14 & -7 & 42 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & -7 & 21 \\ 0 & 0 & -14 & -7 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{14}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -14 & -7 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 与えられた方程式は

$\begin{cases} x + \frac{1}{2}w = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z + \frac{1}{2}w = -\frac{3}{2} \end{cases}$ と同値である. $w = 2t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -t + \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = -t - \frac{3}{2} \\ w = 2t \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(26) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 1 行に第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 16 & -6 & 23 \\ 0 & -1 & 12 & -5 & 16 \\ 0 & -3 & 32 & -14 & 41 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -16 & 6 & -23 \\ 0 & -1 & 12 & -5 & 16 \\ 0 & -3 & 32 & -14 & 41 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -4 & 17 \\ 0 & 1 & -16 & 6 & -23 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -16 & 4 & -28 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{14}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -4 & 17 \\ 0 & 1 & -16 & 6 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -16 & 4 & -28 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 与えられた方程式は

$\begin{cases} x - \frac{5}{4}w = -\frac{9}{4} \\ y + 2w = 5 \\ z - \frac{1}{4}w = \frac{7}{4} \end{cases}$ と同値である. $w = 4t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = 5t - \frac{9}{4} \\ y = -8t + 5 \\ z = t + \frac{7}{4} \\ w = 4t \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(27) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第 2 行に第 4 行}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{$-1$ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -17 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{$-2$ 倍したもの加える}]{\text{第 4 行に第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{$-1$ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式の解は $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \\ w = 1 \end{cases}$ である.

(28) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + z = 7 \\ y + z = -2 \\ w = -1 \end{cases}$ と同値である. $z = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -t + 7 \\ y = -t - 2 \\ z = t \\ w = -1 \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(29) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{$-\frac{1}{3}$ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x+2w=-1 \\ y-w=1 \\ z-w=-1 \end{cases}$ と同値である. $w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x=-2t-1 \\ y=t+1 \\ z=t-1 \\ w=t \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(30) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -4 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 15 \\ 0 & -3 & -8 & -7 & -27 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 10 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 4 行を 3 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ より, 与えられた方程式の解は $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=1 \\ w=1 \end{cases}$ である.

(31) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 与えられた方程式は $\begin{cases} 2x+2w=1 \\ y-w=0 \\ z+w=0 \end{cases}$ と同値である. $w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x=-t+\frac{1}{2} \\ y=t \\ z=-t \\ w=t \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(32) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

より, 解は $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = -2 \\ w = 5 \end{cases}$ である.

(33) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{7}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + 3z = 6 \\ y - z = -3 \\ w = -1 \end{cases}$ と同値である. $z = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -3t + 6 \\ y = t - 3 \\ z = t \\ w = -1 \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(34) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & -2 & 6 & 8 & 7 \\ 0 & -2 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{各行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & -6 & -8 & -7 \\ 0 & 2 & -7 & -9 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{して第 3 行に加える}]{\text{第 4 行を }-1\text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + w = -1 \\ y - w = 1 \\ z + w = 1 \\ 0 = -3 \end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(35) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -6 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x - w = -2 \\ y + w = 2 \\ z - 2w = -1 \end{cases}$ と同値である. $w = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -t + 2 \\ z = 2t - 1 \\ w = t \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(36) $\begin{pmatrix}1&2&4&-6&-7\\3&1&7&7&9\\1&9&11&19&11\\2&7&11&5&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&4&-6&-7\\0&-5&-5&25&30\\0&7&7&25&18\\0&3&3&17&a+14\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&2&4&-6&-7\\0&1&1&-5&-6\\0&7&7&25&18\\0&3&3&17&a+14\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&2&4&5\\0&1&1&-5&-6\\0&0&0&60&60\\0&0&0&32&a+32\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{60}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&2&4&5\\0&1&1&-5&-6\\0&0&0&1&1\\0&0&0&32&a+32\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&a\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x+2w=1\\y+z=-1\\w=1\\0=a\end{cases}$ と同値であるため, $a\neq 0$ ならば解をもたず, $a=0$ ならば $z=s$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=-2s+1\\y=-s-1\\z=s\\w=1\end{cases}$ ($s$ は任意) で与えられる.

(37) $\begin{pmatrix}2&-1&-1&2&a\\-1&2&-1&-1&b\\-1&-1&2&-1&c\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}}\begin{pmatrix}-1&2&-1&-1&b\\2&-1&-1&2&a\\-1&-1&2&-1&c\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}-1&2&-1&-1&b\\0&3&-3&0&a+2b\\0&-3&3&0&c-b\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&0&1&-1&-\frac{2a}{3}-\frac{b}{3}\\0&3&-3&0&a+2b\\0&0&0&0&a+b+c\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は

$\begin{cases}-x+z-w=-\frac{2a+b}{3}\\3y-3z=a+2b\\0=a+b+c\end{cases}$ と同値である. 従って $a+b+c=0$ ならば $z=s$, $w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=s-t+\frac{2a+b}{3}\\y=s+\frac{a+2b}{3}\\z=s\\w=t\end{cases}$

($s$, $t$ は任意) で与えられる. $a+b+c\neq 0$ ならば上の方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(38) $\begin{pmatrix}1&2&-1&3&4&5\\0&0&1&-2&4&-2\\2&4&-1&3&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&-1&3&4&5\\0&0&1&-2&4&-2\\0&0&1&-3&-6&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1&2&0&1&8&3\\0&0&1&-2&4&-2\\0&0&0&-1&-10&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&0&0&-2&0\\0&0&1&0&24&4\\0&0&0&-1&-10&-3\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は

$\begin{cases}x+2y-2v=0\\z+24v=4\\w+10v=3\end{cases}$ と同値である. $y=s$, $v=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=-2s+2t\\y=s\\z=-24t+4\\w=-10t+3\\v=t\end{cases}$ ($s$, $t$ は任意) で与えられる.

(39) $\begin{pmatrix}1&2&3&1&1\\2&5&8&3&3\\1&3&5&2&a+3\\4&3&2&a&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&3&1&1\\0&1&2&1&1\\0&1&2&1&a+2\\0&-5&-10&a-4&a-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&1&1\\0&0&0&0&a+1\\0&0&0&a+1&a+1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 3 行と第 4 行}}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&1&1\\0&0&0&a+1&a+1\\0&0&0&0&a+1\end{pmatrix}\cdots(*)$ より, $a=-1$ ならば $(*)$ は
$\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ となり, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-z-w=-1\\y+2z+w=1\end{cases}$ と同値であるため, $z=u$, $w=v$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=u+v-1\\y=-2u-v+1\\z=u\\w=v\end{cases}$ ($u$, $v$ は任意) で与えられる. $a\neq-1$ ならば $(*)\xrightarrow[\text{を } \frac{1}{a+1} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行と第 4 行}}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$
より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-z-w=-1\\y+2z+w=1\\w=1\\0=1\end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(40) $\begin{pmatrix}3&-2&1&0&1&2\\1&-1&1&-2&1&1\\2&1&-3&1&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}\begin{pmatrix}1&-1&1&-2&1&1\\3&-2&1&0&1&2\\2&1&-3&1&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&-1&1&-2&1&1\\0&1&-2&6&-2&-1\\0&3&-5&5&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-1&4&-1&0\\0&1&-2&6&-2&-1\\0&0&1&-13&7&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&0&-9&6&3\\0&1&0&-20&12&5\\0&0&1&-13&7&3\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-9w+6v=3\\y-20w+12v=5\\z-13w+7v=3\end{cases}$ と同値である. $w=s$, $v=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=9s-6t+3\\y=20s-12t+5\\z=13s-7t+3\\w=s\\v=t\end{cases}$ ($s$, $t$ は任意) で与えられる.

(41) $\begin{pmatrix}0&2&4&2&2\\-1&1&3&2&2\\1&2&3&1&b\\-2&-1&0&a&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}}\begin{pmatrix}1&2&3&1&b\\-1&1&3&2&2\\0&2&4&2&2\\-2&-1&0&a&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&3&1&b\\0&3&6&3&b+2\\0&2&4&2&2\\0&3&6&a+2&2b+1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & b \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & b+2 \\ 0 & 3 & 6 & a+2 & 2b+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & b+2 \\ 0 & 3 & 6 & a+2 & 2b+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & b-2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 2(b-1) \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x-z-w=b-2 \\ y+2z+w=1 \\ 0=b-1 \\ (a-1)w=2(b-1) \end{cases}$ と同値である. 従って $b=1$, $a\neq 1$ の場合は $w=0$ であり, $z=t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x=t+b-2 \\ y=-2t+1 \\ z=t \\ w=0 \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられ, $b=1$, $a\neq 1$ の場合は, $z=s$, $w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x=s+t+b-2 \\ y=-2s-t+1 \\ z=s \\ w=t \end{cases}$ ($s$, $t$ は任意) で与えられる. $b\neq 1$ ならば上の方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(42) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & -2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -13 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4)\text{ 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 & 14 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x+2z+6v=6 \\ y-2z-11v=-9 \\ w+19v=14 \end{cases}$ と同値である. $z=s$, $v=t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x=-2s-6t+6 \\ y=2s+11t-9 \\ z=s \\ w=-19t+14 \\ v=t \end{cases}$ ($s$, $t$ は任意) で与えられる.

(43) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & a & \frac{a+5}{2} \\ 2 & 1 & -3a & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2a & 2 & 0 \\ -2 & 2 & a-1 & -a-2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & a & \frac{a+5}{2} \\ 0 & 5 & -3a-2 & -2a & -a-6 \\ 0 & -3 & 2a+1 & a+2 & \frac{a+5}{2} \\ 0 & -2 & a+1 & a-2 & a+b+5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 3 行を 2 倍して}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & a & \frac{a+5}{2} \\ 0 & 1 & -a & -4 & a+2b+4 \\ 0 & -3 & 2a+1 & a+2 & \frac{a+5}{2} \\ 0 & -2 & a+1 & a-2 & a+b+5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-2a & a-8 & \frac{5a+8b+21}{2} \\ 0 & 1 & -a & -4 & a+2b+4 \\ 0 & 0 & 1-a & a-10 & \frac{7a+12b+29}{2} \\ 0 & 0 & 1-a & a-10 & 3a+5b+13 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 行に加える}]{\text{第 3 行を }-1\text{ 倍して}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-2a & a-8 & \frac{5a+8b+21}{2} \\ 0 & 1 & -a & -4 & a+2b+4 \\ 0 & 0 & 1-a & a-10 & \frac{7a+12b+29}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-a-2b-3}{2} \end{pmatrix}$ より $a \neq -2b-3$ ならば与えられた方程式も解を持たない. $a=-2b-3$ ならば上の行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4b+7 & -2b-11 & 3-b \\ 0 & 1 & 2b+3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2b+4 & -2b-13 & 4-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots (*)$ に等しい. $b \neq -2$ の場合, $(*) \xrightarrow[\frac{1}{2b+4}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4b+7 & -2b-11 & 3-b \\ 0 & 1 & 2b+3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2b+13}{2b+4} & \frac{4-b}{2b+4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4b^2+36b+47}{2b+4} & \frac{2b^2-7b-16}{2b+4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4b^2+24b+23}{2b+4} & \frac{2b^2-3b-8}{2b+4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2b+13}{2b+4} & \frac{4-b}{2b+4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + \frac{4b^2+36b+47}{2b+4}w = \frac{2b^2-7b-16}{2b+4} \\ y + \frac{4b^2+24b+23}{2b+4}w = \frac{2b^2-3b-8}{2b+4} \\ z - \frac{2b+13}{2b+4}w = \frac{4-b}{2b+4} \end{cases}$ と同値である. $w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = \frac{2b^2-7b-16}{2b+4} - \frac{4b^2+36b+47}{2b+4}t \\ y = \frac{2b^2-3b-8}{2b+4} - \frac{4b^2+24b+23}{2b+4}t \\ z = \frac{4-b}{2b+4} + \frac{2b+13}{2b+4}t \\ w = t \end{cases}$ ($t$ は任意)

で与えられる. $b=-2$ の場合, $(*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{9}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x - z = \frac{1}{3} \\ y - z = -\frac{5}{3} \\ w = -\frac{2}{3} \end{cases}$ と同値である. $z=t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = t + \frac{1}{3} \\ y = t - \frac{5}{3} \\ z = t \\ w = -\frac{2}{3} \end{cases}$

($t$ は任意) で与えられる.

(44) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & -5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{10}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{(3,5)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は

$\begin{cases} x + 2y + 2w = 0 \\ z - w = \frac{1}{5} \\ v = -\frac{3}{5} \end{cases}$ と同値である. $y=s$, $w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -2s-2t \\ y = s \\ z = t + \frac{1}{5} \\ w = t \\ v = -\frac{3}{5} \end{cases}$ ($s$, $t$ は任意) で与えられる.

(45) $\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & a \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & a \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 & 0 \\ 0 & -10 & -20 & -40 & -40 & a \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 & a \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -8 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ より $a \neq 0$ ならば与えられた方程式も解を持たない. $a = 0$ の場合,

与えられた方程式は $\begin{cases} x + u + 3v = \frac{b}{2} \\ y - 3u - 8v = -b \\ z + 3u + 6v = \frac{b}{2} \end{cases}$ と同値である. $u = s$, $v = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -s - 3t + \frac{b}{2} \\ y = 3s + 8t - b \\ z = -3s - 6t + \frac{b}{2} \\ u = s \\ v = t \end{cases}$ ($s$, $t$ は任意) で与えられる.

2. (1) 与えられた連立 1 次方程式の拡大係数行列を行に関して基本変形する.

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & p \\ 1 & 2 & 1 & 1 & q \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 1 & 1 & -1 & 4 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第 1 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & s \\ 1 & 2 & 1 & 1 & q \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 2 & 0 & 1 & 0 & p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & s \\ 0 & 1 & 2 & -3 & q-s \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 0 & -2 & 3 & -8 & p-2s \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 & 2s-q \\ 0 & 1 & 2 & -3 & q-s \\ 0 & 0 & 2 & -4 & q+r-s \\ 0 & 0 & 7 & -14 & p+2q-4s \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 & 2s-q \\ 0 & 1 & 2 & -3 & q-s \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{q+r-s}{2} \\ 0 & 0 & 7 & -14 & p+2q-4s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{q+3r+s}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -r \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{q+r-s}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2p-3q-7r-s}{2} \end{pmatrix}$ 故に, 与えられた方程式が解をもつための条件は $2p - 3q - 7r - s = 0$ である. この

とき, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + w = \frac{q+3r+s}{2} \\ y + w = -r \\ z - 2w = \frac{q+r-s}{2} \end{cases}$ と同値である. $w = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -t + \frac{q+3r+s}{2} \\ y = -t - r \\ z = 2t + \frac{q+r-s}{2} \\ w = t \end{cases}$ ($t$ は任意)

で与えられる.

(2) $\begin{pmatrix}1 & -3 & -3 & 1 & p\\ 1 & -2 & -2 & 2 & q\\ 2 & -5 & -5 & 3 & r\\ 1 & -1 & -1 & 3 & s\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & -3 & -3 & 1 & p\\ 0 & 1 & 1 & 1 & q-p\\ 0 & 1 & 1 & 1 & r-2p\\ 0 & 2 & 2 & 2 & s-p\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 4 & 3q-2p\\ 0 & 1 & 1 & 1 & q-p\\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-q-p\\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-2q+p\end{pmatrix}$

従って, 与えられた方程式が解をもつための条件は $r=p+q$ かつ $s=-p+2q$ である. このとき, 与えられた方程式は $\begin{cases}x+4w=3q-2p\\ y+z+w=q-p\end{cases}$ と同値である. $z=t$, $w=u$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=-4u-2p+3q\\ y=-t-u-p+q\\ z=t\\ w=u\end{cases}$ ($t$, $u$ は任意) で与えられる.

(3) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & p\\ 2 & -3 & 1 & -1 & q\\ -1 & -1 & -2 & -2 & r\\ 2 & -5 & 0 & a & s\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & p\\ 0 & -1 & -1 & -3 & q-2p\\ 0 & -2 & -1 & -1 & p+r\\ 0 & -3 & -2 & a-2 & s-2p\end{pmatrix} \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$

$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & p\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2p-q\\ 0 & -2 & -1 & -1 & p+r\\ 0 & -3 & -2 & a-2 & s-2p\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 4 & 3p-q\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2p-q\\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5p-2q+r\\ 0 & 0 & 1 & a+7 & 4p-3q+s\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -6 & -7p+3q-2r\\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3p+q-r\\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5p-2q+r\\ 0 & 0 & 0 & a+2 & -p-q-r+s\end{pmatrix}$ より, $a\neq -2$ の場合, 左の拡大係数行列の第 4 行を $\frac{1}{a+2}$ 倍して $(4,4)$ 成分に関して第 4 列の掃き出しを行えば, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-7ap+3aq-2ar-20p-10r+6s}{a+2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-3ap+aq-ar-8p-4r+2s}{a+2}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5ap-2aq+ar+15p+q+7r-5s}{a+2}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-p-q-r+s}{a+2}\end{pmatrix}$ が得られるため, 与えられた方程式の解は $\begin{cases}x=\frac{-7ap+3aq-2ar-20p-10r+6s}{a+2}\\ y=\frac{-3ap+aq-ar-8p-4r+2s}{a+2}\\ z=\frac{5ap-2aq+ar+15p+q+7r-5s}{a+2}\\ w=\frac{-p-q-r+s}{a+2}\end{cases}$ である. $a=-2$ の場合, $s\neq p+q+r$ ならば与えられた方程式は解をもたず, $s=p+q+r$ ならば与えられた方程式は $\begin{cases}x-6w=-7p+3q-2r\\ y-2w=-3p+q-r\\ z+5w=5p-2q+r\end{cases}$ と同値であるため, $w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=6t-7p+3q-2r\\ y=2t-3p+q-r\\ z=-5t+5p-2q+r\\ w=t\end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(4) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & p\\ 2 & -3 & a-1 & 0 & q\\ 3 & -5 & a+2 & -1 & r\\ 4 & -7 & a+5 & -2 & s\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & p\\ 0 & 1 & a-7 & 2 & q-2p\\ 0 & 1 & a-7 & 2 & r-3p\\ 0 & 1 & a-7 & 2 & s-4p\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a-11 & 3 & -3p+2q \\ 0 & 1 & a-7 & 2 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-2p-q \end{pmatrix}$ より, 与えられた連立 1 次方程式が解をもつためには $r=p+q$, $s=2p+q$ が成り立つことが必要十分であり, このとき与えられた連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+(2a-11)z+3w=-3p+2q \\ y+(a-7)z+2w=-2p+q \end{cases}$ と同値である. 従って, $z=t$, $w=u$ とおけば, 解は $\begin{cases} x=-(2a-11)t-3u-3p+2q \\ y=-(a-7)t-2u-2p+q \\ z=t \\ w=u \end{cases}$ $(t$, $u$ は任意) で与えられる.

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & p \\ 2 & -1 & 3 & -2 & q \\ 3 & 0 & 3 & -4 & r \\ 4 & 1 & 3 & -6 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & p \\ 0 & -3 & 3 & 2 & q-2p \\ 0 & -3 & 3 & 2 & r-3p \\ 0 & -3 & 3 & 2 & s-4p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & p \\ 0 & -3 & 3 & 2 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-q-2p \end{pmatrix}$ より, 与えられた連立 1 次方程式が解をもつためには $r=p+q$, $s=2p+q$ が成り立つことが必要十分であり, このとき与えられた連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+y-2w=p \\ -3y+3z+2w=-2p+q \end{cases}$ と同値である. 従って, $y=t$, $w=u$ とおけば, 解は $\begin{cases} x=-t+2u+p \\ y=t \\ z=t-\frac{2u}{3}-\frac{2p-q}{3} \\ w=u \end{cases}$ $(t$, $u$ は任意) で与えられる.

(6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & p \\ -2 & 1 & -2 & 1 & q \\ 0 & -1 & -4 & 1 & r \\ -1 & 0 & -3 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & p \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 2p+q \\ 0 & -1 & -4 & 1 & r \\ 0 & -1 & -4 & 1 & p+s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & -p-q \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 2p+q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2p-q+r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p-q+s \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解を持つためには, $r=2p+q$, $s=p+q$ が成り立つことが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x+3z-w=-p-q \\ -y-3z+w=2p+q \end{cases}$ と同値である. $z=t$, $w=u$ とおけば, 解は $\begin{cases} x=-3t+u-p-q \\ y=-3t+u-2p-q \\ z=t \\ w=u \end{cases}$ $(t$, $u$ は任意) で与えられる.

(7) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & p \\ 1 & 4 & -1 & 1 & q \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 1 & 1 & 1 & 2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(4,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -4 & p-2s \\ 0 & 3 & -2 & -1 & q-s \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 1 & 1 & 1 & 2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & p-2r-2s \\ 0 & 0 & -2 & -4 & q+3r-s \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 1 & 0 & 1 & 1 & r+s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & p-2r-2s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q-2p+7r+3s \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 1 & 0 & 0 & -1 & p-r-s \end{pmatrix}$ より, 与えられた連立 1 次方程式が解をもつためには $q = 2p - 7r - 3s$ が成り立つことが必要十分であり, このとき与えられた連立 1 次方程式は $\begin{cases} x - w = p - r - s \\ -y - w = r \\ -z - 2w = p - 2r - 2s \end{cases}$ と同値である. 従って, $w = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = t + p - r - s \\ y = -t - r \\ z = -2t - p + 2r + 2s \\ w = t \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(8) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & p \\ 1 & 1 & -1 & 2 & q \\ -2 & 1 & 0 & -1 & r \\ 0 & 3 & -2 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & p \\ 0 & 3 & -2 & 3 & q-p \\ 0 & -3 & 2 & -3 & r+2p \\ 0 & 3 & -2 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{p+2q}{3} \\ 0 & 3 & -2 & 3 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r+p+q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+p-q \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解をもつためには $r = -p - q$, $s = -p + q$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x - \frac{1}{3}z + w = \frac{p+2q}{3} \\ 3y - 2z + 3w = q - p \end{cases}$ と同値である. $z = t$, $w = u$ とおけば, 解は
$\begin{cases} x = \frac{t}{3} - u + \frac{p+2q}{3} \\ y = \frac{2t}{3} - u - \frac{p-q}{3} \\ z = t \\ w = u \end{cases}$ ($t$, $u$ は任意) で与えられる.

(9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 1 & 0 & 1 & 0 & r \\ 0 & 0 & 1 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & -1 & 1 & 0 & r-p \\ 0 & 0 & 1 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & p-q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 & 1 & r-p+q \\ 0 & 0 & 1 & 1 & s \end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & p-q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 & 1 & r-p+q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+p-q-r \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解をもつためには $s = -p + q + r$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x - w = p - q \\ y + w = q \\ z + w = r - p + q \end{cases}$ と同値である. $w = t$ とおけば, 解

は $\begin{cases} x = t + p - q \\ y = -t + q \\ z = -t - p + q + r \\ w = t \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 3 & -2 & q \\ 1 & 3 & 2 & -2 & r \\ 1 & 1 & -4 & 2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 3 & -2 & q \\ 0 & 1 & 3 & -2 & r-p \\ 0 & -1 & -3 & 2 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 4 & p-2q \\ 0 & 1 & 3 & -2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p+q \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解をもつためには $r = p + q$, $s = p - q$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x - 7z + 4w = p - 2q \\ y + 3z - 2w = q \end{cases}$ と同値である. $z = t$, $w = u$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = 7t - 4u + p - 2q \\ y = -3t + 2u + q \\ z = t \\ w = u \end{cases}$ ($t$, $u$ は任意) で与えられる.

(11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & p \\ 1 & 3 & 1 & 2 & q \\ 3 & 7 & 5 & 4 & r \\ 2 & 5 & 3 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q-p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & r-3p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & s-2p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 3p-2q \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解をもつためには $r = 2p + q$, $s = p + q$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x + 4z - w = 3p - 2q \\ y - z + w = q - p \end{cases}$ と同値である. $z = t$, $w = u$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -4t + u + 3p - 2q \\ y = t - u - p + q \\ z = t \\ w = u \end{cases}$ ($t$, $u$ は任意) で与えられる.

(12) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & p \\ 1 & -1 & -1 & 2 & q \\ 2 & -3 & 1 & 1 & r \\ -1 & 3 & -5 & 4 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & p \\ 0 & 1 & -3 & 3 & q-p \\ 0 & 1 & -3 & 3 & r-2p \\ 0 & 1 & -3 & 3 & s+p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 & 2q-p \\ 0 & 1 & -3 & 3 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+2p-q \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解をもつためには $r = p + q$, $s = -2p + q$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x - 4z + 5w = -p + 2q \\ y - 3z + 3w = q - p \end{cases}$ と同値である. $z = t$, $w = u$ とおけば, 解

は $\begin{cases} x = 4t - 5u - p + 2q \\ y = 3t - 3u - p + q \\ z = t \\ w = u \end{cases}$ $(t,\, u$ は任意) で与えられる.

(13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & p \\ 1 & -1 & 1 & 2 & q \\ 2 & 1 & a & 1 & r \\ 3 & 2 & 4 & 4 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & p \\ 0 & -3 & -1 & 1 & q-p \\ 0 & -3 & a-4 & -1 & r-2p \\ 0 & -4 & -2 & 1 & s-3p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(2,4) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 & 2p-q \\ 0 & -3 & -1 & 1 & q-p \\ 0 & -6 & a-5 & 0 & r-3p+q \\ 0 & -1 & -1 & 0 & s-2p-q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(4,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -8p-6q+5s \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5p+4q-3s \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & 9p+7q+r-6s \\ 0 & -1 & -1 & 0 & s-2p-q \end{pmatrix} \cdots (*)$ より, $a \neq -2$

の場合, $(*) \xrightarrow[\frac{1}{a+1}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -8p-6q+5s \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5p+4q-3s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9p+7q+r-6s}{a+1} \\ 0 & -1 & -1 & 0 & s-2p-q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-(8a-10)p-(6a-8)q+2r+(5a-7)s}{a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(5a-13)p+(4a-10)q-2r-(3a-9)s}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9p+7q+r-6s}{a+1} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{(-2a+7)p-(a-6)q+r+(a-5)s}{a+1} \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式の解は $\begin{cases} x = \frac{-(8a-10)p-(6a-8)q+2r+(5a-7)s}{a+1} \\ y = \frac{(2a-7)p+(a-6)q-r-(a-5)s}{a+1} \\ z = \frac{9p+7q+r-6s}{a+1} \\ w = \frac{(5a-13)p+(4a-10)q-2r-(3a-9)s}{a+1} \end{cases}$

である. $a = -1$ の場合, $(*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -8p-6q+5s \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5p+4q-3s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9p+7q+r-6s \\ 0 & -1 & -1 & 0 & s-2p-q \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解ををもつためには

$r = -9p - 7q + 6s$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x - 2z = -8p - 6q + 5s \\ 2z + w = 5p + 4q - 3s \\ -y - z = s - 2p - q \end{cases}$ と同

値である. $z = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = 2t - 8p - 6q + 5s \\ y = -t + 2p + q - s \\ z = t \\ w = -2t + 5p + 4q - 3s \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(14) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & p \\ 1 & 0 & -1 & q \\ b & -1 & -1 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & a+1 & p-q \\ 1 & 0 & -1 & q \\ 0 & -1 & b-1 & r-bq \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a+1 & p-q \\ 1 & 0 & -1 & q \\ 0 & 0 & a+b & p-(b+1)q+r \end{pmatrix} \cdots (*)$ より, $a \neq -b$ の場合, $(*) \xrightarrow[\frac{1}{a+b}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & a+1 & p-q \\ 1 & 0 & -1 & q \\ 0 & 0 & 1 & \frac{p-(b+1)q+r}{a+b} \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{(b-1)p+(ab+1)q-(a+1)r}{a+b} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{p+(a-1)q+r}{a+b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{p-(b+1)q+r}{a+b} \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式の解は $\begin{cases} x = \frac{p+(a-1)q+r}{a+b} \\ y = \frac{(b-1)p+(ab+1)q-(a+1)r}{a+b} \\ z = \frac{p-(b+1)q+r}{a+b} \end{cases}$

である. $a=-b$ の場合, $(*)=\begin{pmatrix}0&1&a+1&p-q\\1&0&-1&q\\0&0&0&p+(a-1)q+r\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解ををもつためには $r=-p-(a-1)q$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases}y+(a+1)z=p-q\\x-z=q\end{cases}$ と同値である. $z=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=t+q\\y=-(a+1)t+p-q\\z=t\end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(15) $\begin{pmatrix}a&1&1&p\\1&a&1&q\\1&1&a&r\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&1-a^2&1-a&p-aq\\1&a&1&q\\0&1-a&a-1&r-q\end{pmatrix}\cdots(*)$ より, $a\neq 1$ の場合,

$(*)\xrightarrow[\frac{1}{1-a}\text{ 倍する}]{\text{第 1,3 行を}}\begin{pmatrix}0&1+a&1&\frac{aq-p}{a-1}\\1&a&1&q\\0&1&-1&\frac{q-r}{a-1}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&a+2&\frac{-p-q+(a+1)r}{a-1}\\1&0&a+1&\frac{-q+ar}{a-1}\\0&1&-1&\frac{q-r}{a-1}\end{pmatrix}\cdots(**)$ と変形される. 従って, $a\neq 1,-2$ の場合, $(**)\xrightarrow[\frac{1}{a+2}\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}}\begin{pmatrix}0&0&1&\frac{-p-q+(a+1)r}{(a-1)(a+2)}\\1&0&a+1&\frac{-q+ar}{a-1}\\0&1&-1&\frac{q-r}{a-1}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&1&\frac{-p-q+(a+1)r}{(a-1)(a+2)}\\1&0&0&\frac{(a+1)p-q-r}{(a-1)(a+2)}\\0&1&0&\frac{-p+(a+1)q-r}{(a-1)(a+2)}\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式の解は $\begin{cases}x=\frac{(a+1)p-q-r}{(a-1)(a+2)}\\y=\frac{-p+(a+1)q-r}{(a-1)(a+2)}\\z=\frac{-p-q+(a+1)r}{(a-1)(a+2)}\end{cases}$ である. $a=-2$ の場合, $(**)=\begin{pmatrix}0&0&0&\frac{p+q+r}{3}\\1&0&-1&\frac{q+2r}{3}\\0&1&-1&\frac{-q+r}{3}\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解ををもつためには $p=-q-r$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases}x-z=\frac{q+2r}{3}\\y-z=\frac{-q+r}{3}\end{cases}$ と同値である. $z=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=t+\frac{q+2r}{3}\\y=t-\frac{q-r}{3}\\z=t\end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる. $a=1$ の場合, $(*)=\begin{pmatrix}0&0&0&p-q\\1&1&1&q\\0&0&0&r-q\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解ををもつためには $p=q=r$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $x+y+z=p$ と同値である. $y=t,\ z=u$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=-t-u+p\\y=t\\z=u\end{cases}$ ($t,\ u$ は任意) で与えられる.

(16) $\begin{pmatrix}a&1&1&1&p\\1&a&1&1&q\\1&1&a&1&r\\1&1&1&a&s\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&1-a^2&1-a&1-a&p-aq\\1&a&1&1&q\\0&1-a&a-1&0&r-q\\0&1-a&0&a-1&s-q\end{pmatrix}\cdots(*)$ より, $a\neq 1$ の場合,

$(*)\xrightarrow[\frac{1}{1-a}\text{ 倍する}]{\text{第 1,3,4 行を}}\begin{pmatrix}0&1+a&1&1&\frac{aq-p}{a-1}\\1&a&1&1&q\\0&1&-1&0&\frac{q-r}{a-1}\\0&1&0&-1&\frac{q-s}{a-1}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&a+2&1&\frac{-p-q+(a+1)r}{a-1}\\1&0&a+1&1&\frac{-q+ar}{a-1}\\0&1&-1&0&\frac{q-r}{a-1}\\0&0&1&-1&\frac{r-s}{a-1}\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(4,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a+3 & \frac{-p-q-r+(a+2)s}{a-1} \\ 1 & 0 & 0 & a+2 & \frac{-q-r+(a+1)s}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{q-s}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{r-s}{a-1} \end{pmatrix} \cdots (**)$ と変形される. 従って, $a \neq 1, -3$ の場合,

$(**) \xrightarrow[\frac{1}{a+3}\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-p-q-r+(a+2)s}{(a-1)(a+3)} \\ 1 & 0 & 0 & a+2 & \frac{-q-r+(a+1)s}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{q-s}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{r-s}{a-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(1,4)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-p-q-r+(a+2)s}{(a-1)(a+3)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{(a+2)p-q-r-s}{(a-1)(a+3)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-p+(a+2)q-r-s}{(a-1)(a+3)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-p-q+(a+2)r-s}{(a-1)(a+3)} \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式の解は $\begin{cases} x = \frac{(a+2)p-q-r-s}{(a-1)(a+3)} \\ y = \frac{-p+(a+2)q-r-s}{(a-1)(a+3)} \\ z = \frac{-p-q+(a+2)r-s}{(a-1)(a+3)} \\ w = \frac{-p-q-r+(a+2)s}{(a-1)(a+3)} \end{cases}$ である. $a = -3$ の場合, $(**) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p+q+r+s}{4} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{q+r+2s}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{-q+s}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{-r+s}{4} \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解ををもつためには $p = -q-r-s$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x - w = \frac{q+r+2s}{4} \\ y - w = \frac{-q+s}{4} \\ z - w = \frac{-r+s}{4} \end{cases}$ と同値である. $w = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = t + \frac{q+r+2s}{4} \\ y = t - \frac{q-s}{4} \\ z = t - \frac{r-s}{4} \\ w = t \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる. $a = 1$ の場合, $(*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & p-q \\ 1 & 1 & 1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-q \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解ををもつためには $p = q = r = s$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $x+y+z+w = p$ と同値である. $y = t$, $z = u$, $w = v$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -t-u-v+p \\ y = t \\ z = u \\ w = v \end{cases}$ ($t$, $u$, $v$ は任意) で与えられる.

(17) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 2 & -1 & a & 3 & r \\ a & -2 & 2 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 0 & 1 & a-2 & -1 & r-2p \\ 0 & a-2 & 2-a & 3-2a & s-ap \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & p+q \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & s-ap-(a-2)q \end{pmatrix} \cdots (*)$ より, $a \neq 1$ の場合, $(*) \xrightarrow[\text{第 4 行を } \frac{1}{1-a} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を } \frac{1}{a-1} \text{ 倍して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & p+q \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{r-2p-q}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{ap+(a-2)q-s}{a-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & p+q \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{r-2p+(a-2)q}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{r-2p-q}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{ap+(a-2)q-s}{a-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-p+q+s}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{(a-2)p+2(a-2)q+r-s}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2p-q+r}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{ap+(a-2)q-s}{a-1} \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式の解は $\begin{cases} x = \frac{-p+q+s}{a-1} \\ y = \frac{(a-2)p+2(a-2)q+r-s}{a-1} \\ z = \frac{-2p-q+r}{a-1} \\ w = \frac{ap+(a-2)q-s}{a-1} \end{cases}$ である. $a = 1$ の

場合, $(*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & p+q \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p+q \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解ををもつためには $r = 2p+q$, $s = p-q$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x+w = p+q \\ y-z-w = q \end{cases}$ と同値である. $z = t$, $w = u$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -u+p+q \\ y = t+u+q \\ z = t \\ w = u \end{cases}$ ($t$, $u$ は任意) で与えられる.

(18) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & a & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & a & r \\ 1 & 3 & 3 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & a & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & a & r \\ 0 & 3-a & 3 & 1 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a^2 & 0 & p-aq \\ 0 & 1 & a & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & a & r \\ 0 & 0 & a^2-3a+3 & 1 & s-p+(a-3)q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^3 & p-aq+a^2r \\ 0 & 1 & 0 & -a^2 & q-ar \\ 0 & 0 & 1 & a & r \\ 0 & 0 & 0 & (1-a)^3 & s-p+(a-3)q-(a^2-3a+3)r \end{pmatrix} \cdots (*)$

より, $a \neq 1$ の場合, $(*) \xrightarrow[\frac{1}{(1-a)^3}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^3 & p-aq+a^2r \\ 0 & 1 & 0 & -a^2 & q-ar \\ 0 & 0 & 1 & a & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{s-p+(a-3)q-(a^2-3a+3)r}{(1-a)^3} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{(3a^2-3a+1)p+(3a^2-a)q+a^2r-a^3s}{(1-a)^3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-a^2p-(3a-1)q-ar+a^2s}{(1-a)^3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{ap-(a^2-3a)q+r-as}{(1-a)^3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-p+(a-3)q-(a^2-3a+3)r+s}{(1-a)^3} \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式の解は $\begin{cases} x = \frac{(3a^2-3a+1)p+(3a^2-a)q+a^2r-a^3s}{(1-a)^3} \\ y = \frac{-a^2p-(3a-1)q-ar+a^2s}{(1-a)^3} \\ z = \frac{ap-(a^2-3a)q+r-as}{(1-a)^3} \\ w = \frac{-p+(a-3)q-(a^2-3a+3)r+s}{(1-a)^3} \end{cases}$

である. $a = 1$ の場合, $(*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & p-q+r \\ 0 & 1 & 0 & -1 & q-r \\ 0 & 0 & 1 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-2q-r \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解ををもつためには $s = p+2q+r$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x+w = p-q+r \\ y-w = q-r \\ z+w = r \end{cases}$ と同値である.

$w = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -t-p+q-r \\ y = t+q-r \\ z = -t+r \\ w = t \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる.

(19) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & p \\ 2 & -3 & 1 & 0 & q \\ 3 & -1 & -2 & -1 & r \\ 5-4a & -a-4 & 5a-1 & 2a-1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & p \\ 0 & -7 & 7 & 2 & q-2p \\ 0 & -7 & 7 & 2 & r-3p \\ 0 & 7(a-2) & 7(2-a) & 2(2-a) & (4a-5)p+s \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & p \\ 0 & -7 & 7 & 2 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (2a-1)p+(a-2)q+s \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解をもつためには $r=p+q$, $s=(1-2a)p+(2-a)q$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x-z-\frac{3}{7}w=\frac{3p+2q}{7} \\ -7y+7z+2w=q-2p \end{cases}$ と同値である. $z=t$, $w=u$ とおけば, 解は $\begin{cases} x=t+\frac{3u}{7}+\frac{3p+2q}{7} \\ y=t+\frac{2u}{7}+\frac{2p-q}{7} \\ z=t \\ w=u \end{cases}$ $(t,\ u$ は任意) で与えられる.

(20) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 & p \\ -1 & -1 & 1 & 2-a & q \\ -2 & a-3 & 2 & 2 & r \\ a+1 & 2 & -2 & -2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 & p \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & p+q \\ 0 & a-1 & 2(1-a) & 2(a-1) & r+2p \\ 0 & 1-a & (a-1)(a+2) & a(1-a) & s-p(a+1) \end{pmatrix} \cdots (*)$

より, $a \neq 1$ の場合, $(*) \xrightarrow[\frac{1}{a-1}\text{ 倍する}]{\text{第 2,3,4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 & p \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{p+q}{a-1} \\ 0 & 1 & -2 & 2 & \frac{r+2p}{a-1} \\ 0 & -1 & a+2 & -a & \frac{s-p(a+1)}{a-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-a & a-4 & \frac{p(a-3)-r}{a-1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{p+q}{a-1} \\ 0 & 1 & -2 & 2 & \frac{r+2p}{a-1} \\ 0 & 0 & a & 2-a & \frac{s-p(a-1)+r}{a-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a-4 & \frac{-p-r+q(2-a)}{a-1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{p+q}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{r-2q}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2-a & \frac{s+p+aq+r}{a-1} \end{pmatrix} \cdots (**)$ と変形される.

従って, $a \neq 1, 2$ の場合, $(**) \xrightarrow[\frac{1}{2-a}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a-4 & \frac{-p-r+q(2-a)}{a-1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{p+q}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{r-2q}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{s+p+aq+r}{(a-1)(2-a)} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2p-4q-2r+(a-4)s}{(a-1)(a-2)} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{p+q}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2p+4q+ar+2s}{(a-1)(a-2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{p+aq+r+s}{(a-1)(2-a)} \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式の解は $\begin{cases} x=\frac{-2p-4q-2r+(a-4)s}{(a-1)(a-2)} \\ y=\frac{2p+4q+ar+2s}{(a-1)(a-2)} \\ z=-\frac{p+q}{a-1} \\ w=-\frac{p+aq+r+s}{(a-1)(a-2)} \end{cases}$ である. $a=2$ の場合, $(**) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -p-r \\ 0 & 0 & -1 & 0 & p+q \\ 0 & 1 & 0 & 2 & r-2q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+p+2q+r \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解ををもつためには $s=-p-2q-r$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x-2w=-p-r \\ -z=p+q \\ y+2w=-2q+r \end{cases}$ と同値である. $w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x=2t-p-r \\ y=-2t-2q+r \\ z=-p-q \\ w=t \end{cases}$ $(t$ は任意) で与えられる. $a=1$ の場合, $(*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r+2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-2p \end{pmatrix}$ より, 与えら

れた方程式が解ををもつためには $q=-p,\ r=-2p,\ s=2p$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $x+y-z-w=p$ と同値である. $y=t,\ z=u,\ w=v$ とおけば, 解は $\begin{cases} x=-t+u+v+p \\ y=t \\ z=u \\ w=v \end{cases}$ $(t,\ u,\ v$ は任意$)$ で与えられる.

(21) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & p \\ 1 & -2 & -2 & 2 & q \\ 2 & -3 & -1 & 1 & r \\ a+b & -a-2b & a-2b & -a+2b & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & p \\ 0 & -1 & -3 & 3 & q-p \\ 0 & -1 & -3 & 3 & r-2p \\ 0 & -b & -3b & 3b & s-(a+b)p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -4 & 2p-q \\ 0 & -1 & -3 & 3 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-ap-bq \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解をもつためには $r=p+q,\ s=ap+bq$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x+4z-4w=2p-q \\ -y-3z+3w=q-p \end{cases}$ と同値である. $z=t,\ w=u$ とおけば, 解は $\begin{cases} x=-4t+4u+2p-q \\ y=-3t+3u+p-q \\ z=t \\ w=u \end{cases}$ $(t,\ u$ は任意$)$ で与えられる.

3. $\begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2k & k+1 \\ k-1 & 3k-1 & k & k-1 \\ 2k-1 & 7k-1 & 3k & 3k-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2k & k+1 \\ 0 & 3k-k^2 & 3k-2k^2 & -k^2 \\ 0 & 6k-2k^2 & 5k-4k^2 & 2k-2k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2\text{ 倍して加える}]{\text{第 3 行に第 2 行を}}$ $\begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2k & k+1 \\ 0 & 3k-k^2 & 3k-2k^2 & -k^2 \\ 0 & 0 & -k & 2k \end{pmatrix}$ より, $k\neq 0,3$ ならば, 与えられた連立 1 次方程式は 1 組しか解がない. $k=0$ の場合, 与えられた連立 1 次方程式はただ 1 つの方程式 $x+y=1$ と同値だから, 解は $\begin{cases} x=1-s \\ y=s \\ z=t \end{cases}$ $(s,\ t$ は任意$)$ で与えられ, この場合は解が 2 組以上ある. $k=3$ の場合, 与えられた連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+4y+6z=4 \\ -9z=-9 \\ -3z=6 \end{cases}$ と同値である. この第 2 式からは $z=1$, 第 3 式からは $z=-2$ が得られるため, 与えられた連立 1 次方程式は解を持たない.

4. $\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-3 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & (\lambda-2)(\lambda-4) & 2(\lambda-4) \\ -1 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & -2(\lambda-4) & \lambda-4 \end{pmatrix} \cdots(*)$ である. $\lambda\neq 4$ の場合,

$(*) \xrightarrow[\frac{1}{\lambda-4}\text{ 倍する}]{\text{第 1 行と第 3 行を}} \begin{pmatrix} 0 & \lambda-2 & 2 \\ -1 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdots(**)$ より, $\lambda\neq -2,4$ の場合,

$(**) \xrightarrow[\frac{1}{\lambda+2}\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるため, 与えられた連立 1 次方程式の解は $x = y = z = 0$ だけである. $\lambda = -2$ の場合, $(**) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた方程式は $\begin{cases} -x - y = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$ と同値である. $y = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$ ($t$ は任意) で与えられる. $\lambda = 4$ の場合, $(*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた方程式は $-x + y + 2z = 0$ と同値である. $y = s$, $z = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = s + 2t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$ ($s$, $t$ は任意) で与えられる.

# 線形数学 I 演習問題　第 6 回　行列の基本変形

1. 行に関する基本変形を行うことによって, 以下の行列を被約階段行列にせよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 12 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$　(11) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$　(12) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 & -4 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & -6 & -7 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} t-2 & -1 & -2 \\ -1 & t-2 & 2 \\ -2 & 2 & t+1 \end{pmatrix}$　(14) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$　(15) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

(16) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 3 & 12 & -6 & 1 & 8 \\ 5 & -1 & 11 & -3 & 3 \end{pmatrix}$　(17) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & -3 \\ -1 & 8 & 9 & 8 & 9 \end{pmatrix}$　(18) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -5 & 9 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 12 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

(19) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 9 & 21 & 19 & 14 \\ 2 & 7 & 11 & 5 & -1 \end{pmatrix}$　(20) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$　(21) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

(22) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(23) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 11 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & 11 & 5 & t \end{pmatrix}$　(24) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & t+3 \\ 4 & 3 & 2 & t & t \end{pmatrix}$

(25) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$　(26) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　(27) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & a \end{pmatrix}$

2. 次の正方行列を, 可能な場合に基本行列の積の形に表せ.

(1) 1 の (3) の行列　(2) 1 の (13) の行列

(3) 1 の (19) の第 1 列から第 4 列までの行列　(4) 1 の (22) の第 1 列から第 4 列までの行列

(5) 1 の (27) の行列

# 第 6 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\ \text{倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\ \text{倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{2}{7}\ \text{倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\ \text{倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}\ \text{倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}\ \text{倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}\ \text{倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 7 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{21}\ \text{倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{4}\ \text{倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\ \text{倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix}2&-1&-1&12\\1&-3&2&1\\4&-5&1&18\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}\begin{pmatrix}1&-3&2&1\\2&-1&-1&12\\4&-5&1&18\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-3&2&1\\0&5&-5&10\\0&7&-7&14\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$
$\begin{pmatrix}1&-3&2&1\\0&1&-1&2\\0&7&-7&14\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-1&7\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\3&4&-1&1\\5&6&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-2&2&-2\\0&-4&4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&1&-1&1\\0&-4&4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix}3&-1&-4&-5\\1&1&-1&-2\\1&5&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}}\begin{pmatrix}1&5&0&-3\\1&1&-1&-2\\3&-1&-4&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&5&0&-3\\0&-4&-1&1\\0&-16&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$
$\begin{pmatrix}1&5&0&-3\\0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&-16&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{4}&-\frac{7}{4}\\0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix}2&5&3&4\\3&8&5&5\\3&5&2&11\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}}\begin{pmatrix}2&5&3&4\\1&3&2&1\\3&5&2&11\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}\begin{pmatrix}1&3&2&1\\2&5&3&4\\3&5&2&11\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&-1&-1&2\\0&-4&-4&8\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&1&1&-2\\0&-4&-4&8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-1&7\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

(12) $\begin{pmatrix}3&-5&-5&-4\\2&-2&-3&-3\\5&1&-6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 1 行から}}\begin{pmatrix}1&-3&-2&-1\\2&-2&-3&-3\\5&1&-6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-3&-2&-1\\0&4&1&-1\\0&16&4&-2\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&-3&-2&-1\\0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&16&4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{4}&-\frac{7}{4}\\0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{4}&-\frac{7}{4}\\0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{4}&0\\0&1&\frac{1}{4}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix}t-2&-1&-2\\-1&t-2&2\\-2&2&t+1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&(t-1)(t-3)&2(t-3)\\-1&t-2&2\\0&-2(t-3)&t-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}$
$\begin{pmatrix}-1&t-2&2\\0&(t-1)(t-3)&2(t-3)\\0&-2(t-3)&t-3\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}}\begin{pmatrix}1&2-t&-2\\0&(t-1)(t-3)&2(t-3)\\0&-2(t-3)&t-3\end{pmatrix}\cdots(*)$ より, $t=3$ ならば $(*)$ は
$\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ となり, 被約階段行列である. $t\neq 3$ ならば $(*)\xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}\begin{pmatrix}1&2-t&-2\\0&-2(t-3)&t-3\\0&(t-1)(t-3)&2(t-3)\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 行を } \frac{1}{t-3} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を } -\frac{1}{2(t-3)} \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 2-t & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & t-1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-t-2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{t+3}{2} \end{pmatrix}$ と変形されるため, $t=-3$ ならば, 最後に得られた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるため, 被約階段行列である. $t \neq \pm 3$ ならば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-t-2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{t+3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{2}{t+3} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{t+2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(14) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(15) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 1 行から}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{7} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

(16) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 3 & 12 & -6 & 1 & 8 \\ 5 & -1 & 11 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 18 & -18 & 4 & 26 \\ 0 & 9 & -9 & 2 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 倍したものを引く}]{\text{第 2 行から第 3 行を}}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 9 & -9 & 2 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 9 & -9 & 2 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{9} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{9} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{9} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{40} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{9} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{\text{(3,5) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(17) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & -3 \\ -1 & 8 & 9 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(18) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -5 & 9 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 12 & -4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 3 行から}} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -5 & 9 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 1 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 6 & -8 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(19) $$\begin{pmatrix}1&2&4&-6&1\\3&1&7&7&8\\1&9&21&19&14\\2&7&11&5&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&4&-6&1\\0&-5&-5&25&5\\0&7&17&25&13\\0&3&3&17&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&2&4&-6&1\\0&1&1&5&-1\\0&7&17&25&13\\0&3&3&17&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&2&-16&3\\0&1&1&5&-1\\0&0&10&-10&20\\0&0&0&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{10}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&2&-16&3\\0&1&1&5&-1\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-18&-1\\0&1&0&6&-3\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}}\begin{pmatrix}1&0&0&-18&-1\\0&1&0&6&-3\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&-3\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

(20) $$\begin{pmatrix}1&-3&3&2&-7\\4&3&-2&1&8\\5&2&1&3&3\\5&6&1&3&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-3&3&2&-7\\0&15&-14&-7&36\\0&17&-14&-7&38\\0&21&-14&-7&42\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}}$$

$$\begin{pmatrix}1&-3&3&2&-7\\0&-2&0&0&-2\\0&17&-14&-7&38\\0&21&-14&-7&42\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&-3&3&2&-7\\0&1&0&0&1\\0&17&-14&-7&38\\0&21&-14&-7&42\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&3&2&-4\\0&1&0&0&1\\0&0&-14&-7&21\\0&0&-14&-7&21\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{14}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&0&3&2&-4\\0&1&0&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&-14&-7&21\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(21) $$\begin{pmatrix}3&2&-3&1&-2\\4&3&-4&2&-1\\2&1&2&-1&4\\6&3&2&-2&5\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 1 行に第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&1&-5&2&-6\\4&3&-4&2&-1\\2&1&2&-1&4\\6&3&2&-2&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-5&2&-6\\0&-1&16&-6&23\\0&-1&12&-5&16\\0&-3&32&-14&41\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&1&-5&2&-6\\0&1&-16&6&-23\\0&-1&12&-5&16\\0&-3&32&-14&41\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&11&-4&17\\0&1&-16&6&-23\\0&0&-4&1&-7\\0&0&-16&4&-28\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{14}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&11&-4&17\\0&1&-16&6&-23\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{7}{4}\\0&0&-16&4&-28\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{5}{4}&-\frac{9}{4}\\0&1&0&2&5\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{7}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(22) $$\begin{pmatrix}1&2&0&-1&-1\\-1&1&2&0&3\\2&0&1&1&8\\1&-2&-1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&0&-1&-1\\0&3&2&-1&2\\0&-4&1&3&10\\0&-4&-1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第 2 行に第 4 行}}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&-1&-1\\0&-1&1&1&5\\0&-4&1&3&10\\0&-4&-1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&2&0&-1&-1\\0&1&-1&-1&-5\\0&-4&1&3&10\\0&-4&-1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&9\\0&1&-1&-1&-5\\0&0&-3&-1&-10\\0&0&-5&-2&-17\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 4 行に第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(23) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 11 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & 11 & 5 & t \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 7 & 7 & 25 & 18 \\ 0 & 3 & 3 & 17 & t+14 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 7 & 7 & 25 & 18 \\ 0 & 3 & 3 & 17 & t+14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & t+32 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{60}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & t+32 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} \cdots (*)$ より, $t=0$ ならば $(*)$ は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるため, 被約階段行列である. $t \neq 0$ ならば $(*)$ $\xrightarrow[\frac{1}{t}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{\text{(4,5) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(24) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & t+3 \\ 4 & 3 & 2 & t & t \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & t+2 \\ 0 & -5 & -10 & t-4 & t-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+1 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 & t+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 & t+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix} \cdots (*)$ より, $t=-1$ ならば $(*)$ は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるため, 被約階段行列である. $t \neq -1$ ならば $(*)$ $\xrightarrow[\text{を }\frac{1}{t+1}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,5) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(25) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第 1 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(26) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(27) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & a-2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & a+7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \cdots (*)$ より,

$a=-2$ ならば $(*)$ は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるため, 被約階段行列である.

$a \neq -2$ ならば, $(*) \xrightarrow[\frac{1}{a+2}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. 基本行列の逆行列は $P_n(i,j;c)^{-1} = P_n(i,j;-c)$, $Q_n(i;c)^{-1} = Q_n\left(i;\frac{1}{c}\right)$, $R_n(i,j)^{-1} = R_n(i,j)$ で与えられることに注意する.

(1) 与えられた行列を $A$ とする. 1 の (3) の解答における行に関する変形を, 基本行列を左からかける形で表せば

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(3,1;-3)P_3(2,1;-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(2,3;-6)P_3(1,3;2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_3(3;-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{R_3(2,3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_3\left(3;\frac{1}{5}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(2,3;1)P_3(1,3;-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから

$P_3(2,3;1)P_3(1,3;-1)Q_3\left(3;\frac{1}{5}\right)R_3(2,3)Q_3(3;-1)P_3(2,3;-6)P_3(1,3;2)P_3(3,1;-3)P_3(2,1;-2)A = E_3$ が成り立つ. 従って, $A$ は $P_3(2,3;1)P_3(1,3;-1)Q_3\left(3;\frac{1}{5}\right)R_3(2,3)Q_3(3;-1)P_3(2,3;-6)P_3(1,3;2)P_3(3,1;-3)P_3(2,1;-2)$ の逆行列 $P_3(2,1;2)P_3(3,1;3)P_3(1,3;-2)P_3(2,3;6)Q_3(3;-1)R_3(2,3)Q_3(3;5)P_3(1,3;1)P_3(2,3;-1)$ に等しい.

(2) 与えられた行列を $A$ とする. 1 の (13) の解答から, $A$ が正則になるのは $t \neq \pm 3$ の場合である. このとき, 1 の (3) の解答における行に関する変形を, 基本行列を左からかける形で表せば

$\begin{pmatrix} t-2 & -1 & -2 \\ -1 & t-2 & 2 \\ -2 & 2 & t+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(3,2;-2)P_3(1,2;t-2)} \begin{pmatrix} 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \\ -1 & t-2 & 2 \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{R_3(1,2)}$

$\begin{pmatrix} -1 & t-2 & 2 \\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_3(1;-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2-t & -2 \\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{R_3(2,3)}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2-t & -2\\ 0 & -2(t-3) & t-3\\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3)\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_3\left(3;\frac{1}{t-3}\right)Q_3\left(2;-\frac{1}{2(t-3)}\right)} \begin{pmatrix}1 & 2-t & -2\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & t-1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(3,2;-t+1)P_3(1,2;t-2)} \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{-t-2}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{t+3}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{-t-2}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{t+3}{2}\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_3\left(3;\frac{2}{t+3}\right)} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{t+2}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3\left(2,3;\frac{1}{2}\right)P_3\left(1,2;\frac{t+2}{2}\right)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ だから

$P_3\left(2,3;\frac{1}{2}\right)P_3\left(1,2;\frac{t+2}{2}\right)Q_3\left(3;\frac{2}{t+3}\right)P_3(3,2;-t+1)P_3(1,2;t-2)Q_3\left(3;\frac{1}{t-3}\right)Q_3\left(2;-\frac{1}{2(t-3)}\right)R_3(2,3)Q_3(1;-1)$ $\times R_3(1,2)P_3(3,2;-2)P_3(1,2;t-2)A=E_3$ が成り立つ. 従って, $A$ は $P_3\left(2,3;\frac{1}{2}\right)P_3\left(1,2;\frac{t+2}{2}\right)Q_3\left(3;\frac{2}{t+3}\right)$ $\times P_3(3,2;-t+1)P_3(1,2;t-2)Q_3\left(3;\frac{1}{t-3}\right)Q_3\left(2;-\frac{1}{2(t-3)}\right)R_3(2,3)Q_3(1;-1)R_3(1,2)P_3(3,2;-2)P_3(1,2;t-2)$ の逆行列 $P_3(1,2;-t+2)P_3(3,2;2)R_3(1,2)Q_3(1;-1)R_3(2,3)Q_3(2;-2(t-3))Q_3(3;t-3)P_3(1,2;-t+2)P_3(2,3;t-1)$ $\times Q_3\left(3;\frac{t+3}{2}\right)P_3\left(1,2;-\frac{t+2}{2}\right)P_3\left(2,3;-\frac{1}{2}\right)$ に等しい.

(3) 与えられた行列を $A$ とする. 1 の (19) の解答における行に関する変形を, 基本行列を左からかける形で表せば

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -6\\ 3 & 1 & 7 & 7\\ 1 & 9 & 21 & 19\\ 2 & 7 & 11 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,1;-2)P_4(3,1;-1)P_4(2,1;-3)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -6\\ 0 & -5 & -5 & 25\\ 0 & 7 & 17 & 25\\ 0 & 3 & 3 & 17\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4\left(2;-\frac{1}{5}\right)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -6\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 7 & 17 & 25\\ 0 & 3 & 3 & 17\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,2;-3)P_4(3,2;-7)P_4(1,2;-2)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -16\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 10 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4\left(2;\frac{1}{10}\right)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -16\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(2,3;-1)P_4(1,3;-2)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -18\\ 0 & 1 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4\left(2;\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -18\\ 0 & 1 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(3,4;1)P_4(2,4;-6)P_4(1,4;18)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ だから

$P_4(3,4;1)P_4(2,4;-6)P_4(1,4;18)Q_4\left(2;\frac{1}{2}\right)P_4(2,3;-1)P_4(1,3;-2)Q_4\left(2;\frac{1}{10}\right)P_4(4,2;-3)P_4(3,2;-7)P_4(1,2;-2)$ $\times Q_4\left(2;-\frac{1}{5}\right)P_4(4,1;-2)P_4(3,1;-1)P_4(2,1;-3)A=E_4$ が成り立つ. 従って, 与えられた行列は $P_4(3,4;1)P_4(2,4;-6)P_4(1,4;18)Q_4\left(2;\frac{1}{2}\right)P_4(2,3;-1)P_4(1,3;-2)Q_4\left(2;\frac{1}{10}\right)P_4(4,2;-3)P_4(3,2;-7)P_4(1,2;-2)$ $\times Q_4\left(2;-\frac{1}{5}\right)P_4(4,1;-2)P_4(3,1;-1)P_4(2,1;-3)$ の逆行列 $P_4(2,1;3)P_4(3,1;1)P_4(4,1;2)Q_4(2;-5)P_4(1,2;2)$ $\times P_4(3,2;7)P_4(4,2;3)Q_4(2;10)P_4(1,3;2)P_4(2,3;1)Q_4(2;2)P_4(1,4;-18)P_4(2,4;6)P_4(3,4;-1)$ に等しい.

(4) 与えられた行列を $A$ とする. 1 の (22) の解答における行に関する変形を, 基本行列を左からかける形で表せば

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,1;-1)P_4(3,1;-2)P_4(2,1;1)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 2 & -1\\ 0 & -4 & 1 & 3\\ 0 & -4 & -1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(2,4;1)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 1 & 3\\ 0 & -4 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4(2;-1)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -4 & 1 & 3\\ 0 & -4 & -1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,2;4)P_4(3,2;4)P_4(1,2;-2)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 0 & -5 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,3;-2)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{R_4(3,4)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,3;3)P_4(2,3;1)P_4(1,3;-2)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4(4;-1)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(2,4;1)P_4(1,4;-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ だから $P_4(2,4;1)P_4(1,4;-1)Q_4(4;-1)P_4(4,3;3)P_4(2,3;1)P_4(1,3;-2)R_4(3,4)$ $\times P_4(4,3;-2)P_4(4,2;4)P_4(3,2;4)P_4(1,2;-2)Q_4(2;-1)P_4(2,4;1)P_4(4,1;-1)P_4(3,1;-2)P_4(2,1;1)A = E_4$ が成り立つ. 従って, $A$ は $P_4(2,4;1)P_4(1,4;-1)Q_4(4;-1)P_4(4,3;3)P_4(2,3;1)P_4(1,3;-2)R_4(3,4)P_4(4,3;-2)P_4(4,2;4)$ $\times P_4(3,2;4)P_4(1,2;-2)Q_4(2;-1)P_4(2,4;1)P_4(4,1;-1)P_4(3,1;-2)P_4(2,1;1)$ の逆行列 $P_4(2,1;-1)P_4(3,1;2)P_4(4,1;1)P_4(2,4;-1)Q_4(2;-1)P_4(1,2;2)P_4(3,2;-4)P_4(4,2;-4)P_4(4,3;2)R_4(3,4)P_4(1,3;2)$ $\times P_4(2,3;-1)P_4(4,3;-3)Q_4(4;-1)P_4(1,4;1)P_4(2,4;-1)$ に等しい.

(5) 与えられた行列を $A$ とする. 1 の (27) の解答から, $A$ が正則になるのは $a \neq -2$ の場合である. 1 の (27) の解答における行に関する変形を, 基本行列を左からかける形で表せば

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,1;-2)P_4(3,1;1)P_4(2,1;-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4(2;-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & a-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,2;3)P_4(3,2;2)P_4(1,2;1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & a+7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,3;-1)P_4(2,3;-1)P_4(1,3;-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4\left(4;\frac{1}{a+2}\right)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(3,4;-5)P_4(2,4;2)P_4(1,4;6)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ だから $P_4(3,4;-5)P_4(2,4;2)P_4(1,4;6)Q_4\left(4;\frac{1}{a+2}\right)$ $\times P_4(4,3;-1)P_4(2,3;-1)P_4(1,3;-2)P_4(4,2;3)P_4(3,2;2)P_4(1,2;1)Q_4(2;-1)P_4(4,2;3)P_4(3,2;2)P_4(1,2;1)A = E_4$ が成り立つ. 従って, $A$ は $P_4(3,4;-5)P_4(2,4;2)P_4(1,4;6)Q_4\left(4;\frac{1}{a+2}\right)P_4(4,3;-1)P_4(2,3;-1)P_4(1,3;-2)P_4(4,2;3)$ $\times P_4(3,2;2)P_4(1,2;1)Q_4(2;-1)P_4(4,2;3)P_4(3,2;2)P_4(1,2;1)$ の逆行列 $P_4(1,2;-1)P_4(3,2;-2)P_4(4,2;-3)Q_4(2;1)$ $\times P_4(1,2;-1)P_4(3,2;-2)P_4(4,2;-3)P_4(1,3;2)P_4(2,3;1)P_4(4,3;1)Q_4(4;a+2)P_4(1,4;-6)P_4(2,4;-2)P_4(3,4;5)$ に等しい.

# 線形数学 I 演習問題　第 7 回　逆行列・行列の階数

1. 以下の行列が正則行列ならば, その逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
(3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
(4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$
(5) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
(7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
(8) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
(9) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
(10) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
(12) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
(13) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
(14) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(15) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(16) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
(17) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
(18) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
(19) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$
(20) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(21) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
(22) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
(23) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
(24) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(25) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(26) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
(27) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
(28) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$
(29) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

(30) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
(31) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
(32) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
(33) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(34) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
(35) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
(36) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(37) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(38) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(39) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
(40) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
(41) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(42) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
(43) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
(44) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

(45) $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ a & 1+a^2 & ab & ac \\ b & ab & 1+b^2 & bc \\ c & ac & bc & 1+c^2 \end{pmatrix}$

2. 次の行列の階数を求めよ．ただし, $a$, $b$, $c$, $d$ は定数とする．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & -3 \\ 3 & 1 & 0 & -8 \\ -1 & a+1 & 4 & a \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ (10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ (11) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (12) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ (14) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ (15) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ (16) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & a \\ 4 & -2 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$

(17) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & a & 3 \\ a & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (18) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & a \\ 4 & 2 & -2 & a+1 \end{pmatrix}$ (19) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & a^2 & a+1 \end{pmatrix}$ (20) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(21) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (22) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (23) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (24) $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(25) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (26) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ (27) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(28) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & b \\ -1 & 0 & a & a-1 \end{pmatrix}$ (29) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & a+1 & a+3 \\ a & 0 & a^2+1 & 3a \\ -3 & -8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (30) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & b \\ 1 & 2 & a & a+3 \end{pmatrix}$

(31) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & a+4 \\ 1 & -1 & a & 3 \end{pmatrix}$ (32) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2+2a & 2a^2-3a \\ 1 & 2 & a^2-2 & a^2-1 \end{pmatrix}$ (33) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & a+1 & a+3 \\ a & 0 & 4 & 3a \\ -3 & -8 & a & -1 \end{pmatrix}$

(34) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \\ 2 & 7 & 11 & a^2-12 \\ 2 & 7 & a+9 & -8 \end{pmatrix}$ (35) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ -1 & -1 & 1 & 2-a \\ -2 & a-3 & 2 & 2 \\ a+1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ (36) $\begin{pmatrix} 1 & -a-2 & 1 & a \\ -1 & 1 & -1 & -a \\ -2 & 2 & a-1 & 2 \\ a+3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(37) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & a & b \\ 1 & -2 & c & d \end{pmatrix}$ (38) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & a+1 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & 11 & 15 & a \end{pmatrix}$ (39) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -10 & 10 & 7 \\ 8 & 10 & 20 & 12 & a^2-11 \\ 5 & 9 & a+15 & 13 & a-6 \end{pmatrix}$

3. 前問の (1), (6), (31), (35) の行列をそれぞれ $A$, $B$, $C$, $D$ とする．

(1) $\operatorname{rank} A < 3$ となるように $a$ が定められているとする．$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ の 第 $i$ 成分を $b_i$ とするとき, 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つための $b_1, b_2, b_3$ の間の関係式を求め, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ．また, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ が存在するような $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ 全体からなる集合を答えよ.

(2) $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ の 第 $i$ 成分を $b_i$ とするとき, 方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つための $b_1, b_2, b_3$ の間の関係式を求め, $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ．また, $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ が存在するような $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ 全体からなる集合を答えよ.

(3) $\operatorname{rank} C < 4$ となるように $a$ が定められているとする．$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^4$ の 第 $i$ 成分を $b_i$ とするとき, 方程式 $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つための $b_1, b_2, b_3, b_4$ の間の関係式を求め, $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ．また, $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ が存在するような $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^4$ 全体からなる集合を答えよ.

(4) $\operatorname{rank} D < 4$ となるように $a$ が定められているとする．$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^4$ の 第 $i$ 成分を $b_i$ とするとき, 方程式 $D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つための $b_1, b_2, b_3, b_4$ の間の関係式を求め, $D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ．また, $D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ が存在するような $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^4$ 全体からなる集合を答えよ.

4. (発展問題) (1) $Q_n(i;-1)R_n(i,j)$ を $P_n(k,l;c)$ の形の基本行列の積で表せ.

(2) $m$ が 2 以上の整数で, $m \times n$ 行列 $A$ の $(p,q)$ 成分が 0 でないとする．また, $p'$, $p''$ を $1 \leqq p', p'' \leqq m$ である整数として, $p''$ は $p$ と異なるとする．$p' \neq p$ ならば $P_m(k,l;c)$ $(k = p$ または $p')$ の形の基本行列の積を $A$ の左から掛けることにより, 第 $q$ 列が基本ベクトル $\boldsymbol{e}_{p'}$ になるようにでき, $p' = p$ の場合は, $P_m(k,l;c)$ $(k = p$ または $p'')$ の形の基本行列の積を $A$ の左から掛けることにより, 第 $q$ 列が基本ベクトル $\boldsymbol{e}_{p'}$ になるようにできることを示せ.

5. (発展問題) $m \times n$ 行列 $A$ の階数が $r$ のとき以下のことを示せ.

(1) $r < m$ ならば $P_m(i,j;c)$ の形の $m$ 次基本行列の積で表される行列 $P$ で，$PA$ が以下の条件 $(i)$, $(ii)$, $(iii)$ を満たす行列 $B = (b_{ij})$ になるようなものがある.

$(i)$ $i > r$ ならば $b_{ij} = 0$.

$(ii)$ $i \leqq r$ ならば $b_{i1} = \cdots = b_{i\,j(i)-1} = 0$, $b_{i\,j(i)} = 1$ となるような $1 \leqq j(i) \leqq n$ があって，さらに $B$ の第 $j(i)$ 列は $\boldsymbol{R}^m$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ になる.

$(iii)$ $i < r$ ならば $j(i) < j(i+1)$ である.

(2) $r = m$ ならば $P_m(i,j;c)$ の形の $m$ 次基本行列の積で表される行列 $P$ と $d \in \boldsymbol{R}$ $(d \neq 0)$ で，$Q_m(m;d)PA$ が上の条件 $(i)$, $(ii)$, $(iii)$ を満たすようなものがある.

(3) $m = n$ のとき, $A$ の行列式の値が 1 ならば, $A$ は $P_n(i,j;c)$ の形の基本行列の積で表される.

6. (発展問題) $A$ は $m \times n$ 行列, $B$ は $n \times k$ 行列で $AB = O$ が成り立つとする．このとき $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqq n$ であることを示せ.

# 第 7 回の演習問題の解答

1. (1) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{$-1$ 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & 6 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 2 & -\frac{5}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 2 & -\frac{5}{3} \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{8}{3} & 2 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

(2) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(3) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{3} & -\frac{2}{3} & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & -\frac{2}{3} & -3 \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{3 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -3 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{$-2$ 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 35 & 9 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 11 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -84 & -21 & -18 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{84}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 35 & 9 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 11 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{14} & -\frac{5}{28} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{28} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{14} & -\frac{5}{28} \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{28} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{14} & -\frac{5}{28} \end{pmatrix}.$$

(5) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{$-1$ 倍したもの加える}]{\text{第 3 行に第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 6 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{3 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 11 & -10 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 10 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 11 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 24 & -22 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{$-\frac{1}{3}$ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 10 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 11 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{24}{5} & -\frac{22}{5} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{26}{5} & -\frac{23}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{17}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{24}{5} & -\frac{22}{5} \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{26}{5} & -\frac{23}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{17}{5} & \frac{16}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{24}{5} & -\frac{22}{5} \end{pmatrix}$.

(6) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{2 倍したもの加える}]{\text{第 1 行に第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{$-1$ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{$-1$ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(7) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{$\frac{1}{5}$ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{$\frac{1}{2}$ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{3}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(8) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第 1 行に第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第 2 行に第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right)
\text{ より }
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}.
$$

(9)
$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{$-1$ 倍したもの加える}]{\text{第 1 行に第 2 行を}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{$\frac{1}{2}$ 倍する}]{\text{第 2 行を}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{array}\right)
$$
となり, 左半分の行列の階数は 2 であるため, 与えられた行列の逆行列は存在しない.

(10)
$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{$-1$ 倍する}]{\text{第 1 行を}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{$-2$ 倍したもの加える}]{\text{第 3 行に第 2 行を}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 15 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -19 & -5 & -1 & 3 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{$-\frac{1}{19}$ 倍する}]{\text{第 3 行を}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 15 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{19} & \frac{1}{19} & -\frac{3}{19} \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{19} & \frac{4}{19} & \frac{7}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{19} & -\frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{19} & \frac{1}{19} & -\frac{3}{19} \end{array}\right)
\text{ より }
\begin{pmatrix} \frac{1}{19} & \frac{4}{19} & \frac{7}{19} \\ \frac{2}{19} & -\frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \\ \frac{5}{19} & \frac{1}{19} & -\frac{3}{19} \end{pmatrix}.
$$

(11)
$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第 2 行に第 3 行}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{$-1$ 倍する}]{\text{第 2 行を}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{$-\frac{1}{7}$ 倍する}]{\text{第 3 行を}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right)
\text{ より }
\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.
$$

(12)
$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}
$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -5 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(13) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(14) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(15) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(16) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 3 行に第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ より, 与えられた行列の階数は 2 だから, 逆行列をもたない.

(17) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&2&-1&1&0\\ 0&1&-3&2&-1&0\\ 0&0&1&-1&2&-1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-3&2\\ 0&1&0&-1&5&-3\\ 0&0&1&-1&2&-1\end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix}1&-3&2\\ -1&5&-3\\ -1&2&-1\end{pmatrix}.$$

(18) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&1&1&0&0\\ 2&-4&-3&0&1&0\\ 1&-2&-1&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&1&1&0&0\\ 0&-2&-5&-2&1&0\\ 0&-1&-2&-1&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&1&1&0&0\\ 0&-1&-2&-1&0&1\\ 0&-2&-5&-2&1&0\end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&1&1&0&0\\ 0&1&2&1&0&-1\\ 0&-2&-5&-2&1&0\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&3&2&0&-1\\ 0&1&2&1&0&-1\\ 0&0&-1&0&1&-2\end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&3&2&0&-1\\ 0&1&2&1&0&-1\\ 0&0&1&0&-1&2\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&2&3&-7\\ 0&1&0&1&2&-5\\ 0&0&1&0&-1&2\end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix}2&3&-7\\ 1&2&-5\\ 0&-1&2\end{pmatrix}.$$

(19) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&1&1&0&0\\ 2&-4&-3&0&1&0\\ 1&-3&-4&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&1&1&0&0\\ 0&-2&-5&-2&1&0\\ 0&-2&-5&-1&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 3 行に第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&1&1&0&0\\ 0&-2&-5&-2&1&0\\ 0&0&0&1&-1&1\end{array}\right)$$ より, 与えられた行列の階数は 2 だから, 逆行列をもたない.

(20) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&-1&1&0&0\\ 1&-2&-1&0&1&0\\ -1&3&2&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&-1&1&0&0\\ 0&-1&0&-1&1&0\\ 0&2&1&1&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&-1&1&0&0\\ 0&1&0&1&-1&0\\ 0&2&1&1&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-1&2&-1&0\\ 0&1&0&1&-1&0\\ 0&0&1&-1&2&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&1&-1&0\\ 0&0&1&-1&2&1\end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix}1&1&1\\ 1&-1&0\\ -1&2&1\end{pmatrix}.$$

(21) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&-2&1&0&0\\ -1&1&1&0&1&0\\ 2&-1&1&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&-2&1&0&0\\ 0&2&-1&1&1&0\\ 0&-3&5&-2&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行を 2 倍して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&-2&1&0&0\\ 0&2&-1&1&1&0\\ 0&1&3&0&2&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&-2&1&0&0\\ 0&1&3&0&2&1\\ 0&2&-1&1&1&0\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-5&1&-2&-1\\ 0&1&3&0&2&1\\ 0&0&-7&1&-3&-2\end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{7}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-5&1&-2&-1\\ 0&1&3&0&2&1\\ 0&0&1&-\frac{1}{7}&\frac{3}{7}&\frac{2}{7}\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&\frac{2}{7}&\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\\ 0&1&0&\frac{3}{7}&\frac{5}{7}&\frac{1}{7}\\ 0&0&1&-\frac{1}{7}&\frac{3}{7}&\frac{2}{7}\end{array}\right)$$ より, 与えられた行列は正則で, その逆行列は $\begin{pmatrix}\frac{2}{7}&\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\\ \frac{3}{7}&\frac{5}{7}&\frac{1}{7}\\ -\frac{1}{7}&\frac{3}{7}&\frac{2}{7}\end{pmatrix}$ である.

(22) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$ より, 与えられた行列は正則で, その逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である.

(23) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{11}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{2}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & 0 & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{2}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & 0 & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{2}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{11} & \frac{6}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$ より, 与えられた行列は正則で, その逆行列は $\begin{pmatrix} -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{10}{11} & \frac{6}{11} & \frac{1}{11} \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ である.

(24) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ より, 求める行列は $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(25) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$ より, 与えられた行列は正則で, その逆行列は $\begin{pmatrix} -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である.

(26) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & -1 & 1 & 1-a \end{array}\right) \cdots (*)$$

より, $a=2$ ならば与えられた行列の階数は 2 だから, 逆行列をもたない. $a \neq 2$ の場合, $(*) \xrightarrow[\frac{1}{2-a}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{a-1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} & \frac{1}{a-2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{a-2} & \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} \frac{a-1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} & \frac{1}{a-2} \\ \frac{-1}{a-2} & \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} \end{pmatrix}$.

(27) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -a & 1 & 1 & a+1 \end{array}\right) \cdots (*)$ より, $a=0$ ならば与えられた行列の階数は 2 だから, 逆行列をもたない. $a \neq 0$ の場合, $(*) \xrightarrow[-\frac{1}{a}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{a+1}{a} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{a-1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{a+1}{a} \end{array}\right)$ より

$\begin{pmatrix} \frac{a-1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{a+1}{a} \end{pmatrix}$.

(28) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(29) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(30)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(31)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(32)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & -6 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & -6 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & -6 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(33)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \text{ より}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

[注意] (32), (33) の行列をそれぞれ $A$, $B$ とすれば, $A$ は $B$ の第2列と第3列を入れ替えた行列だから $A = BR_4(2,3)$ である. 従って $A^{-1} = (BR_4(2,3))^{-1} = R_4(2,3)^{-1}B^{-1} = R_4(2,3)B^{-1}$ だから $A^{-1}$ は (33) で求めた $B^{-1}$ の第2行と第3行を入れ替えた行列である.

(34)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第 2 行に第 4 行}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -1 & -4 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[-2\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 4 行に第 3 行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -4 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -5 & -6 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 & 8 & -5 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -5 & -6 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & -8 & 5 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & -8 & 5 & -11 \end{array}\right) \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & 3 & -7 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \\ -7 & -8 & 5 & -11 \end{pmatrix}.$$

(35)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -10 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -10 & -5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{−1 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -10 & -4 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 15 & -10 & -5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -10 & -4 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 40 & 15 & 1 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 20 & 8 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{40}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -10 & -4 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{40} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{40} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 20 & 8 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{7}{40} & \frac{1}{8} & \frac{7}{40} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{40} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{40} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{2 倍する}]{\text{第 4 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{7}{40} & \frac{1}{8} & \frac{7}{40} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{40} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{40} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} -\frac{9}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{7}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(36)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 4 行}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{−1 倍する}]{\text{第 1 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{−1 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{−1 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(37)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & -4 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{6}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{11}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{11}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

(38)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 3 & -5 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 5 & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \text{ より, 与えられた行列は正則で, その逆行列は } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 5 & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ である.}$$

(39)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \text{ より, 与えられた行列は}$$

正則で, その逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(40)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 3 & -5 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -6 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$
より, 与えられた行列は正則で, その逆行列は $\begin{pmatrix} 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ である.

(41)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -13 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
より, 与えられた行列は正則で, その逆行列は $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(42)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 4 行に第 1 行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 4 行}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 9 & 1 & 2 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4)\text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 18 & 2 & 3 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 18 & 2 & 3 & -14 \\ -6 & -1 & -1 & 5 \\ -9 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

(43) $$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & 4 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

となり, 左半分の行列の階数は 3 であるため, 与えられた行列の逆行列は存在しない.

(44) $$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 4 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -10 & 7 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 15 & -10 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{\text{(5,5) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 15 & 1 & 13 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & -18 & 0 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} -6 & 15 & 1 & 13 & 4 \\ 11 & -18 & 0 & -15 & -4 \\ 2 & -4 & 0 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(45) $$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & b & c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & ab & ac & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & ab & 1+b^2 & bc & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & ac & bc & 1+c^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & b & c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & b & c & 1+a^2 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & c & 1+a^2+b^2 & -a & -b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1+a^2+b^2+c^2 & -a & -b & -c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

より $$\begin{pmatrix} 1+a^2+b^2+c^2 & -a & -b & -c \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (1) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a-1 \\ 0 & -a-1 & -a^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & -a-1 & -a^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$ だから, 与えられた行列の階数は $a=0$ ならば 2 であり, $a \neq 0$ ならば 3 である.

(2) $$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \cdots (*)$$ だから $a=1$ ならば与えられた行列の階数は 1 である. $a \neq 1$ の場合, $(*) \xrightarrow[\frac{1}{a-1}\text{ 倍する}]{\text{第 2,3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -a-2 \end{pmatrix}$$ だから $a=-2$ ならば与えられた行列の階数は 2 であり, $a \neq -2, 1$ ならば与えられた行列の階数は 3 である.

(3) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & 0 & -(a+1)(2a-1) \end{pmatrix}$$ だから, 与えられた行列の階数は $a=-1$ または $a=\dfrac{1}{2}$ ならば 2 であり, $a \neq -1, \dfrac{1}{2}$ ならば 3 である.

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & -3 \\ 3 & 1 & 0 & -8 \\ -1 & a+1 & 4 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & -3 \\ 0 & -5 & -3a & 1 \\ 0 & a+3 & a+4 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{a+3}{5}\text{倍したもの加える}]{\text{第 3 行に第 2 行を}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & -3 \\ 0 & -5 & -3a & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(3a+10)(a-2)}{5} & \frac{6(a-2)}{5} \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は $a=2$ ならば 2 であり, $a \neq 2$ ならば 3 である.

(5) $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & -7 & 6 & 1 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{7}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(6) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行の入れ換え}]{\text{第 1 行と第 2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(8) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(9) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(11) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられ

た行列の階数は 2 である.

(12) $\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\1&-1&-1&2\\2&-3&1&1\\-1&3&-5&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\0&1&-3&3\\0&1&-3&3\\0&1&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-4&5\\0&1&-3&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(13) $\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&1&3&-2\\1&3&2&-2\\1&1&-4&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&1&3&-2\\0&1&3&-2\\0&-1&-3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-7&4\\0&1&3&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(14) $\begin{pmatrix}1&2&2&1\\1&-1&1&2\\2&1&1&1\\3&2&4&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-1&1\\0&-3&-3&-1\\0&-4&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{$-1$ 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 4 行を}}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&1&0\\0&-3&-3&-1\\0&-4&-2&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&-1\\0&0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 4 である.

(15) $\begin{pmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&1\\1&1&1&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 4 行}}\begin{pmatrix}1&1&1&a\\1&a&1&1\\1&1&a&1\\a&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&a-1&0&1-a\\0&0&a-1&1-a\\0&1-a&1-a&1-a^2\end{pmatrix}\cdots(*)$ だから

$a=1$ ならば与えられた行列の階数は 1 である. $a\neq 1$ の場合, $(*)\xrightarrow[\frac{1}{a-1}\text{ 倍する}]{\text{第 2,3,4 行を}}\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&-1&-1&-a-1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&a+1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&-1&-a-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&a+2\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&-a-3\end{pmatrix}$ だから $a=-3$ ならば与えられた行列の階数は 3 であり, $a\neq -3, 1$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

(16) $\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\2&-1&-2&1\\1&0&-3&a\\4&-2&0&a-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-4&3\\0&1&-4&a+1\\0&2&-4&a+1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-3&2\\0&1&-4&3\\0&0&0&a-2\\0&0&4&a-5\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}}\begin{pmatrix}1&0&-3&2\\0&1&-4&3\\0&0&4&a-5\\0&0&0&a-2\end{pmatrix}$ だから $a=2$ ならば与えられた行列の階数は 3 であり, $a\neq 2$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

(17) $\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-1&-1\\2&-1&a&3\\a&-2&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-1&-1\\0&1&a-2&-1\\0&a-2&2-a&3-2a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&0&a-1&0\\0&0&0&1-a\end{pmatrix}$

だから $a=1$ ならば与えられた行列の階数は 2 であり, $a\neq 1$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

(18) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2 & a\\ 4 & 2 & -2 & a+1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 1\\ 0 & 3 & -3 & a\\ 0 & 6 & -6 & a+1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 3 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a-1\\ 0 & 0 & 0 & a-1\end{pmatrix}$ より, $a=1$ の場合は与えられた行列の階数は 2 である. $a \neq 1$ の場合は, 最後に得られた行列をさらに (3,4) 成分に関して第 4 列の掃き出しを行えば $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ が得られるため, 与えられた行列の階数は 3 である.

(19) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -6 & -7\\ 3 & 1 & 7 & 9\\ 1 & 9 & 19 & 11\\ 2 & 7 & a^2 & a+1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -6 & -7\\ 0 & -5 & 25 & 30\\ 0 & 7 & 25 & 18\\ 0 & 3 & a^2+12 & a+15\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 5\\ 0 & -5 & 25 & 30\\ 0 & 0 & 60 & 60\\ 0 & 0 & a^2+27 & a+33\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 5\\ 0 & -5 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 60 & 60\\ 0 & 0 & 0 & -(a+2)(a-3)\end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は $a=-2$ または $a=3$ ならば 3 であり, $a \neq -1, 3$ ならば 4 である.

(20) $\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 3-a & 3 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -a^2 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & a^2-3a+3 & 1\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & a^3\\ 0 & 1 & 0 & -a^2\\ 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & (1-a)^3\end{pmatrix}$ だから $a=1$ ならば与えられた行列の階数は 3 であり, $a \neq 1$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

(21) $\begin{pmatrix}0 & 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 1\\ -2 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 2\\ -2 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 2\\ 0 & 3 & 6 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 6 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より, 与えられた行列の階数は 2 である.

(22) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 2\\ 2 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & -9 & -3\\ 0 & 2 & 6 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 6 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より, 与えられた行列の階数は 2 である.

(23) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & -3 & -1 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 3 & -1\\ 0 & -3 & -1 & 5\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 行に加える}]{\text{第 3 行を } \frac{4}{3} \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \end{pmatrix}$$

より, 与えられた行列の階数は 4 である.

(24)
$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & -7 & 6 & 1 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 与えられた行列の階数は 2 である.

(25)
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{\text{(3,5) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 与えられた行列の階数は 3 である.

(26)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 行に加える}]{\text{第 3 行を } -1 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 与えられた行列の階数は 3 である.

(27)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 1 行を } -1 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 4 行を } -2 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -14 & -13 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 31 & 30 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

より, 与えられた行列の階数は 4 である.

(28) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & b \\ -1 & 0 & a & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & b-6 \\ 0 & 2 & a & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ だから, $a=2$ かつ $b=0$ のとき階数は 2,「$a \neq 2$ かつ $b=0$」または「$a=2$ かつ $b \neq 0$」のとき階数は 3, $a \neq 2$ かつ $b \neq 0$ のとき階数は 4 である.

(29) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & a+1 & a+3 \\ a & 0 & a^2+1 & 3a \\ -3 & -8 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & a+4 & a+3 \\ 0 & -3a & a^2+a+1 & 3a \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3a & a^2+a+1 & 3a \\ 0 & -8 & a+4 & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (a-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & a-5 \end{pmatrix}$ だから, $a \neq 1$ ならば, 得られた行列

の (3,3) 成分に関して第 3 列を掃き出せば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & (a-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$ となるため, 与えられた行列の階数は $a=5$ ならば 3 であり, $a \neq 1, 5$ ならば 4 である. $a=1$ の場合は, 上の行列の第 3 行と第 4 行を入れ替えることにより, 与えられた行列の階数は 3 であることがわかる.

(30) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & b \\ 1 & 2 & a & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & b \\ 0 & 2 & a-1 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \\ 0 & 0 & a-3 & a-3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-3 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{pmatrix}$ だから, $a=3$ かつ $b=-2$ のとき階数は 2, 「$a \neq 3$ かつ $b=-2$」または「$a=3$ かつ $b \neq -2$」のとき階数は 3, $a \neq 3$ かつ $b \neq -2$ のとき階数は 4 である.

(31) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & a+4 \\ 1 & -1 & a & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & a-1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$ より,

$a=-1$ の場合は, 与えられた行列の階数は 2 である. $a \neq -1$ の場合は, 最後に得られた行列の第 3 行と第 4 行を入れ替えれば, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$ が得られるため, 与えられた行列の階数は 4 である.

(32) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2+2a & 2a^2-3a \\ 1 & 2 & a^2-2 & a^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & a^2+2a & 2a^2-3a \\ 0 & 0 & a^2-1 & a^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+3) & (a-1)(2a-1) \\ 0 & 0 & (a-1)(a+1) & (a-1)(a+1) \end{pmatrix}$ より $a=1$ のとき階数は 2, $a=-1$ のときは階数は 3 である. $a \neq \pm 1$ の場合, 第 3 行を $a-1$, 第 4 行を $(a-1)(a+1)$ で割り, 第 3 行と第 4 行を入れ替えると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+3 & 2a-1 \end{pmatrix}$ となり, さらに (3,3) 成分に関して第 3 列を掃き出せば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix}$ となる. 従って $a=4$ ならば階数は 3, $a \neq \pm 1, 4$ ならば階数は 4 である.

(33) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & a+1 & a+3 \\ a & 0 & 4 & 3a \\ -3 & -8 & a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & a+3 & a+3 \\ 0 & -3a & a+4 & 3a \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 2 行と第 4 行}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 0 & -3a & a+4 & 3a \\ 0 & -5 & a+3 & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3a+8 & 3 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 0 & 0 & (3a-2)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 6(a-2) & a-2 \end{pmatrix}$ だから, $a \neq \dfrac{2}{3}, 2$ ならば, 得られた行列の (3,3) 成分に関して第 3 列を掃き出せば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & (3a-2)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$ となるため, 与えられた行列の階数は 4 である. また, 得られた行列の第 3 行と第 4 行を入れ換えれば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3a+8 & 3 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 0 & 0 & 6(a-2) & a-2 \\ 0 & 0 & (3a-2)(a-2) & 0 \end{pmatrix}$ となるため, 与えられた行列の階数は $a=2$ ならば 2, $a=\dfrac{2}{3}$ ならば 3 である.

(34) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \\ 2 & 7 & 11 & a^2-12 \\ 2 & 7 & a+9 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & a^2-10 \\ 0 & 3 & a+3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-4 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-4 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は $a=0$ または $a=\pm 2$ ならば 3 であり, $a \neq 0, \pm 2$ ならば 4 である.

(35) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ -1 & -1 & 1 & 2-a \\ -2 & a-3 & 2 & 2 \\ a+1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & a-1 & 2-2a & 2a-2 \\ 0 & 1-a & (a-1)(a+2) & a(1-a) \end{pmatrix}$ だから, $a=1$ ならば与えられた行列の階数は 1 である. $a \neq 1$ ならば得られた行列の第 2 行と第 4 行を $\dfrac{1}{1-a}$ 倍し, 第 3 行を $\dfrac{1}{a-1}$ 倍

して, 基本変形を続けると $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -a-2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a-2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-a & a-4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a-4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$ だから, $a=2$ ならば与えられた行列の階数は 3 であり, $a \neq 1,2$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

(36) $\begin{pmatrix} 1 & -a-2 & 1 & a \\ -1 & 1 & -1 & -a \\ -2 & 2 & a-1 & 2 \\ a+3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -a-2 & 1 & a \\ 0 & -(a+1) & 0 & 0 \\ 0 & -2(a+1) & a+1 & 2(a+1) \\ 0 & (a+1)(a+4) & -(a+1) & -(a+1)(a+2) \end{pmatrix}$ だから, $a=-1$ ならば与えられた行列の階数は 1 である. $a \neq -1$ ならば得られた行列の第 2 行, 第 3 行, 第 4 行を $-\dfrac{1}{a+1}$ 倍して, 基本変形を続けると $\begin{pmatrix} 1 & -a-2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -a-4 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ だから, $a=0$ ならば与えられた行列の階数は 3 であり, $a \neq -1, 0$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

(37) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & a & b \\ 1 & -2 & c & d \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & a-4 & b+4 \\ 0 & -1 & c-1 & d+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{$-1$ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & a-4 & b+4 \\ 0 & -1 & c-1 & d+1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & a-1 & b+1 \\ 0 & 0 & c+2 & d-2 \end{pmatrix} \cdots (*)$. $B = \begin{pmatrix} a-1 & b+1 \\ c+2 & d-2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ とおくと $(*) = \begin{pmatrix} E_2 & C \\ O & B \end{pmatrix}$ である. $B$ が零行列ならば $(*)$ は階段行列で, 与えられた行列の階数は 2 である. $B$ が正則行列ならば, $B$ を行に関して基本変形すれば単位行列にできるため, $(*)$ の第 3 行と第 4 行を行に関して基本変形をすることによって, $(*)$ を対角成分がすべて 1 である階段行列に変形できる. 従ってこの場合は, 与えられた行列の階数は 4 である. $B$ が零行列であることと, $\operatorname{rank} B = 0$ であることは同値であり, $B$ が正則行列であることと $\operatorname{rank} B = 2$ であることは同値だから, $B$ が正則行列でも零行列でもないことは $\operatorname{rank} B = 1$ であることと同値である. このとき, $B$ を行に関して基本変形すれば第 1 行は零でなく第 2 行が零である階段行列に変形できるため, $(*)$ の第 3 行と第 4 行を行に関して基本変形をすることによって, $(*)$ を第 3 行までが零ではなく, 第 4 行が零である階段行列に変形できるため, 与えられた行列の階数は 3 である. 以上から, $(a,b,c,d) = (1,-1,-2,2)$ ならば与えられた行列の階数は 2, $(a,b,c,d) \neq (1,-1,-2,2)$ かつ $(a-1)(d-2)-(b+1)(c+2) = 0$ ならば与えられた行列の階数は 3 であり, $(a-1)(d-2)-(b+1)(c+2) \neq 0$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

(38) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & a+1 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & 11 & 15 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 7 & a-3 & 25 & 18 \\ 0 & 3 & 3 & 27 & a+14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 0 & a-10 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 42 & a+32 \end{pmatrix}$ だから, $a \neq 10$ ならば行列の階数は 4 であり, $a = 10$ ならば, 得られた行列の (3,4) 成分に関して第 4 列を掃き出せば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるため, 与えられた行列の階数は 3 である.

(39) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -10 & 10 & 7 \\ 8 & 10 & 20 & 12 & a^2-11 \\ 5 & 9 & a+15 & 13 & a-6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & -1 \\ 0 & 10 & 0 & 20 & 5 \\ 0 & -14 & -20 & -28 & a^2-3 \\ 0 & -6 & a-10 & -12 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 10 & 0 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & -20 & 0 & a^2+4 \\ 0 & 0 & a-10 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{a^2}{4}-\frac{1}{2} \\ 0 & 10 & 0 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & -20 & 0 & a^2+4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a(a-4)(a-6)}{20} \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は $a$ が 0, 2 または 6 ならば 3 であり, $a \neq 2, 4, 6$ ならば 4 である.

3. (1) $a = 0$ だから $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 1 & 0 & -1 & b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2-b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1-b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_1-b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1-b_2+b_3 \end{pmatrix}$ より, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつには $b_1 - b_2 + b_3 = 0$ であることが必要十分であり, この条件の下で, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は $\begin{cases} x - z = b_2 \\ y + z = b_1 - b_2 \end{cases}$ と同値だから, $z = t$ とおけば, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t+b_2 \\ -t+b_1-b_2 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1-b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($t$ は任意) で与えられる. また, $b_3 = -b_1 + b_2$ ならば $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_1+b_2 \end{pmatrix} = b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつような $\boldsymbol{b}$ 全体からなる集合は, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行で原点を通る平面である.

(2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 & b_1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & b_3 \\ 3 & 0 & -2 & 3 & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行の入れ換え}]{\text{第 1 行と第 2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & b_2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & b_1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & b_3 \\ 3 & 0 & -2 & 3 & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & b_1+2b_2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & b_3-b_2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & b_4-3b_2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{b_2-b_1}{3} \\ 0 & 3 & -1 & 3 & b_1+2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1+b_2+b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1-b_2+b_4 \end{pmatrix}$ より, $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつためには $b_1 + b_2 + b_3 = b_1 - b_2 + b_4 = 0$ であることが必要十分であり, この条件の下で, $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は $\begin{cases} x - \frac{2}{3}z + w = \frac{b_2-b_1}{3} \\ 3y - z + 3w = b_1 + 2b_2 \end{cases}$

と同値だから, $z=3s$, $w=t$ とおけば, $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2s-t+\frac{b_1-b_2}{3}\\ s-t-\frac{b_1+2b_2}{3}\\ 3s\\ t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{b_1-b_2}{3}\\ -\frac{b_1+2b_2}{3}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

($s$, $t$ は任意) で与えられる. また, $b_3=-b_1-b_2$ かつ $b_4=-b_1+b_2$ ならば $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\-b_1-b_2\\-b_1+b_2\end{pmatrix}=b_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$

だから, $\left\{\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^4\ \middle|\ \boldsymbol{b}=s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\ (s,\ t\in\boldsymbol{R}\text{ は任意})\right\}$ が, $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^4$ が存在するような $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^4$ 全体からなる集合である.

(3) $a=-1$ だから $\begin{pmatrix}1&0&1&2&b_1\\0&1&2&-1&b_2\\2&1&4&3&b_3\\1&-1&-1&3&b_4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&2&b_1\\0&1&2&-1&b_2\\0&1&2&-1&b_3-2b_1\\0&-1&-2&1&b_4-b_1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1&0&1&2&b_1\\0&1&2&-1&b_2\\0&0&0&0&b_3-2b_1-b_2\\0&0&0&0&b_4-b_1+b_2\end{pmatrix}$ より, $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつためには $b_3-2b_1-b_2=b_4-b_1+b_2=0$ であることが必要十分であり, この条件の下で, $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は $\begin{cases}x+z+2w=b_1\\ y+2z-w=b_2\end{cases}$ と同値だから, $z=s$, $w=t$ とおけば $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-s-2t+b_1\\-2s+t+b_2\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\0\\0\end{pmatrix}$ ($s$, $t$ は任意) で与えられる. また, $b_3=2b_1+b_2$ かつ $b_4=b_1-b_2$ ならば $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\2b_1+b_2\\b_1-b_2\end{pmatrix}=b_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$ だから, $\left\{\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^4\ \middle|\ \boldsymbol{b}=s\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\ (s,t\text{ は任意})\right\}$ が, $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^4$ が存在するような $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^4$ 全体からなる集合である.

(4) $a=1$ の場合, $\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&b_1\\-1&-1&1&1&b_2\\-2&-2&2&2&b_3\\2&2&-2&-2&b_4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&b_1\\0&0&0&0&b_1+b_2\\0&0&0&0&2b_1+b_3\\0&0&0&0&b_4-2b_1\end{pmatrix}$ より, $D\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつためには $b_1+b_2=2b_1+b_3=b_4-2b_1=0$ であることが必要十分であり, この条件の下で, $D\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は $x+y-z-w=b_1$ と同値だから, $y=s$, $z=t$, $w=u$ とおけば $D\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-s+t+u+b_1\\s\\t\\u\end{pmatrix}=$

$s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ ($s$, $t$, $u$ は任意) で与えられる. また, $b_2=-b_1$, $b_3=-2b_1$, $b_4=2b_1$ ならば

$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_1 \\ -2b_1 \\ 2b_1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ だから, $\left\{ \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^4 \,\middle|\, \boldsymbol{b} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \ (t \text{ は任意}) \right\}$ が, $D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ が存在するような $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^4$ 全体からなる集合である.

$a = 2$ の場合, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & b_1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & b_2 \\ -2 & -1 & 2 & 2 & b_3 \\ 3 & 2 & -2 & -2 & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & b_1 + b_2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2b_1 + b_3 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & b_4 - 3b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & b_1 + b_2 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & b_4 - 3b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -b_1 - b_3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & b_4 - b_1 + b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -b_1 - b_3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & b_4 - b_1 + b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -b_1 - b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & b_3 - 2b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 + b_1 + 2b_2 + b_3 \end{pmatrix}$ より, $D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつためには $b_4 + b_1 + 2b_2 + b_3 = 0$ であることが必要十分であり, この条件の下で, $D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は $\begin{cases} x - 2w = -b_1 - b_3 \\ y + 2w = b_3 - 2b_2 \\ z = -b_1 - b_2 \end{cases}$ と同値だから, $w = t$ とおけば $D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2t - b_1 \\ -2t - 2b_2 + b_3 \\ -b_1 - b_2 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ 2b_2 - b_3 \\ b_1 + b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($t$ は任意) で与えられる. また, $b_4 = -b_1 - 2b_2 - b_3$ ならば $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ -b_1 - 2b_2 - b_3 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ だから,

$\left\{ \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^4 \,\middle|\, \boldsymbol{b} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ (s,\ t,\ u \text{ は任意}) \right\}$ が, $D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ が存在するような $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^4$ 全体からなる集合である.

4. (1) $P_n(i,j;1)P_n(j,i;-1)P_n(i,j;1)Q_n(i;-1)R_n(i,j) = E_n$ より $Q_n(i;-1)R_n(i,j) = (P_n(i,j;1)P_n(j,i;-1)P_n(i,j;1))^{-1} = P_n(i,j;1)^{-1}P_n(j,i;-1)^{-1}P_n(i,j;1)^{-1} = P_n(i,j;-1)P_n(j,i;1)P_n(i,j;-1)$.

(2) $B$ を $(p,q)$ 成分に関して $A$ の第 $q$ 列を掃き出した行列とすれば, $A = (a_{ij})$, $P_j = P_m\left(p, j; -\frac{a_{pj}}{a_{pq}}\right)$ とおくと, $B = P_1P_2 \cdots P_{p-1}P_{p+1} \cdots P_mA$ である. $p' \neq p$ の場合, $P_m(p,p';-a_{pq})P_m\left(p', p; \frac{1}{a_{pq}}\right)B$ の第 $q$ 列は $\boldsymbol{e}_{p'}$ である. $p' = p$ の場合, $P_m(p,p'';-a_{pq})P_m\left(p'', p; \frac{1}{a_{pq}}\right)B$ の第 $q$ 列は $\boldsymbol{e}_{p''}$ だから, $R_m(p'',p)P_m(p,p'';-a_{pq})P_m\left(p'', p; \frac{1}{a_{pq}}\right)B$ の第 $q$ 列は $\boldsymbol{e}_p$ である. 従って $Q_m(p'';-1)R_m(p'',p)P_m(p,p'';-a_{pq})P_m\left(p'', p; \frac{1}{a_{pq}}\right)B$ の第 $q$ 列も $\boldsymbol{e}_p$ であり, (1) から $Q_m(p'';-1)R_m(p'',p) = P_m(p'',p;-1)P_m(p,p'';1)P_m(p'',p;-1)$ だから, 結果が得られる.

4. $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列とする. $a_{pq} \neq 0$ ならば $(p,q)$ 成分に関して第 $q$ 列を掃き出す操作は $P_m(i,p;c)$ の形の行列の積で表される行列を左からかけることによって行えることに注意する.

$A$ の第 $q$ 列が $a_{pq}\boldsymbol{e}_p$ の場合, $p' \neq p$ ならば $P_m(p, p'; -a_{pq})P_m\left(p', p\,; \frac{1}{a_{pq}}\right)A$ の第 $q$ 列は $\boldsymbol{R}^m$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_{p'}$ になり, $p \neq m$ ならば $P_m(m, p\,; 1)P_m(p, m\,; -1)P_m(p, m\,; a_{pq})P_m\left(m, p\,; \frac{-1}{a_{pq}}\right)A$ の第 $q$ 列は $\boldsymbol{e}_p$ になる. 従って, $a_{pq} \neq 0$ ならば $P_m(i, j; c)$ の形の行列の積で表される行列を左から $A$ にかけることによって $p' \neq p$ または $p' = p \neq m$ ならば, 第 $q$ 列が $\boldsymbol{e}_{p'}$ であるような行列にできる. $A$ が零行列の場合は (1), (2) の主張は明らかだから $A \neq O$ (従って, $r \geqq 1$) の場合を考え, $k$ $(0 \leqq k < r)$ に関して帰納的に次のことを仮定する. 「$P_m(i, j; c)$ の形の行列の積で表される行列 $P_k$ と自然数の列 $1 \leqq j(1) < j(2) < \cdots < j(k) \leqq n$ で, $P_kA = (a'_{ij})$ とすると, $1 \leqq i \leqq k$ ならば, $a'_{i1} = \cdots = a'_{i\,j(i)-1} = 0$, $a'_{i\,j(i)} = 1$, $P_kA$ の第 $j(i)$ 列は $\boldsymbol{e}_i$ になり, $i > k$ ならば $a'_{i1} = \cdots = a'_{i\,j(k)} = 0$ が成り立つものが ある. 」$(k = 0$ の場合は $P_0 = E_m$, $j(0) = 0$ とする.) $A'$ を $P_kA$ の第 $k$ 行より下の行と, 第 $j(k)$ 列より右の列からなる $(m-k) \times (n - j(k))$ 行列とするとき, $\operatorname{rank} P_kA = \operatorname{rank} A = r > k$ だから $A'$ は零行列でない. $A'$ の零でない最初の列を第 $j(k+1) - j(k)$ 列として $a'_{p\,j(k+1)} \neq 0$ とする. $k+1 < m$ ならば, $P_m(i, j; c)$ の形の行列の積で表される行列 $P'$ で, $P'P_kA$ の第 $j(k+1)$ 列が $\boldsymbol{e}_{k+1}$ になるものがあり, $P_{k+1} = P'P_k$ とおけば, $P_{k+1}A$ は $k+1$ に対して上の仮定を満たす. $k+1 = m$ ならば, 必然的に $r = m$ であり, $P_kA$ の第 $j(m)$ 列を $(m, j(m))$ 成分に関して掃き出すことによって, $P_m(i, m; c)$ の形の行列の積で表される行列 $P''$ で, $P''P_kA$ の第 $j(m)$ 列が $a'_{m,j(m)}\boldsymbol{e}_m$ になる ようなものがあり, $Q_m\left(m; \frac{1}{a'_{m,j(m)}}\right)P''P_kA$ は (1) の 3 つの条件を満たす. 以上の操作を $k+1 = r$ となるまで繰り返すことにより, $r < m$ ならば $P_rA$ が, $r = m$ ならば $Q_m(m; d)P_rA$ が (1) の 3 つの条件を満たすような $P_m(i, j; c)$ の形の行列の積で表される行列 $P_r$ と $d \neq 0$ の存在がわかる.

$|P_n(i, j; c)| = 1$ だから $P_m(i, j; c)$ の形の行列の積で表される行列の行列式の値は 1 である. $m = n$ のとき, $|A| = 1$ ならば $A$ の階数は $n$ だから, (2) の結果より $Q_n(n; d)PA$ が (1) の 3 つの条件を満たすような $d \neq 0$ と $P_m(i, j; c)$ の形の行列の積で表される行列 $P$ がある. このとき, $n$ 個の相異なる自然数 $j(1), j(2), \ldots, j(n)$ は $1 \leqq j(1) < j(2) < \cdots < j(n) \leqq n$ を満たすため $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $j(i) = i$ であり, $Q_n(n; d)PA$ の第 $j(i)$ 列は $\boldsymbol{R}^n$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ だから $Q_n(n; d)PA = E_n$ である. 従って, $|Q_n(n; d)PA| = |E_n| = 1$ であり, 一方 $|P| = |A| = 1$, $|Q_n(n; d)| = d$ から $|Q_n(n; d)PA| = |Q_n(n; d)||P||A| = d$ となるため, $d = 1$ である. 故に $Q_n(n; d) = E_n$ だから $PA = E_n$ が得られるため $A = P^{-1}$ である. ここで, $P = P_n(i_k, j_k; c_k)P_n(i_{k-1}, j_{k-1}; c_{k-1}) \cdots P_n(i_1, j_1; c_1)$ とすれば $A = P^{-1} = P_n(i_1, j_1; c_1)^{-1}P_n(i_2, j_2; c_2)^{-1} \cdots P_n(i_k, j_k; c_k)^{-1} = P_n(i_1, j_1; -c_1)P_n(i_2, j_2; -c_2) \cdots P_n(i_k, j_k; -c_k)$ だから, $A$ は $P_n(i, j; c)$ の形の基本行列の積で表されることがわかる.

6. $\operatorname{rank} A = r$ とおく. 教科書の定理 3.3 から $m$ 次基本行列の積で表される $X$ と $n$ 次基本行列の積で表される $Y$ で $XAY = F_{mn}(r)$ となるものがある. $AB = O$ より $F_{mn}(r)Y^{-1}B = XAYY^{-1}B = XAB = XO = O$ である. $Y^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ ($B_1$ は $r \times k$ 行列, $B_2$ は $(n-r) \times k$ 行列) とおくと, $F_{mn}(r)Y^{-1}B = F_{mn}(r)\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}$ だから $B_1 = O$ である. よって $Y^{-1}B = \begin{pmatrix} O \\ B_2 \end{pmatrix}$ だから, $Y^{-1}B$ は $r$ 行の零である行を含むため, $\operatorname{rank} Y^{-1}B \leqq n - r$ である. 教科書の系 3.6 の (2) から, $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} Y^{-1}B \leqq n - r = n - \operatorname{rank} A$ となって結果が得られる.

# 線形数学 I 演習問題　第 8 回　行列式

1. 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -3 & 9 & -5 \\ -8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　(7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & -6 & -6 \end{vmatrix}$　(8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 27 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$　(9) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -5 \\ -5 & 3 & 7 \end{vmatrix}$　(10) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

(11) $\begin{vmatrix} 1 & 2a & 3 \\ -2 & 4 & 9 \\ 4 & 8a & 6 \end{vmatrix}$　(12) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -1 \end{vmatrix}$　(13) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$　(14) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$　(15) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

(16) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　(17) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$　(18) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 0 \end{vmatrix}$　(19) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$　(20) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

(21) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$　(22) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　(23) $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$　(24) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & -4 & 1 \\ 19 & 6 & 0 & -3 \\ 22 & 7 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

(25) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$　(26) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & -4 \\ -7 & 1 & -8 & 6 \\ 10 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$　(27) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$　(28) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

(29) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$　(30) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$　(31) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$　(32) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

(33) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}$　(34) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$　(35) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & -5 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$　(36) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

(37) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$　(38) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & t & 3 \\ t & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$　(39) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2a & 3a \\ -1 & 1 & 2a & -2a \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 4a \end{vmatrix}$　(40) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(41) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$　(42) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$　(43) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ -5 & -4 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$　(44) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

(45) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -c & c-2 \\ -1 & -1 & 1 & -c+2 \\ -2 & c-3 & 2 & 2 \\ c+1 & 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ (46) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ (47) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

2. (発展問題) $a, b, c$ を定数とし, $A_n$ を, $(i, j)$ 成分 $a_{ij}$ が $a_{ii} = a$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $a_{i,i+1} = b$, $a_{i+1,i} = c$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$, $a_{ij} = 0$ $(|i-j| \geqq 2)$ である $n$ 次正方行列とする. $n = 3, 4, \dots$ に対して $|A_n| = a|A_{n-1}| - bc|A_{n-2}|$ が成り立つことを示せ. また, 以下の場合に $|A_n|$ の値を求めよ.

(1) $a = b = c = 1$　(2) $a = 0,\ b = -c \neq 0$　(3) $a = 0,\ b = c \neq 0$　(3) $a^2 = 4bc$　(4) $a = b^2 + 1,\ b = c$

## 第 8 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 15 & 48 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 15 & 48 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 48$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -7 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} = 28$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 9 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 4 & 7 & -26 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ 7 & -26 \end{vmatrix} = 89$

(5) $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -3 & 9 & -5 \\ -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & 9 & -5 \\ -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & 34 & -5 \\ -26 & -38 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 7 & 34 \\ -26 & -38 \end{vmatrix} = 884 - 266 = 618$

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & -6 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -8 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = 61$

(8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 27 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -36$

(9) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -5 \\ -5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

(10) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} = -9$

(11) $\begin{vmatrix} 1 & 2a & 3 \\ -2 & 4 & 9 \\ 4 & 8a & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2a & 3 \\ 0 & 4(a+1) & 15 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -24(a+2)$

(12) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & a-1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} = -2a$

(13) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 2 & 4 & 8 \\ 15 & 1 & 2 & 4 \\ 15 & 8 & 1 & 2 \\ 15 & 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 6 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -15 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} =$
$-3375$

(14) $$\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&2&0\\0&1&0&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{vmatrix}=1$$

(15) $$\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&1&2&1\\3&2&4&2\\4&3&6&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&1\\3&2&1&2\\4&3&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{vmatrix}=1$$

(16) $$\begin{vmatrix}1&-3&3&2\\4&3&-2&1\\5&2&1&3\\5&6&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\4&15&-14&-7\\5&17&-14&-7\\5&21&-14&-8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}15&-14&-7\\17&-14&-7\\21&-14&-8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&0&0\\17&-14&-7\\21&-14&-8\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-14&-7\\-14&-8\end{vmatrix}=-28$$

(17) $$\begin{vmatrix}2&1&5&1\\1&1&-3&-4\\3&6&-2&1\\2&2&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&11&9\\1&1&-3&-4\\0&3&7&13\\0&0&8&11\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&11&9\\3&7&13\\0&8&11\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&11&9\\0&40&40\\0&8&11\end{vmatrix}=-(-1)\begin{vmatrix}40&40\\8&11\end{vmatrix}=120$$

(18) $$\begin{vmatrix}2&3&0&1\\0&1&5&0\\1&0&0&4\\0&7&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&3&0&-7\\0&1&5&0\\1&0&0&4\\0&7&2&0\end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix}3&0&-7\\1&5&0\\7&2&0\end{vmatrix}=-7(-1)^4\begin{vmatrix}1&5\\7&2\end{vmatrix}=231$$

(19) $$\begin{vmatrix}1&5&0&2\\2&0&3&0\\3&1&2&0\\0&2&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&0&2\\0&-10&3&-4\\0&-14&2&-6\\0&2&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-10&3&-4\\-14&2&-6\\2&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&3&21\\0&2&29\\2&0&5\end{vmatrix}=(-1)^4 2\begin{vmatrix}3&21\\2&29\end{vmatrix}=90$$

(20) $$\begin{vmatrix}4&3&5&2\\2&4&7&7\\3&5&9&8\\7&2&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&5&2\\-2&4&7&7\\-2&5&9&8\\5&2&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&5&2\\0&10&17&11\\0&11&19&12\\0&-13&-22&-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&17&11\\11&19&12\\-13&-22&-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&17&11\\1&2&1\\-13&-22&-7\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}10&-3&1\\1&0&0\\-13&4&6\end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix}-3&1\\4&6\end{vmatrix}=22$$

(21) $$\begin{vmatrix}2&0&1&-1\\-4&2&3&1\\1&0&-1&2\\-2&1&0&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&1&-1\\0&0&3&-3\\1&0&-1&2\\-2&1&0&2\end{vmatrix}=(-1)^6\begin{vmatrix}2&1&-1\\0&3&-3\\1&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&3&-5\\0&3&-3\\1&-1&2\end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix}3&-5\\3&-3\end{vmatrix}=6$$

(22) $$\begin{vmatrix}2&1&-1&-1\\-2&-3&1&2\\-2&-1&3&1\\-1&-4&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\4&-3&-2&-1\\0&-1&2&0\\7&-4&-3&-2\end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix}4&-2&-1\\0&2&0\\7&-3&-2\end{vmatrix}=-2(-1)^4\begin{vmatrix}4&-1\\7&-2\end{vmatrix}=2$$

(23) $$\begin{vmatrix}-3&-2&2&-5\\-2&3&-2&3\\4&-1&2&-2\\-3&2&-4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-2&2&-5\\-5&1&0&-2\\7&1&0&3\\-9&-2&0&-7\end{vmatrix}=2(-1)^4\begin{vmatrix}-5&1&-2\\7&1&3\\-9&-2&-7\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-5&1&-2\\12&0&5\\-19&0&-11\end{vmatrix}=2(-1)^3\begin{vmatrix}12&5\\-19&-11\end{vmatrix}=74$$

(24) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & -4 & 1 \\ 19 & 6 & 0 & -3 \\ 22 & 7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 10 & 3 & -3 & 1 \\ 10 & 3 & -3 & -3 \\ 13 & 4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -(-1)^5 \begin{vmatrix} 10 & 3 & -3 \\ 10 & 3 & -3 \\ 13 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 13 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$

(25) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -8 & 1 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & -4 & 0 \\ -7 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -8 & 1 & -5 \\ -1 & 4 & -4 \\ -7 & 3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 31 & 4 & 16 \\ 17 & 3 & 14 \end{vmatrix} = -(-1)^3 \begin{vmatrix} 31 & 16 \\ 17 & 14 \end{vmatrix} = 162$

(26) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & -4 \\ -7 & 1 & -8 & 6 \\ 10 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 43 & 14 & 29 & 0 \\ -67 & -17 & -44 & 0 \\ 10 & 3 & 6 & 1 \\ -28 & -4 & -14 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 43 & 14 & 29 \\ -67 & -17 & -44 \\ -28 & -4 & -14 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 43 & 14 & 1 \\ -67 & -17 & -10 \\ -28 & -4 & -6 \end{vmatrix} =$

$- \begin{vmatrix} 43 & 14 & 1 \\ 363 & 123 & 0 \\ 230 & 80 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^4 \begin{vmatrix} 363 & 123 \\ 230 & 80 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -6 & 123 \\ -10 & 80 \end{vmatrix} = -750$

(27) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & 3 & 5 & 17 \\ 10 & -2 & -3 & -7 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & -5 & 16 \\ -12 & 3 & 17 \\ 10 & -2 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -12 & 63 & -175 \\ 10 & -52 & 153 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 63 & -175 \\ -52 & 153 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -22 \\ -52 & 153 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 0 \\ -52 & 49 \end{vmatrix} = 539$

(28) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -11 & -1 & -14 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -11 & -5 & -6 \\ 0 & 11 & 9 & 17 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -11 & -1 & -14 \\ -11 & -5 & -6 \\ 11 & 9 & 17 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -14 \\ 1 & -5 & -6 \\ -1 & 9 & 17 \end{vmatrix} =$

$11 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -14 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -836$

(29) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 11 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = -12$

(30) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1$

(31) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 8 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -25$

(32) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & -6 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$

(33) $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\12&13&14&5\\11&16&15&6\\10&9&8&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\12&-11&-22&-43\\11&-6&-18&-38\\10&-11&-22&-33\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-11&-22&-43\\-6&-18&-38\\-11&-22&-33\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-11&-22&-43\\-6&-18&-38\\0&0&10\end{vmatrix}=$

$(-1)^{3+3}10\begin{vmatrix}-11&-22\\-6&-18\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}-11&0\\-6&-6\end{vmatrix}=660$

(34) $\begin{vmatrix}1&-2&2&2\\2&0&-1&0\\4&-3&-1&-5\\1&1&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&-2&2&2\\0&0&-1&0\\2&-3&-1&-5\\7&1&3&-1\end{vmatrix}=-(-1)^5\begin{vmatrix}5&-2&2\\2&-3&-5\\7&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&-2&0\\2&-3&-8\\7&1&0\end{vmatrix}=-8(-1)^5\begin{vmatrix}5&-2\\7&1\end{vmatrix}=152$

(35) $\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\8&7&6&-5\\2&2&-2&-2\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&-4&5\\8&15&-2&3\\2&4&-4&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=(-1)^5\begin{vmatrix}3&-4&5\\15&-2&3\\4&-4&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-27&0&-1\\15&-2&3\\-26&0&-6\end{vmatrix}=2(-1)^4\begin{vmatrix}-27&-1\\-26&-6\end{vmatrix}=272$

(36) $\begin{vmatrix}1&-3&3&2\\2&3&-4&0\\4&3&2&3\\1&3&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-3&3&2\\3&0&-1&2\\5&0&5&5\\2&0&6&4\end{vmatrix}=-3(-1)^3\begin{vmatrix}3&-1&2\\5&5&5\\2&6&4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0&-1&0\\20&5&15\\20&6&16\end{vmatrix}=-3(-1)^3\begin{vmatrix}20&15\\20&16\end{vmatrix}=60$

(37) $\begin{vmatrix}3&-1&2&4\\2&1&1&3\\-2&0&3&-1\\0&-2&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&2&4\\5&0&3&7\\-2&0&3&-1\\-6&0&-3&-5\end{vmatrix}=-(-1)^3\begin{vmatrix}5&3&7\\-2&3&-1\\-6&-3&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&3&7\\-7&0&-8\\-1&0&2\end{vmatrix}=3(-1)^3\begin{vmatrix}-7&-8\\-1&2\end{vmatrix}=66$

(38) $\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-1&-1\\2&-1&t&3\\t&-2&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&1&0&-1\\2&-1&t-1&3\\t&-2&0&3\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}(t-1)\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\t&-2&3\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\t&-2&1\end{vmatrix}=$

$(-1)^{2+2}(t-1)\begin{vmatrix}1&1\\t&1\end{vmatrix}=-(t-1)^2$

(39) $\begin{vmatrix}1&0&-2a&3a\\-1&1&2a&-2a\\0&-1&3&-1\\1&2&-2&4a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&a\\0&-1&3&-1\\1&2&2a-2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&a\\-1&3&-1\\2&2a-2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&3&a-1\\2&2a-2&-a\end{vmatrix}=$

$\begin{vmatrix}3&a-1\\2a-2&-a\end{vmatrix}=-2a^2+a-2$

(40) $\begin{vmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\2&0&1&0&-1\\0&2&0&-1&0\\1&0&-1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\\2&0&-1&0&-3\\0&2&0&-1&0\\1&0&-2&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&-1&0&-3\\2&0&-1&0\\0&-2&0&0\end{vmatrix}=-3(-1)^6\begin{vmatrix}1&0&1\\2&0&-1\\0&-2&0\end{vmatrix}=$

$(-3)(-2)(-1)^5\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=18$

$$(41)\ \begin{vmatrix}2&3&0&1&0\\0&1&5&0&2\\1&0&0&4&1\\0&7&2&0&0\\2&0&3&4&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&0&1&0\\-2&1&5&-8&0\\1&0&0&4&1\\0&7&2&0&0\\2&0&3&4&0\end{vmatrix}=(-1)^8\begin{vmatrix}2&3&0&1\\-2&1&5&-8\\0&7&2&0\\2&0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&0&1\\0&4&5&-7\\0&7&2&0\\0&-3&3&3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}4&5&-7\\7&2&0\\-3&3&3\end{vmatrix}=$$

$$2\begin{vmatrix}-3&12&-7\\7&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}=6(-1)^6\begin{vmatrix}-3&12\\7&2\end{vmatrix}=-540$$

$$(42)\ \begin{vmatrix}1&0&4&3&0\\3&4&0&2&0\\0&1&0&0&2\\6&0&2&5&0\\0&0&1&0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&4&3&0\\3&4&0&2&-8\\0&1&0&0&0\\6&0&2&5&0\\0&0&1&0&3\end{vmatrix}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&4&3&0\\3&0&2&-8\\6&2&5&0\\0&1&0&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&4&3&-12\\3&0&2&-8\\6&2&5&-6\\0&1&0&0\end{vmatrix}=-(-1)^6\begin{vmatrix}1&3&-12\\3&2&-8\\6&5&-6\end{vmatrix}=$$

$$-\begin{vmatrix}1&0&0\\3&-7&28\\6&-13&66\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-7&28\\-13&66\end{vmatrix}=98$$

$$(43)\ \begin{vmatrix}-1&-2&-3&4&1\\-2&3&4&1&3\\-5&-4&4&2&0\\3&2&-1&2&3\\2&3&3&0&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-2&-3&4&1\\0&6&7&1&0\\-5&-4&4&2&0\\5&5&2&2&0\\2&3&3&0&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-2&-3&4&1\\0&6&7&1&0\\-5&-4&4&2&0\\5&5&2&2&0\\-1&-3&-6&12&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&6&7&1\\-5&-4&4&2\\5&5&2&2\\-1&-3&-6&12\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}0&6&7&1\\0&11&34&-58\\0&-10&-28&62\\-1&-3&-6&12\end{vmatrix}=-(-1)^5\begin{vmatrix}6&7&1\\11&34&-58\\-10&-28&62\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&7&1\\1&6&4\\-10&-28&62\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-29&-23\\1&6&4\\0&32&102\end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix}-29&-23\\32&102\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-29&-23\\32&102\end{vmatrix}=2222$$

$$(44)\ \begin{vmatrix}1&0&0&-1&0\\0&-1&0&0&1\\0&0&1&0&-1\\a&0&-1&0&0\\0&1&0&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&1\\0&0&1&0&-1\\a&0&-1&a&0\\0&1&0&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&-1&a&0\\1&0&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&-1&a&0\\1&0&-1&1\end{vmatrix}=$$

$$(-1)\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&a&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&a&-1\\0&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a&-1\\-1&1\end{vmatrix}=-a+1$$

$$(45)\ \begin{vmatrix}1&1&-c&c-2\\-1&-1&1&-c+2\\-2&c-3&2&2\\c+1&2&-2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-c&c-2\\0&0&1-c&0\\-2&c-3&2&2\\c+1&2&-2&-2\end{vmatrix}=(-1)^5(1-c)\begin{vmatrix}1&1&c-2\\-2&c-3&2\\c+1&2&-2\end{vmatrix}=$$

$$(c-1)\begin{vmatrix}1&1&c-2\\0&c-1&2c-2\\c+1&2&-2\end{vmatrix}=(c-1)^2\begin{vmatrix}1&1&c-2\\0&1&2\\c+1&2&-2\end{vmatrix}=(c-1)^2\begin{vmatrix}1&1&c-4\\0&1&0\\c+1&2&-6\end{vmatrix}=(-1)^4(c-1)^2\begin{vmatrix}1&c-4\\c+1&-6\end{vmatrix}$$

$$=-(c-1)^3(c-2)$$

(46) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 11 & 4 \\ 8 & 0 & 3 & -14 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 & 4 \\ -4 & 1 & 11 & 4 \\ 8 & 3 & -14 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -14 & -8 \\ -1 & -1 & 5 & 4 \\ -5 & 0 & 16 & 8 \\ 5 & 0 & 1 & 13 \end{vmatrix} =$

$-(-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -14 & -8 \\ -5 & 16 & 8 \\ 5 & 1 & 13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & -14 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 13 \end{vmatrix} = -2(-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = -210$

(47) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$(-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

2. $|A_n|$ を第 1 列について展開すれば

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & & 0 \\ 0 & c & & & \\ \vdots & & & A_{n-2} & \\ 0 & 0 & & & \end{vmatrix} = a|A_{n-1}| + (-1)^3 c \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ a & & & \\ & & A_{n-2} & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = a|A_{n-1}| - bc|A_{n-2}|$$

が得られる. 従って $|A_n| - a|A_{n-1}| + bc|A_{n-2}| = 0$ だから $x^2 - ax + bc = 0$ の解を $\alpha$, $\beta$ とおけば $bc = \alpha\beta$, $a = \alpha + \beta$ より $|A_n| - (\alpha+\beta)|A_{n-1}| + \alpha\beta|A_{n-2}| = 0$ である. この等式の左辺の項を移項して, 次の等式を得る.

$$|A_n| - \alpha|A_{n-1}| = \beta(|A_{n-1}| - \alpha|A_{n-2}|) \cdots (i) \qquad |A_n| - \beta|A_{n-1}| = \alpha(|A_{n-1}| - \beta|A_{n-2}|) \cdots (ii)$$

$|A_1| = a$, $|A_2| = a^2 - bc$ だから, $(i)$ より, 数列 $\{|A_{n+1}| - \alpha|A_n|\}$ は初項 $a^2 - bc - \alpha a$, 公比 $\beta$ の等比数列であり, $(ii)$ より, 数列 $\{|A_{n+1}| - \beta|A_n|\}$ は初項 $a^2 - bc - \beta a$, 公比 $\alpha$ の等比数列である. 従って, 次の等式が成り立つ.

$$|A_{n+1}| - \alpha|A_n| = \beta^{n-1}(a^2 - bc - \alpha a) \cdots (iii) \qquad |A_{n+1}| - \beta|A_n| = \alpha^{n-1}(a^2 - bc - \beta a) \cdots (iv)$$

$a^2 \neq 4bc$ の場合, $\alpha \neq \beta$ だから $(iii)$ から $(iv)$ を辺々引いて, 両辺を $\beta - \alpha$ で割れば, $|A_n|$ は次の等式で与えられる.

$$|A_n| = \frac{\beta^{n-1}(a^2 - bc - \alpha a) - \alpha^{n-1}(a^2 - bc - \beta a)}{\beta - \alpha} \cdots (v)$$

(1) $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}$ だから $(v)$ より

$$|A_n| = \frac{1}{\sqrt{3}i}\left(\alpha\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\beta\right) = \frac{1}{\sqrt{3}i}\left(\beta^{n-2} - \alpha^{n-2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}i}\left(\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n-2} - \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n-2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}i}\left(\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{3} - i\sin\frac{(n-2)\pi}{3}\right) - \left(\cos\frac{(n-2)\pi}{3} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{3}\right)\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{(n-2)\pi}{3}$$

だから, $n$ を 6 で割った余りが 0, 1, 2, 3, 4, 5 のとき $|A_n|$ の値は, それぞれ 1, 1, 0, $-1$, $-1$, 0 である.

(2) $\alpha = -b$, $\beta = b$ だから $(v)$ より $|A_n| = \dfrac{b^n + (-b)^n}{2}$. 故に $n$ が奇数ならば $|A_n| = 0$, $n$ が偶数ならば $|A_n| = b^n$.

(3) $\alpha = bi$, $\beta = -bi$ だから $(v)$ より $|A_n| = \dfrac{b}{2i}\left((-bi)^{n-1} - (bi)^{n-1}\right) = \dfrac{b^n i^{n-2}}{2}\left((-1)^{n-1} - 1\right)$. 故に $n$ が奇数ならば $|A_n| = 0$, $n$ が偶数ならば $|A_n| = -i^{n-2}b^n = (-1)^{\frac{n}{2}}b^n$ である.

(4) $\alpha = \beta = \dfrac{a}{2}$ だから $(iii)$ より $|A_{n+1}| - \dfrac{a}{2}|A_n| = \left(\dfrac{a}{2}\right)^{n+1}$ である. $a \neq 0$ のとき, この両辺を $\left(\dfrac{a}{2}\right)^{n+1}$ で割れば $\left(\dfrac{a}{2}\right)^{-n-1}|A_{n+1}| - \left(\dfrac{a}{2}\right)^{-n}|A_n| = 1$ となるため, 数列 $\left\{\left(\dfrac{a}{2}\right)^{-n}|A_n|\right\}$ は初項 2, 公差 1 の等差数列である. 従って $\left(\dfrac{a}{2}\right)^{-n}|A_n| = n+1$ となるため, $|A_n| = (n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$ である.

(5) $\alpha = 1$, $\beta = b^2$ だから, $b \neq \pm 1$ ならば $\alpha \neq \beta$ である. このとき $(v)$ より $|A_n| = \dfrac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1}$ であり, $b = \pm 1$ ならば $a = 2$ だから $a^2 = 4b^2$ となるため, (3) より $|A_n| = n+1$ である.

# 線形数学 I 演習問題　第 9 回　行列式の計算法

1. 次の行列式の値を求めよ．ただし，(25) は $n$ 次正方行列の行列式である．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} a & bc & a^3 \\ b & ca & b^3 \\ c & ab & c^3 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & a^2-bc & a^3 \\ 1 & b^2-ca & b^3 \\ 1 & c^2-ab & c^3 \end{vmatrix}$　(8) $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$　(9) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

(10) $\begin{vmatrix} a & b-c & c-b \\ a-c & b & c-a \\ a-b & b-a & c \end{vmatrix}$　(11) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$　(12) $\begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$

(13) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (a+c)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$　(14) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & abc \\ 1 & a & a^2 & bc \\ 1 & b & b^2 & ac \\ 1 & c & c^2 & ab \end{vmatrix}$　(15) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ a & b & -c & -d \\ b & a & -d & -c \end{vmatrix}$　(16) $\begin{vmatrix} a & b & 1 & 0 \\ b & a & b & 1 \\ 1 & b & a & b \\ 0 & 1 & b & a \end{vmatrix}$

(17) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 1 & -2a & 1 \\ b^2 & 0 & a^2 & -2a \\ -ab^2 & b^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix}$　(18) $\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$　(19) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$　(20) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

(21) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$　(22) $\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}$　(23) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$　(24) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$

(25) $\begin{vmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 \\ b & a & b & 1 & 0 \\ 1 & b & a & b & 1 \\ 0 & 1 & b & a & b \\ 0 & 0 & 1 & b & a \end{vmatrix}$　(26) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & 0 & a+b+p & a+c+q & 1 \\ b & a+b+r & 0 & b+c+s & 1 \\ c & a+c+t & b+c+u & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$　(27) $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_0 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_2 & x_0 & & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_0 & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_0 \end{vmatrix}$

(28) $\begin{vmatrix} a & & & & & & b \\ b & a & & & & & \\ & b & a & & \text{\huge 0} & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & a & & \\ & \text{\huge 0} & & & b & a & \\ & & & & & b & a \end{vmatrix}$　(29) $\begin{vmatrix} x & -1 & & & & \\ & x & -1 & & \text{\huge 0} & \\ & & x & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & -1 & \\ & & & & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$　(30) $\begin{vmatrix} 1 & -x & & & & \\ & 1 & -x & & \text{\huge 0} & \\ & & 1 & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & -x & \\ & & & & 1 & -x \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$

(31) $\begin{vmatrix} \sin 2t & 2\cos 2t & -4\sin 2t \\ \cos 2t & -2\sin 2t & -4\cos 2t \\ -\sin t & -\cos t & \sin t \end{vmatrix}$

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & -a^2-1 & x \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} y & 1 & 0 & 0 \\ 1 & y & 1 & 0 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -z \\ 1 & 0 & -13 & 0 & 37 \end{vmatrix}$ の値がそれぞれ 0, 1, 1 になるような $x$, $y$, $z$ の値をすべて求めよ.

3. $A=(a_{ij})$ を $a_{ij}=\begin{cases} a & i=j \\ b & i\neq j \end{cases}$ である $n$ 次正方行列とするとき, $A$ の行列式の値を求めよ.

4. (1) $a$, $b$, $c$, $t$ を定数とし, $\alpha=a+b+c$, $\beta=abc$ とおくとき, 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & 0 & a+b+t & a+c+t & 1 \\ b & a+b+t & 0 & b+c+t & 1 \\ c & a+c+t & b+c+t & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ の値を $\alpha$, $\beta$, $t$ を用いて表わせ.

(2) $t=0,1$ のとき, 上の行列式の値がそれぞれ 8, 4 であるする. このとき, $\alpha$, $\beta$ の値を求めよ.

5. (1) 実数を成分とする $n$ 次正方行列 $A$, $B$ は関係式 $A^pB^qA^rB^{s-q}=aB^jA^kB^{s-j}A^m$ を満たすとする. $B$ が正則行列で, $p+r\neq k+m$ のとき, $A$ の行列式がとりうる値をすべて求めよ.

(2) 実数を成分とする $n$ 次正則行列 $A$, $B$ は関係式 $AB^pA^q=aBA^rB^s$, $BAB^{-1}=bA^kB$ を満たすとする. $k+q-r\neq(k-1)(p-s)$ のとき, $A$, $B$ の行列式がとりうる値をすべて求めよ.

(3) $n$ 次正方行列 $A$, $B$ は関係式 $ABA^p=aBA^qB^q$ を満たすとする. $q\neq p+1$, $|B|=b\neq 0$ で $A$ が正則行列のとき, $A$ の行列式がとりうる値をすべて求めよ.

(4) $A$, $B$ はともに 4 次正則行列で, 関係式 $ABA^2=2BA^2B^2$ と $AB^{-1}A^2=3BA^2B$ が成り立つとき $B$ の行列式の値を求めよ.

(5) $A$, $B$ はともに $n$ 次正則行列で, $A^2B{}^tA=BA{}^tA{}^tB$ が成り立ち, $B$ の行列式の値が $-2$ であるとき $A$ の行列式の値を求めよ.

(6) $A$, $B$ はともに $n$ 次正則行列で, 関係式 ${}^tABAB={}^tBA^2BA$ が成り立つとき $A$ の行列式の値を求めよ.

6. $\boldsymbol{v}_j$ $(j=1,2,3)$ を $\boldsymbol{R}^3$ の 3 つのベクトルとし, $\boldsymbol{v}_j$ を第 $j$ 列とする 3 次正方行列を $P$ とし, $P$ が逆行列をもつとする. 1 次写像 $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ は $f(\boldsymbol{v}_1)=2\boldsymbol{v}_1$, $f(\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$, $f(\boldsymbol{v}_3)=2\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2-3\boldsymbol{v}_3$ を満たすとする.
(1) $f$ を表わす行列を $A$ とするとき, $AP=PQ$ を満たす行列 $Q$ を求めよ. (2) $A$ の行列式の値を求めよ.

7. $\lambda_i$ を $(i,i)$ 成分とする $n$ 次対角行列の余因子行列は対角行列であることを示し, その対角成分を求めよ.

8. $A$ を $n$ 次正方行列とするとき $A$ の余因子行列 $\widetilde{A}$ の行列式の値は $|A|^{n-1}$ であることを示せ.

9. (発展問題) $k$ を整数とする. 正の整数を成分にもつ $n$ 次正方行列で, 行列式の値が $k$ である行列の例を挙げよ.

10. (発展問題) $A$ を $n$ 次正方行列とする. $\operatorname{rank} A=n-1$ ならば $\operatorname{rank}\widetilde{A}\leqq 1$ であることを示せ.

11. (発展問題) $A$, $B$ を $n$ 次正方行列とする.
(1) $A$, $B$ がともに正則ならば $\widetilde{AB}=\widetilde{B}\widetilde{A}$ が成り立つことを示せ.
(2) 0 に収束する数列 $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\ldots}$ で, すべての $k$ に対して $A+\alpha_kE_n$ が正則になるものが存在することを示せ.
(3) $A$, $B$ の少なくとも一方が正則でない場合も $\widetilde{AB}=\widetilde{B}\widetilde{A}$ が成り立つことを示せ.
(4) $\operatorname{rank} A=n-1$ ならば $\operatorname{rank}\widetilde{A}=1$ であり, $\operatorname{rank} A\leqq n-2$ ならば $\widetilde{A}=O$ であることを示せ.
(5) $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $\det(A\boldsymbol{x}_1,A\boldsymbol{x}_2,\ldots,A\boldsymbol{x}_{n-1},\boldsymbol{x}_n)=\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_{n-1},\widetilde{A}\boldsymbol{x}_n)$ が成り立つことを示せ. ただし, $\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_{n-1},\boldsymbol{x}_n)$ は $\boldsymbol{x}_j$ を第 $j$ 列とする $n$ 次正方行列の行列式を表す.

# 第 9 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a^2+ab+b^2 \\ 1 & a^2+ac+c^2 \end{vmatrix} =$
$(b-a)(c-a)(c^2-b^2+a(c-b)) = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 0 & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c^2-a^2 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ c^2-a^2 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a+b & a^2+ab+b^2 \\ a+c & a^2+ac+c^2 \end{vmatrix} =$

$(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a+b & b^2 \\ a+c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(a(c^2-b^2)+bc(c-b)) = (b-a)(c-a)(c-b)(ab+bc+ca)$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & b^2-a^2 & (c+a)^2-(b+c)^2 \\ 0 & c^2-a^2 & (a+b)^2-(b+c)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2-a^2 & (a+b+2c)(a-b) \\ c^2-a^2 & (a+2b+c)(a-c) \end{vmatrix} =$

$(a-b)(c-a) \begin{vmatrix} -a-b & a+b+2c \\ c+a & -a-2b-c \end{vmatrix} = (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} -a-b & 2c \\ c+a & -2b \end{vmatrix} = 2(a-b)(c-a)(b^2-c^2+ab-ac) =$
$2(a-b)(c-a)(b-c)(a+b+c)$

(4) $\begin{vmatrix} a & bc & a^3 \\ b & ca & b^3 \\ c & ab & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & bc & a^3 \\ b-a & ca-bc & b^3-a^3 \\ c-a & ab-bc & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} a & bc & a^3 \\ -1 & c & -a^2-ab-b^2 \\ 1 & -b & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix} =$

$(a-b)(c-a) \begin{vmatrix} 0 & ab+bc & -ac^2-a^2c \\ 0 & c-b & c^2+ca-ab-b^2 \\ 1 & -c & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix} = (-1)^4(a-b)(c-a) \begin{vmatrix} b(c+a) & -ac(c+a) \\ c-b & (c-b)(a+b+c) \end{vmatrix} =$

$(a-b)(c-a)(b-c)(c+a) \begin{vmatrix} b & -ac \\ -1 & -a-b-c \end{vmatrix} = -(a-b)(c-a)(b-c)(c+a)(b^2+(a+c)b+ac) =$
$-(a-b)(c-a)(b-c)(a+b)(b+c)(c+a)$

(5) $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{vmatrix} = a(a^2-1) \begin{vmatrix} a^2 & a \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2(a^2-1)^2$

(6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} =$

$(a+b+c) \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & a^2-bc & a^3 \\ 1 & b^2-ca & b^3 \\ 1 & c^2-ab & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2-bc & a^3 \\ 0 & b^2-a^2+bc-ca & b^3-a^3 \\ 0 & c^2-a^2+bc-ab & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b-a)(a+b+c) & (b-a)(a^2+ab+b^2) \\ (c-a)(a+b+c) & (c-a)(a^2+ca+c^2) \end{vmatrix} =$

$(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a+b+c & a^2+ab+b^2 \\ a+b+c & a^2+ca+c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a^2+ab+b^2 \\ 1 & a^2+ca+c^2 \end{vmatrix} =$
$(b-a)(c-a)(a+b+c)(ca+c^2-ab-b^2) = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)^2$

(8) $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a+b & -a-b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 \\ -c & a+b+2c & -a-c \\ -b & -a+b & a+c \end{vmatrix} =$

$(a+b) \begin{vmatrix} a+b+2c & -a-c \\ -a+b & a+c \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} b+c & -a-c \\ b+c & a+c \end{vmatrix} = (a+b)(b+c) \begin{vmatrix} 1 & -a-c \\ 1 & a+c \end{vmatrix} = 2(a+b)(b+c)(c+a)$

(9) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = (b^2+c^2)\begin{vmatrix} c^2+a^2 & bc \\ bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} - ab\begin{vmatrix} ab & bc \\ ca & a^2+b^2 \end{vmatrix} + ca\begin{vmatrix} ab & c^2+a^2 \\ ca & bc \end{vmatrix} =$

$(b^2+c^2)(a^4+a^2b^2+a^2c^2) - ab(a^3b+ab^3-abc^2) + ca(ab^2c-ac^3-a^3c) = 4a^2b^2c^2$

(10) $\begin{vmatrix} a & b-c & c-b \\ a-c & b & c-a \\ a-b & b-a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+b-c & c-b \\ a-c & a+b-c & c-a \\ a-b & 0 & c \end{vmatrix} = (a+b-c)\begin{vmatrix} a & 1 & c-b \\ a-c & 1 & c-a \\ a-b & 0 & c \end{vmatrix} = (a+b-c)\begin{vmatrix} c & 0 & a-b \\ a-c & 1 & c-a \\ a-b & 0 & c \end{vmatrix}$

$= (-1)^4(a+b-c)\begin{vmatrix} c & a-b \\ a-b & c \end{vmatrix} = (a+b-c)(c^2-(a-b)^2) = (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$

(11) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix} =$

$2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

(12) $\begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & b^2-ca & c^2-ab \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & a^2-bc & b^2-ca \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} =$

$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\begin{vmatrix} 1 & b^2-ca & c^2-ab \\ 1 & a^2-bc & b^2-ca \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} =$

$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\begin{vmatrix} 1 & b^2-ca & c^2-ab \\ 0 & a^2-b^2-bc+ca & b^2-c^2-ca+ab \\ 0 & c^2-b^2-ab+ca & a^2-c^2+ab-bc \end{vmatrix} =$

$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\begin{vmatrix} (a-b)(a+b+c) & (b-c)(a+b+c) \\ (c-b)(a+b+c) & (a-c)(a+b+c) \end{vmatrix} =$

$(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2$

(13) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (a+c)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)^2+ab+ac & ab & ac \\ ab+(a+c)^2+bc & (a+c)^2 & bc \\ ac+bc+(a+b)^2 & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} (b+c)(a+b+c) & ab & ac \\ (a+c)(a+b+c) & (a+c)^2 & bc \\ (a+b)(a+b+c) & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} b+c & ab & ac \\ a+c & (a+c)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$

$(a+b+c)\begin{vmatrix} 2a+2b+2c & ab+(a+c)^2+bc & ac+bc+(a+b)^2 \\ a+c & (a+c)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$

$(a+b+c)\begin{vmatrix} 2(a+b+c) & (a+c)(a+b+c) & (a+b)(a+b+c) \\ a+c & (a+c)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2 & a+c & a+b \\ a+c & (a+c)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$

$(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2 & a+c & a+b \\ 0 & \frac{1}{2}(a+c)^2 & -\frac{1}{2}(a^2+ab+ac-bc) \\ 0 & -\frac{1}{2}(a^2+ab+ac-bc) & \frac{1}{2}(a+b)^2 \end{vmatrix} =$

$2(a+b+c)^2\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(a+c)^2 & -\frac{1}{2}(a^2+ab+ac-bc) \\ -\frac{1}{2}(a^2+ab+ac-bc) & \frac{1}{2}(a+b)^2 \end{vmatrix} =$

$\frac{1}{2}(a+b+c)^2\left((a+b)^2(a+c)^2-(a^2+ab+ac-bc)^2\right)=2abc(a+b+c)^3$

(14) $\begin{vmatrix}1&1&1&abc\\1&a&a^2&bc\\1&b&b^2&ac\\1&c&c^2&ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&abc\\0&a-1&a^2-1&bc-abc\\0&b-1&b^2-1&ac-abc\\0&c-1&c^2-1&ab-abc\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-1&a^2-1&bc-abc\\b-1&b^2-1&ac-abc\\c-1&c^2-1&ab-abc\end{vmatrix}=$

$(a-1)(b-1)(c-1)\begin{vmatrix}1&a+1&-bc\\1&b+1&-ac\\1&c+1&-ab\end{vmatrix}=(a-1)(b-1)(c-1)\begin{vmatrix}1&a+1&-bc\\0&b-a&bc-ac\\0&c-a&bc-ab\end{vmatrix}=(a-1)(b-1)(c-1)\begin{vmatrix}b-a&bc-ac\\c-a&bc-ab\end{vmatrix}=$

$(a-1)(b-1)(c-1)(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&c\\1&b\end{vmatrix}=(a-1)(b-1)(c-1)(b-a)(c-a)(b-c)$

(15) $\begin{vmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\\a&b&-c&-d\\b&a&-d&-c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\\0&0&-2c&-2d\\b&a&-d&-c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\\0&0&-2c&-2d\\0&0&-2d&-2c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\b&a\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-2c&-2d\\-2d&-2c\end{vmatrix}=$

$4(a-b)(a+b)(c-d)(c+d)$

(16) $\begin{vmatrix}a&b&1&0\\b&a&b&1\\1&b&a&b\\0&1&b&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&b-ab&1-a^2&-ab\\0&a-b^2&b-ab&1-b^2\\1&b&a&b\\0&1&b&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-ab&1-a^2&-ab\\a-b^2&b-ab&1-b^2\\1&b&a\end{vmatrix}=$

$\begin{vmatrix}b-ab&ab^2-a^2-b^2+1&a^2b-2ab\\a-b^2&b^3-2ab+b&ab^2-a^2-b^2+1\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ab^2-a^2-b^2+1&a^2b-2ab\\b^3-2ab+b&ab^2-a^2-b^2+1\end{vmatrix}=$

$b^4-(3a^2-4a+2)b^2+(a^2-1)^2=b^4-2(a^2-1)b^2+(a^2-1)^2-(a^2-4a+4)b^2=(b^2-a^2+1)^2-((a-2)b)^2=$
$(b^2-(a-2)b-a^2+1)(b^2+(a-2)b-a^2+1)$

(17) $\begin{vmatrix}1&0&1&0\\-a&1&-2a&1\\b^2&0&a^2&-2a\\-ab^2&b^2&0&a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-a&1&-a&1\\b^2&0&a^2-b^2&-2a\\-ab^2&b^2&ab^2&a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-a&1\\0&a^2-b^2&-2a\\b^2&ab^2&a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-a&1\\0&a^2-b^2&-2a\\0&2ab^2&a^2-b^2\end{vmatrix}=$

$\begin{vmatrix}a^2-b^2&-2a\\2ab^2&a^2-b^2\end{vmatrix}=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2=(a^2+b^2)^2$

(18) $\begin{vmatrix}0&a^2&b^2&1\\a^2&0&c^2&1\\b^2&c^2&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&a^2&b^2&1\\a^2&-a^2&c^2-a^2&1\\b^2&c^2-b^2&-b^2&1\\1&0&0&0\end{vmatrix}=(-1)^5\begin{vmatrix}a^2&b^2&1\\-a^2&c^2-a^2&1\\c^2-b^2&-b^2&1\end{vmatrix}=$

$-\begin{vmatrix}a^2&b^2&1\\-2a^2&c^2-a^2-b^2&0\\c^2-a^2-b^2&-2b^2&0\end{vmatrix}=-(-1)^4\begin{vmatrix}-2a^2&c^2-a^2-b^2\\c^2-a^2-b^2&-2b^2\end{vmatrix}=(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2=$

$(a^2+b^2+2ab-c^2)(a^2+b^2-2ab-c^2)=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

(19) 第 2 列と第 3 列を第 4 列に加えて, 第 4 列から第 1 列を $a+b+c+d$ したものを引けば,

$\begin{vmatrix}1&a&b&c+d\\1&b&c&d+a\\1&c&d&a+b\\1&d&a&b+c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&b&a+b+c+d\\1&b&c&a+b+c+d\\1&c&d&a+b+c+d\\1&d&a&a+b+c+d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&b&0\\1&b&c&0\\1&c&d&0\\1&d&a&0\end{vmatrix}=0$

(20) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & d & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & d-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & b-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b+c-d & d-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ a-b+c-d & b-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ 1 & b-c & a-d \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ 0 & b-d & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} a-c & b-d \\ b-d & a-c \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)(a-b+c-d)\left((a-c)^2-(b-d)^2\right) = (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)$

(21) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & b & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & d & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & b-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & d-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & d-c & a-d \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b+c-d & b-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ a-b+c-d & d-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & b-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ 1 & d-c & a-d \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & b-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ 0 & d-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} a-c & b-d \\ d-b & a-c \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)(a-b+c-d)\left((a-c)^2+(b-d)^2\right)$

(22) $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$ とおけば ${}^tAA = (a^2+b^2+c^2+d^2)E_4$ が成り立つ．この両辺の行列式を考えれば $|{}^tAA| = |{}^tA||A| = |A|^2$, $|(a^2+b^2+c^2+d^2)E_4| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$ だから $|A|^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$ となるため $|A| = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ である．$A = (a_{ij})$ の行列式の定義

$$|A| = \sum_{[i_1,i_2,i_3,i_4]\ \text{は 1,2,3,4 の順列}} (-1)^{[i_1,i_2,i_3,i_4]\ \text{の反転数}} a_{i_1 1}a_{i_2 2}a_{i_3 3}a_{i_4 4}$$

の右辺で, $a^4$ の項が現れるのは $[i_1,i_2,i_3,i_4] = [1,2,3,4]$ の場合のみだから, $|A|$ を $a$, $b$, $c$, $d$ の多項式とみれば, $|A|$ の $a^4$ の係数は $(-1)^{[1,2,3,4]\ \text{の反転数}} = (-1)^0 = 1$ である．一方, $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ の $a^4$ の係数も 1 だから $|A| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ であることがわかる．

この方法と同じやり方で, $\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ が示される．

$$(23)\ \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & c \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -d & 0 & f \end{vmatrix} = a(cdf - bef + af^2) -$$

$$b(-be^2 + aef + cde) + c(adf - bde + cd^2) = af(af - be + cd) - be(af - be + cd) + cd(af - be + cd) = (af - be + cd)^2$$

$$(24)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2-t & 1 & 1 & 1 \\ a-b(t-1) & b & c & d \\ a^2-b^2(t-1) & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ a-b(t-1) & c & d \\ a^2-b^2(t-1) & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b(t-1)+d(t-2) & c-d & d \\ a^2-b^2(t-1)+d^2 & c^2-d^2 & d^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a-b(t-1)+d(t-2) & c-d \\ a^2-b^2(t-1)+d^2(t-2) & c^2-d^2 \end{vmatrix} =$$

$$-(c-d)\begin{vmatrix} a-b(t-1)+d(t-2) & 1 \\ a^2-b^2(t-1)+d^2(t-2) & c+d \end{vmatrix} = -(c-d)\begin{vmatrix} a-b(t-1)+d(t-2) & 1 \\ a(a-d)-b(b-d)(t-1) & c \end{vmatrix} =$$

$$(c-d)((a-c)(a-d)+(b-c)(b-d)(1-t))$$

$$(25)\ \begin{vmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 \\ b & a & b & 1 & 0 \\ 1 & b & a & b & 1 \\ 0 & 1 & b & a & b \\ 0 & 0 & 1 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b(1-a) & 1-a^2 & -ab & -a \\ 0 & a-b^2 & b(1-a) & 1-b^2 & -b \\ 1 & b & a & b & 1 \\ 0 & 1 & b & a & b \\ 0 & 0 & 1 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b(1-a) & 1-a^2 & -ab & -a \\ a-b^2 & b(1-a) & 1-b^2 & -b \\ 1 & b & a & b \\ 0 & 1 & b & a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & (a-1)(b^2-a-1) & ab(a-2) & b^2(a-1)-a \\ 0 & b(b^2-2a+1) & (a-1)(b^2-a-1) & b(b^2-a-1) \\ 1 & b & a & b \\ 0 & 1 & b & a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (a-1)(b^2-a-1) & ab(a-2) & b^2(a-1)-a \\ b(b^2-2a+1) & (a-1)(b^2-a-1) & b(b^2-a-1) \\ 1 & b & a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (a-1)(b^2-a-1) & b((1-a)b^2+2a^2-2a-1) & -(1-a)^2b^2+a^3-2a \\ b(b^2-2a+1) & -b^4+(3a-2)b^2-a^2+1 & b((1-a)b^2+2a^2-2a-1) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} b((1-a)b^2+2a^2-2a-1) & -(1-a)^2b^2+a^3-2a \\ -b^4+(3a-2)b^2-a^2+1 & b((1-a)b^2+2a^2-2a-1) \end{vmatrix} =$$

$$(3a-4)b^4 + (-4a^3+6a^2-2a+2)b^2 + a(a-1)(a+1)(a^2-2) = ((3a-4)b^2-(a+1)(a^2-2))(b^2-a(a-1))$$

$$(26)\ \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & 0 & a+b+p & a+c+q & 1 \\ b & a+b+r & 0 & b+c+s & 1 \\ c & a+c+t & b+c+u & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & -a & a+p & a+q & 0 \\ b & b+r & -b & b+s & 0 \\ c & c+t & c+u & -c & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -a & a+p & a+q \\ b & b+r & -b & b+s \\ c & c+t & c+u & -c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & -2a & p & q \\ b & r & -2b & s \\ c & t & u & -2c \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2a & p & q \\ r & -2b & s \\ t & u & -2c \end{vmatrix} = 8abc - 2asu - 2bqt - 2cpr - pst - qru$$

(27)
$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_0 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_2 & x_0 & & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_0 & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_0+x_1+\cdots+x_n \\ x_1 & x_0 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_0+x_1+\cdots+x_n \\ x_1 & x_2 & x_0 & & x_{n-1} & x_0+x_1+\cdots+x_n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_0 & x_0+x_1+\cdots+x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_0+x_1+\cdots+x_n \end{vmatrix} =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & 1 \\ x_1 & x_0 & x_2 & \dots & x_{n-1} & 1 \\ x_1 & x_2 & x_0 & & x_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & 1 \\ x_1-x_0 & x_0-x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_0-x_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_3-x_2 & & x_0-x_{n-1} & 0 \\ x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_3-x_2 & \dots & x_n-x_{n-1} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^n \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) \begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_0-x_1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_0-x_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_3-x_2 & & x_0-x_{n-1} \\ x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_3-x_2 & \dots & x_n-x_{n-1} \end{vmatrix}$$

$j=n,n-1,\dots,1$ の順に第 $j$ 列に第 $1,2,\dots,j-1$ 列をすべて加えると

$$(\text{上式}) = (-1)^n \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) \begin{vmatrix} x_1-x_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1-x_0 & x_2-x_0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0 & & 0 \\ x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0 & \dots & x_n-x_0 \end{vmatrix} = (-1)^n \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) \prod_{i=1}^{n} (x_i-x_0)$$

(28)
$$\begin{vmatrix} a & & & & & & b \\ b & a & & & & & \\ & b & a & & \text{\huge 0} & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & a & & \\ & \text{\huge 0} & & & b & a & \\ & & & & & b & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & & & & & \\ b & a & & \text{\huge 0} & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & a & & \\ & \text{\huge 0} & & b & a & \\ & & & & b & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & a & & & & \\ & b & a & & \text{\huge 0} & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & a & \\ & \text{\huge 0} & & & b & a \\ & & & & & b \end{vmatrix} = a^n - (-b)^n$$

(29) $D_n(a_0,a_1,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & x & -1 & & & 0 \\ 0 & & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$ とおくと,

$$D_n(a_0,a_1,\ldots,a_n)=x\begin{vmatrix} x & -1 & & & 0 \\ 0 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & x & -1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}+(-1)^{n+2}a_0\begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ x & -1 & & & 0 \\ 0 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & x & -1 \end{vmatrix}=xD_{n-1}(a_1,\ldots,a_n)+a_0$$

$$=x(xD_{n-2}(a_2,\ldots,a_n)+a_1)+a_0=x^2D_{n-2}(a_2,\ldots,a_n)+a_1x+a_0$$
$$=x^2(xD_{n-3}(a_3,\ldots,a_n)+a_2)+a_1x+a_0=x^3D_{n-3}(a_3,\ldots,a_n)+a_2x^2+a_1x+a_0=\cdots$$
$$=x^{n-1}D_1(a_{n-1},a_n)+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

(30) $F_n(a_0,a_1,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & -x & & & & \\ & 1 & -x & & \text{\Large 0} & \\ & & 1 & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & \ddots & -x & \\ & & & & 1 & -x \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$ とおくと,

$$F_n(a_0,a_1,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & -x & & \text{\Large 0} & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & -x & \\ & \text{\Large 0} & & 1 & -x \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}+(-1)^na_n\begin{vmatrix} -x & & & & \\ 1 & -x & & \text{\Large 0} & \\ & 1 & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & \ddots & -x & \\ & & & 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$=a_nx^n+F_{n-1}(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+F_{n-2}(a_0,a_1,\ldots,a_{n-2})=\cdots$$
$$=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+F_1(a_0,a_1)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

(30) $\begin{vmatrix} \sin 2t & 2\cos 2t & -4\sin 2t \\ \cos 2t & -2\sin 2t & -4\cos 2t \\ -\sin t & -\cos t & \sin t \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin 2t & 2\cos 2t & 0 \\ \cos 2t & -2\sin 2t & 0 \\ -\sin t & -\cos t & -3\sin t \end{vmatrix}=6\sin t\begin{vmatrix} \sin 2t & -\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix}=6\sin t$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & -a^2-1 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & x^2-a^2-1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^6\begin{vmatrix} 0 & x & -1 \\ x & -1 & 0 \\ a^2 & 0 & x^2-a^2-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2 & 0 & -1 \\ x & -1 & 0 \\ a^2 & 0 & x^2-a^2-1 \end{vmatrix}=$

$(-1)^5\begin{vmatrix} x^2 & -1 \\ a^2 & x^2-a^2-1 \end{vmatrix}=-(x^4-(a^2+1)x^2+a^2)=-(x^2-a^2)(x^2-1)$ より $x=\pm1,\pm a$.

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 0 & 0 \\ 1 & y & 1 & 0 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-y^2 & -y & 0 \\ 1 & y & 1 & 0 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1-y^2 & -y & 0 \\ 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & y \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1-y^2 & -y & 0 \\ 1 & y & 1 \\ -y & 1-y^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$-(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1-y^2 & -y \\ -y & 1-y^2 \end{vmatrix} = (1-y^2)^2 - (-y)^2 = y^4 - 3y^2 + 1$ だから $y^4 - 3y^2 + 1 = 1$. 従って $y^4 - 3y^2 = 0$ となるため $y = 0, \pm\sqrt{3}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -z \\ 1 & 0 & -13 & 0 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & z & -13 & 0 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ z & -13 & 0 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & z^2-13 & 0 & 37 \end{vmatrix} =$$

$\begin{vmatrix} 1 & -z & 0 \\ 0 & 1 & -z \\ z^2-13 & 0 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & z^3-13z & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -z \\ z^3-13z & 37 \end{vmatrix} = z^4 - 13z^2 + 37$ より $z^4 - 13z^2 + 36 = 0$. この左辺は $(z-2)(z+2)(z-3)(z+3)$ と因数分解されるため $z = \pm 2, \pm 3$.

3. 与えられた $n$ 次の行列式の値を $D_n$ とおき, 第 1 列から第 2 列を引いて, 第 1 列に関して展開する. 次に, 第 2 項の行列式の $(1,1)$ に関して第 1 行を掃き出せば

$$D_n = \begin{vmatrix} a-b & b & b & & \dots & & b \\ b-a & a & b & & & & \\ 0 & b & a & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & a & b & b \\ & & & & b & a & b \\ 0 & & \dots & & b & b & a \end{vmatrix} = (a-b)D_{n-1} - (b-a) \begin{vmatrix} b & b & & \dots & & b \\ b & a & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b & b \\ & & & b & a & b \\ b & \dots & & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)D_{n-1} + (a-b) \begin{vmatrix} b & 0 & & & \dots & 0 \\ b & a-b & \ddots & & & \vdots \\ b & 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & a-b & 0 & 0 \\ & & & 0 & a-b & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)D_{n-1} + b(a-b)^{n-1}$$

だから $D_n$ に関する漸化式 $D_n = (a-b)D_{n-1} + b(a-b)^{n-1}$ が得られる. $a = b$ の場合は $D_n = 0$ だから, $a \neq b$ と仮定して上式の両辺を $(a-b)^n$ で割り, $x_n = \dfrac{D_n}{(a-b)^n}$ とおけば $x_n = x_{n-1} + \dfrac{b}{a-b}$ が得られるため, $\{x_n\}$ は公差 $\dfrac{b}{a-b}$ の等差数列である. $x_1 = \dfrac{D_1}{a-b} = \dfrac{a}{a-b}$ だから $x_n = \dfrac{a+(n-1)b}{a-b}$ となるため $D_n = (a-b)^n x_n = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$ である.

4. (1) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & 0 & a+b+t & a+c+t & 1 \\ b & a+b+t & 0 & b+c+t & 1 \\ c & a+c+t & b+c+t & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & -a & a+t & a+t & 0 \\ b & b+t & -b & b+t & 0 \\ c & c+t & c+t & -c & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & -a & a+t & a+t \\ b & b+t & -b & b+t \\ c & c+t & c+t & -c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} a & -2a & t & t \\ b & t & -2b & t \\ c & t & t & -2c \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -2a & t & t \\ t & -2b & t \\ t & t & -2c \end{vmatrix} = 2t^3 - 8abc + 2at^2 + 2bt^2 + 2ct^2 = 2t^3 + 2\alpha t^2 - 8\beta.$$

(2) 仮定から $-8\beta = 8$, $2 + 2\alpha - 8\beta = 4$ だから $\beta = -1$, $\alpha = -3$.

5. (1) $A^pB^qA^rB^{s-q} = aB^jA^kB^{s-j}A^m$ の両辺の行列式を考えると, $|A^pB^qA^rB^{s-q}| = |aB^jA^kB^{s-j}A^m|$ が成り立ち, この左辺は $|A|^p|B|^q|A|^r|B|^{s-q} = |A|^{p+r}|B|^s$ に等しく, 右辺は $a^n|B|^j|A|^k|B|^{s-j}|A|^m = a^n|A|^{k+m}|B|^s$ に等しいため, $|A|^{p+r}|B|^s = a^n|A|^{k+m}|B|^s$ である. $B$ は正則行列だから $|B| \neq 0$ より, 上式から $|A|^{p+r} = a^n|A|^{k+m}$ が得られる. 従って $A$ が正則行列の場合は $|A|^{p+r-k-m} = a^n$ であり, $p+r-k-m$ が奇数ならば $|A| = a^{\frac{n}{p+r-k-m}}$, $p+r-k-m$ が偶数ならば $|A| = \pm a^{\frac{n}{p+r-k-m}}$ である. 故に, $p+r-k-m$ が奇数のとき, $|A|$ は 0 または $a^{\frac{n}{p+r-k-m}}$ であり, $p+r-k-m$ が偶数のとき, $|A|$ は 0 または $\pm a^{\frac{n}{p+r-k-m}}$ である.

(2) $AB^pA^q = aBA^rB^s$, $BAB^{-1} = bA^kB$ の両辺の行列式を考えると, $|AB^pA^q| = |aBA^rB^s|$, $|BAB^{-1}| = |bA^kB|$ が成り立ち, 1 つめ等式の左辺は $|A||B|^p|A|^q = |A|^{q+1}|B|^p$ に等しく, 右辺は $a^n|B||A|^r|B|^s = a^n|A|^r|B|^{s+1}$ に等しいため, $|A|^{q+1}|B|^p = a^n|A|^r|B|^{s+1}$ である. また, 2 つめ等式の左辺は $|B||A|B|^{-1} = |A|$ に等しく, 右辺は $b^n|A|^k|B|$ に等しいため, $|A| = b^n|A|^k|B|$ であり, $A$ の正則性から $|A| \neq 0$ だから $|B| = b^{-n}|A|^{1-k}$ である. これを 1 つめの等式から得られた等式に代入すれば $b^{-pn}|A|^{p-pk+q+1} = a^nb^{-n(s+1)}|A|^{r+(1-k)(s+1)}$ が得られ, この両辺に $b^{pn}|A|^{-r-(1-k)(s+1)}$ をかければ, $|A|^{k+q-r-(k-1)(p-s)} = (ab^{p-s-1})^n$ が得られる. 故に $k+q-r-(k-1)(p-s)$ が奇数の場合は $|A| = (ab^{p-s-1})^{\frac{n}{k+q-r-(k-1)(p-s)}}$, $|B| = b^{-n}(ab^{p-s-1})^{\frac{n(1-k)}{k+q-r-(k-1)(p-s)}}$ であり, $k+q-r-(k-1)(p-s)$ が偶数の場合は $|A| = \pm(ab^{p-s-1})^{\frac{n}{k+q-r-(k-1)(p-s)}}$, $|B| = \pm b^{-n}(ab^{p-s-1})^{\frac{n(1-k)}{k+q-r-(k-1)(p-s)}}$ (複号同順) である.

(3) $ABA^p = aBA^qB^q$ の両辺の行列式を考えると, $|ABA^p| = |aBA^qB^q|$ が成り立ち, $|B| = b$ よりこの左辺は $|A||B||A|^p = b|A|^{p+1}$ に等しく, 右辺は $a^n|B||A|^q|B|^q = a^nb^{q+1}|A|^q$ に等しいため, $b|A|^{p+1} = a^nb^{q+1}|A|^q$ である. $A$ は正則行列だから $|A| \neq 0$ より, 上式から $|A|^{p-q+1} = a^nb^q$ が得られる. 従って $p-q+1$ が奇数の場合は $|A| = (a^nb^q)^{\frac{1}{p-q+1}}$, $p-q+1$ が偶数の場合は $|A| = \pm(a^nb^q)^{\frac{1}{p-q+1}}$ である.

(4) $ABA^2 = 2BA^2B^2$, $AB^{-1}A^2 = 3BA^2B$ の両辺の行列式を考えると, $|ABA^2| = |2BA^2B^2|$, $|AB^{-1}A^2| = |3BA^2B|$ が成り立ち, 1 つめ等式の左辺は $|A||B||A|^2 = |A|^3|B|$ に等しく, 右辺は $2^4|B||A|^2|B|^2 = 16|A|^2|B|^3$ に等しいため, $|A|^3|B| = 16|A|^2|B|^3$ である. $A$, $B$ の正則性から $|A|$ はともに 0 でないため, 上式から $|A| = 16|B|^2$ である. また, 2 つめ等式の左辺は $|A||B|^{-1}|A|^2 = |A|^3|B|^{-1}$ に等しく, 右辺は $3^4|B||A|^2|B| = 81|A|^2|B|^2$ に等しいため, $|A|^3|B|^{-1} = 81|A|^2|B|^2$ であり, $A$ の正則性から $|A| \neq 0$ だから $|A| = 81|B|^3$ である. 故に $81|B|^3 = 16|B|^2$ だから $|B| = \dfrac{16}{81}$ である.

(5) $A^2B^tA = BA^tA^tB$ の両辺の行列式を考えると, $|A^2B^tA| = |BA^tA^tB|$ が成り立ち, $|B| = -2$ より この左辺は $|A|^2|B||^tA| = -2|A|^3$ に等しく, 右辺は $|B||A|^2|B| = 4|A|^2$ に等しいため, $-2|A|^3 = 4|A|^2$ である. $A$ は正則行列だから $|A| \neq 0$ より, 上式から $|A| = -2$ が得られる.

(6) ${}^tABAB = {}^tBA^2BA$ の両辺の行列式を考えると, $|{}^tABAB| = |{}^tBA^2BA|$ が成り立ち, この左辺は $|{}^tA||B||A||B| = |A|^2|B|^2$ に等しく, 右辺は $|{}^tB||A|^2|B||A| = |A|^3|B|^2$ に等しいため, $|A|^2|B|^2 = |A|^3|B|^2$ である. $B$ は正則行列だから $|B| \neq 0$ より, 上式から $|A| = 1$ が得られる.

6. (1) $AP = A\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{v}_1 & A\boldsymbol{v}_2 & A\boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & f(\boldsymbol{v}_2) & f(\boldsymbol{v}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 & 2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ であり, $P$ が逆行列をもつことから, $Q = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(2) $|Q| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6$. $A = PQP^{-1}$ だから $|A| = |PQP^{-1}| = |P||Q||P^{-1}| = 6|P||P^{-1}| = 6|PP^{-1}| = 6|E_3| = 6$.

7. $D$ の第 $i$ 行を除いた行列の第 $i$ 列は零ベクトルになるため, $D_{ij}$ は $i < j$ ならば第 $i$ 列が, $j < i$ ならば第 $i-1$ 列が零ベクトルである行列である. 従って, $i \neq j$ ならば $|D_{ij}| = 0$ となるため, $D$ の $(i, j)$ 余因子は $0$ である. 故に $D$ の余因子行列は対角行列である. $D$ の $(i, i)$ 余因子は $(-1)^{i+i}|D_{ij}| = \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}\lambda_{i+1} \cdots \lambda_n$ であり, これが $D$ の余因子行列の $(i, i)$ 成分である.

8. 教科書の命題 4.15 より $A\widetilde{A} = |A|E_n$ の両辺の行列式を考えると, $|A\widetilde{A}| = |A||\widetilde{A}|$, $||A|E_n| = |A|^n$ より $|A||\widetilde{A}| = |A|^n$ である. $A$ が正則ならば, 教科書の定理 4.16 から $|A| \neq 0$ だから $|A||\widetilde{A}| = |A|^n$ の両辺を $|A|$ で割って $|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$ が得られる. $A$ が正則でない場合, $|A| = 0$ だから $A\widetilde{A} = |A|E_n = O$ である. もし $|\widetilde{A}| \neq 0$ ならば $\widetilde{A}$ の逆行列があるため, $A\widetilde{A} = O$ より, $A = O$ が得られるが, このとき $\widetilde{A} = O$ となるため, $|\widetilde{A}| \neq 0$ と矛盾が生じる. 故に, この場合も $|\widetilde{A}| = 0 = |A|^{n-1}$ である.

9. $T = (t_{ij})$ を $t_{ij} = 1$ $(i \leqq j)$, $t_{ij} = 0$ $(i > j)$ で与えられる $n$ 次上半三角行列とすると, ${}^tTT$ の $(i, j)$-成分 $\sum_{l=1}^{n} t_{li}t_{lj}$ は, $i \leqq j$ ならば $i$, $i > j$ ならば $j$ である. 従って, とくに ${}^tTT$ の各成分は正の整数である. また, $T$, ${}^tT$ はともに対角成分がすべて $1$ であるような三角行列だから $|T| = |{}^tT| = 1$ である. $k$ が正の整数の場合, ${}^tTT$ の第 1 列を $k$ 倍したものを $A$ とすれば $A$ の各成分は正の整数で $|A| = k|{}^tTT| = k|{}^tT||T| = k$ である. また, $A$ の第 1 列と第 2 列を入れ替えた行列を $B$ とすれば, $B$ は正の整数を成分にもち, 行列式の値が負の整数 $-k$ であるような行列の例になっている. また, すべての成分が $1$ である $n$ 次正方行列は正の整数を成分にもち, 行列式の値が $0$ であるような行列の例になっている.

10. $\operatorname{rank} A = n-1$ ならば教科書の系 3.4 より $A$ は正則ではないため, 定理 4.16 から $|A| = 0$ である. よって, 教科書の命題 4.15 から $A\widetilde{A} = |A|E_n = O$ となるため, 第 7 回演習問題の 6 の結果から $n-1+\operatorname{rank}\widetilde{A} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank}\widetilde{A} \leqq n$ である. 従って $\operatorname{rank}\widetilde{A} \leqq 1$ である.

11. (1) 教科書の命題 4.15 より $A\widetilde{A} = |A|E_n$, $B\widetilde{B} = |B|E_n$, $AB\widetilde{AB} = |AB|E_n$ であるため, $A, B$ がともに正則ならば, 第 1,2,3 式の両辺に左からそれぞれ $A^{-1}$, $B^{-1}$, $B^{-1}A^{-1}$ をかけて, $\widetilde{A} = |A|A^{-1}$, $\widetilde{B} = |B|B^{-1}$, $\widetilde{AB} = |AB|B^{-1}A^{-1}$ を得る. この最後の式の右辺は定理 4.8 と定理 2.1 の (4) から $|AB|B^{-1}A^{-1} = |A||B|B^{-1}A^{-1} = \left(|B|B^{-1}\right)\left(|A|A^{-1}\right) = \widetilde{B}\widetilde{A}$ に等しいため, 主張が示された.
(2) 定理 4.16 から, $0$ に収束する数列 $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\ldots}$ で, すべての $k$ に対して $|A + \alpha_k E_n| \neq 0$ であるものが存在することを示せばよい. $A = (a_{ij})$ として, $x$ の多項式 $F(x) = |A + xE_n|$ を考える. $S'$ を $1, 2, \ldots, n$ の順列 $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ すべての集合 $S$ から順列 $[1, 2, \ldots, n]$ を除いた集合とし, $A + xE_n$ の $(i, j)$ 成分を $a'_{ij}$ とおくと命題 4.5 から

$$\begin{vmatrix} x + a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & x + a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & x + a_{nn} \end{vmatrix} = (x + a_{11})(x + a_{22}) \cdots (x + a_{nn}) + \sum_{[i_1, i_2, \ldots, i_n] \in S'} (-1)^{N[i_1, i_2, \ldots, i_n]} a'_{i_1 1}a'_{i_2 2} \cdots a'_{i_n n}$$

であり, $[i_1, i_2, \ldots, i_n] \in S'$ ならば, $a'_{i_1 1}, a'_{i_2 2}, \ldots, a'_{i_n n}$ のうちの少なくとも 1 つは変数 $x$ を含まないため,

$$\sum_{[i_1, i_2, \ldots, i_n] \in S'} (-1)^{N[i_1, i_2, \ldots, i_n]} a'_{i_1 1}a'_{i_2 2} \cdots a'_{i_n n}$$

は $x$ の $n-1$ 次以下の多項式である. よって, 上式から $F(x)$ は $x^n$ の係数が $1$ である $x$ の $n$ 次多項式であるため, $n$ 次方程式 $F(x) = 0$ の解は $n$ 個以下である. そこで，$\alpha$ を $F(x) = 0$ の正の実数解があれば, それらのうちで絶対値が最小のものとし, $F(x) = 0$ の正の実数解がなければ, $\alpha = 1$ とおいて, 数列 $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\ldots}$ を $\alpha_k = \dfrac{\alpha}{k+1}$ で定め

る．このときすべての $k=1,2,\dots$ に対して $|A+\alpha_k E_n| = F(\alpha_k) \neq 0$ である．
(3) 実数 $x, y$ に対して, $A+xE_n$, $B+yE_n$, $(A+xE_n)(B+yE_n)$ の余因子行列をそれぞれ $A(x)$, $B(y)$, $C(x,y)$ とすれば, (1) によって, $A(x)$ が正則である $x$ と $B(y)$ が正則である $y$ に対して $B(y)A(x) = C(x,y)$ が成り立つ．(2) から $A$, $B$ に対して 0 に収束する数列 $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\dots}$, $\{\beta_k\}_{k=1,2,\dots}$ で, すべての $k$ に対して $A+\alpha_k E_n$, $B+\beta_k E_n$ が正則になるものがあるため, $B(\beta_k)A(\alpha_k) = C(\alpha_k, \beta_k)$ がすべての $k$ に対して成り立つ．$A(x)$, $B(y)$, $C(x,y)$ の $(i,j)$ 成分をそれぞれ $a_{ij}(x)$, $b_{ij}(y)$, $c_{ij}(x,y)$ とおくと, これらはそれぞれ $x$, $y$, $x$ と $y$ の多項式で, $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\dots}$, $\{\beta_k\}_{k=1,2,\dots}$ は 0 に収束するため, $\{a_{ij}(\alpha_k)\}_{k=1,2,\dots}$, $\{b_{ij}(\beta_k)\}_{k=1,2,\dots}$, $\{c_{ij}(\alpha_k,\beta_k)\}_{k=1,2,\dots}$ はそれぞれ $a_{ij}(0)$, $b_{ij}(0)$, $c_{ij}(0,0)$ に収束する．従って $B(\beta_k)A(\alpha_k) = C(\alpha_k,\beta_k)$ $(k=1,2,\dots)$ より, $B(0)A(0) = C(0,0)$ である．一方 $A(0) = \widetilde{A}$, $B(0) = \widetilde{B}$, $C(0,0) = \widetilde{AB}$ だから主張が示された．
(4) $\operatorname{rank} A = r$ とおくと, 定理 3.3 から, $n$ 次基本行列の積で表される行列 $X$, $Y$ で $XAY = F_{n,n}(r)$ となるものがある．系 3.4 によって, $X$, $Y$ は正則だから, $A = X^{-1}F_{n,n}(r)Y^{-1}$ となるため, (3) によって $\widetilde{A} = \widetilde{Y^{-1}}\widetilde{F_{n,n}(r)}\widetilde{X^{-1}}$ が成り立つ．問題 8 の結果と定理 4.16 から $\widetilde{Y^{-1}}$ と $\widetilde{X^{-1}}$ は正則行列だから, 系 3.6 の (2) によって, $\operatorname{rank}\widetilde{A} = \operatorname{rank}\widetilde{F_{n,n}(r)}$ が成り立つ．ここで, 問題 7 の結果から $\widetilde{F_{n,n}(n-1)}$ は $(n,n)$ 成分のみが 1 で, 他の対角成分はすべて 0 である対角行列であるため, $\operatorname{rank}\widetilde{F_{n,n}(n-1)} = 1$ であり, $r \leqq n-2$ ならば $\widetilde{F_{n,n}(r)}$ は零行列であることに注意すれば, $\operatorname{rank} A = n-1$ ならば $\operatorname{rank}\widetilde{A} = \operatorname{rank}\widetilde{F_{n,n}(n-1)} = 1$ であり, $\operatorname{rank} A \leqq n-2$ ならば $\widetilde{A} = \widetilde{Y^{-1}}O\widetilde{X^{-1}} = O$ である．
(5) $|A|\det(A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, \dots, A\boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{x}_n) = \det(A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, \dots, A\boldsymbol{x}_{n-1}, |A|\boldsymbol{x}_n) = \det(A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, \dots, A\boldsymbol{x}_{n-1}, A\widetilde{A}\boldsymbol{x}_n) = |A|\det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \widetilde{A}\boldsymbol{x}_n)$ より, $A$ が正則ならば $\det(A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, \dots, A\boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{x}_n) = \det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \widetilde{A}\boldsymbol{x}_n)$ である．(2) より, 0 に収束する数列 $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\dots}$ で, すべての $k$ に対して $A+\alpha_k E_n$ が正則になるものが存在する．従って $A_k = A+\alpha_k E_n$ とおけば, すべての $k$ に対して $\det(A_k\boldsymbol{x}_1, A_k\boldsymbol{x}_2, \dots, A_k\boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{x}_n) = \det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \widetilde{A}_k\boldsymbol{x}_n)$ が成り立つ．$k \to \infty$ のとき, $A_k$ の $(i,j)$ 成分は $A$ の $(i,j)$ 成分に近づき, $\widetilde{A}_k$ の $(i,j)$ 成分は $\widetilde{A}$ の $(i,j)$ 成分に近づくため, 上式から $\det(A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, \dots, A\boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{x}_n) = \det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \widetilde{A}\boldsymbol{x}_n)$ が得られる．

# 線形数学 I 演習問題　第 10 回　ベクトルの外積

1. 次の外積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\6\\3\end{pmatrix}$

2. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{R}^3$, $A$ を 3 次正方行列とするとき, 以下の等式が成り立つことを示せ.

(1) $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z}=-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\boldsymbol{y}$

(2) $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})=D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$

(3) $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$

(4) $\|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2$

(5) $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w})=D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})\boldsymbol{z}-D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{w}=D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\boldsymbol{y}-D_3(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\boldsymbol{x}$

(6) $D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})^2=\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2\|\boldsymbol{z}\|^2-\|\boldsymbol{x}\|^2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})^2-\|\boldsymbol{y}\|^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})^2-\|\boldsymbol{z}\|^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$

(7) $A\boldsymbol{x}\times A\boldsymbol{y}={}^t\widetilde{A}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})$

3. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^3$ とする.

(1) $((\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ となるのはどのような場合か答えよ.

(2) $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ となるのはどのような場合か答えよ.

4. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を零でない 3 次元実ベクトル, 原点を通り $\boldsymbol{x}$ に垂直な平面を $P$ とし, $\boldsymbol{u}=\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ とおく.

(1) $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{y}$ を位置ベクトルとする点から $P$ に下した垂線の足の位置ベクトルであることを示せ.

(2) 上記の垂線の長さは $|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})|=\dfrac{|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ で与えられることを示せ

5. O を $\boldsymbol{R}^3$ の原点とし, A, B, C を $\boldsymbol{R}^3$ の点として, O, A, B, C は同一平面上にはないとする. $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 点 A から, 三点 O, B, C を通る平面に下ろした垂線の足の位置ベクトルを $s\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{c}$ $(s,t\in\boldsymbol{R})$ の形に表せ.

(2) 点 A から, 三点 O, B, C を通る平面に下ろした垂線の長さを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を用いて表せ.

(3) 点 A から, 二点 B, C を通る直線に下ろした垂線の足の位置ベクトルを $s\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{c}$ $(s+t=1)$ の形に表せ.

(4) 点 A から, 二点 B, C を通る直線に下ろした垂線の長さを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を用いて表せ.

6. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルとし, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の一方は他方の実数倍ではないとする. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{v}$ によってパラメータ表示される $\boldsymbol{R}^3$ の直線を, それぞれ $l$, $m$ とする. このとき, $l$ 上の点と $m$ 上の点の最短距離を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を用いて表せ. また, P, Q をそれぞれ, $l$, $m$ 上の点とするとき, 線分 PQ の長さが最小になるのは $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の両方のベクトルと垂直になる場合に限ることを示せ.

# 第 10 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}7\\1\\-3\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}-6\\7\\2\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

2. (1) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ の第 $j$ 成分 $(j=1,2,3)$ をそれぞれ $x_j$, $y_j$, $z_j$ とする．$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\-x_1y_3+x_3y_1\\x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z}&=\begin{pmatrix}(-x_1y_3+x_3y_1)z_3-(x_1y_2-x_2y_1)z_2\\-(x_2y_3-x_3y_2)z_3+(x_1y_2-x_2y_1)z_1\\(x_2y_3-x_3y_2)z_2-(-x_1y_3+x_3y_1)z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(y_2z_2+y_3z_3)x_1+(x_2z_2+x_3z_3)y_1\\-(y_1z_1+y_3z_3)x_2+(x_1z_1+x_3z_3)y_2\\-(y_1z_1+y_2z_2)x_3+(x_1z_1+x_2z_2)y_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)x_1+(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)y_1\\-(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)x_2+(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)y_2\\-(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)x_3+(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})x_1\\-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})x_2\\-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})y_1\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})y_2\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})y_3\end{pmatrix}\\&=-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

[別解] $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が 1 次独立な場合, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}-\dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の直交基底であり, $\left\|\boldsymbol{y}-\dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}\right\|^2=\dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ だから, $\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}=\dfrac{\|\boldsymbol{x}\|}{\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}}\left(\boldsymbol{y}-\dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}\right)$, $\boldsymbol{w}=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\|}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})$ とおけば, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の右手系の正規直交基底である．従って $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\boldsymbol{w}$ であり, $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$ が成り立つ．また, $\boldsymbol{x}=\|\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}=\dfrac{\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{v}+\dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{u}$ だから

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z}&=\left(\|\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{u}\times\left(\frac{\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{v}+\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{u}\right)\right)\times((\boldsymbol{z},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\boldsymbol{w})\\&=\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}\,\boldsymbol{w}\times((\boldsymbol{z},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\boldsymbol{w})\\&=\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}((\boldsymbol{z},\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v})\boldsymbol{u})\\&=(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\left(\boldsymbol{y}-\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}\right)-\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}-\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{x}=-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が 1 次従属ならば $\boldsymbol{y}=k\boldsymbol{x}$ または $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{y}$ を満たす実数 $k$ が存在する．前者の場合は $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x}\times k\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{z}=k(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ と $-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\boldsymbol{y}=-(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})k\boldsymbol{x}=-k((\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ が成り立つため, $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z}=-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\boldsymbol{y}$ である．後者の場合も同様に $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z}=-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\boldsymbol{y}$ が示される．

(2) $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}&\boldsymbol{z}\end{pmatrix}$ とおき, $A$ の $(i,j)$ 成分を $a_{ij}$ とすれば $i=1,2,3$ に対して $a_{i1}=x_i$, $a_{i2}=y_i$, $a_{i3}=z_i$ だから, 教科書の定理 4.14 の (1) から

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(x_2y_3-x_3y_2)z_1-(x_1y_3-x_3y_1)z_2+(x_1y_2-x_2y_1)z_3=a_{13}|A_{13}|-a_{23}|A_{23}|+a_{33}|A_{33}|=|A|=D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})=x_1(y_2z_3-y_3z_2)-x_2(y_1z_3-y_3z_1)+x_3(y_1z_2-y_2z_1)=a_{11}|A_{11}|-a_{21}|A_{21}|+a_{31}|A_{31}|=|A|=D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

(3) (2) と (1) の結果から

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w})=((\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})=(-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})=-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})$$

(4) (3) で, とくに $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{y}$ の場合を考えれば,

$$\|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\|^2=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2$$

(5) (1) と (2) の結果から

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w}) = -(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w})\boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$$
$$= -D_3(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}+D_3(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = -D_3(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\boldsymbol{x}+D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\boldsymbol{y}.$$

また $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w}) = -(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w})\times(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})$ だから, 今示した結果から

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w}) = -(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w})\times(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = -\left(-D_3(\boldsymbol{w},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}+D_3(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w}\right) = D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})\boldsymbol{z}-D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{w}$$

(6) $A$ を (2) と同様に定めれば ${}^tAA = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{x}\|^2 & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \|\boldsymbol{y}\|^2 & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) & \|\boldsymbol{z}\|^2 \end{pmatrix}$ だから, この両辺の行列式を考えて, 右辺の行列の行列式を展開すれば, $D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = |A| = |{}^tA|$ より

$$D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})^2 = \left|{}^tA\right||A| = \left|{}^tAA\right| = \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2\|\boldsymbol{z}\|^2-\|\boldsymbol{x}\|^2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})^2-\|\boldsymbol{y}\|^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})^2-\|\boldsymbol{z}\|^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$$

(7) (2) と第 9 回の演習問題 11 の (5) の結果から, 任意の $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^3$ に対して $(A\boldsymbol{x}\times A\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = D_3(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\widetilde{A}\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\widetilde{A}\boldsymbol{z}) = (\widetilde{A}\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = {}^t(\widetilde{A}\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{z}{}^t\widetilde{A}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{z},{}^t\widetilde{A}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})) = ({}^t\widetilde{A}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}),\boldsymbol{z})$ である. 従って $(A\boldsymbol{x}\times A\boldsymbol{y}-{}^t\widetilde{A}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}),\boldsymbol{z}) = 0$ がすべての $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^3$ に対して成り立つため, $A\boldsymbol{x}\times A\boldsymbol{y} = {}^t\widetilde{A}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})$ である.

3. (1) 前問の (1) の結果より $((\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = (-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ だから $((\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ となるのは $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が垂直であるか, または $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の一方が他方の実数倍である場合である.

(2) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ ならば $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ は成り立つ. $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ かつ $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ であると仮定する. $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ だから, $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ であるため, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の一方は他方の実数倍ではない. このとき, 問題 2 の (1) の結果より $-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ だから $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = 0$ かつ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 1$ が成り立つ. 逆に $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = 0$ かつ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 1$ ならば (1) の結果より $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が成り立つ. 以上から $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が成り立つのは $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ であるか, または $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ かつ $\boldsymbol{x}$ が単位ベクトルの場合である.

4. (1) $\boldsymbol{y}$ を位置ベクトルとする点から $P$ に下した垂線の足の位置ベクトルを $\boldsymbol{z}$ とすれば $\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{u}$ と平行だから $\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{u}$ を満たす実数 $t$ があるため, $\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}+t\boldsymbol{u}$ と表せる. また, $\boldsymbol{z}$ は $P$ 上のベクトルだから $\boldsymbol{u}$ と垂直であるため $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u}) = 0$ である. $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = 1$ だから $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})-t$ となるため, $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u}) = 0$ より $t = (\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})$ である. 従って $\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$ で与えられる. 一方, 問題 2 の (1) の結果から $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{y}$ だから $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{y}$ から $P$ に下した垂線の足の位置ベクトル $\boldsymbol{z}$ に一致する.

(2) $\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{y}$ を位置ベクトルとする点から $P$ に下した垂線のベクトルだから, その長さは $\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| = |(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})|\|\boldsymbol{u}\| = |(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})| = \dfrac{|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ である.

5. (1) 三点 O, B, C を通る平面を $P$ とする. 仮定から O, B, C は同一直線上にないため, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の一方は他方の実数倍ではない. 従って $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ であり, $P$ は原点を通り, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ に垂直な平面である. $\boldsymbol{u} = \dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|}$ とおけば, 前問の結果から, A から $P$ に下ろした垂線の足の位置ベクトルは, $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{u}$ で与えられる. 問題 2 の (1), (4) の結果から

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{u} &= \left(\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|}\times\boldsymbol{a}\right)\times\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|} = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2}((\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \\ &= \frac{1}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2}(-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = -\frac{1}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}) \\ &= \frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}-\frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c} \\ &= \frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2}(-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c})-\frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2}(-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{c}) \\ &= \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\|\boldsymbol{c}\|^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2}\boldsymbol{b}+\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2}\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

が得られる.

(2) 点 A から, 三点 O, B, C を通る平面に下ろした垂線の長さは, 前問の (2) の結果から

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})| = \frac{|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|} = \frac{|D_3(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|}{\sqrt{\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2}}.$$

(3) 点 A から, 二点 B, C を通る直線に下ろした垂線の足の位置ベクトルを $(1-t)\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{c}$ $(t\in\boldsymbol{R})$ とする. $(1-t)\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$ と垂直だから $((1-t)\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$ である. 従って $t\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$ だから $t=\dfrac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}$ である. 故に, 二点 B, C を通る直線に下ろした垂線の足の位置ベクトルは

$$\left(1-\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\right)\boldsymbol{b}+\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{c} = \frac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}+\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{c}.$$

(4) $\dfrac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}+\dfrac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}=1$ であることに注意すれば, B, C を通る直線に下ろした垂線のベクトルは,

$$\begin{aligned}
\frac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}+\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a} &= \frac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}+\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{c}-\left(\frac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}+\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\right)\boldsymbol{a}\\
&= \frac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\\
&= \frac{1}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\left((\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\right)
\end{aligned}$$

となる. 従って, その長さの 2 乗は

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^4}\left((\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})^2\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|^2+2(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})^2\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\|^2\right)$$

となる. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ とおけば, 上の値は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^4}\left((\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2\|\boldsymbol{x}\|^2-2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2\|\boldsymbol{y}\|^2\right)\\
&\quad= \frac{1}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^4}\left(\|\boldsymbol{x}\|^4\|\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^4+2\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\|\boldsymbol{x}\|^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2-\|\boldsymbol{y}\|^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^3\right)\\
&\quad= \frac{1}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^4}\left(\|\boldsymbol{x}\|^2+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\|\boldsymbol{y}\|^2\right)\left(\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2\right)\\
&\quad= \frac{1}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^4}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2\left(\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2\right) = \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2} = \frac{\|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\|^2}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2}
\end{aligned}$$

に等しくなるため, 求める垂線の長さは, 以下の値になる.

$$\frac{\sqrt{\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\|^2-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})^2}}{\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\|} = \frac{\|(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\|}{\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\|}$$

6. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{u}$ を位置ベクトルとする $l$ 上の点 P と $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{v}$ を位置ベクトルとする $m$ 上の点 Q の距離の 2 乗 $\mathrm{PQ}^2=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$ を求める. $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+s\boldsymbol{u}-t\boldsymbol{v}$ だから $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ とおけば

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 &= \|\boldsymbol{c}+s\boldsymbol{u}-t\boldsymbol{v}\|^2 = s^2\|\boldsymbol{u}\|^2-2st(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+t^2\|\boldsymbol{v}\|^2+2s(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})-2t(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})+\|\boldsymbol{c}\|^2\\
&= \left(\|\boldsymbol{u}\|s-\frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|}t+\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|}\right)^2+\frac{\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2}t^2-2\left((\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})-\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\right)t+\|\boldsymbol{c}\|^2-\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\\
&= \left(\|\boldsymbol{u}\|s-\frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|}t+\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|}\right)^2+\left(\frac{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{u}\|}t-\frac{\|\boldsymbol{u}\|(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|}+\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|}\right)^2\\
&\quad+\left(\|\boldsymbol{c}\|^2-\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2}-\frac{\|\boldsymbol{u}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})^2}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}+2\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}-\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}\right)
\end{aligned}$$

だから $\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2 - (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2$ であることに注意すれば, 上式から

$$s = \frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2} - \frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2} - \frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^2} = \frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - \|\boldsymbol{v}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}, \qquad t = \frac{\|\boldsymbol{u}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}$$

のとき, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$ は最小値 $\|\boldsymbol{c}\|^2 - \dfrac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2} - \dfrac{\|\boldsymbol{u}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})^2}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2} + 2\dfrac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2} - \dfrac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}$ をとる. この値は

$$\frac{\|\boldsymbol{c}\|^2\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2 - (\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2\left(\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2 + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2\right) - \|\boldsymbol{u}\|^4(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})^2 + 2\|\boldsymbol{u}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}$$

に等しいが, 上式の分子は $\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2 - (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2$ を用いれば

$$\|\boldsymbol{c}\|^2\|\boldsymbol{u}\|^2\left(\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2 - (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2\right) - \|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2 - \|\boldsymbol{u}\|^4(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})^2 + 2\|\boldsymbol{u}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

となるため, 2 の (6) の結果を用いると $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$ の最小値は

$$\frac{\|\boldsymbol{c}\|^2\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{c}\|^2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})^2 + 2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2} = \frac{D_3(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}$$

に等しいことがわかる. $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ の最小値 $\dfrac{|D_3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|}$ が $l$ と $m$ の最短距離である.

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-s\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}$ だから $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の両方のベクトルと垂直になるためには $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-s\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-s\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0$ が成り立つことが必要十分である. $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-s\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = -\|\boldsymbol{u}\|^2 s + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})t - (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{u})$, $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-s\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = -(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})s + \|\boldsymbol{v}\|^2 t - (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{v})$ だから $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の両方のベクトルと垂直になるためには $x=s$, $y=t$ が連立 1 次方程式

$$(*)\begin{cases} -\|\boldsymbol{u}|^2 x + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})y = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}) \\ -(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})x + \|\boldsymbol{v}\|^2 y = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{v}) \end{cases}$$

の解であることが必要十分であるが, 上で求めた $\mathrm{PQ} = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ が最小になる $s$, $t$ の値はこの連立 1 次方程式 $(*)$ の解である. また $(*)$ の係数行列の行列式の値は $-\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2 + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2 = -\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2$ で 0 でないため, $(*)$ はただ 1 つの解を持つ. 故に, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の両方のベクトルと垂直になるためには, 線分 PQ の長さが最小になるときに限る.

# 線形数学 II 演習問題　第 11 回　複素数

1. 以下の複素数を $x+yi$ ($x$, $y$ は実数) の形に表せ.

(1) $(1+2i)^3$　(2) $\dfrac{5}{-3+4i}$　(3) $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2$　(4) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3$　(5) $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3$　(6) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3$

(7) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3$　(8) $(1+i)^n+(1-i)^n$

2. $z=x+yi$ ($x$, $y$ は実数) のとき, 以下の複素数の実部と虚部を $x$ と $y$ を用いて表せ.

(1) $z^4$　(2) $\dfrac{1}{z}$　(3) $\dfrac{z-1}{z+1}$　(4) $\dfrac{1}{z^2}$　(5) $\dfrac{z}{z^2+1}$

3. 複素数 $-2i(3+i)(2+4i)(1+i)$, $\dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$ の絶対値を求めよ.

4. 以下の方程式の解をすべて求めよ.

(1) $z^2=i$　(2) $z^2=-i$　(3) $z^2=1+i$　(4) $z^2=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$　(5) $z^4=-1$　(6) $z^4=i$　(7) $z^4=-i$

(8) $z^5=1$　(9) $z^{10}=1$

5. $\cos 3\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\sin 5\varphi$ を $\cos\varphi$ と $\sin\varphi$ を用いて表せ.

6. $1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cdots+\cos n\varphi$, $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\cdots+\sin n\varphi$ を簡単な式で表せ.

7. $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とおく. 整数 $m$ に対し, 次の値を求めよ.

(1) $1+\omega^m+\omega^{2m}+\cdots+\omega^{(n-1)m}$　(2) $1-\omega^m+\omega^{2m}+\cdots+(-1)^{n-1}\omega^{(n-1)m}$

8. (1) $a\neq b$ のとき, $|a|=1$ または $|b|=1$ ならば $\bar{a}b\neq 1$ であることを示し, $\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}$ の絶対値を求めよ.

(2) $|a|<1$ かつ $|b|<1$ ならば $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|<1$ であることを示せ.

9. $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ を実数とするとき, 次の 2 次方程式の解を $x+yi$ ($x$, $y$ は実数) の形に表せ.

$$z^2+(\alpha+\beta i)z+\gamma+\delta i=0$$

10. $a$, $b$, $c$ を複素数とし, $a$ と $b$ の少なくとも一方は 0 ではないとする. このとき, $z$ の方程式 $az+b\bar{z}+c=0$ が解をもつための必要十分条件求め, その条件が満たされるときに解を求めよ.

11. 複素数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$, $b_1,b_2,\ldots,b_n$ に対し, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\left|\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right|^2=\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2-\sum_{1\leqq j<k\leqq n}|a_j\bar{b}_k-a_k\bar{b}_j|^2$$

12. $a_1,a_2,\ldots,a_n$ を絶対値が 1 より小さい複素数とし, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ を負でない実数とするとき, $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$ ならば $|\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n|<1$ であることを示せ.

13. (1) 複素数 $a$ と負でない実数 $r$ に対し, $|z-a|+|z+a|=2r$ を満たす複素数 $z$ が存在するための必要十分条件は $|a|\leqq r$ であることを示せ.

(2) $|a|\leqq r$ のとき, $z$ が $|z-a|+|z+a|=2r$ を満たしながら動くとき, $|z|$ の最大値と最小値を求めよ.

14. $A$, $B$ を $n$ 次正方行列とするとき, $\begin{vmatrix}A & -B\\ B & A\end{vmatrix}=|A+iB||A-iB|$ が成り立つことを示せ.

## 第 11 回の演習問題の解答

1. (1) $(1+2i)^3 = 1+6i-12-8i = -11-2i$ (2) $\dfrac{5}{-3+4i} = \dfrac{5(-3-4i)}{25} = \dfrac{-3}{5} + \dfrac{-4i}{5}$

(3) $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2 = \left(\dfrac{(2+i)(3+2i)}{13}\right)^2 = \left(\dfrac{4+7i}{13}\right)^2 = \dfrac{-33+56i}{169} = \dfrac{-33}{169} + \dfrac{56i}{169}$

(4) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = \left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

(5) $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = \left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)^3 = \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi) = 1$

(6) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

(7) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^3 = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$

(8) $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + 2^{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^n + 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^n =$

$2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right) + 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(-\dfrac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{n\pi}{4}\right)\right) = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\dfrac{n\pi}{4} = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}+1}(-1)^{\frac{n}{4}} & \frac{n}{2} \text{ は偶数} \\ 0 & \frac{n}{2} \text{ は奇数} \\ 2^{\frac{n+1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{4}} & n-1 \text{ は 4 の倍数} \\ 2^{\frac{n+1}{2}}(-1)^{\frac{n+1}{4}} & n+1 \text{ は 4 の倍数} \end{cases}$

2. (1) $z^4 = (x+yi)^4 = x^4 + 4x^3yi - 6x^2y^2 - 4xy^3i + y^4 = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + (4x^3y - 4xy^3)i$ だから $\mathrm{Re}(z^4) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $\mathrm{Im}(z^4) = 4x^3y - 4xy^3$.

(2) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+yi} = \dfrac{x-yi}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + \dfrac{-yi}{x^2+y^2}$ だから $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

(3) $\dfrac{z-1}{z+1} = 1 - \dfrac{2}{z+1}$ より, (2) の結果から $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = 1 - \dfrac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2}$, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = \dfrac{2y}{(x+1)^2+y^2}$.

(4) $\dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1}{(x+yi)^2} = \dfrac{(x-yi)^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{-2xyi}{(x^2+y^2)^2}$ だから $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z^2}\right) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z^2}\right) = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

(5) $\dfrac{z}{z^2+1} = \dfrac{x+yi}{(x+yi)^2+1} = \dfrac{x+yi}{x^2-y^2+1+2xyi} = \dfrac{(x+yi)(x^2-y^2+1-2xyi)}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2} = \dfrac{x^3+xy^2+x}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2} + \dfrac{(-x^2y-y^3+y)i}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$ だから $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{z^2+1}\right) = \dfrac{x^3+xy^2+x}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{z^2+1}\right) = \dfrac{-x^2y-y^3+y}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$.

3. $|-2i(3+i)(2+4i)(1+i)| = |-2i||3+i||2+4i||1+i| = 2\sqrt{10}\sqrt{20}\sqrt{2} = 40$

$\left|\dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}\right| = \dfrac{|3+4i||-1+2i|}{|-1-i||3-i|} = \dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{10}} = \dfrac{5}{2}$

4. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r \geqq 0)$, $\arg a = \alpha$ とおくと, $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ だから, 方程式 $z^n = a$ は $\begin{cases} r^n\cos n\varphi = |a|\cos\alpha & \cdots(i) \\ r^n\sin n\varphi = |a|\sin\alpha & \cdots(ii) \end{cases}$ と同値である. $(i)$ の両辺を 2 乗したものと $(ii)$ の両辺を 2 乗したものを加えれば, $r^{2n} = |a|^2$ が得られ, $r$ は負でない実数だから $r = \sqrt[n]{|a|}$ である. このとき, $(i)$, $(ii)$ を満たす $0 \leqq \varphi < 2\pi$ は $\varphi = \dfrac{\alpha+2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ で与えられるため, $z^n = a$ の解は $\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ で与えられる.

(1) $|i|=1$, $\arg i=\dfrac{\pi}{2}$ だから, 求める解は $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)$ $(k=0,1)$, すなわち $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ である.

(2) $|-i|=1$, $\arg i=\dfrac{3\pi}{2}$ だから, 求める解は $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\right)$ $(k=0,1)$, すなわち $\pm\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$ である.

(3) $|1+i|=\sqrt{2}$, $\arg(1+i)=\dfrac{\pi}{4}$ だから, 求める解は $\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+k\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{8}+k\pi\right)\right)$ $(k=0,1)$, すなわち $\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$ である. ここで, $2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $1-2\sin^2\dfrac{\pi}{8}=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であり, $\cos\dfrac{\pi}{8}$ と $\sin\dfrac{\pi}{8}$ はともに正だから $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ である. 従って, 求める解は $\pm\sqrt[4]{2}\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i\right)$ である.

(4) $\left|\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right|=1$, $\arg\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{5\pi}{3}$ だから, 求める解は $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\right)$ $(k=0,1)$, すなわち $\pm\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$ である.

(5) $z^4=-1$ は「$z^2=i$ または $z^2=-i$」と同値だから, (1) と (2) により, 求める解は $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\pm\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$ である.

(6) $|i|=1$, $\arg i=\dfrac{\pi}{2}$ だから, 求める解は $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\right)$ $(k=0,1,2,3)$, すなわち
$\pm\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)=\pm\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i\right)$ と $\pm\left(-\sin\dfrac{\pi}{8}+i\cos\dfrac{\pi}{8}\right)=\pm\left(-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}i\right)$ である.

(7) $|-i|=1$, $\arg i=\dfrac{3\pi}{2}$ だから, 求める解は $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\right)$ $(k=0,1,2,3)$, すなわち
$\pm\left(\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$ と $\pm\left(-\sin\dfrac{3\pi}{8}+i\cos\dfrac{3\pi}{8}\right)$ である. ここで, 下の演習問題 5 の結果から

$$\cos\frac{3\pi}{8}=4\cos^3\frac{\pi}{8}-3\cos\frac{\pi}{8}=\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2(2+\sqrt{2})}}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\frac{3\pi}{8}=3\sin\frac{\pi}{8}-4\sin^3\frac{\pi}{8}=\frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2(2-\sqrt{2})}}{2}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$ だから, 求める解は

$\pm\left(\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}i\right)$ と $\pm\left(-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i\right)$ である.

(8) 解は $\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}$ $(k=0,1,2,3,4)$ で与えられる. 下の問題 5 の結果 $16\sin^5\varphi-20\sin^3\varphi+5\sin\varphi=\sin 5\varphi$ において $\sin 5\varphi=0$ かつ $\sin\varphi\neq 0$ の場合, $16\sin^4\varphi-20\sin^2\varphi+5=0$ だから $\sin\varphi=\pm\dfrac{\sqrt{10\pm 2\sqrt{5}}}{4}$ である. $\sin 5\varphi=0$ かつ $\sin\varphi\neq 0$ を満たす $0\leqq\varphi<2\pi$ は, $\dfrac{\pi}{5}$, $\dfrac{2\pi}{5}$, $\dfrac{3\pi}{5}$, $\dfrac{4\pi}{5}$, $\dfrac{6\pi}{5}$, $\dfrac{7\pi}{5}$, $\dfrac{8\pi}{5}$, $\dfrac{9\pi}{5}$ の 8 つで, $0<\sin\dfrac{\pi}{5}<\sin\dfrac{2\pi}{5}$ だから $\sin\dfrac{\pi}{5}=\sin\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\sin\dfrac{2\pi}{5}=\sin\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\sin\dfrac{6\pi}{5}=\sin\dfrac{9\pi}{5}=-\sin\dfrac{\pi}{5}=-\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\sin\dfrac{7\pi}{5}=\sin\dfrac{8\pi}{5}=-\sin\dfrac{2\pi}{5}=-\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ である. また $\cos\dfrac{2\pi}{5}=1-2\sin^2\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos\dfrac{4\pi}{5}=2\cos^2\dfrac{2\pi}{5}-1=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\cos\dfrac{6\pi}{5}=\cos\dfrac{4\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}-\sin\dfrac{4\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5}=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\cos\dfrac{8\pi}{5}=\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ が得られるため, 求める解は, $1$, $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}+\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$, $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}+\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i$, $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}-\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i$, $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}-\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$ である.

(9) $z^{10}-1=-(z^5-1)((-z)^5-1)$ だから $z^{10}=1$ の解は $z^5=1$ の解と, $z^5=1$ の解を $-1$ 倍したものである. 従って (8) より, 求める解は $\pm 1$, $\pm\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$, $\pm\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$ (複号任意) である.

5. ド・モアブルの定理と二項定理から, 次の等式が成り立つ.

$$\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k\cos^{n-k}\varphi\sin^k\varphi$$
$$=\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2j}(-1)^j\cos^{n-2j}\varphi\sin^{2j}\varphi+i\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n}{2j+1}(-1)^j\cos^{n-2j-1}\varphi\sin^{2j+1}\varphi$$

上式の実部と虚部を比較すれば

$$\cos(n\varphi)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2j}(-1)^j\cos^{n-2j}\varphi\sin^{2j}\varphi,\quad \sin(n\varphi)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n}{2j+1}(-1)^j\cos^{n-2j-1}\varphi\sin^{2j+1}\varphi$$

が得られる. とくに, 上式で $n=3,4,5$ の場合を考えれば, 以下の結果が得られる.

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi(1-\cos^2\varphi)=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$$
$$\sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi=3(1-\sin^2\varphi)\sin\varphi-\sin^3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi$$
$$\cos 4\varphi=\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi=\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi(1-\cos^2\varphi)+(1-\cos^2\varphi)^2=8\cos^4\varphi-8\cos^2\varphi+1$$
$$\sin 4\varphi=4\cos^3\varphi\sin\varphi-4\cos\varphi\sin^3\varphi=4\cos\varphi\left((1-\sin^2\varphi)\sin\varphi-\sin^3\varphi\right)=4\cos\varphi\left(\sin\varphi-2\sin^3\varphi\right)$$
$$\cos 5\varphi=\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi=\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi(1-\cos^2\varphi)+5\cos\varphi(1-\cos^2\varphi)^2$$
$$=16\cos^5\varphi-20\cos^3\varphi+5\cos\varphi$$
$$\sin 5\varphi=5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi=5(1-\sin^2\varphi)^2\sin\varphi-10(1-\sin^2\varphi)\sin^3\varphi+\sin^5\varphi$$
$$=16\sin^5\varphi-20\sin^3\varphi+5\sin\varphi$$

6. $I_n=1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cdots+\cos n\varphi$, $J_n=\sin\varphi+\sin 2\varphi+\cdots+\sin n\varphi$ とおく. $\varphi$ が $2\pi$ の整数倍ならば, 明らかに $I_n=n+1$, $J_n=0$ である. $\varphi$ が $2\pi$ の整数倍ではない場合, $\omega=\cos\varphi+i\sin\varphi$ とおけば, $\omega^k=\cos k\varphi+i\sin k\varphi$ であり, $\omega\neq 1$ だから

$$I_n+iJ_n=\sum_{k=0}^{n}(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)=\sum_{k=0}^{n}\omega^k=\frac{\omega^{n+1}-1}{\omega-1}=\frac{\cos(n+1)\varphi-1+i\sin(n+1)\varphi}{\cos\varphi-1+i\sin\varphi}$$
$$=\frac{(\cos\varphi-1-i\sin\varphi)(\cos(n+1)\varphi-1+i\sin(n+1)\varphi)}{(\cos\varphi-1)^2+\sin^2\varphi}$$
$$=\frac{(\cos\varphi-1)(\cos(n+1)\varphi-1)+\sin\varphi\sin(n+1)\varphi+i((\cos\varphi-1)\sin(n+1)\varphi-\sin\varphi(\cos(n+1)\varphi-1))}{2(1-\cos\varphi)}$$
$$=\frac{\cos n\varphi-\cos(n+1)\varphi-\cos\varphi+1+i(\sin n\varphi-\sin(n+1)\varphi+\sin\varphi)}{2(1-\cos\varphi)}$$

が得られる. $I_n$ は上式の実部で, $J_n$ は虚部だから, 次の結果が得られる.

$$I_n=\frac{\cos n\varphi-\cos(n+1)\varphi-\cos\varphi+1}{2(1-\cos\varphi)},\qquad J_n=\frac{\sin n\varphi-\sin(n+1)\varphi+\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}$$

7. ド・モアブルの定理から, $\omega^k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ だから, とくに $\omega^n=1$ である.

(1) $\omega^m=1$, すなわち $m$ が $n$ の倍数ならば $1+\omega^m+\omega^{2m}+\cdots+\omega^{(n-1)m}=n$ であり, $\omega^m\neq 1$, すなわち $m$ が $n$ の倍数ではない場合は, $1+\omega^m+\omega^{2m}+\cdots+\omega^{(n-1)m}=\dfrac{1-\omega^{mn}}{1-\omega^m}=0$ である.

(2) $n$ が偶数で, $m$ が $\dfrac{n}{2}$ の奇数倍の場合は, $\dfrac{2m}{n}$ は奇数になるため, $\omega^m=-1$ である. 従って, この場合は $1-\omega^m+\omega^{2m}+\cdots+(-1)^{n-1}\omega^{(n-1)m}=n$ である. $n$ が偶数で, $m$ が $\dfrac{n}{2}$ の奇数倍ではない場合は, $\omega^m\neq -1$ だか

ら $1-\omega^m+\omega^{2m}+\cdots+(-1)^{n-1}\omega^{(n-1)m}=\dfrac{1-(-\omega^m)^n}{1-(-\omega^m)}=\dfrac{1-(-1)^n}{1+\omega^m}=0$ である. $n$ が奇数の場合は, $\omega^m\neq -1$ だから $1-\omega^m+\omega^{2m}+\cdots+(-1)^{n-1}\omega^{(n-1)m}=\dfrac{1-(-\omega^m)^n}{1-(-\omega^m)}=\dfrac{1-(-1)^n}{1+\omega^m}=\dfrac{2}{1+\omega^m}$ である.

8. (1) $\bar{a}b=1$ の両辺に $a$ をかけると $|a|^2b=a$ が得られるため, $|a|=1$ ならば $a=b$ である. $\bar{a}b=1$ の両辺の共役複素数を考えれば $a\bar{b}=1$ が得られ, この両辺に $b$ をかけると $|b|^2a=b$ が得られるため, $|b|=1$ ならば $a=b$ である. 故に, $|a|=1$ または $|b|=1$ の場合, $\bar{a}b=1$ が成り立てば $a=b$ となるため, $a\neq b$ であれば $\bar{a}b\neq 1$ である.

$|a|=1$ の場合, $\bar{a}a=1$ だから $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=\left|\dfrac{a(a-b)}{a(1-\bar{a}b)}\right|=\left|\dfrac{a(a-b)}{a-b}\right|=|a|=1$. $|b|=1$ の場合, $\bar{b}b=1$ だから $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=\left|\dfrac{\bar{b}(a-b)}{\bar{b}(1-\bar{a}b)}\right|=\left|\dfrac{\bar{b}(a-b)}{\bar{b}-\bar{a}}\right|=\dfrac{|\bar{b}|\,|a-b|}{|\bar{b}-\bar{a}|}=\dfrac{|b||a-b|}{|\overline{b-a}|}=\dfrac{|b||a-b|}{|b-a|}=|b|=1$. 従って $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=1$ である.

(2) $|a|<1$ かつ $|b|<1$ ならば $1-|a|^2>0$ かつ $1-|b|^2>0$ だから

$$\begin{aligned}|1-\bar{a}b|^2-|a-b|^2&=\overline{(1-\bar{a}b)}\,(1-\bar{a}b)-\overline{(a-b)}(a-b)=\left(1-a\bar{b}\right)(1-\bar{a}b)-\left(\bar{a}-\bar{b}\right)(a-b)\\&=1+|a|^2|b|^2-|a|^2-|b^2|=\left(1-|a|^2\right)\left(1-|b|^2\right)>0.\end{aligned}$$

従って $|a-b|^2<|1-\bar{a}b|^2$ だから $0\leqq|a-b|<|1-\bar{a}b|$ が得られ, この両辺を $|1-\bar{a}b|>0$ で割れば $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=\dfrac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|}<1$ が得られる.

9. まず $z^2=a+bi$ ($a$, $b$ は実数) の解を $x+yi$ ($x$, $y$ は実数) の形に表すことを考える.

$b=0$ の場合は, $a\geqq 0$ ならば $z=\pm\sqrt{a}$ が解であり, $a<0$ ならば $z=\pm\sqrt{-a}i$ が解である.

$b\neq 0$ の場合, $(x+yi)^2=a+bi$ の両辺の実部と虚部を比較して $\begin{cases}x^2-y^2=a & \cdots(i)\\ 2xy=b & \cdots(ii)\end{cases}$ を得る. $(ii)$ より $x\neq 0$, $y=\dfrac{b}{2x}$ だから, これを $(i)$ に代入すれば $x^2-\dfrac{b^2}{4x^2}=a$ が得られるため, $4x^4-4ax^2-b^2=0$ が成り立つ. これを $x^2$ に関する 2 次方程式とみなせば, $x^2\geqq 0$ より $x^2=\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, よって $x=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$ である. $y=\dfrac{b}{2x}$ より $y=\pm\dfrac{b}{|b|}\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$ となるため, $z^2=a+bi$ の解は $b>0$ ならば $\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$, $b<0$ ならば $\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$ である. ここで, $b=0$ の場合,

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}=\sqrt{\frac{|a|+a}{2}}+i\sqrt{\frac{|a|-a}{2}}=\begin{cases}\sqrt{a} & a\geqq 0\\ \sqrt{-a}i & a<0\end{cases}$$

だから, $b\geqq 0$ の場合, $z^2=a+bi$ の解は $\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$ である.

$z^2+(\alpha+\beta i)z+\gamma+\delta i=\left(z+\dfrac{\alpha+\beta i}{2}\right)^2-\dfrac{\alpha^2-\beta^2-4\gamma}{4}-\dfrac{\alpha\beta-2\delta}{2}i$ だから, 与えられた方程式は

$$\left(z+\frac{\alpha+\beta i}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2-\beta^2-4\gamma}{4}+\frac{\alpha\beta-2\delta}{2}i$$

と同値である. 従って上の結果から, $\alpha\beta\geqq 2\delta$ ならば, 次の 2 つが与えられた方程式のが解であり,

$$-\tfrac{\alpha}{2}+\sqrt{\tfrac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)^2+4(\alpha\beta-2\delta)^2}+(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)}{8}}+i\left(-\tfrac{\beta}{2}+\sqrt{\tfrac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)^2+4(\alpha\beta-2\delta)^2}-(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)}{8}}\right)$$

$$-\tfrac{\alpha}{2}-\sqrt{\tfrac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)^2+4(\alpha\beta-2\delta)^2}+(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)}{8}}+i\left(-\tfrac{\beta}{2}-\sqrt{\tfrac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)^2+4(\alpha\beta-2\delta)^2}-(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)}{8}}\right)$$

$\alpha\beta < 2\delta$ ならば, 次の 2 つが与えられた方程式の解である.

$$-\tfrac{\alpha}{2}+\sqrt{\tfrac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)^2+4(\alpha\beta-2\delta)^2}+(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)}{8}}+i\left(-\tfrac{\beta}{2}-\sqrt{\tfrac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)^2+4(\alpha\beta-2\delta)^2}-(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)}{8}}\right)$$

$$-\tfrac{\alpha}{2}-\sqrt{\tfrac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)^2+4(\alpha\beta-2\delta)^2}+(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)}{8}}+i\left(-\tfrac{\beta}{2}+\sqrt{\tfrac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)^2+4(\alpha\beta-2\delta)^2}-(\alpha^2-\beta^2-4\gamma)}{8}}\right)$$

10. $az+b\bar{z}+c=0$ の両辺の共役を考えれば $\bar{b}z+\bar{a}\bar{z}+\bar{c}=0$ だから, $z$ が $az+b\bar{z}+c=0$ の解であることと, $x=z$, $y=\bar{z}$ が連立 1 次方程式

$$(*)\begin{cases} ax+by=-c & \cdots(i) \\ \bar{b}x+\bar{a}y=-\bar{c} & \cdots(ii) \end{cases}$$

の解であることは同値である.

$|a|\neq|b|$ の場合, $(*)$ はただ 1 つの解 $x=\dfrac{b\bar{c}-\bar{a}c}{|a|^2-|b|^2}$, $y=\dfrac{\bar{b}c-a\bar{c}}{|a|^2-|b|^2}$ をもつ. このとき $y=\bar{x}$ が成り立っているため, $z=\dfrac{b\bar{c}-\bar{a}c}{|a|^2-|b|^2}$ は $az+b\bar{z}+c=0$ の唯一の解である.

$|a|=|b|$ の場合, $(i)$ の両辺を $\bar{a}$ 倍したものから $(ii)$ の両辺を $b$ 倍したものを引けば, $b\bar{c}-\bar{a}c=0$ が得られるため, $b\bar{c}-\bar{a}c\neq 0$ ならば $(*)$ は解をもたない. 従って, $|a|=|b|$ かつ $b\bar{c}-\bar{a}c\neq 0$ ならば $az+b\bar{z}+c=0$ は解をもたない.

$|a|=|b|$ かつ $b\bar{c}-\bar{a}c=0$ の場合, $\dfrac{b}{a}=\lambda$, $\dfrac{c}{a}=\mu$ とおけば $|\lambda|=1$ であり, $b=\lambda a$, $c=\mu a$ である. これらを $b\bar{c}=\bar{a}c$ と $az+b\bar{z}+c=0$ に代入すれば $\lambda\bar{\mu}|a|^2=\mu|a|^2$, $az+\lambda a\bar{z}+\mu a=0$ が得られるため, $\lambda\bar{\mu}=\mu$, $z+\lambda\bar{z}+\mu=0$ が成り立つ. $c\neq 0$ のときは, $\mu\neq 0$ であり, 後者の両辺に $\bar{\mu}$ をかけて前者の等式を用いれば, $\bar{\mu}z+\mu\bar{z}+|\mu|^2=0$ を得る. 従って $2\mathrm{Re}(\bar{\mu}z)=-|\mu|^2$ だから $\bar{\mu}z=-\dfrac{|\mu|^2}{2}+\dfrac{|\mu|^2}{2}ti$ を満たす実数 $t$ がある. 故に $z=-\dfrac{\mu}{2}+\dfrac{\mu}{2}ti=\dfrac{c}{2a}(ti-1)$ は $az+b\bar{z}+c=0$ の解になる. $c=0$ の場合は $\mu=0$ だから, $z+\lambda\bar{z}=0$ である. $\arg\lambda=\alpha$ とおき, $z\neq 0$ のとき, $\arg z=\theta$ とおいて $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$, $\bar{z}=|z|(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$, $-\lambda=\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)$ を $z=-\lambda\bar{z}$ に代入すれば $\cos\theta+i\sin\theta=\cos(\pi+\alpha-\theta)+i\sin(\pi+\alpha-\theta)$ が得られるため, $\theta=(2k+1)\pi+\alpha-\theta$ を満たす整数 $k$ が存在する. 故に $\theta=k\pi+\dfrac{\alpha+\pi}{2}$ だから $z=(-1)^k i|z|\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+i\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$ となるため, $\nu^2=\dfrac{b}{a}$ を満たす複素数 $\nu$ を考えれば, $z$ は $z=i\nu t$ ($t$ は実数) と表される.

以上から $az+b\bar{z}+c=0$ が解をもつための必要十分条件は $|a|\neq|b|$ または「$|a|=|b|$ かつ $b\bar{c}-\bar{a}c=0$」である.

$|a|\neq|b|$ のとき, $az+b\bar{z}+c=0$ は唯一の解 $z=\dfrac{b\bar{c}-\bar{a}c}{|a|^2-|b|^2}$ をもつ.

$c\neq 0$ かつ $b\bar{c}-\bar{a}c=0$ のとき, $|b||c|=|b|\,|\bar{c}|=|b\bar{c}|=|\bar{a}c|=|\bar{a}|\,|c|=|a||c|$ だから, $|a|=|b|$ であり, $az+b\bar{z}+c=0$ の解は $z=\dfrac{c}{2a}(ti-1)$ ($t$ は実数) で与えられる.

$c=0$ かつ $|a|=|b|$ のとき, $\nu^2=\dfrac{b}{a}$ を満たす複素数 $\nu$ を考えれば, $az+b\bar{z}+c=0$ の解は $z=i\nu t$ ($t$ は実数) で与えられる.

11. $n$ による数学的帰納法で主張を示す. $n=1$ の場合は, 主張が正しいことは明らかである. $S_n=\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^2$, $T_n=\sum\limits_{j=1}^{n}|b_j|^2$, $U_n=\sum\limits_{j=1}^{n}a_jb_j$ とおき, $n=l-1$ のときに主張が正しいと仮定すれば, 次の等式が成り立つ.

$$|U_{l-1}|^2=S_{l-1}T_{l-1}-\sum_{1\leqq j<k\leqq l-1}|a_j\bar{b}_k-a_k\bar{b}_j|^2$$

$S_l=S_{l-1}+|a_l|^2$, $T_l=T_{l-1}+|b_l|^2$, $U_l=U_{l-1}+a_lb_l$ だから, 上の等式を用いれば

$$\begin{aligned}|U_l|^2-S_lT_l&=\overline{U}_lU_l-S_lT_l=\left(\overline{U}_{l-1}+\bar{a}_l\bar{b}_l\right)(U_{l-1}+a_lb_l)-(S_{l-1}+|a_l|^2)(T_{l-1}+|b_l|^2)\\&=|U_{l-1}|^2+U_{l-1}\bar{a}_l\bar{b}_l+\overline{U}_{l-1}a_lb_l-S_{l-1}T_{l-1}-S_{l-1}|b_l|^2-T_{l-1}|a_l|^2\\&=-\sum_{1\leqq j<k\leqq l-1}|a_j\bar{b}_k-a_k\bar{b}_j|^2+U_{l-1}\bar{a}_l\bar{b}_l+\overline{U}_{l-1}a_lb_l-S_{l-1}|b_l|^2-T_{l-1}|a_l|^2\end{aligned}$$

が得られる. ここで,

$$
\begin{aligned}
U_{l-1}\bar{a}_l\bar{b}_l+\overline{U}_{l-1}a_lb_l-S_{l-1}|b_l|^2-T_{l-1}|a_l|^2 &= \sum_{j=1}^{l-1}a_jb_j\bar{a}_l\bar{b}_l+\sum_{j=1}^{l-1}\bar{a}_j\bar{b}_ja_lb_l-\sum_{j=1}^{l-1}|a_j|^2|b_l|^2-\sum_{j=1}^{l-1}|a_l|^2|b_j|^2\\
&= \sum_{j=1}^{l-1}\left(a_jb_j\bar{a}_l\bar{b}_l+\bar{a}_j\bar{b}_ja_lb_l-a_j\bar{a}_jb_l\bar{b}_l-a_l\bar{a}_lb_j\bar{b}_j\right)\\
&= -\sum_{j=1}^{l-1}\left(a_j\bar{b}_l-a_l\bar{b}_j\right)\left(\bar{a}_jb_l-\bar{a}_lb_j\right)=-\sum_{j=1}^{l-1}\left|a_j\bar{b}_l-a_l\bar{b}_j\right|^2
\end{aligned}
$$

だから, 上式より

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right|^2-\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2=|U_l|^2-S_lT_l &= -\sum_{1\leqq j<k\leqq l-1}|a_j\bar{b}_k-a_k\bar{b}_j|^2-\sum_{j=1}^{l-1}\left|a_j\bar{b}_l-a_l\bar{b}_j\right|^2\\
&= -\sum_{1\leqq j<k\leqq n}|a_j\bar{b}_k-a_k\bar{b}_j|^2
\end{aligned}
$$

が得られて, $n=l$ のときも主張が正しいことがわかる.

12. 三角不等式 $|z+w|\leqq|z|+|w|$ から, $n$ による数学的帰納法で $|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqq|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$ が成り立つことは容易に示される. また, $|\lambda z|=|\lambda||z|$ だから, $\lambda$ が負でない実数ならば $|\lambda z|=\lambda|z|$ が成り立つ. $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ が負でない実数で, $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$ ならば $\lambda_j>0$ となる $j$ が存在し, $|a_1|,|a_2|,\dots,|a_n|<1$ ならば, $\lambda_j>0$ である $j$ に対して $\lambda_j|a_j|<\lambda_j$ である. 従って

$$
\begin{aligned}
|\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n| &\leqq |\lambda_1a_1|+|\lambda_2a_2|+\cdots+|\lambda_na_n|=\lambda_1|a_1|+\lambda_2|a_2|+\cdots+\lambda_n|a_n|\\
&< \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1.
\end{aligned}
$$

13. (1) $|z-a|+|z+a|=2r$ を満たす複素数 $z$ が存在すれば, 三角不等式より

$$2|a|=|(a-z)+(a+z)|\leqq|a-z|+|a+z|=|z-a|+|z+a|=2r$$

だから $|a|\leqq r$ である. 逆に $|a|\leqq r$ ならば $z=\begin{cases} r & a=0\\ \frac{ra}{|a|} & a\neq 0\end{cases}$ のとき $|z-a|+|z+a|=2r$ が成り立つ.

(2) $a=0$ のときは $|z|$ は一定の値 $r$ をとるため, 以下では $a\neq 0$ とする. $z$ は $a$, $-a$ を焦点とする楕円の周囲を動くため, $|z|$ が最大になるのは $z$ が長軸上にあるときで. $|z|$ が最小になるのは $z$ が短軸上にあるときである. $z$ が長軸上にあるときは $z=at$ となる実数が存在して $|t|\geqq 1$ である. このとき $|at-a|+|at+a|=2r$ だから $2|a||t|=2r$ が得られるため $t=\pm\dfrac{r}{|a|}$ である. 従って $|z|$ が最大になるのは $z=\pm\dfrac{ra}{|a|}$ のときで, $|z|$ の最大値は $r$ である. $z$ が短軸上にあるときは $z=ait$ となる実数が存在する. このとき $|ait-a|+|ait+a|=2r$ だから $2|a|\sqrt{1+t^2}=2r$ が得られるため $t=\pm\dfrac{\sqrt{r^2-|a|^2}}{|a|}$ である. 従って $|z|$ が最小になるのは $z=\pm\dfrac{\sqrt{r^2-|a|^2}}{|a|}i$ のときで, $|z|$ の最小値は $\sqrt{r^2-|a|^2}$ である.

[参考] $|z-a|+|z+a|=2r$ のとき, 三角不等式より $2|z|=|(z-a)+(z+a)|\leqq|z-a|+|z+a|=2r$ だから $|z|\leqq r$ である. $|z-a|+|z+a|=2r$ の両辺を 2 乗すれば $|z-a|^2+2|z-a||z+a|+|z+a|^2=4r^2$ が得られ, $|z-a|^2+|z+a|^2=(\bar{z}-\bar{a})(z-a)+(\bar{z}+\bar{a})(z+a)=2|z|^2+2|a|^2$ だから $2|z|^2+2|z-a||z+a|+2|a|^2=4r^2$ が成り立つ. 従って $\left|z^2-a^2\right|=2r^2-|z|^2-|a|^2$ であり, この両辺を 2 乗した等式と

$$\left|z^2-a^2\right|^2=\left(\bar{z}^2-\bar{a}^2\right)\left(z^2-a^2\right)=\left|z^2\right|^2+\left|a^2\right|^2-\bar{z}^2a^2-z^2\bar{a}^2=|z|^4+|a|^4-2\mathrm{Re}(z^2\bar{a}^2)$$

$$\left(2r^2-|z|^2-|a|^2\right)^2=4r^4+|z|^4+|a|^4-4r^2|z|^2-4r^2|a|^2+2|z|^2|a|^2=4r^2\left(r^2-|z|^2-|a|^2\right)+|z|^4+|a|^4+2\left|z^2\bar{a}^2\right|$$

より $2r^2\left(|z|^2+|a|^2-r^2\right)=\mathrm{Re}(z^2\bar{a}^2)+|z^2\bar{a}^2|$ が得られる．$|z^2\bar{a}^2| \geqq \left|\mathrm{Re}\left(z^2\bar{a}^2\right)\right|$ だから, 左式の右辺は 0 以上である．故に $|z|^2+|a|^2-r^2 \geqq 0$ より $|z|^2 \geqq r^2-|a|^2$ すなわち $|z| \geqq \sqrt{r^2-|a|^2}$ である．

14. $j=1,2,\ldots,n$ に対し, $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ の第 $n+j$ 行を $i$ 倍して第 $j$ 行に加えて得られる行列 $\begin{pmatrix} A+iB & -B+iA \\ B & A \end{pmatrix}$ を考え, 次に $k=1,2,\ldots,n$ に対し, この行列の第 $k$ 列を $-i$ 倍して第 $n+k$ 列に加えて得られる行列 $\begin{pmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{pmatrix}$ を考えれば, これらの行列式の値はもとの行列の行列式の値に等しいため, $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & -B+iA \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{vmatrix} = |A+iB||A-iB|$ が得られる．

# 線形数学 II 演習問題　第 12 回　ベクトル空間・部分空間

1. 以下で与えられる $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 $V$ が $\boldsymbol{R}^3$ の加法とスカラー倍で $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間であるかどうかを, 理由とともに答えよ.

(1) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,xy\geqq 0\right\}$　(2) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,z\neq 0\right\}$　(3) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,z=x+2y\right\}$

(4) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,z=0\right\}$　(5) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,xy=0\right\}$　(6) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,z^2=x^2+y^2\right\}$

(7) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x^3=y^3\right\}$　(8) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,xyz\leqq 0\right\}$　(9) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x,y,z\text{ は整数}\right\}$

(10) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\begin{pmatrix}x&y\\z&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$　(11) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\begin{pmatrix}x&y\\z&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$

(12) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\begin{pmatrix}x&y\\y&z-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$　(13) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\begin{pmatrix}x&y\\z^2&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

(14) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\begin{pmatrix}x&y\\y&z\\z&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

2. 以下で与えられる $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分集合 $V$ が $M_n(\boldsymbol{C})$ の加法とスカラー倍で $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分空間であるかどうかを, 理由とともに答えよ. ただし, $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\boldsymbol{C})$ に対し, $\bar{a}_{ji}$ を $(i,j)$ 成分とする $n\times m$ 行列を $A^*$ で表す.

(1) $V=\{A\in M_n(\boldsymbol{C})\,|\,\mathrm{tr}A=0\}$　(2) $V=\{A\in M_n(\boldsymbol{C})\,|\,A^*=A\}$　(3) $V=\{A\in M_n(\boldsymbol{C})\,|\,A^*A=E_n\}$

(4) $V=\{A\in M_n(\boldsymbol{C})\,|\,|A|=0\}$　(5) $V=\{A\in M_n(\boldsymbol{C})\,|\,A\text{ は上半三角行列}\}$

3. 以下で与えられるベクトル空間 $V$ の部分集合 $W$ が, $V$ の加法とスカラー倍で $V$ の部分空間であるかどうかを, 理由とともに答えよ. ただし, $a$, $b$ は実数とし, 第 $j$ 成分が $x_j$ である $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^n$ に対し, $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2}$ とおく.

(1) $V=\boldsymbol{K}^n$, $W=\{\boldsymbol{x}\in V|\,A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$. $(A\in M_{m,n}(\boldsymbol{K}),\,\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{K}^m)$

(2) $V=\boldsymbol{K}^n$, $W=\{\boldsymbol{x}\in V|\,\|\boldsymbol{x}\|=c\}$. ($c$ は負でない実数)

(3) $V=M_{l,m}(\boldsymbol{K})$, $W=\{X\in V|\,AXB=C\}$. $(A\in M_{k,l}(\boldsymbol{K}),\,B\in M_{m,n}(\boldsymbol{K}),\,C\in M_{k,n}(\boldsymbol{K}))$

(4) $V=M_{m,n}(\boldsymbol{K})$, $W=\{X\in V|\,AX-XB=C\}$. $(A\in M_m(\boldsymbol{K}),\,B\in M_n(\boldsymbol{K}),\,C\in M_{m,n}(\boldsymbol{K}))$

(5) $V=\{f:[a,b]\to\boldsymbol{R}\,|\,f\text{ は連続関数}\}$, $W=\left\{f\in V\,\middle|\,\int_a^b f(x)p(x)dx=0\right\}$. $(p\in V)$

(6) $V=\{f:[a,b]\to\boldsymbol{R}\,|\,f\text{ は連続関数}\}$, $W=\{f\in V|\,f(a)=f(b)=0\}$.

(7) $V=\{f:(a,b)\to\boldsymbol{R}\,|\,f\text{ は }C^n\text{ 級関数}\}$, $W=\left\{f\in V\,\middle|\,\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(x)f^{(k)}(x)=\beta(x)\right\}$. ($\alpha_k,\beta:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ は連続)

(8) $V=\{f:(a,b)\to\boldsymbol{R}\,|\,f\text{ は }C^2\text{ 級関数}\}$, $W=\{f\in V|\,f''(x)=-k\sin f(x)\}$ ($k$ は 0 でない実数)

# 第 12 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \in V$ であるが $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \notin V$ だから $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(2) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \notin V$ だから $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} \in V$, $r \in \boldsymbol{R}$ とすれば $z = x + 2y$, $w = u + 2v$ だから, $z + w = (x+u) + 2(y+v)$, $rz = rx + 2ry$ であり, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}x+u\\y+v\\z+w\end{pmatrix}$, $r\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}rx\\ry\\rz\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x} \in V$ である. 従って $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間である.

(4) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} \in V$, $r \in \boldsymbol{R}$ とすれば $z = w = 0$ だから, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}x+u\\y+v\\0\end{pmatrix}$, $r\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}rx\\ry\\0\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x} \in V$ である. 従って $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間である.

(5) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in V$ であるが $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \notin V$ だから $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(6) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in V$ であるが $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \notin V$ だから $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(7) 実数 $x$, $y$ が $x^3 = y^3$ を満たせば $(x-y)\left(\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right) = x^3 - y^3 = 0$ より, $x = y$ だから, $V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x = y\right\}$ である. 従って $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} \in V$, $r \in \boldsymbol{R}$ とすれば $x = y$, $u = v$ だから, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}x+u\\y+v\\z+w\end{pmatrix}$, $r\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}rx\\ry\\rz\end{pmatrix}$ と $x+u = y+v$, $rx = ry$ より, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x} \in V$ である. 従って $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間である.

(8) $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \in V$ であるが $(-1)\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \notin V$ だから $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(9) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in V$ であるが $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix} \notin V$ だから $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(10) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ が $V$ に属するためには $\begin{pmatrix}x & y\\z & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ が成り立つことが必要十分であるが, これは $x + 2y = z = 0$ が成り立つことと同値である. 従って $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} \in V$, $r \in \boldsymbol{R}$ とすれば $x + 2y = z = 0$ ,

$u+2v=w=0$ だから, $(x+u)+2(y+v)=z+w=0$, $rx+2ry=rz=0$ であり, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}x+u\\y+v\\z+w\end{pmatrix}$, $r\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}rx\\ry\\rz\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x}\in V$ である. 従って $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間である.

(11) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\notin V$ だから $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(12) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\notin V$ だから $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(13) $\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\in V$ であるが $(-1)\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\notin V$ だから $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(14) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$ が $V$ に属するためには $\begin{pmatrix}x&y\\y&z\\z&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ が成り立つことが必要十分であるが, これは $x-2y=y-2z=z-2x=0$ が成り立つことと同値であり, さらにこれは $x=y=z=0$ であることと同値である. 従って $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ の零ベクトルのみからなる集合だから $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間である.

2. (1) $A,B\in V$, $c\in\boldsymbol{C}$ ならば $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B=0$ だから $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B=0+0=0$, $\mathrm{tr}(cA)=c\mathrm{tr}A=0$ である. 故に $A+B, cA\in V$ だから $V$ は $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分空間である.

(2) $E_n\in V$ であるが, $(iE_n)^*=-iE_n\neq iE_n$ だから, $iE_n\notin V$ である. 故に $V$ は $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分空間ではない.

(3) $O_n^*O_n=O_n\neq E_n$ だから $O_n\notin V$ となるため, $V$ は $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分空間ではない.

(4) $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{e}_2&\boldsymbol{e}_3&\ldots&\boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\ldots&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ とおけば, $|A|=|B|=0$ だから $A,B\in V$ であるが, $A+B=E_n$ だから $|A+B|=1\neq 0$ となるため $A+B\notin V$ である. 故に $V$ は $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分空間ではない.

(5) $A=(a_{jk}), B=(b_{jk})\in V$, $c\in\boldsymbol{C}$ ならば $1\leqq k<j\leqq n$ に対し, $a_{jk}=b_{jk}=0$ である. $A+B=(a_{jk}+b_{jk})$, $cA=(ca_{jk})$ であり, $1\leqq k<j\leqq n$ に対し, $a_{jk}+b_{jk}=ca_{jk}=0$ だから $A+B$ と $cA$ も上半三角行列である. 従って $A+B, cA\in V$ となるため, $V$ は $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分空間である.

3. (1) $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ の場合, $A\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{b}$ だから $\boldsymbol{0}\notin W$ である. 従って $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ の場合は $W$ は $V$ の部分空間ではない.

$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in W$, $r\in\boldsymbol{K}$ ならば $A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ だから $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$, $A(r\boldsymbol{x})=rA\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ である. 故に $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x}\in W$ となるため, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合は $W$ は $V$ の部分空間である.

(2) $c\neq 0$ の場合, $\|\boldsymbol{0}\|=0\neq c$ だから $\boldsymbol{0}\notin W$ である. 従って $c\neq 0$ の場合は $W$ は $V$ の部分空間ではない.

$c=0$ の場合, $\|\boldsymbol{x}\|=0$ であることは, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ であることと同値だから, $W$ は $V$ の零ベクトルのみからなる集合になるため $W$ は $V$ の部分空間である.

(3) $C\neq O_{k,n}$ の場合, $AO_{l,m}B=O_{k,n}\neq C$ だから $O_{l,m}\notin W$ である. 従って $C\neq O_{k,n}$ の場合は $W$ は $V$ の部分空間ではない.

$C=O_{k,n}$ の場合, $X,Y\in W$, $r\in\boldsymbol{K}$ ならば $AXB=AYB=O_{k,n}$ だから $A(X+Y)B=AXB+AYB=O_{k,n}+O_{k,n}=O_{k,n}$, $A(rX)B=rAXB=rO_{k,n}=O_{k,n}$ である. 故に $X+Y, rX\in W$ となるため, $C=O_{k,n}$ の場合は $W$ は $V$ の部分空間である.

(4) $C\neq O_{m,n}$ の場合, $AO_{m,n}-O_{m,n}B=O_{m,n}\neq C$ だから $O_{m,n}\notin W$ である. 従って $C\neq O_{m,n}$ の場合は $W$ は $V$ の部分空間ではない.

$C=O_{m,n}$ の場合, $X,Y\in W$, $r\in\boldsymbol{K}$ ならば $AX-XB=AY-YB=O_{m,n}$ だから $A(X+Y)-(X+Y)B=AX-XB+AY-YB=O_{m,n}+O_{m,n}=O_{m,n}$, $A(rX)-(rX)B=r(AX-XB)=rO_{m,n}=O_{m,n}$ である. 故に $X+Y, rX\in W$ となるため, $C=O_{m,n}$ の場合は $W$ は $V$ の部分空間である.

(5) $f, g \in W$, $r \in \boldsymbol{R}$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b g(x)p(x)dx = 0$ だから

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)p(x)dx &= \int_a^b (f(x)+g(x))p(x)dx = \int_a^b (f(x)p(x)+g(x)p(x))dx \\ &= \int_a^b f(x)p(x)dx + \int_a^b g(x)p(x)dx = 0+0 = 0, \\ \int_a^b (rf)(x)p(x)dx &= \int_a^b rf(x)p(x)dx = r\int_a^b f(x)p(x)dx = r0 = 0\end{aligned}$$

となるため, $f+g, rf \in V$ である. 従って $W$ は $V$ の部分空間である.

(6) $f, g \in W$, $r \in \boldsymbol{R}$ ならば $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$ だから $(f+g)(a) = f(a)+g(a) = 0+0 = 0$, $(f+g)(b) = f(b)+g(b) = 0+0 = 0$, $(rf)(a) = rf(a) = r0 = 0$, $(rf)(b) = rf(b) = r0 = 0$ となるため, $f+g, rf \in V$ である. 従って $W$ は $V$ の部分空間である.

(7) $\beta$ が $(a,b)$ でつねに 0 の値をとる定数値関数の場合, $f, g \in W$, $r \in \boldsymbol{R}$ ならば $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(x)f^{(k)}(x) = 0$ かつ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(x)g^{(k)}(x) = 0$ が任意の $x \in (a,b)$ に対して成り立つ. 1 つ目の式と 2 つ目の式を辺々加えれば $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(x)(f^{(k)}(x)+g^{(k)}(x)) = 0$ が得られるが, $f^{(k)}(x)+g^{(k)}(x) = (f+g)^{(k)}(x)$ だから, この等式は $f+g \in W$ であることを示している. また, 1 つ目の式の両辺に $c \in \boldsymbol{R}$ をかければ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(x)cf^{(k)}(x) = 0$ が得られるが, $cf^{(k)}(x) = (cf)^{(k)}(x)$ だから, この等式は $cf \in W$ であることを示している. 故に $W$ は $V$ の部分空間である. 区間 $(a,b)$ で値がつねに 0 である定数値関数が $V$ の零ベクトル $\mathbf{0}$ であり, 任意の $x \in (a,b)$ に対して $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(x)\mathbf{0}^{(k)}(x) = 0$ が成り立つため, $\beta$ が $(a,b)$ で 0 以外の値をとる関数ならば $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(x)\mathbf{0}^{(k)}(x) = \beta(x)$ を満たさない $x \in (a,b)$ がある. 従って $\beta$ が $(a,b)$ で 0 以外の値をとる関数の場合, $W$ は $V$ の零ベクトル $\mathbf{0}$ を含まないため, $W$ は $V$ の部分空間ではない.

(8) 区間 $(a,b)$ で値がつねに $\pi$ である定数値関数を $f$ で表せば, すべての $x \in (a,b)$ に対して $f''(x) = 0 = -k\sin\pi = -k\sin f(x)$ だから $f \in W$ である. 一方 $\dfrac{1}{2}f$ は区間 $(a,b)$ で値がつねに $\dfrac{\pi}{2}$ である定数値関数だから, $\left(\dfrac{1}{2}f\right)''(x) = 0$ であるが, $-k\sin\left(\dfrac{1}{2}f(x)\right) = -k\sin\dfrac{\pi}{2} = -k \neq 0$ だから $\dfrac{1}{2}f$ は $W$ に属さない. 従って $W$ は $V$ の部分空間ではない.

# 線形数学 II 演習問題　第13回　ベクトル空間の基底と次元

1. $A=\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\2&1&1&0\\-3&0&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&1&0&1\\1&0&-1&-2\\1&-1&1&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-1&-1\\2&-1&1&3\\1&-2&2&3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\2&-1&-1&-1\\1&-3&0&1\\3&1&-2&-3\end{pmatrix}$ とするとき, 以下で与えるベクトル空間の次元と一組の基底を求めよ.

(1) $\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^4 \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$　(2) $\{\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{K}^3 \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^4$ がある $\}$

(3) $\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^4 \mid B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$　(4) $\{\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{K}^4 \mid B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^4$ がある $\}$

(5) $\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^4 \mid C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$　(6) $\{\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{K}^4 \mid C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^4$ がある $\}$

(7) $\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^4 \mid D\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$　(8) $\{\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{K}^4 \mid D\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^4$ がある $\}$

2. 以下で与えるベクトル空間 $V$ におけるベクトルの集合 $S$ の中から, 1 次独立である極大な部分集合を 1 つ選ぶことにより, $S$ で生成される $V$ の部分空間の一組の基底を求めよ.

(1) $V=\boldsymbol{K}^3$, $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\a\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a-1\\a-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-p-q\\-ap-aq+q\\-ap-aq+2q\end{pmatrix}\right\}$　(2) $V=\boldsymbol{K}^4$, $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\6\end{pmatrix}\right\}$

(3) $V=\boldsymbol{K}^4$, $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$　(4) $V=\boldsymbol{K}^4$, $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

(5) $V=\boldsymbol{K}^4$, $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$　(6) $V=\boldsymbol{K}^4$, $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\5\\3\end{pmatrix}\right\}$

(7) $V=M_2(\boldsymbol{K})$,  $S=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

(8) $V=P(\boldsymbol{R})$, $S=\{1+x+x^2+x^3,\ 1+x^2+2x^3,\ x-x^3\}$

(9) $V=P(\boldsymbol{R})$, $S=\{1+x,\ 3+3x,\ 3x(1+x),\ 1+2x+x^2,\ 1+x^3\}$

(10) $C^\infty(0,2\pi)$ における $\{1,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \sin^3 x,\ \cos^3 x,\ \sin 3x,\ \cos 3x\}$

3. $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 $V$ の $k$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_k$ が 1 次独立であるとき, 次の $k$ 個のベクトルは 1 次独立であるかどうか, 理由とともに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\dots,\boldsymbol{a}_{k-1}+\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{a}_1$

(2) $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\dots,\boldsymbol{a}_{k-1}-\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}_1$　(3) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_k$

4. 以下で与えるベクトル空間の次元と一組の基底を求めよ. ただし, (6), (7) の $M_n(\boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とみなす. (9), (10) の $P$ は $P=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$ で, (9) では $a,b,c$ を互いに異なり, (10) では $a=b\neq c$ である. また, (14) の $\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ は実数列全体からなる集合で, 数列の和と実数倍によって $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間になる.

(1) $\boldsymbol{K}^3$ の部分空間 $\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right\rangle$　(2) $\boldsymbol{K}^3$ の部分空間 $\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\right\rangle$

(3) $\{A\in M_n(\boldsymbol{K}) \mid \mathrm{tr}\,A=0\}$　(4) $\{A\in M_n(\boldsymbol{K}) \mid {}^tA=A\}$　(5) $\{A\in M_n(\boldsymbol{K}) \mid {}^tA=-A\}$

(6) $\{A\in M_n(\boldsymbol{C}) \mid A^*=A\}$　(7) $\{A\in M_n(\boldsymbol{C}) \mid A^*=-A\}$　(8) $\{A\in M_n(\boldsymbol{K}) \mid A$ は上半三角行列 $\}$

(9) $\{A \in M_3(\boldsymbol{K}) \,|\, AP = PA\}$ (10) $\{A \in M_3(\boldsymbol{K}) \,|\, AP = PA\}$

(11) $\{f(x) \in P_3(\boldsymbol{K}) | \, f(-1) = f(1) = 0\}$ (12) $\{A \in M_n(\boldsymbol{K}) \,|\, A$ は対角成分がすべて 0 である上半三角行列 $\}$

(13) $\{f(x) \in P_4(\boldsymbol{K}) |$ すべての自然数 $n$ に対し, $f(n) - 3f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3) = 0\}$

(14) $\{\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathrm{Seq}(\boldsymbol{R}) \,|\, \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は漸化式 $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$ を満たす $\}$

(15) $\left\{ f(x) \in P_4(\boldsymbol{R}) \,\middle|\, \lambda f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x-t)^2 f(t)dt \right\}$ (定数 $\lambda$ の値によって場合分けせよ.)

## 第 13 回の演習問題の解答

1. $P = A, B, C, D$ とするとき, 連立 1 次方程式 $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合の解と, 解をもつための $\boldsymbol{b}$ が満たすべき条件を求める.

(1), (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & p \\ 2 & 1 & 1 & 0 & q \\ -3 & 0 & 1 & -1 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & p \\ 0 & -3 & -5 & 2 & q-2p \\ 0 & 6 & 10 & -4 & r+3p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2q}{3} - \frac{p}{3} \\ 0 & -3 & -5 & 2 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p+2q \end{pmatrix}$ より, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\begin{pmatrix} t-u \\ -5t+2u \\ 3t \\ 3u \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(t, u \in \boldsymbol{K})$ と表される.

$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが (1) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 2 である.

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ が解をもつ条件は $r = p - 2q$ だから $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ p-2q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(p, q \in \boldsymbol{K})$ と表される. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが (2) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 2 である.

(3), (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 1 & 0 & -1 & -2 & r \\ 1 & -1 & 1 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r-p \\ 0 & -2 & 2 & 4 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & p-q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p+q \\ 0 & 0 & 2 & 6 & s-p+2q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & p-q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 2 & 6 & s-p+2q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p+q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{p}{2} + \frac{s}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 2 & 6 & s-p+2q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p+q \end{pmatrix}$ より, $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\begin{pmatrix} t \\ t \\ 3t \\ -t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(t \in \boldsymbol{K})$ と表される. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これが (3) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 1 である.

$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ が解をもつ条件は $r = p - q$ だから $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ p-q \\ s \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(p, q, s \in \boldsymbol{K})$ と表される. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが (3) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 3 である.

(5), (6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 2 & -1 & 1 & 3 & r \\ 1 & -2 & 2 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 0 & 1 & -1 & -1 & r-2p \\ 0 & -1 & 1 & 1 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & p+q \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p+q \end{pmatrix}$ より, $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\begin{pmatrix} -u \\ t+u \\ t \\ u \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t, u \in \boldsymbol{K})$ と表される.
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが (5) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 2 である.

$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ が解をもつ条件は $r = 2p+q$ かつ $s = p-q$ だから $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 2p+q \\ p-q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(p, q \in \boldsymbol{K})$ と表される. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが (6) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 2 である.

(7), (8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & p \\ 2 & -1 & -1 & -1 & q \\ 1 & -3 & 0 & 1 & r \\ 3 & 1 & -2 & -3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & p \\ 0 & -5 & 1 & 3 & q-2p \\ 0 & -5 & 1 & 3 & r-p \\ 0 & -5 & 1 & 3 & s-3p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{p}{5}+\frac{2q}{5} \\ 0 & -5 & 1 & 3 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r+p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix}$ より, $D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\begin{pmatrix} 3t+4u \\ t+3u \\ 5t \\ 5u \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ $(t, u \in \boldsymbol{K})$ と表される.
$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが (7) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 2 である.

$D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ が解をもつ条件は $r = -p+q$ かつ $s = p+q$ だから $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ -p+q \\ p+q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(p, q \in \boldsymbol{K})$ と表される. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが (8) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 2 である.

2. (1) $x\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ a-2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -p-q \\ -ap-aq+q \\ -ap-aq+2q \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ を満たす $x$, $y$, $z$ を求める. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -p-q \\ a & a-1 & -ap-aq+q \\ a & a-2 & -ap-aq+2q \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -p-q \\ 0 & -1 & q \\ 0 & -2 & 2q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p \\ 0 & -1 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $t$ を任意の定数とすれば $x = pt$, $y = qt$, $z = t$ である. 従って, $z = 0$ の場合は $x = y = 0$ となるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ a-2 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であるが, $t = 1$ の場合に $p\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ a-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p-q \\ -ap-aq+q \\ -ap-aq+2q \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ が成り立ち, $\begin{pmatrix} -p-q \\ -ap-aq+q \\ -ap-aq+2q \end{pmatrix} = -p\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix} - q\begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ a-2 \end{pmatrix}$ が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ a-2 \end{pmatrix}$ は与えられた部分空間を生成することがわかる. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ a-2 \end{pmatrix}$ が求める基底で, 与えられた部分空間の次元は 2 である.

(2) $x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ を満たす $x, y, z$ を求める. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $t$ を任意の定数とすれば $x = -2t$, $y = t$, $z = t$ である. 従って, $z = 0$ の場合は $x = y = 0$ となるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であるが, $-2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ が成り立つため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ は 1 次従属である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ は $S$ の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり, $S$ で生成される $V$ の部分空間の基底になる.

(3) $x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ を満たす $x, y, z, w$ を求める. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & -14 \\ 0 & 5 & 5 & 14 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & -14 \\ 0 & 5 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 14 \\ 0 & -5 & -5 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,4)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $t$ を任意の定数とすれば $x =$

$-t$, $y=-t$, $z=t$, $w=0$ である．従って, $z=0$ の場合は $x=y=w=0$ となるため, $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ は1次独立である．$z=t=1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}4\\3\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ が成り立つため, $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ は与えられた部分空間を生成する．故に $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ は与えられた部分空間の基底になる．

(4) $x\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ を満たす $x, y, z, w$ を求める．$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\2&-1&3&-1\\3&1&2&1\\4&-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-3&3&-3\\0&-2&2&-2\\0&-5&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を } -\frac{1}{3} \text{ 倍}]{\text{第 2 行}}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&-1&1\\0&-2&2&-2\\0&-5&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&-4&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}}$
$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&-4&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, $t$ を任意の定数とすれば

$x=-t$, $y=-t$, $z=t$, $w=2t$ である．従って, $w=0$ の場合は $x=y=z=0$ となるため, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix}$ は1次独立であるが, $-\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ が成り立つため, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$ は1次従属である．故に $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix}$ は $S$ の中で1次独立なベクトルからなる極大な集合であり, $S$ で生成される $V$ の部分空間の基底になる．

(5) $x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ を満たす $x, y, z, w$ を求める．$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\-1&3&-1&1\\2&0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&3&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&3&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{2}{3}\\0&0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

より, $t$ を任意の定数とすれば $x=-t,\ y=-2t,\ z=-2t,\ w=3t$ である．従って, $w=0$ の場合は $x=y=z=0$ となるため, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ は1次独立であるが, $-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ が成り立つため, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ は1次従属である．故に $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ は $S$ の中で1次独立なベクトルからなる極大な集合であり, $S$ で生成される $V$ の部分空間の基底になる．

(6) $x\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}2\\-2\\5\\3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ を満たす $x, y, z, w$ を求める． $\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\-1&1&0&-2\\2&-3&-1&5\\2&-1&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&0&0&0\\0&-1&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(4,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$ より, $s, t$ を任意の定数とすれば $x=-s-t,\ y=-s+t,$ $z=s,\ w=t$ である．従って, $z=w=0$ の場合は $x=y=0$ となるため, $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ は1次独立であるが, $-\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ と $-\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-2\\5\\3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ が成り立つため, $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\5\\3\end{pmatrix}$ は1次従属である．故に $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ は $S$ の中で1次独立なベクトルからなる極大な集合であり, $S$ で生成される $V$ の部分空間の基底になる．

(7) $x\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=O$ を満たす $x,\ y,\ z,\ w,\ u$ を求める．
$\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\2&-1&1&3&1\\0&1&1&1&0\\-1&2&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&-1&-1&-1&1\\0&1&1&1&0\\0&2&2&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&-1&-1&-1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{\text{(3,5) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&-1&-1&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, $s, t$ を任意の定数とすれば $x=-s-2t,\ y=-s-t,\ z=s,\ w=t,$ $u=0$ である．従って, $z=w=0$ の場合は $x=y=u=0$ となるため, $\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$ は1次独立であるが, $-\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\mathbf{0},\ -2\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$

が成り立つため, $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ は 1 次従属である. 故に $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ は $S$ の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり, $S$ で生成される $V$ の部分空間の基底になる.

(8) $a(1+x+x^2+x^3)+b(1+x^2+2x^3)+c(x-x^3)=0$ とおくと, $(a+b)+(a+c)x+(a+b)x^2+(a+2b-c)x^3=0$ だから, $a, b, c$ は $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解である. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より, $a$, $b$, $c$ は $t$ を任意の定数として $a=-t$, $b=c=t$ と表される. $c=0$ ならば $a=b=0$ となるため, $1+x+x^2+x^3, 1+x^2+2x^3$ は 1 次独立である. 一方, $-(1+x+x^2+x^3)+(1+x^2+2x^3)+(x-x^3)=0$ だから $1+x+x^2+x^3, 1+x^2+2x^3, x-x^3$ は 1 次従属である. 故に $1+x+x^2+x^3, 1+x^2+2x^3$ は $S$ の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり, $S$ で生成される $V$ の部分空間の基底になる.

(9) $3+3x=3(1+x)$ だから $\{1+x,\ 3x(1+x),\ 1+2x+x^2,\ 1+x^3\}$ の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な部分集合を求めればよい. $a(1+x)+3bx(1+x)+c(1+2x+x^2)+d(1+x^3)=0$ とおくと, $(a+c+d)+(a+3b+2c)x+(3b+c)x^2+dx^3=0$ だから, $a, b, c, d, e$ は $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\1 & 3 & 2 & 0\\0 & 3 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解である. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\1 & 3 & 2 & 0\\0 & 3 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 3 & 1 & -1\\0 & 3 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 3 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 3 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より, $a, b, c, d$ は $t$ を任意の定数として $a=-3t, b=-t, c=3t, d=0$ と表される. $c=0$ ならば $a=b=0$ となるため, $1+x, 3x(1+x), x^3+1$ は 1 次独立である. 一方, $-3(1+x)-3x(1+x)+3(x^2+2x+1)+0(x^3+1)=0$ だから $1+x, 3x(1+x), x^2+2x+1, x^3+1$ は 1 次従属である. 故に $1+x, 3x(1+x), x^3+1$ は $S$ の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり, $S$ で生成される $V$ の部分空間の基底になる.

(10) $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$ だから $1, \sin 2x, \cos 2x, \sin^3 x, \cos^3 x, \sin 3x, \cos 3x$ が 1 次独立であることを示せば, これらは $S$ の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であることがいえる. すべての $x\in(0,2\pi)$ に対して, $a_0+a_1\sin 2x+b_1\cos 2x+a_2\sin^3 x+b_2\cos^3 x+a_3\sin 3x+b_3\cos 3x=0$ が成り立つような実数の定数 $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_2$, $b_3$ が存在したとする. この等式に $x=\dfrac{\pi k}{4}$ $(k=1,2,3,4,5,6,7)$ を代入して, $a_0+a_1+\dfrac{a_2}{\sqrt{8}}+\dfrac{b_2}{\sqrt{8}}+\dfrac{a_3}{\sqrt{8}}-\dfrac{b_3}{\sqrt{8}}=0$, $a_0-b_1+a_2-a_3=0$, $a_0-a_1+\dfrac{a_2}{\sqrt{8}}-\dfrac{b_2}{\sqrt{8}}+\dfrac{a_3}{\sqrt{8}}+\dfrac{b_3}{\sqrt{8}}=0$, $a_0+b_1-b_2-b_3=0$, $a_0+a_1-\dfrac{a_2}{\sqrt{8}}-\dfrac{b_2}{\sqrt{8}}-\dfrac{a_3}{\sqrt{8}}+\dfrac{b_3}{\sqrt{8}}=0$, $a_0-b_1-a_2+a_3=0$, $a_0-a_1-\dfrac{a_2}{\sqrt{8}}+\dfrac{b_2}{\sqrt{8}}+\dfrac{a_3}{\sqrt{8}}+\dfrac{b_3}{\sqrt{8}}=0$ を得る. 2 番目と 6 番目の等式より $a_0=b_1$ かつ $a_2=a_3$, 1 番目と 5 番目の等式より $a_1=-a_0$ かつ $b_3=a_2+b_2+a_3$, 3 番目と 7 番目の等式より $a_2=b_2$ かつ $a_0-a_1+\dfrac{a_3+b_3}{\sqrt{8}}=0$ が得られる. 従って $a_2=a_3=b_2$, $-a_1=a_0=b_1$,

$b_3=3a_2$, $a_0=-\dfrac{a_2}{\sqrt{2}}$ となり, 4 番目の等式に代入すれば, $(-\sqrt{2}-4)a_2=0$ が得られるため, $a_2=0$ である. 故に $a_0=a_1=a_2=a_3=b_1=b_2=b_3=0$ となるため, $1, \sin 2x, \cos 2x, \sin^3 x, \cos^3 x, \sin 3x, \cos 3x$ は 1 次独立であり, $S$ で生成される $V$ の部分空間の基底になる.

3. (1) $x_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+x_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)+\cdots+x_i(\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{a}_{i+1})+\cdots+x_{k-1}(\boldsymbol{a}_{k-1}+\boldsymbol{a}_k)+x_k(\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{0}$ とおけば, $(x_1+x_k)\boldsymbol{a}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{a}_2+\cdots+(x_{i-1}+x_i)\boldsymbol{a}_i+\cdots+(x_{k-1}+x_k)\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{0}$ であり, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ は 1 次独立だから, $x_1+x_k=x_1+x_2=\cdots=x_{i-1}+x_i=\cdots=x_{k-1}+x_k=0$ である. 従って $x_1=-x_k$ であり, $x_i=-x_{i-1}$ が $i=2,3,\ldots,k$ に対して成り立つため, $x_i=(-1)^{i-1}x_1$ $(i=2,3,\ldots,k)$ とくに $x_k=(-1)^{k-1}x_1$ だから, $x_1=-x_k$ に代入すれば $x_1=(-1)^k x_1$ が得られる. 故に, $k$ が奇数ならば $x_1=-x_1$ となるため $x_1=0$ であり, このことと $x_i=(-1)^{i-1}x_1$ より, $i=1,2,\ldots,k$ に対して $x_i=0$ だから, $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}+\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{a}_1$ は 1 次独立である. $k$ が偶数ならば, $x_i=(-1)^{i-1}$ のとき, $x_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+x_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)+\cdots+x_{k-1}(\boldsymbol{a}_{k-1}+\boldsymbol{a}_k)+x_k(\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{0}$ が成り立つため, $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}+\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{a}_1$ は 1 次従属である.

(2) $(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2)+(\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3)+\cdots+(\boldsymbol{a}_{k-1}-\boldsymbol{a}_k)+(\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}-\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}_1$ は 1 次従属である.

(3) $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+\cdots+x_k(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_k)=\boldsymbol{0}$ とおけば

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)\boldsymbol{a}_1+(x_2+x_3+\cdots+x_k)\boldsymbol{a}_2+\cdots+(x_i+x_{i+1}+\cdots+x_k)\boldsymbol{a}_i+\cdots+x_k\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{0}$$

だから $x_1+x_2+\cdots+x_k=x_2+x_3+\cdots+x_k=\cdots=x_i+x_{i+1}+\cdots+x_k=\cdots=x_k=0$ である. この等式から, $i$ による帰納法で $x_{k-i+1}=0$ が $i=1,2,\ldots,k$ に対して成り立つことが示されるため, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_k$ は 1 次独立である.

4. $(i,j)$ 成分が 1 で, $(i,j)$ 成分以外の成分がすべて 0 である $n$ 次正方行列を $E_n(i,j)$ で表すことにする.

(1) $\begin{pmatrix}1&2&1\\-2&1&3\\1&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 行の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&5&5\\1&-4&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 行の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\-\frac{3}{5}&-4&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 行の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を } \frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第 2 列と第 3 列}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が求める基底である. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は 3 である.

(2) $\begin{pmatrix}1&-3&1\\2&-2&3\\1&5&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 行の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&1\\1&8&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 2 列を}}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\1&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 行の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&2&0\end{pmatrix}$ より,
$\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ が求める基底である. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は 2 である.

(3) $A=(a_{ij})\in M_n(\boldsymbol{K})$ が $\operatorname{tr}A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=0$ を満たすとき, $a_{nn}=-\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_{ii}$ だから

$$A=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}E_n(i,j)=\sum_{i\neq j}a_{ij}E_n(i,j)+\sum_{i=1}^{n-1}a_{ii}E_n(i,i)+a_{nn}E_n(n,n)=\sum_{i\neq j}a_{ij}E_n(i,j)+\sum_{i=1}^{n-1}a_{ii}(E_n(i,i)-E_n(n,n))$$

が成り立つ. さらに $i\neq j$ ならば $\operatorname{tr}E_n(i,j)=\operatorname{tr}(E_n(i,i)-E_n(n,n))=0$ であり, $E_n(i,j)$ $(i,j=1,2,\ldots,n,\ i\neq j)$, $E_n(i,i)-E_n(n,n)$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ は 1 次独立だから, これらは与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は $n(n-1)+n-1=n^2-1$ である.

(4) $A=(a_{ij})\in M_n(\boldsymbol{K})$ が ${}^tA=A$ を満たすためには $1\leqq i<j\leqq n$ に対し, $a_{ji}=a_{ij}$ であることが必要十分である. このとき,

$$A=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}E_n(i,j)=\sum_{i\neq j}a_{ij}E_n(i,j)+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}E_n(i,i)=\sum_{i<j}a_{ij}(E_n(i,j)+E_n(j,i))+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}E_n(i,i)$$

であり, ${}^t(E_n(i,j)+E_n(j,i)) = E_n(i,j)+E_n(j,i)$, ${}^t(E_n(i,i) = E_n(i,i)$ が成り立つ．さらに $E_n(i,j)+E_n(j,i)$ $(1 \leqq i < j \leqq n)$, $E_n(i,i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ は 1 次独立だから, これらは与えられたベクトル空間の基底になる．従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_nC_2 + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ である．

(5) $A = \big(a_{ij}\big) \in M_n(\boldsymbol{K})$ が ${}^tA = -A$ を満たすためには $1 \leqq i < j \leqq n$ に対し, $a_{ji} = -a_{ij}$ かつ $i = 1,2,\ldots,n$ に対して $a_{ii} = 0$ であることが必要十分である．このとき,

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_n(i,j) = \sum_{i \neq j} a_{ij}E_n(i,j) = \sum_{i<j} a_{ij}(E_n(i,j) - E_n(j,i))$$

であり, ${}^t(E_n(i,j)-E_n(j,i)) = -(E_n(i,j)+E_n(j,i))$ が成り立つ．さらに $E_n(i,j)-E_n(j,i)$ $(1 \leqq i < j \leqq n)$ は 1 次独立だから, これらは与えられたベクトル空間の基底になる．従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ である．

(6) $A = \big(a_{jk} + ib_{jk}\big) \in M_n(\boldsymbol{C})$ $(a_{jk}, b_{jk} \in \boldsymbol{R})$ が $A^* = A$ を満たすためには $1 \leqq j < k \leqq n$ に対し, $a_{ji} = a_{jk}$, $b_{ji} = -bjk$ かつ $j = 1,2,\ldots,n$ に対して $b_{jj} = 0$ であることが必要十分である．このとき,

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{j,k=1}^{n} (a_{jk} + b_{jk}i)E_n(j,k) = \sum_{j \neq k}(a_{jk} + b_{jk}i)E_n(j,k) + \sum_{j=1}^{n} a_{jj}E_n(j,j) \\
&= \sum_{i<j} a_{jk}(E_n(j,k) + E_n(k,j)) + \sum_{i<j} b_{jk}i(E_n(j,k) - E_n(k,j)) + \sum_{j=1}^{n} a_{jj}E_n(j,j)
\end{aligned}$$

であり, $(E_n(j,k)+E_n(k,j))^* = E_n(j,k)+E_n(k,j)$, $(i(E_n(j,k)-E_n(k,j)))^* = i(E_n(j,k)-E_n(k,j))$, $E_n(j,j)^* = E_n(j,j)$ が成り立つ．さらに $E_n(j,k)+E_n(k,j)$, $i(E_n(j,k)-E_n(k,j))$ $(1 \leqq i < j \leqq n)$, $E_n(j,j)$ $(j=1,2,\ldots,n)$ は $\boldsymbol{R}$ 上 1 次独立だから, これらは与えられたベクトル空間の基底になる．従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_nC_2 + {}_nC_2 + n = n^2$ である．

(7) $A = \big(a_{jk} + ib_{jk}\big) \in M_n(\boldsymbol{C})$ $(a_{jk}, b_{jk} \in \boldsymbol{R})$ が $A^* = A$ を満たすためには $1 \leqq j < k \leqq n$ に対し, $a_{ji} = -a_{jk}$, $b_{ji} = b_{jk}$ かつ $j = 1,2,\ldots,n$ に対して $a_{jj} = 0$ であることが必要十分である．このとき,

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{j,k=1}^{n} (a_{jk} + b_{jk}i)E_n(j,k) = \sum_{j \neq k}(a_{jk} + b_{jk}i)E_n(j,k) + \sum_{j=1}^{n} b_{jj}iE_n(j,j) \\
&= \sum_{i<j} a_{jk}(E_n(j,k) - E_n(k,j)) + \sum_{i<j} b_{jk}i(E_n(j,k) + E_n(k,j)) + \sum_{j=1}^{n} b_{jj}iE_n(j,j)
\end{aligned}$$

であり, $(E_n(j,k)-E_n(k,j))^* = -(E_n(j,k)-E_n(k,j))$, $(i(E_n(j,k)+E_n(k,j)))^* = -i(E_n(j,k)+E_n(k,j))$, $(iE_n(j,j))^* = -iE_n(j,j)$ が成り立つ．さらに $E_n(j,k)-E_n(k,j)$, $i(E_n(j,k)+E_n(k,j))$ $(1 \leqq i < j \leqq n)$, $iE_n(j,j)$ $(j=1,2,\ldots,n)$ は $\boldsymbol{R}$ 上 1 次独立だから, これらは与えられたベクトル空間の基底になる．従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_nC_2 + {}_nC_2 + n = n^2$ である．

(8) $A = \big(a_{ij}\big) \in M_n(\boldsymbol{K})$ が上半三角行列であるためには $1 \leqq j < i \leqq n$ に対し, $a_{ij} = 0$ であることが必要十分である．このとき, $A = \sum\limits_{i \leqq j} a_{ij}E_n(i,j)$ であり, $E_n(i,j)$ $(1 \leqq i \leqq j \leqq n)$ は上半三角行列であり, これらは 1 次独立だから, 与えられたベクトル空間の基底になる．従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_nC_2 + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ である．

(9) $A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ とおくと, $AP = \begin{pmatrix} ax_{11} & bx_{12} & cx_{13} \\ ax_{21} & bx_{22} & cx_{23} \\ ax_{31} & bx_{32} & cx_{33} \end{pmatrix}$, $PA = \begin{pmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} \\ bx_{21} & bx_{22} & bx_{23} \\ cx_{31} & cx_{32} & cx_{33} \end{pmatrix}$ だから, $AP = PA$ であるためには, $bx_{12} = ax_{12}$, $ax_{21} = bx_{21}$, $cx_{23} = bx_{23}$, $bx_{32} = cx_{32}$, $cx_{13} = ax_{13}$, $ax_{31} = cx_{31}$ が成り立つこと, すなわち $(a-b)x_{12} = (a-b)x_{21} = (b-c)x_{23} = (b-c)x_{32} = (a-c)x_{13} = (a-c)x_{31} = 0$ が成り立つことが必要十分である．$a$, $b$, $c$ は相異なるため, 上式から $i \neq j$ ならば $x_{ij} = 0$ が得られ, $A$ は対角行列である．逆に $A$ が

3 次対角行列ならば $AP=PA$ が成り立つため, 与えられたベクトル空間は 3 次対角行列全体からなる集合である. 故に $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ が与えられたベクトル空間の一組の基底になり, その次元は 3 である.

(10) $AP=\begin{pmatrix}ax_{11}&ax_{12}&cx_{13}\\ax_{21}&ax_{22}&cx_{23}\\ax_{31}&ax_{32}&cx_{33}\end{pmatrix}, PA=\begin{pmatrix}ax_{11}&ax_{12}&ax_{13}\\ax_{21}&ax_{22}&ax_{23}\\cx_{31}&cx_{32}&cx_{33}\end{pmatrix}$ だから, $AP=PA$ であるためには, $cx_{23}=ax_{23}$, $ax_{32}=cx_{32}$, $cx_{13}=ax_{13}$, $ax_{31}=cx_{31}$ が成り立つこと, すなわち $(a-c)x_{23}=(a-c)x_{32}=(a-c)x_{13}=(a-c)x_{31}=0$ が成り立つことが必要十分である. $a\neq c$ だから, 上式から $x_{23}=x_{32}=x_{13}=x_{31}=0$ が得られるため, 与えられたベクトル空間は $\begin{pmatrix}p&q&0\\r&s&0\\0&0&t\end{pmatrix}$ という形の行列全体からなる集合である. 従って $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ が与えられたベクトル空間の一組の基底になり, その次元は 5 である.

(11) $f(x)\in P_3(\boldsymbol{R})$ が $f(-1)=f(1)=0$ を満たすためには, $f(x)$ が $x-1$ と $x+1$ を因数にもつことが必要十分である. 従って $f(x)=(x-1)(x+1)(ax+b)=a(x^3-x)+b(x^2-1)$ $(a,b\in\boldsymbol{R})$ と表され, $x^3-x, x^2-1$ は 1 次独立だから, これらは $f(-1)=f(1)=0$ を満たす多項式 $f(x)$ 全体からなる $P_3(\boldsymbol{R})$ の部分空間の基底であり, その次元は 2 である.

(12) $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n(\boldsymbol{K})$ がは対角成分がすべて 0 である上半三角行列であるためには $1\leqq j\leqq i\leqq n$ に対し, $a_{ij}=0$ であることが必要十分である. このとき, $A=\sum\limits_{i<j}a_{ij}E_n(i,j)$ であり, $E_n(i,j)$ $(1\leqq i<j\leqq n)$ は対角成分がすべて 0 である上半三角行列であり, これらは 1 次独立だから, 与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ である.

(13) $g(x)=f(x)-f(x-1)$ とおくと, $f(n)-3f(n-1)+3f(n-2)-f(n-3)=f(n)-f(n-1)-2(f(n-1)-f(n-2))+f(n-2)-f(n-3)=g(n)-2g(n-1)+g(n-2)$ だから仮定から $g(n)-2g(n-1)+g(n-2)=0$ である. 従って, $g(n)-g(n-1)=g(n-1)-g(n-2)$ がすべての自然数 $n$ に対して成り立つため, 数列 $g(0),g(1),\ldots$ は等差数列である. $d=g(1)-g(0)$ とおくと, $f(n)-f(n-1)=g(n)=g(0)+dn$ となるため, $f(n)=f(0)+\sum\limits_{k=1}^{n}(f(k)-f(k-1))=f(0)+\sum\limits_{k=1}^{n}(g(0)+dn)=f(0)+g(0)n+\frac{d}{2}n(n-1)$ が任意の自然数 $n$ に対して成り立つ. そこで $a=\frac{d}{2}, b=g(0)-\frac{d}{2}$, $c=f(0)$ とおいて, $x$ の多項式 $F(x)=f(x)-(ax^2+bx+c)$ を考えると, すべての自然数 $n$ に対して $F(n)=0$ となるため, 教科書の系 4.20 によって, $F(x)=0$ である. 故に $f(x)$ は $x$ の 2 次以下の多項式である. 逆に $f(x)$ が $x$ の 2 次以下の多項式のとき, $f(x)=ax^2+bx+c$ とおけば $f(n)-3f(n-1)+3f(n-2)-f(n-3)=an^2+bn+c-3(a(n-1)^2+b(n-1)+c)+3(a(n-2)^2+b(n-2)+c)-(a(n-3)^2+b(n-3)+c)=0$ である. よって, すべての自然数 $n$ に対して $f(n)-3f(n-1)+3f(n-2)-f(n-3)=0$ を満たすような $x$ の多項式 $f(x)$ の全体からなる $P_4(\boldsymbol{K})$ の部分空間は $P_2(\boldsymbol{K})$ に一致するため, $1,x,x^2$ が基底で, その次元は 3 である.

(14) 数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が漸化式 $x_{n+3}=x_{n+2}-x_{n+1}+x_n$ を満たすとし, $y_n=x_{n+1}-x_n$ によって数列 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定める. このとき, $y_{n+2}=x_{n+3}-x_{n+2}=-x_{n+1}+x_n=-y_n$ が $n=0,1,2,\ldots$ に対して成り立つため, 数列 $\{y_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ はともに公比 $-1$ の等比数列である. 従って $y_{2n}=(-1)^n(x_1-x_0)$, $y_{2n+1}=(-1)^n(x_2-x_1)$

が $n=0,1,2,\ldots$ に対して成り立つ．$x_n = x_0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k$ だから

$$\begin{aligned}
x_{2m} &= x_0 + \sum_{k=0}^{2m-1} y_k = x_0 + \sum_{l=0}^{m-1} y_{2l} + \sum_{l=0}^{m-1} y_{2l+1} = x_0 + \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l(x_1-x_0) + \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l(x_2-x_1)\\
&= x_0 + \frac{1}{2}(1-(-1)^m)(x_2-x_0) = \frac{1}{2}(1+(-1)^m)x_0 + \frac{1}{2}(1-(-1)^m)x_2 = \begin{cases} x_0 & m \text{ は偶数} \\ x_2 & m \text{ は奇数} \end{cases}\\
x_{2m+1} &= x_0 + \sum_{k=0}^{2m} y_k = x_0 + \sum_{l=0}^{m} y_{2l} + \sum_{l=0}^{m-1} y_{2l+1} = x_0 + \sum_{l=0}^{m}(-1)^l(x_1-x_0) + \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l(x_2-x_1)\\
&= x_0 + \frac{1}{2}(1-(-1)^m)(x_2-x_0) + (-1)^m(x_1-x_0) = \frac{1}{2}(1-(-1)^m)x_0 + \frac{1}{2}(1-(-1)^m)x_2 + (-1)^m x_1\\
&= \begin{cases} x_1 & m \text{ は偶数} \\ x_0 - x_1 + x_2 & m \text{ は奇数} \end{cases}
\end{aligned}$$

が得られる．そこで, 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ を, 0 以上の整数 $k$ と $r=0,1,2,3$ に対し

$$a_{4k+r} = \begin{cases} 1 & r=0,3 \\ 0 & r=1,2 \end{cases} \qquad b_{4k+r} = \begin{cases} (-1)^{\frac{r+1}{2}} & r=1,3 \\ 0 & r=0,2 \end{cases} \qquad c_{4k+r} = \begin{cases} 1 & r=2,3 \\ 0 & r=0,1 \end{cases}$$

によって定めれば, これらは漸化式 $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$ を満たし, この漸化式を満たす任意の数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し, $x_n = x_0 a_n + x_1 b_n + x_2 c_n$ が 0 以上の整数 $n$ について成り立つ．従って, ベクトル空間 $\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ において, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = x_0\{a_n\}_{n=0}^{\infty} + x_1\{b_n\}_{n=0}^{\infty} + x_2\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ が成り立ち, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}, \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ は 1 次独立だから, これらが漸化式 $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$ を満たす数列全体からなる $\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ の部分空間の基底になり, その次元は 3 である．

(15) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-t)^2 f(t)dt = x^2\int_{-1}^{1} f(t)dt - 2x\int_{-1}^{1} tf(t)dt + \int_{-1}^{1} t^2 f(t)dt$ より $a = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)dt$, $b = \displaystyle\int_{-1}^{1} tf(t)dt$, $c = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^2 f(t)dt$ とおくと, 仮定から $\lambda f(x) = ax^2 - 2bx + c$ である．

［$\lambda \neq 0$ の場合］$f(x) = \dfrac{a}{\lambda}x^2 - \dfrac{2b}{\lambda}x + \dfrac{c}{\lambda}$ となるため, $a = \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{a}{\lambda}t^2 - \frac{2b}{\lambda}t + \frac{c}{\lambda}\right)dt = \frac{2a}{3\lambda} + \frac{2c}{\lambda}$ より $c = \left(\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{1}{3}\right)a$, $b = \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{a}{\lambda}t^3 - \frac{2b}{\lambda}t^2 + \frac{c}{\lambda}t\right)dt = -\frac{4b}{3\lambda}$ より $(3\lambda+4)b = 0$, $c = \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{a}{\lambda}t^4 - \frac{2b}{\lambda}t^3 + \frac{c}{\lambda}t^2\right)dt = \frac{2a}{5\lambda} + \frac{2c}{3\lambda}$ より $-6a + (15\lambda - 10)c = 0$ が得られる．$c = \left(\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{1}{3}\right)a$ を $-6a + (15\lambda-10)c = 0$ に代入すると $(45\lambda^2 - 60\lambda - 16)a = 0$ となるため $\lambda = \dfrac{2}{3} \pm \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ または $a = 0$ である．また $(3\lambda+4)b = 0$ より $\lambda = -\dfrac{4}{3}$ または $b = 0$ である．

・$\lambda = \dfrac{2}{3} \pm \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ならば $b = 0$ であり, $c = \left(\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{1}{3}\right)a$ から $c = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}a$ となるため, $f(x) = a\left(x^2 \pm \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ となる．

・$\lambda = -\dfrac{4}{3}$ ならば $a = 0$ であり, $c = \left(\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{1}{3}\right)a$ から $c = 0$ となるため, $f(x) = bx$ となる．

・$\lambda \neq 0, \dfrac{2}{3} \pm \dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{4}{3}$ ならば $a = b = 0$ であり, $c = \left(\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{1}{3}\right)a$ から $c = 0$ となるため, $f(x) = 0$ となる．

［$\lambda = 0$ の場合］$f(x) \in P_4(x)$ だから $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ とおけて, $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-t)^2 f(t)dt = \int_{-1}^{1}(t^2 - 2xt + x^2)(a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0)dt = 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5}\right)x^2 - 4\left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_3}{5}\right)x + 2\left(\frac{a_0}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_4}{7}\right)$ である．これが 0 になるためには, $a_0 + \dfrac{a_2}{3} + \dfrac{a_4}{5} = \dfrac{a_1}{3} + \dfrac{a_3}{5} = \dfrac{a_0}{3} + \dfrac{a_2}{5} + \dfrac{a_4}{7} = 0$ が成り立つことが必要十分である．これを $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ に関する斉次連立 1 次方程式とみて解を求めることにより, $a_0 = 3s$, $a_1 = 3t$, $a_2 = -30s$, $a_3 = -5t$, $a_4 = 35s$ ($s$, $t$ は任意の実数) と表せる．よって $f(x)$ は $f(x) = s(35x^4 - 30x^2 + 3) + t(-5x^3 + 3x)$ という形の多項式になる．

以上から求める部分空間の次元は, $\lambda = \dfrac{2}{3} \pm \dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{4}{3}$ ならば 1 次元, $\lambda = 0$ ならば 2 次元, それ以外の場合は 0 次元である.

## 線形数学 II 演習問題　第 14 回　部分空間の和・直和

1. $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間 $V$, $W$ が以下で与えられるとき, $V+W$ の基底を一組求めて, 次元を答えよ.

(1) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix}x+y-z-2w=0\\-x+2y+z-w=0\end{matrix}\right\},\quad W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix}x+2y+2z-3w=0\\-4x+2y-3z+2w=0\end{matrix}\right\}.$

(2) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix}x+y+2z+3w=0\\3y+3z-2w=0\end{matrix}\right\},\quad W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix}x+2y+3z+2w=0\\x+3y+4z+2w=0\end{matrix}\right\}.$

(3) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix}x+2y+z+3w=0\\x+3y+2z=0\end{matrix}\right\},\quad W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix}2x+z+2w=0\\-2x-y-2z+w=0\end{matrix}\right\}.$

2. $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間 $V$, $W$ が以下で与えられるとき, $V\cap W$ の基底を一組求めて, 次元を答えよ.

(1) $V=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\-3\end{pmatrix}\right\rangle,\quad W=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\-5\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-9\\-1\\-4\end{pmatrix}\right\rangle.$

(2) $V=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\0\\4\end{pmatrix}\right\rangle,\quad W=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle.$

(3) $V=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle,\quad W=\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle.$

3. 以下の場合について, ベクトル空間 $V$ とその部分空間 $W$, $Z$ に対し, 次の $(i)$, $(ii)$ が成り立っていれば, そのことを示し, そうでなければその理由を述べよ. ただし, (1), (2), (3) では $V=\boldsymbol{K}^4$ とする.

$(i)$ $V=W+Z$ である.　　$(ii)$ $V=W\oplus Z$ である.

(1) $W=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle,\quad Z=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle.$　(2) $W=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle,\quad Z=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle.$

(3) $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; z=w=0\right\},\quad Z=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix}x+y+z+w=0\\x+2y+3z+4w=0\end{matrix}\right\}.$

(4) $V=C^r(-a,a)$ $(a>0)$ とし $W=\{f\in V\,|\,x\in(-a,a)$ ならば $f(-x)=f(x)\}$,
$Z=\{f\in V\,|\,x\in(-a,a)$ ならば $f(-x)=-f(x)\}$.

(5) $V$ を収束する実数の数列全体からなるベクトル空間とし, $W$ は $0$ に収束する数列全体からなる $V$ の部分空間, $Z$ はすべての項が $1$ である数列で生成される $V$ の $1$ 次元部分空間.

(6) $V=M_n(\boldsymbol{K})$, $W=\{A\in M_n(\boldsymbol{K})\,|\,A$ は上半三角行列 $\}$, $Z=\{A\in M_n(\boldsymbol{K})\,|\,A$ は下半三角行列 $\}$.

(7) $V=M_n(\boldsymbol{R})$, $W=\{A\in M_n(\boldsymbol{R})\,|\,A$ は上半三角行列 $\}$, $Z=\{A\in M_n(\boldsymbol{R})\,|\,{}^tA=-A\}$.

4. (1) $P_n(\boldsymbol{R})$ の部分空間 $V$ を $V = \left\{ f(x) \in P_n(\boldsymbol{R}) \,\middle|\, \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0 \right\}$ で定めるとき, $P_n(\boldsymbol{R}) = V \oplus W$ を満たす $P_n(\boldsymbol{R})$ の部分空間 $W$ と, $V$ と $W$ の基底をそれぞれ一組ずつ求めよ.

(2) $P_3(\boldsymbol{R})$ の部分空間 $V$ を $V = \left\{ f(x) \in P_3(\boldsymbol{R}) \,\middle|\, \int_{-1}^{1} (x-t)^2 f(t)dt = 0 \right\}$ で定めるとき, $P_3(\boldsymbol{R}) = V \oplus W$ を満たす $P_3(\boldsymbol{R})$ の部分空間 $W$ とその基底を一組求めよ.

## 第 14 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ より, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+y-z-2w=0 \\ -x+2y+z-w=0 \end{cases}$ の解は $s, t$ を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t \\ t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $V$ を生成する. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 10 & 5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ より, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+2y+2z-3w=0 \\ -4x+2y-3z+2w=0 \end{cases}$ の解は $s, t$ を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s-t \\ s \\ -2s+2t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $W$ を生成する. 従って $V+W$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって生成される. $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ とおけば $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $x=0$, $-y=z=w$ だから, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であるが, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 従って, これらは $V+W$ の基底になるため, $\dim(V+W)=3$ である.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ より, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+y+2z+3w=0 \\ 3y+3z-2w=0 \end{cases}$ の解は $s, t$ を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-11t \\ -s+2t \\ s \\ 3t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ は $V$ を生成する. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

より, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+2y+3z+2w=0 \\ x+3y+4z+2w=0 \end{cases}$ の解は $s$, $t$ を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-2t \\ -s \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $W$ を生成する. 従って $V+W$ は $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって生成される. $x\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ とおけば $\begin{pmatrix} -1 & -11 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -11 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(4,3) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より, $x=y=w=0$ だから, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 従って, これらは $V+W$ の基底になるため, $\dim(V+W)=3$ である.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ より, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+2y+z+3w=0 \\ x+3y+2z=0 \end{cases}$ の解は $s, t$ を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-9t \\ -s+3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $V$ を生成する. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ より, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x+z+2w=0 \\ -2x-y-2z+w=0 \end{cases}$ の解は $s, t$ を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ -2s+3t \\ 2s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $W$ を生成する. 従って $V+W$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される.

$x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ とおけば $\begin{pmatrix} 1 & -9 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -9 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & 2 \\ 0 & 9 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(4,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ より, $x = -\dfrac{16}{3}w$, $y = -w$, $z = \dfrac{8}{3}w$ だから, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であるが, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 従って, これらは $V + W$ の基底になるため, $\dim(V + W) = 3$ である.

2. 一般に $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間 $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$, $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_l \rangle$ が与えられたとき, $\boldsymbol{b} \in V \cap W$ であるためには, $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k = y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_l\boldsymbol{w}_l = \boldsymbol{b}$ を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l \in \boldsymbol{K}$ が存在することが必要十分である. 従って, $n \times k$ 行列 $A$, $n \times l$ 行列 $B$ を $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_k \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \cdots & \boldsymbol{w}_l \end{pmatrix}$ で定めれば, $\boldsymbol{b} \in V \cap W$ であることは, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} B & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式がともに解をもつことと同値である. さらにこのことは, $\begin{pmatrix} A & O & \boldsymbol{b} \\ O & B & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつことと同値である.

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とおいて, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & p \\ 2 & 1 & 0 & 0 & q \\ 0 & 3 & 0 & 0 & r \\ 4 & -3 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & -1 & p \\ 0 & 0 & 1 & -9 & q \\ 0 & 0 & -5 & -1 & r \\ 0 & 0 & -2 & -4 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{て第 1,3 列の掃き出し}]{\text{(1,1),(6,3) 成分に関し}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 3 & 0 & 0 & q-2p \\ 0 & 3 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s-4p \\ 0 & 0 & 0 & -1 & p \\ 0 & 0 & 1 & -9 & q \\ 0 & 0 & 0 & -46 & r+5q \\ 0 & 0 & 0 & -22 & s+2q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{て第 2,4 列の掃き出し}]{\text{(4,2),(5,4) 成分に関し}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & s-3p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3s+10p+q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-3s+12p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s-4p \\ 0 & 0 & 0 & -1 & p \\ 0 & 0 & 1 & 0 & q-9p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-46p+5q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-22p+2q \end{pmatrix}$$ より, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには,

$$\begin{cases} r - 3s + 12p = 0 \\ -3s + 10p + q = 0 \\ r - 46p + 5q = 0 \\ s - 22p + 2q = 0 \end{cases}$$ が成り立つことが必要十分である. これらを, $r$, $s$, $p$, $q$ に関する斉次連立 1 次方程式とみなして, 解を求める.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & -46 & 5 \\ 0 & 1 & -22 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & 10 & 1 \\ 0 & 3 & -58 & 5 \\ 0 & 1 & -22 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(4,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -54 & 6 \\ 0 & 0 & -56 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & -22 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$ より, 上記の条件は $\begin{cases} r - 6p = 0 \\ 8p - q = 0 \\ s - 6p = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $r = 6p$, $q = 8p$, $s = 6p$ となるため, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには, $\boldsymbol{b}$ が

$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ 8p \\ 6p \\ 6p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ と表されることが必要十分である. 故に, $V \cap W$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ を基底とする $\boldsymbol{K}^4$ の 1 次元部分空間である.

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とおいて, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{w}_3 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & q \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & p \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1,4 列の掃き出し}]{\text{(2,1),(5,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & q+r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s-q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & r-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2,5 列の掃き出し}]{\text{(2,3),(6,5) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & p-2q-2r \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & q+r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s-q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p-2q+3r}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s+p-q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(4,3), 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p-7q-2r+5s \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4q+r-3s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s-q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p-2q+3r}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p-q+s \end{pmatrix}$$

より, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{w}_3 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには, $\begin{cases} p-7q-2r+5s=0 \\ p-2q+3r=0 \\ p-q+s=0 \end{cases}$ が成り立つことが必要十分である. これらを, $p, q, r, s$ に関する斉次連立 1 次方程式とみなして, 解を求める.

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

より, 上記の条件は $\begin{cases} p+r=0 \\ q-r=0 \\ -2r+s=0 \end{cases}$ と同値である. 従って $p=-r, q=r, s=2r$ となるため, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{w}_3 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -r \\ r \\ r \\ 2r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と表されることが必要十分である. 故に, $V \cap W$ は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を基底とする $\boldsymbol{K}^4$ の 1 次元部分空間である.

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とおいて,

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{w}_3 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & q \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & r \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & s \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 1,4 列の掃き出し}]{\text{(1,1),(8,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & p+r \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & s-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2r & -2s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2,5 列の掃き出し}]{\text{(2,2),(6,5) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & p-q \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2p-q+2r}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & s-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2p-q}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q+r-2s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & s-q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3,6 列の掃き出し}]{\text{(3,3),(5,6) 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4p-3q+2r}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2p+2q-2r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2p-q+2r}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s-3p+q-2r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2p-q}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2p+2q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q+r-2s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{2p-3q+2s}{2} \end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{w}_3 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解を

もつためには, $\begin{cases} -3p + q - 2r + s = 0 \\ q + r - 2s = 0 \end{cases}$ が成り立つことが必要十分である. これらを, $p$, $q$, $r$, $s$ に関する斉次連立 1 次方程式とみなして, 解を求める. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ より, 上記の条件は

$\begin{cases} -3p - 3r + 3s = 0 \\ q + r - 2s = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $p = -r+s$, $q = -r+2s$ となるため, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{w}_3 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$

を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -r+s \\ -r+2s \\ r \\ s \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表される

ことが必要十分である. 故に, $V \cap W$ は $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底とする $\boldsymbol{K}^4$ の 2 次元部分空間である.

3. (1) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく. $a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{w}_2 + c\boldsymbol{z}_1 + d\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{0}$ が成り立つならば, $b - d = 0$, $a + b + c + d = 0$, $c = 0$, $d = 0$ だから $a = b = c = d = 0$ となるため, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2$ は 1 次独立である. 教科書の定理 5.19 によって, これらは $V$ の基底になる. 従って $V = W + Z$ であり, 教科書の命題 5.22 の (2) の条件が満たされるため, $V = W \oplus Z$ である.

(2) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2$ だから $W + Z = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \rangle$ であ

る．また，$a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{z}_1 + c\boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} c \\ a+b \\ a \\ b-c \end{pmatrix}$ だから，$a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{z}_1 + c\boldsymbol{z}_2 = \mathbf{0}$ ならば $a = b = c = 0$ となるため，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2$ は 1 次独立である．従って $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2$ は $W+Z$ の基底になるため，$\dim(W+Z) = 3 < 4 = \dim V$ である．故に，教科書の定理 5.18 によって $V = W+Z$ ではない．従って $V = W \oplus Z$ ではない．

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ より，連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+y+z+w = 0 \\ x+2y+3z+4w = 0 \end{cases}$ の解は $s, t$ を任意のスカラーとして，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t \\ -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため，$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $Z$ を生成する．また，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $W$ を生成するため，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって $W+Z$ は 生成される．これらのベクトルは 1 次独立だから，教科書の定理 5.19 によって，これらは $V$ の基底になる．従って $V = W+Z$ であり，教科書の命題 5.22 の (2) の条件が満たされるため，$V = W \oplus Z$ である．

(4) 任意の $f \in V$ に対して，$g, h \in V$ を $g(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$，$h(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ で定めれば $g \in W$，$h \in Z$ であり，$f = g+h$ が成り立つため，$V = W+Z$ である．$f \in W$，$g \in Z$ が $f+g = \mathbf{0}$ を満たすならば，任意の $x \in (-a, a)$ に対して $f(x) = -g(x)$ と $f(-x) = -g(-x)$ が成り立つ．$f \in W$ より $f(-x) = f(x)$ であり，$g \in Z$ より $g(-x) = -g(x)$ が成り立つため，2 つめの等式から $f(x) = g(x)$ が得られる．故に $f = g$ で，$f+g = \mathbf{0}$ から $f = g = \mathbf{0}$ となるため，$V = W \oplus Z$ である．

(5) すべての項が 1 である数列を $\mathbf{1} = \{1_n\}$ とする．任意の $\boldsymbol{a} = \{a_n\} \in V$ に対し，$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - \alpha\mathbf{1} = \{a_n - \alpha\}$ とおけば，$\boldsymbol{b}$ は 0 に収束する数列であるため，$\boldsymbol{b} \in W$ である．従って任意の $\boldsymbol{a} \in V$ は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \alpha\mathbf{1}$ ($\boldsymbol{b} \in W$, $\alpha\mathbf{1} \in Z$) と表されるため，$V = W+Z$ である．$\boldsymbol{b} = \{b_n\} \in W$，$\boldsymbol{c} = \{c_n\} \in Z$ が $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ はすべての項が 0 である数列) を満たすとする．$\boldsymbol{c} = \{c_n\} \in Z$ より $\boldsymbol{c} = c\mathbf{1}$ となる実数 $c$ があるため，すべての自然数 $n$ に対して $c_n = c$ である．一方 $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}$ より，すべての自然数 $n$ に対して $b_n = -c_n$ となるため，$b_n = -c$ である．よって $\boldsymbol{b}$ は $-c$ に収束するが，$\boldsymbol{b} \in W$ より $-c = 0$，すなわち $c = 0$ である．故に $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ となるため，$V = W \oplus Z$ である．

(6) $A = (a_{ij}) \in M_n(\boldsymbol{K})$ に対し，$B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_n(\boldsymbol{K})$ を $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \leqq j \\ 0 & i > j \end{cases}$，$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i > j \\ 0 & i \geqq j \end{cases}$ で定めれば $B \in W$, $C \in Z$ であり，$A = B+C$ だから $V = W+Z$ が成り立つ．一方，$E_n \in W \cap Z$ だから $W \cap Z \neq \{0\}$ となるため，$V = W \oplus Z$ ではない．

(7) $A = (a_{ij}) \in M_n(\boldsymbol{K})$ に対し，$B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_n(\boldsymbol{K})$ を $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + a_{ji} & i < j \\ a_{ii} & i = j \\ 0 & i > j \end{cases}$，$c_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & i < j \\ 0 & i = j \\ a_{ij} & i > j \end{cases}$ で定めれば $B \in W$, $C \in Z$ であり，$A = B+C$ だから $V = W+Z$ が成り立つ．$A = (a_{ij}) \in W \cap Z$ とする．$A \in Z$ より，$i = j$ ならば $a_{ij} = 0$ であり，$i < j$ ならば $a_{ij} = -a_{ji}$ である．また $A \in W$ より，$i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ だから，$i < j$ ならば $a_{ij} = -a_{ji} = 0$ である．従って $A$ は零行列になるため $W \cap Z = \{O\}$ である．故に $V = W \oplus Z$ である．

4. (1) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \in P_n(\boldsymbol{R})$ ならば，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right) dt = \sum_{0 \leqq i \leqq \frac{n}{2}} \frac{2a_{2i}}{2i+1}$ だから $f(x) \in V$ である

ためには $\displaystyle\sum_{0\leqq i\leqq \frac{n}{2}} \frac{2a_{2i}}{2i+1} = 0$ であることが必要十分であり, これは $a_0 = -\displaystyle\sum_{1\leqq i\leqq \frac{n}{2}} \frac{a_{2i}}{2i+1}$ と同値である. このとき,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k - \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{a_{2i}}{2i+1} = \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} a_{2i-1}x^{2i-1} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2i}\left(x^{2i} - \frac{1}{2i+1}\right)$$

だから, $V = \left\langle x, x^3, \ldots, x^{2i-1}, \ldots, x^{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}, x^2 - \dfrac{1}{3}, x^4 - \dfrac{1}{5}, \ldots, x^{2i} - \dfrac{1}{2i+1}, \ldots, x^{2\left[\frac{n}{2}\right]} - \dfrac{1}{2\left[\frac{n}{2}\right]+1} \right\rangle$ である. さらに, $x, x^3, \ldots, x^{2i-1}, \ldots, x^{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}, x^2 - \dfrac{1}{3}, x^4 - \dfrac{1}{5}, \ldots, x^{2i} - \dfrac{1}{2i+1}, \ldots, x^{2\left[\frac{n}{2}\right]} - \dfrac{1}{2\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ は 1 次独立だから, これらは $V$ の基底である. そこで, $W = \langle 1 \rangle$ で $W$ を定めれば, 1 は $W$ の基底で,

$$V + W = \left\langle x, x^3, \ldots, x^{2i-1}, \ldots, x^{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}, 1, x^2 - \frac{1}{3}, x^4 - \frac{1}{5}, \ldots, x^{2i} - \frac{1}{2i+1}, \ldots, x^{2\left[\frac{n}{2}\right]} - \frac{1}{2\left[\frac{n}{2}\right]+1} \right\rangle = P_n(\boldsymbol{R})$$

であり, さらに $x, x^3, \ldots, x^{2i-1}, \ldots, x^{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}, 1, x^2 - \dfrac{1}{3}, x^4 - \dfrac{1}{5}, \ldots, x^{2i} - \dfrac{1}{2i+1}, \ldots, x^{2\left[\frac{n}{2}\right]} - \dfrac{1}{2\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ は 1 次独立だから $P_n(\boldsymbol{R}) = V \oplus W$ である. (教科書の命題 5.22 参照)

(2) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のとき $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x-t)^2 f(t)dt = \int_{-1}^{1} (x^2 - 2tx - t^2)(at^3 + bt^2 + ct + d)dt = \int_{-1}^{1} ((at^3 + bt^2 + ct + d)x^2 - 2(at^4 + bt^3 + ct^2 + dt)x + (at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2))dt = \left(\frac{2b}{3} + 2d\right)x^2 - 2\left(\frac{2a}{5} + \frac{2c}{3}\right)x + \left(\frac{2b}{5} + \frac{2d}{3}\right)$ だから $f(x) \in V$ であるためには $\dfrac{2b}{3} + 2d = \dfrac{2a}{5} + \dfrac{2c}{3} = \dfrac{2b}{5} + \dfrac{2d}{3} = 0$ が成り立つことが必要十分であり, これは $b = d = 0$ かつ $c = -\dfrac{3a}{5}$ であることと同値である. 従って

$$V = \left\{ f(x) \in P_3(\boldsymbol{R}) \,\middle|\, f(x) = a\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) \ (a \in \boldsymbol{R}) \right\} = \left\langle x^3 - \frac{3}{5}x \right\rangle$$

となるため, 例えば $W = \langle 1, x, x^2 \rangle$ で $W$ を定めれば, $1, x, x^2$ は $W$ の基底で, $V + W = P_3(\boldsymbol{R})$ であり, さらに $1, x, x^2, x^3 - \dfrac{3}{5}x$ は 1 次独立だから $P_3(\boldsymbol{R}) = V \oplus W$ である. (教科書の命題 5.22 参照)

# 線形数学 II 演習問題　第 15 回　1 次写像

1. ベクトル空間 $V$, $W$ と写像 $f: V \to W$ を以下のように定義するとき, $f$ が 1 次写像であるかどうかを, 理由とともに答えよ. $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{C}^n$ に対し $\bar{\boldsymbol{a}}$ は $\boldsymbol{a}$ の第 $j$ 成分の共役複素数を第 $j$ 成分とする $\boldsymbol{C}^n$ のベクトルとする. また, 写像 $\boldsymbol{\omega}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ に対し $\omega(t)$ $(t \in \boldsymbol{R})$ の第 $j$ 成分を $\omega_j(t)$ とし, 関数 $\omega_j: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ が微分可能であるとき, $t \in \boldsymbol{R}$ を $\dfrac{d\omega_j}{dt}(t)$ を第 $j$ 成分とする $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルに対応させる写像を $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ で表す.

(1) $V = \boldsymbol{C}^n$, $W = \boldsymbol{C}$, $f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{a}}$ $(\boldsymbol{a} \in V)$.

(2) $V = \boldsymbol{R}^n$, $W = \boldsymbol{R}$, $f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}$.

(3) $V = M_{l,m}(\boldsymbol{K})$, $W = M_{k,n}(\boldsymbol{K})$, $f(X) = AXB$ $(A \in M_{k,l}(\boldsymbol{K})$, $B \in M_{m,n}(\boldsymbol{K}))$.

(4) $V = W = M_{m,n}(\boldsymbol{K})$, $f(X) = XAX$ $(A \in M_{n,m}(\boldsymbol{K}))$.

(5) $V = M_n(\boldsymbol{K})$, $W = \boldsymbol{K}$, $f(X) = |X|$.

(6) $V = \{\varphi \mid \varphi$ は閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値連続関数$\}$, $W = \boldsymbol{R}$, $f(\varphi) = \displaystyle\int_a^b \varphi(x)p(x)dx$ $(p \in V)$.

(7) $V = \{\varphi \mid \varphi$ は閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値連続関数$\}$, $W = \boldsymbol{R}$, $f(\varphi) = \varphi(c)$ $(c \in [a, b])$.

(8) $V = W = P_n(\boldsymbol{K})$, $f(\varphi(x)) = \varphi(x + a)$ $(a \in \boldsymbol{K})$.

(9) $A \in M_n(\boldsymbol{R})$, $V = W = \left\{\boldsymbol{\omega} \,\middle|\, \boldsymbol{\omega}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n \text{ は, すべての } t \in \boldsymbol{R} \text{ に対し, } \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}(t) = A\boldsymbol{\omega}(t) \text{ を満たす.}\right\}$, $f(\boldsymbol{\omega}) = \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$.

(10) $A \in M_n(\boldsymbol{K})$, $V = W = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{K}^n$ は, すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対し, $\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k)$ を満たす.$\}$, $f(\boldsymbol{x}) \in W$ は自然数 $k$ を $\boldsymbol{x}(k+1)$ に対応させる写像.

2. 以下で与えられる行列 $A$ に対し, $\mathrm{Ker}\, T_A$, $\mathrm{Im}\, T_A$ が 0 次元でない場合に, これらの基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -9 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(10) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ -3 & -8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$　(11) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　(12) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　(14) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(15) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$　(16) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

(17) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$　(18) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　(19) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$　(20) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(21) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (22) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (23) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ (24) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(25) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (26) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ (27) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (28) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

(29) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ (30) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ (31) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (32) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(33) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & a+4 \\ 1 & -1 & a & 3 \end{pmatrix}$ (34) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ -1 & -1 & 1 & -a+2 \\ -2 & a-3 & 2 & 2 \\ a+1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ (35) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -a+3 & 2a-5 & a & -a \\ 0 & 1 & 3a-6 & -a \\ 3 & a-6 & 3a & -3a+2 \end{pmatrix}$

3. 以下の条件を満たす $\boldsymbol{K}^4$ の 1 次変換 $f$ に対し, $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ の基底を 1 組ずつ求めよ.

(1) $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(2\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3) $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $f(-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2-a \end{pmatrix}$

(4) $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2-a \end{pmatrix}$

(5) $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ a+1 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a-1 \\ a-1 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_3+2\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -a+2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix} -2 \\ -a+3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

4. $f: V \to V$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 $V$ の 1 次変換とし, $\boldsymbol{x} \in V$ と自然数 $l$ に対して, $f^{m-1}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ かつ $f^m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ が成り立つとする. このとき, $m$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}), f^2(\boldsymbol{x}), \ldots, f^{m-1}(\boldsymbol{x})$ は 1 次独立であることを示せ. ここで $f^k$ は $f$ の $k$ 回の合成写像 $\overbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}^{k\text{ 個}}$ を表す.

5. $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 $V$ の 1 次変換 $f: V \to V$ は $f\circ f = f$ を満たすとする. このとき，以下の等式を示せ.

(1) $\mathrm{Im}\, f = \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}$ (2) $\mathrm{Ker}(id_V - f) = \mathrm{Im}\, f$ (3) $V = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$

6. $A$ が $A^2=A$ を満たす正方行列ならば $\operatorname{tr}A=\operatorname{rank}A$ であることを示せ.

7. $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 $V$ の 1 次変換 $f:V\to V$ で $\operatorname{Ker}f=\operatorname{Im}f$ を満たすものがあるとき $\dim V$ は偶数であることを示せ. さらにこのとき, $V$ の基底 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ で, $f(\boldsymbol{v}_{2i-1})=\boldsymbol{v}_{2i}$, $f(\boldsymbol{v}_{2i})=\boldsymbol{0}$ $(1\leqq i\leqq\dfrac{n}{2})$ を満たすものがとれることを示せ.

8. $A$ を $n$ 次正方行列とするとき, $A^2=O$ ならば $\operatorname{rank}A\leqq\dfrac{n}{2}$ であることを示せ. また $n$ が偶数の場合, $A^2=O$ であり $\operatorname{rank}A=\dfrac{n}{2}$ を満たす行列 $A$ の例を挙げよ.

9. $f:V\to W$, $g:W\to Z$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間の間の 1 次写像とするとき, $\operatorname{Ker}g\subset\operatorname{Im}f$ であるためには, $\operatorname{rank}(g\circ f)=\operatorname{rank}f+\operatorname{rank}g-\dim W$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

10. (発展問題) 1 次写像 $f:M_n(\boldsymbol{K})\to\boldsymbol{K}$ に対し, $A\in M_n(\boldsymbol{K})$ で, すべての $X\in M_n(\boldsymbol{K})$ に対して $f(X)=\operatorname{tr}(AX)$ を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ.

## 第 15 回の演習問題の解答

1. (1) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$, $r\in\boldsymbol{C}$ に対し, $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})={}^t(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\bar{\boldsymbol{a}}=({}^t\boldsymbol{x}+{}^t\boldsymbol{y})\,\bar{\boldsymbol{a}}={}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{a}}+{}^t\boldsymbol{y}\bar{\boldsymbol{a}}=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$, $f(r\boldsymbol{x})={}^t(r\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{a}}=(r({}^t\boldsymbol{x}))\,\bar{\boldsymbol{a}}=r({}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{a}})=rf(\boldsymbol{x})$ だから $f$ は 1 次写像である.

(2) $f(2\boldsymbol{e}_1)=4$, $f(\boldsymbol{e}_1)=1$ だから $f(2\boldsymbol{e}_1)\neq 2f(\boldsymbol{e}_1)$ である. 従って $f$ は 1 次写像ではない.

(3) $X,Y\in V$, $r\in\boldsymbol{K}$ に対し, $f(X+Y)=A(X+Y)B=(AX+AY)B=AXB+AYB=f(X)+f(Y)$, $f(rX)=A(rX)B=rAXB=rf(X)$ だから $f$ は 1 次写像である.

(4) $A=O$ の場合は, 任意の $X\in M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ に対して $f(X)=O$ だから $f$ は 1 次写像である.

$A\neq O$ の場合, $A=\big(a_{ij}\big)$, $a_{pq}\neq 0$ とする. $E_{qp}$ を $(q,p)$ 成分だけが 1 で, その他の成分がすべて 0 である $m\times n$ 行列とすれば, $E_{qp}AE_{qp}=a_{pq}E_{qp}$ だから $f\big(2E_{qp}\big)=4E_{qp}AE_{qp}=4a_{pq}E_{qp}\neq 2a_{pq}E_{qp}=2E_{qp}AE_{qp}=2f\big(E_{qp}\big)$ である. 従って $f$ は 1 次写像ではない.

(5) $n=1$ の場合, $X=(x)$ の行列式の値は $x$ だから, $f$ は明らかに 1 次写像である.

$n\geqq 2$ の場合, $n$ 次対角行列 $A$, $B$ を $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_{n-1} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}$ で定めれば $A$, $B$ はともに対角成分に 0 を含むため $|A|=|B|=0$ である. 一方 $A+B=E_n$ だから $f(A+B)=|A+B|=1\neq 0=|A|+|B|=f(A)+f(B)$ となるため, $f$ は 1 次写像ではない.

(6) $\varphi,\psi\in V$, $r\in\boldsymbol{R}$ に対し, $f(\varphi+\psi)=\displaystyle\int_a^b(\varphi+\psi)(x)p(x)dx=\int_a^b(\varphi(x)+\psi(x))p(x)dx=\int_a^b\varphi(x)p(x)dx+\int_a^b\psi(x)p(x)dx=f(\varphi)+f(\psi)$, $f(r\varphi)=\displaystyle\int_a^b(r\varphi)(x)p(x)dx=\int_a^b r\varphi(x)p(x)dx=r\int_a^b\varphi(x)p(x)dx=rf(\varphi)$ だから $f$ は 1 次写像である.

(7) $\varphi,\psi\in V$, $r\in\boldsymbol{R}$ に対し, $f(\varphi+\psi)=(\varphi+\psi)(c)=\varphi(c)+\psi(c)=f(\varphi)+f(\psi)$, $f(r\varphi)=(r\varphi)(c)=r\varphi(c)=rf(\varphi)$ だから $f$ は 1 次写像である.

(8) $\varphi(x),\psi(x)\in V$, $r\in\boldsymbol{R}$ に対し, $f(\varphi(x)+\psi(x))=\varphi(x+a)+\psi(x+a)=f(\varphi(x))+f(\psi(x))$, $f(r\varphi(x))=r\varphi(x+a)=rf(\varphi(x))$ だから $f$ は 1 次写像である.

(9) $\boldsymbol{\omega}\in V$ ならば, 任意の $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}(t)=A\boldsymbol{\omega}(t)$ だから, $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\boldsymbol{\omega}'$ とおけば, $\boldsymbol{\omega}'$ の $t$ における微分は $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}'}{dt}(t)=\dfrac{d}{dt}(A\boldsymbol{\omega})(t)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(A\boldsymbol{\omega}(t+h)-A\boldsymbol{\omega}(t))=\lim_{h\to 0}A\left(\frac{1}{h}(\boldsymbol{\omega}(t+h)-\boldsymbol{\omega}(t))\right)=A\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\boldsymbol{\omega}(t+h)-\boldsymbol{\omega}(t))\right)=A\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}(t)=A\boldsymbol{\omega}'(t)$ となるため, $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\in W$ である. 従って, $f(\boldsymbol{\omega})=\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ によって, $V$ から $W$ への写像 $f$ が定まる.

$\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\chi}\in V$, $r\in\boldsymbol{R}$ に対し, $f(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\chi})=\dfrac{d(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\chi})}{dt}=\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}+\dfrac{d\boldsymbol{\chi}}{dt}=f(\boldsymbol{\omega})+f(\boldsymbol{\chi})$, $f(r\boldsymbol{\omega})=\dfrac{d(r\boldsymbol{\omega})}{dt}=r\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=rf(\boldsymbol{\omega})$ だから $f$ は 1 次写像である.

(10) $\boldsymbol{x}\in V$ ならば, すべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対し, $\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)$ だから, $\tilde{\boldsymbol{x}}:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{K}^n$ を $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)=\boldsymbol{x}(k+1)$ で定めれば, $\tilde{\boldsymbol{x}}(k+1)=\boldsymbol{x}(k+2)=A\boldsymbol{x}(k+1)=\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$ が成り立つため, $\tilde{\boldsymbol{x}}\in W$ である. 従って, $f(\boldsymbol{x})=\tilde{\boldsymbol{x}}$ によって, $V$ から $W$ への写像 $f$ が定まる.

$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$, $r\in\boldsymbol{K}$ に対し, $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$, $f(r\boldsymbol{x})$ は $k\in\boldsymbol{N}$ をそれぞれ $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(k+1)=\boldsymbol{x}(k+1)+\boldsymbol{y}(k+1)$, $(r\boldsymbol{x})(k+1)=r\boldsymbol{x}(k+1)$ に写す写像であり, $f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$, $rf(\boldsymbol{x})$ も $k\in\boldsymbol{N}$ をそれぞれ $(f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}))(k)=f(\boldsymbol{x})(k)+f(\boldsymbol{y})(k)=\boldsymbol{x}(k+1)+\boldsymbol{y}(k+1)$, $(rf(\boldsymbol{x}))(k)=r(f(\boldsymbol{x})(k))=r\boldsymbol{x}(k+1)$ に写す写像である. 故に $f$ は 1 次写像である.

2. (1) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix}1 & 1 & p\\ 2 & -5 & q\\ 3 & -4 & r\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1 & 1 & p\\ 0 & -7 & q-2p\\ 0 & -7 & r-3p\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{7}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1 & 1 & p\\ 0 & 1 & \frac{2p-q}{7}\\ 0 & -7 & r-3p\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{5p+q}{7}\\ 0 & 1 & \frac{2p-q}{7}\\ 0 & 0 & r-p-q\end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $r-p-q=0$ であることが必要十分である. 従って, $\boldsymbol{b}\in\operatorname{Im}T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が

$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ p+q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である．故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である．$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式の解は $x = y = 0$ のみだから, $\operatorname{Ker} T_A$ は 0 次元である．

(2) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える．$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 3 & -5 & -1 & q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 0 & -8 & -4 & q-3p \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{8}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3p-q}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5p+q}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3p-q}{8} \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式は常に解をもつ．従って, $\operatorname{Im} T_A = \boldsymbol{K}^2$ となるため, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ が $\operatorname{Im} T_A$ の基底になる．$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 0 \\ y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($t$ は任意の定数) と表される．よって, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である．

(3) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える．$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & p \\ -4 & 2 & -2 & q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & p \\ 0 & 0 & 0 & q+2p \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $q + 2p = 0$ であることが必要十分である．従って, $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ -2p \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である．故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である．$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $2x - y + z = 0$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ -2s+t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($s$, $t$ は任意の定数) と表される．よって, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である．

(4) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える．$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & p \\ 1 & 3 & 2 & q \\ 2 & 1 & -3 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & q \\ 3 & -2 & 1 & p \\ 2 & 1 & -3 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & q \\ 0 & -11 & -5 & p-3q \\ 0 & -5 & -7 & r-2q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 3 行を }-2\text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & q \\ 0 & -1 & 9 & p+q-2r \\ 0 & -5 & -7 & r-2q \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 29 & 3p+4q-6r \\ 0 & -1 & 9 & p+q-2r \\ 0 & 0 & -52 & -5p-7q+11r \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式は常に解をもつ．従って, $\operatorname{Im} T_A = \boldsymbol{K}^3$ となるため, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が $\operatorname{Im} T_A$ の基底になる．$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x + 29z = 0 \\ -y + 9z = 0 \\ -52z = 0 \end{cases}$ と同値であるため, その解は $x = y = z = 0$ のみとなり, $\operatorname{Ker} T_A$ は 0 次元である．

(5) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える．$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & p \\ 1 & 0 & -1 & q \\ 5 & -3 & 1 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -2 & q-p \\ 0 & 2 & -4 & r-5p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & q \\ 0 & 1 & -2 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & r-3p-2q \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつために

は $r-3p-2q=0$ であることが必要十分である．従って，$\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ 3p+2q \end{pmatrix}=$ $p\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である．故に $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である．$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合，上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x-z=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$ と同値であるため，$\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}t\\2t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ ($t$ は任意の定数) と表される．よって，$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である．

(6) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ とし，$\begin{pmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える．$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & p \\ -1 & -9 & 3 & 2 & q \\ 2 & 8 & -1 & 1 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}$ $\begin{pmatrix} -1 & -9 & 3 & 2 & q \\ 2 & 4 & 1 & 3 & p \\ 2 & 8 & -1 & 1 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -9 & 3 & 2 & q \\ 0 & -14 & 7 & 7 & p+2q \\ 0 & -10 & 5 & 5 & r+2q \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{14}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} -1 & -9 & 3 & 2 & q \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{p+2q}{14} \\ 0 & -10 & 5 & 5 & r+2q \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{-9p-4q}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{p+2q}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7r-5p+4q}{7} \end{pmatrix}$ より，この連立 1 次方程式が解をもつためには $\dfrac{7r-5p+4q}{7}=0$ であることが必要十分である．従って，$\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ \frac{5}{7}p-\frac{4}{7}q \end{pmatrix}=\dfrac{p}{7}\begin{pmatrix}7\\0\\5\end{pmatrix}+\dfrac{q}{7}\begin{pmatrix}0\\7\\-4\end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である．故に $\begin{pmatrix}7\\0\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\7\\-4\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である．$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合，上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} -x-\frac{3}{2}z-\frac{5}{2}w=0 \\ y-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}w=0 \end{cases}$ と同値であるため，$\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-3s-5t\\s+t\\2s\\2t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-3\\1\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\1\\0\\2\end{pmatrix}$ ($s$, $t$ は任意の定数) と表される．よって，$\begin{pmatrix}-3\\1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-5\\1\\0\\2\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である．

(7) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\\s\end{pmatrix}$ とし，$\begin{pmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 2 & 1 & 3 & 3 & r \\ 1 & -1 & 3 & 0 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 1 & -1 & 1 & r-2p \\ 0 & -1 & 1 & -1 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p+q \end{pmatrix}$ より，この連立 1 次方程式が解をもつためには $r-2p-q=s-p+q=0$ であることが必要十分である．従って，$\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が

$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 2p+q \\ p-q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である．故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である．$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+2z+w=0 \\ y-z+w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2s-t \\ s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($s$, $t$ は任意の定数) と表される．よって, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である．

(8) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える．$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & p \\ -1 & -1 & 0 & -2 & q \\ 1 & 3 & 0 & 3 & r \\ -1 & 2 & 1 & -2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & 1 & -1 & p+q \\ 0 & 1 & -1 & 2 & r-p \\ 0 & 4 & 2 & -1 & p+s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -p-2q \\ 0 & 1 & 1 & -1 & p+q \\ 0 & 0 & -2 & 3 & r-2p-q \\ 0 & 0 & -2 & 3 & s-3p-4q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{r+3q}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{q+r}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 3 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-3q-r \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $s-p-3q-r=0$ であることが必要十分である．従って, $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ p+3q+r \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である．故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である．$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+\frac{3}{2}w=0 \\ y+\frac{1}{2}w=0 \\ -2z+3w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3t \\ -t \\ 3t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($t$ は任意の定数) と表される．よって, $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である．

(9) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える．$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 & p \\ 1 & 2 & 1 & 1 & q \\ -1 & -1 & -2 & 2 & r \\ 1 & 2 & 1 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & q \\ 4 & 1 & -1 & 1 & p \\ -1 & -1 & -2 & 2 & r \\ 1 & 2 & 1 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & q \\ 0 & -7 & -5 & -3 & p-4q \\ 0 & 1 & -1 & 3 & r+q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & q \\ 0 & 1 & -1 & 3 & r+q \\ 0 & -7 & -5 & -3 & p-4q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-q \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 & -q-r \\ 0 & 1 & -1 & 3 & r+q \\ 0 & 0 & -12 & 18 & p+3q+7r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-q \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{12}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 & -q-r \\ 0 & 1 & -1 & 3 & r+q \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{-p-3q-7r}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{p-q+3r}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-p+9q+5r}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{-p-3q-7r}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-q \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $s-q=0$ であることが必要十分である. 従って, $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x - \frac{1}{2}w = 0 \\ y + \frac{3}{2}w = 0 \\ z - \frac{3}{2}w = 0 \end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ -3t \\ 3t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($t$ は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

(10) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & p \\ 2 & 1 & 3 & 5 & q \\ 2 & 0 & 4 & 6 & r \\ -3 & -8 & 2 & -1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & p \\ 0 & -5 & 5 & 5 & q-2p \\ 0 & -6 & 6 & 6 & r-2p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & s+3p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & s+3p \\ 0 & -6 & 6 & 6 & r-2p \\ 0 & -5 & 5 & 5 & q-2p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -s-8p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & s+3p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r+6s+16p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+5s+13p \end{pmatrix}$$

より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $r+6s+16p = q+5s+13p = 0$ であることが必要十分である. 従って, $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ -5s-13p \\ -6s-16p \\ s \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x + 2z + 3w = 0 \\ y - z - w = 0 \end{cases}$

と同値であるため, $\mathrm{Ker}\, T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2s-3t \\ s+t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($s$, $t$ は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底である.

(11) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & p \\ -1 & 3 & 2 & 1 & q \\ 1 & 2 & 1 & -2 & r \\ 0 & -1 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & p \\ 0 & 4 & 1 & 3 & q+p \\ 0 & 1 & 2 & -4 & r-p \\ 0 & -1 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & p \\ 0 & 1 & 2 & -4 & r-p \\ 0 & 4 & 1 & 3 & q+p \\ 0 & -1 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 & 2p-r \\ 0 & 1 & 2 & -4 & r-p \\ 0 & 0 & -7 & 19 & q+5p-4r \\ 0 & 0 & 4 & -3 & s+r-p \end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 4 行を 2 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 & 2p-r \\ 0 & 1 & 2 & -4 & r-p \\ 0 & 0 & 1 & 13 & q+3p-2r+2s \\ 0 & 0 & 4 & -3 & s+r-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 45 & 11p+3q-7r+6s \\ 0 & 1 & 0 & -30 & 5r-7p-2q-4s \\ 0 & 0 & 1 & 13 & q+3p-2r+2s \\ 0 & 0 & 0 & -55 & -13p-4q+9r-7s \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式は常に解をもつ. 従って, $\mathrm{Im}\, T_A = \boldsymbol{K}^4$ となるため, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ が $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底になる. 上の計算から, 係数行列 $A$ は正則であるため, $T_A$ は同型写像である. 従って, $\mathrm{Ker}\, T_A$ は 0 次元である.

(12) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & p \\ -1 & 0 & -2 & 2 & q \\ 2 & 1 & 2 & 3 & r \\ -1 & 2 & 1 & 2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & p \\ 0 & 2 & 1 & 4 & q+p \\ 0 & -3 & -4 & -1 & r-2p \\ 0 & 4 & 4 & 4 & s+p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & p \\ 0 & 4 & 4 & 4 & s+p \\ 0 & -3 & -4 & -1 & r-2p \\ 0 & 2 & 1 & 4 & q+p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{p-s}{2} \\ 0 & 4 & 4 & 4 & s+p \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \frac{4r+3s-5p}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \frac{2q-s+p}{2} \end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{s+4r-3p}{4} \\ 0 & 4 & 0 & 12 & 4s-4p+4r \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \frac{4r+3s-5p}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4q+7p-4r-5s}{4} \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $\dfrac{4q+7p-4r-5s}{4} = 0$ であることが必要十分である. 従って, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\, T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ \frac{4q+7p-4r}{5} \end{pmatrix} = \dfrac{p}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \dfrac{q}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \dfrac{r}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底である. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合,

上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+2w=0 \\ 4y+12w=0 \\ -z+2w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2t \\ -3t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($t$ は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

(13) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 & p \\ -1 & 0 & 1 & 1 & q \\ 3 & 2 & -1 & 1 & r \\ 1 & 3 & 0 & -1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 4 行}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & s \\ -1 & 0 & 1 & 1 & q \\ 3 & 2 & -1 & 1 & r \\ 2 & 3 & -1 & -2 & p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & s \\ 0 & 3 & 1 & 0 & q+s \\ 0 & -7 & -1 & 4 & r-3s \\ 0 & -3 & -1 & 0 & p-2s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -q \\ 0 & 3 & 1 & 0 & q+s \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 4 & \frac{7q+3r-2s}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+q-s \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\frac{3}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -q \\ 0 & 3 & 1 & 0 & q+s \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{7q+3r-2s}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+q-s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{3q+3r-2s}{4} \\ 0 & 3 & 0 & -3 & \frac{-3q-3r+6s}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{7q+3r-2s}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+q-s \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $p+q-s=0$ であることが必要十分である. 従って, $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ p+q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+2w=0 \\ 3y-3w=0 \\ z+3w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ -3t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($t$ は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

(14) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ -1 & 0 & -1 & -2 & r \\ 1 & 1 & 0 & 2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & -1 & r+p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & -1 & r+p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & r+2p \\ 0 & 1 & -1 & 0 & r+p+q \\ 0 & 0 & 0 & -1 & r+p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix}$

だから, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには $s-p-q=0$ であることが必要十分であ

る．このとき, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ p+q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底になる．$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \\ -w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\mathrm{Ker}\, T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($t$ は任意の定数) と表される．よって, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底である.

(15) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $(A\ \boldsymbol{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & p \\ 1 & 0 & 3 & 0 & q \\ 0 & 1 & 1 & 1 & r \\ 2 & -1 & 5 & -1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & p \\ 0 & 1 & 1 & 1 & q-p \\ 0 & 1 & 1 & 1 & r \\ 0 & 1 & 1 & 1 & s-2p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & q \\ 0 & 1 & 1 & 1 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r+p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix}$$

より, この連立 1 次方程式が解をもつ条件は $r+p-q = s-p-q = 0$ が成り立つことである．従って, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\, T_A$ であるためには $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ -p+q \\ p+q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である．故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底である．$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合の上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+3z=0 \\ y+z+w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\mathrm{Ker}\, T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3s \\ -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($s$, $t$ は任意の定数) と表される．よって, $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底である.

(16) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x+3z=0 \\ y+z+w=0 \end{cases}$ と同値である．従って $z = s$, $w = t$ とおけば, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3s \\ -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底である.

また, $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ は $x\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\5\\4\\7\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解で $s=1$, $t=0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\4\\7\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s=0$, $t=1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z=w=0$ とおけば $x=y=0$ が得られるため, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である.

(17) $\begin{pmatrix}2&0&1&0\\1&2&1&1\\0&-1&0&-1\\1&1&-1&4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第 1 行と第 4 行}} \begin{pmatrix}1&1&-1&4\\1&2&1&1\\0&-1&0&-1\\2&0&1&0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&1&2&-3\\0&-1&0&-1\\0&-2&3&-8\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}1&0&-3&7\\0&1&2&-3\\0&0&2&-4\\0&0&7&-14\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&7\\0&0&2&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ は $\begin{cases}x+w=0\\y+7w=0\\2z-4w=0\end{cases}$ と同値である. 従って $w=t$ とおけば, $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-t\\-7t\\2t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1\\-7\\2\\1\end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix}-1\\-7\\2\\1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

また, $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ は $x\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\4\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解で $t=1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\4\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $w=0$ とおけば $x=y=z=0$ が得られるため, $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である.

(18) $\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&2&1&0\\-1&4&2&-1\\1&-2&-1&0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&2&1&-1\\0&4&2&-2\\0&-2&-1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&2&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$

とおけば $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x-w=0 \\ 2y+z-w=0 \end{cases}$ と同値である．従って $y=s$, $w=t$ とおけば, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} t \\ s \\ -2s+t \\ t \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である．

また, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}+w\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解で $s=1$, $t=0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s=0$, $t=1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる．一方 $y=w=0$ とおけば $x=z=0$ が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である．故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である．

(19) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x-4z-2w=0 \\ y-3z-w=0 \end{cases}$ と同値である．従って $y=s$, $w=t$ とおけば, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 4s+2t \\ 3s+t \\ s \\ t \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である．

また, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}+w\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解で $s=1$, $t=0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s=0$, $t=1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる．一方 $z=w=0$ とおけば $x=y=0$ が得られるため,

$\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-3\\1\\-5\end{pmatrix}$ は 1 次独立である．故に $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-3\\1\\-5\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\,T_A$ の基底である．

(20) $\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&1&1&1\\2&-1&5&-1\\1&0&3&0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x+3z=0\\y+z+w=0\end{cases}$ と同値である．従って $z=s$, $w=t$ とおけば，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-3s\\-s-t\\s\\t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ と表されるため，$\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\,T_A$ の基底である．

また，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}2\\1\\5\\3\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ と同値だから，上の $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解で $s=1$, $t=0$ の場合を考えれば，$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\5\\3\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり，$s=0$, $t=1$ の場合を考えれば，$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる．一方 $z=w=0$ とおけば $x=y=0$ が得られるため，$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ は 1 次独立である．故に $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\,T_A$ の基底である．

(21) $\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\-1&-2&0&1\\2&5&-1&-3\\2&3&1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&0&0\\0&1&-1&-1\\0&-1&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&0&0&0\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x+2z+w=0\\y-z-w=0\end{cases}$ と同値である．従って $z=s$, $w=t$ とおけば，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-2s-t\\s+t\\s\\t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ と表されるため，$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\,T_A$ の基底である．

また, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\-2\\5\\3\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\-1\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解で $s = 1$, $t = 0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため, $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\5\\3\end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\5\\3\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である.

(22) $\begin{pmatrix}2&0&0&1\\1&4&1&-1\\0&-1&-1&0\\1&1&2&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(4,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&-2&-4&-1\\0&3&-1&-2\\0&-1&-1&0\\1&1&2&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&0&-2&-1\\0&0&-4&-2\\0&-1&-1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(1,4)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}0&0&-2&-1\\0&0&0&0\\0&-1&-1&0\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}-2z - w = 0\\-y - z = 0\\x - z = 0\end{cases}$ と同値である. 従って $z = t$ とおけば, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}t\\-t\\t\\-2t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

また, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\4\\-1\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解で $t = 1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = 0$ とおけば $x = y = w = 0$ が得られるため, $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である.

(23) $\begin{pmatrix}1&-2&2&0\\1&-1&2&-2\\0&1&0&-2\\3&-4&6&-4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&-2&2&0\\0&1&0&-2\\0&1&0&-2\\0&2&0&-4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&2&-4\\0&1&0&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ と

おけば $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x+2z-4w=0 \\ y-2w=0 \end{cases}$ と同値である．従って $z=s$, $w=t$ とおけば，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-2s+4t\\2t\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ と表されるため，$\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}4\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\,T_A$ の基底である．

また，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\-4\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\2\\0\\6\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\\-4\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ と同値だから，上の $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解で $s=1$, $t=0$ の場合を考えれば，$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\-4\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\2\\0\\6\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり，$s=0$, $t=1$ の場合を考えれば，$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\-4\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\\-4\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる．一方 $z=w=0$ とおけば $x=y=0$ が得られるため，$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\-4\end{pmatrix}$ は 1 次独立である．故に $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\-4\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\,T_A$ の基底である．

(24) $\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\2&-3&-1&5\\2&-1&1&3\\-1&1&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&-1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x+z+w=0 \\ -y-z+w=0 \end{cases}$ と同値である．従って $z=s$, $w=t$ とおけば，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-s-t\\-s+t\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ と表されるため，$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\,T_A$ の基底である．

また，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}2\\5\\3\\-2\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ と同値だから，上の $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解で $s=1$, $t=0$ の場合を考えれば，$\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり，$s=0$, $t=1$ の場合を考えれば，$\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\5\\3\\-2\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる．一方 $z=w=0$ とおけば $x=y=0$ が得られるため，

$\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\\1\end{pmatrix}$ は 1 次独立である．故に $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\\1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である．

(25) $\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&-1&-1&2\\1&-2&-1&4\\0&1&1&-2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&-1&-1&2\\0&-2&-2&4\\0&1&1&-2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&-1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x+z=0\\-y-z+2w=0\end{cases}$ と同値である．従って $z = s$, $w = t$ とおけば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-s\\-s+2t\\s\\t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ と表されるため，$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である．

また，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}0\\2\\4\\-2\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ と同値だから，上の $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解で $s = 1$, $t = 0$ の場合を考えれば，$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり，$s = 0$, $t = 1$ の場合を考えれば，$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\4\\-2\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる．一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため，$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ は 1 次独立である．故に $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である．

(26) $\begin{pmatrix}1&2&3&0\\1&3&-1&1\\2&5&2&1\\3&7&8&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&-4&1\\0&1&-4&1\\0&1&-1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&11&-2\\0&1&-4&1\\0&0&0&0\\0&0&3&0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(4,3) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}$ より，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x-2w=0\\y+w=0\\3z=0\end{cases}$ と同値である．従って $w = t$ とおけば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2t\\-t\\0\\t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ と表されるため，$\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である．

また, $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ は $x\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\2\\5\\7\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\8\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解で $t=1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\2\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $w=0$ とおけば $x=y=z=0$ が得られるため, $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\2\\8\end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\2\\8\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im}T_A$ の基底である.

(27) $\begin{pmatrix}1&-2&3&0\\1&-1&-1&1\\2&-3&2&1\\3&-4&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-2&3&0\\0&1&-4&1\\0&1&-4&1\\0&2&-8&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-5&2\\0&1&-4&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ は $\begin{cases}x-5z+2w=0\\y-4z+w=0\end{cases}$ と同値である. 従って $z=s$, $w=t$ とおけば, $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}5s-2t\\4s-t\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}5\\4\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix}5\\4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker}T_A$ の基底である.

また, $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ は $x\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\\-4\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解で $s=1$, $t=0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s=0$, $t=1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z=w=0$ とおけば $x=y=0$ が得られるため, $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\\-4\end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\\-4\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im}T_A$ の基底である.

(28) $\begin{pmatrix}1&-3&3&-1\\0&1&-2&1\\2&-3&0&1\\-1&5&-7&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-3&3&-1\\0&1&-2&1\\0&3&-6&3\\0&2&-4&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-3&2\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ は $\begin{cases}x-3z+2w=0\\y-2z+w=0\end{cases}$ と同値である. 従って $z=s$, $w=t$ とおけば, $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3s-2t \\ 2s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

また, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解で $s = 1$, $t = 0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である.

(29) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x - z - 2w = 0 \\ y - z + w = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = s$, $w = t$ とおけば, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s+2t \\ s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

また, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解で $s = 1, t = 0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であ

る．故に $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\3\\0\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底である．

(30) $\begin{pmatrix}1&-1&-1&-2\\0&1&1&1\\2&-1&-1&-3\\1&-2&-2&-3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&-1&-1&-2\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x-w=0\\y+z+w=0\end{cases}$ と同値である．従って $z = s$, $w = t$ とおけば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}t\\-s-t\\s\\t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ と表されるため，$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底である．

また，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\\-3\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ と同値だから，上の $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解で $s = 1$, $t = 0$ の場合を考えれば，$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり，$s = 0$, $t = 1$ の場合を考えれば，$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\\-3\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる．一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため，$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ は 1 次独立である．故に $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底である．

(31) $\begin{pmatrix}1&1&a\\1&0&-1\\a&-1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&1&a\\1&0&-1\\a+1&0&a-1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&1&a+1\\1&0&-1\\0&0&2a\end{pmatrix} \cdots (*)$ より $a \neq 0$ の場合 $(*) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2a\end{pmatrix}$ だから，与えられた行列は正則である．従って，$\mathrm{Ker}\, T_A$ は零ベクトルのみからなり，$\mathrm{Im}\, T_A = \boldsymbol{K}^3$ であるため，$\mathrm{Im}\, T_A$ の基底として基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ がとれる．

$a = 0$ の場合 $(*) = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ より，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}y+z=0\\x-z=0\end{cases}$ と同値である．従って $z = t$ とおけば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}t\\-t\\t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ と表されるため，$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底である．

また, $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ は $x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解で $t=1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z=0$ とおけば $x=y=0$ が得られるため, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\,T_A$ の基底である.

(32) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\\s\end{pmatrix}$ とし, $(A\ \boldsymbol{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix}1&a&0&0&p\\0&1&a&0&q\\0&0&1&a&r\\1&3&3&1&s\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&a&0&0&p\\0&1&a&0&q\\0&0&1&a&r\\0&3-a&3&1&s-p\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-a^2&0&p-aq\\0&1&a&0&q\\0&0&1&a&r\\0&0&a^2-3a+3&1&s-p+(a-3)q\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&0&a^3&p-aq+a^2r\\0&1&0&-a^2&q-ar\\0&0&1&a&r\\0&0&0&(1-a)^3&s-p+(a-3)q-(a^2-3a+3)r\end{pmatrix}\cdots(*)$ より, $a\neq 1$ ならば $A$ は正則行列である. この場合は $\mathrm{Ker}\,T_A=\{\mathbf{0}\}$, $\mathrm{Im}\,T_A=\boldsymbol{K}^4$ となり, $\dim\mathrm{Ker}\,T_A=0$, $\dim\mathrm{Im}\,T_A=4$ である. $a=1$ のとき, $(*)=$
$\begin{pmatrix}1&0&0&1&p-q+r\\0&1&0&-1&q-r\\0&0&1&1&r\\0&0&0&0&s-p-2q-r\end{pmatrix}$ だから, この連立 1 次方程式が解をもつ条件は $s-p-2q-r=0$ が成り立つことである. 従って, $\boldsymbol{b}\in\mathrm{Im}\,T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\\p+2q+r\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\,T_A$ の基底である. $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ の場合の上の連立 1 次方程式は

$\begin{cases}x+w=0\\y-w=0\\z+w=0\end{cases}$ と同値であるため, $\mathrm{Ker}\,T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-t\\t\\-t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ($t$ は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\,T_A$ の基底である.

(33) $\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&-1\\2&1&4&a+4\\1&-1&a&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&-1\\0&1&2&a\\0&-1&a-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&-1\\0&0&0&a+1\\0&0&a+1&0\end{pmatrix}\cdots(*)$ より, $a\neq-1$ の場合 $(*)\xrightarrow[\text{を }\frac{1}{a+1}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行と第 4 行}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&-1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を入れ替える}]{\text{第 3 行と第 4 行}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列は正則である. 従って, $\operatorname{Ker}T_A$ は零ベクトルのみからなり, $\operatorname{Im}T_A=\boldsymbol{K}^4$ であるため, $\operatorname{Im}T_A$ の基底として基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ がとれる.

$a=-1$ の場合 $(*)=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x+z+2w=0\\y+2z-w=0\end{cases}$ と同値である. 従って $z=s,\ w=t$ とおけば, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-s-2t\\-2s+t\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker}T_A$ の基底である.

また, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\2\\4\\-1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解で $s=1$, $t=0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\4\\-1\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s=0,\ t=1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z=w=0$ とおけば $x=y=0$ が得られるため, $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im}T_A$ の基底である.

(34) $\begin{pmatrix}1&1&-a&a-2\\-1&-1&1&-a+2\\-2&a-3&2&2\\a+1&2&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&-a&a-2\\0&0&1-a&0\\0&a-1&2(1-a)&2(a-1)\\0&1-a&(a-1)(a+2)&a(1-a)\end{pmatrix}\cdots(*)$ より, $a\neq1$ の場

合, $(*) \xrightarrow[\frac{1}{1-a}\text{ 倍する}]{\text{第 2,3,4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -a-2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a-4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \cdots (**)$ である. 従って $a \neq 1, 2$ の場合は $(**)$ の行の入れ替えを行って階段行列にすれば, 階数が 4 になることがわかるため, 与えられた行列は正則である. 従って, $\operatorname{Ker} T_A$ は零ベクトルのみからなり, $\operatorname{Im} T_A = \boldsymbol{K}^4$ であるため, $\operatorname{Im} T_A$ の基底として基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ がとれる.

$a = 2$ の場合, $(**) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x - 2w = 0 \\ z = 0 \\ -y - 2w = 0 \end{cases}$ と同値である.

従って $w = t$ とおけば, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

また, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解で $t = 1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $w = 0$ とおけば $x = y = z = 0$ が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である.

$a = 1$ の場合, $(*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $x + y - z - w = 0$ と同値である. 従って $y = s, z = t, w = u$ とおけば, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -s + t + u \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である. また, この場合,$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ で $A$ の各行は第 1 行

目の $\pm1$ 倍になるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である.

(35) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & p \\ -a+3 & 2a-5 & a & -a & q \\ 0 & 1 & 3a-6 & -a & r \\ 3 & a-6 & 3a & -3a+2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & p \\ 0 & 1 & 3a-6 & -a & q+(a-3)p \\ 0 & 1 & 3a-6 & -a & r \\ 0 & a & 3a-6 & -3a+2 & s-3p \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6a-10 & -2a & p+2r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+(a-3)p-r \\ 0 & 1 & 3(a-2) & -a & r \\ 0 & 0 & -3(a-1)(a-2) & (a-1)(a-2) & s-3p-ar \end{pmatrix} \cdots (*)$$

$a=1$ または $a=2$ の場合, $(*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6a-10 & -2a & p+2r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+(a-3)p-r \\ 0 & 1 & 3(a-2) & -a & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-3p-ar \end{pmatrix}$ だから, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには, $\begin{cases} q+(a-3)p-r=0 \\ s-3p-ar=0 \end{cases}$ が成り立つことが必要十分である. このとき, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ (3-a)p+r \\ r \\ 3p+ar \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 3-a \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3-a \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ が $\operatorname{Im} T_A$ の基底になる. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+(6a-10)z-2aw=0 \\ y+3(a-2)z-aw=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -(6a-10)s+2at \\ 3(2-a)s+at \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -6a+10 \\ 3a-6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($s$, $t$ は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} -6a+10 \\ 3a-6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

$a \neq 1, 2$ の場合, $(*) \xrightarrow[-3(a-1)(a-2)\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6a-10 & -2a & p+2r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+(a-3)p-r \\ 0 & 1 & 3(a-2) & -a & r \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{s-3p-ar}{3(a-1)(a-2)} \end{pmatrix}$ だから, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには, $q+(a-3)p-r=0$ が成り立つことが必要十分である. このと

き, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} p \\ (3-a)p+r \\ r \\ s \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 3-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $\operatorname{Im} T_A$ の基底になる. $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+(6a-10)z-2aw=0 \\ y+3(a-2)z-aw=0 \\ z-\frac{1}{3}w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 10t \\ 6t \\ t \\ 3t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ($t$ は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

3. (1) 与えられた条件と $f$ の線形性から $f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdots (i)$, $-f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots (ii)$, $f(\boldsymbol{e}_2)-f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdots (iii)$, $f(\boldsymbol{e}_3)+f(\boldsymbol{e}_4)=\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdots (iv)$ が成り立つ. $(i)$, $(ii)$ より, $f(\boldsymbol{e}_2)=f(\boldsymbol{e}_1)+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 従って $(iii)$ より, $f(\boldsymbol{e}_3)=f(\boldsymbol{e}_2)-\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. さらに $(iv)$ から $f(\boldsymbol{e}_4)=-f(\boldsymbol{e}_3)+\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる. 故に, $f$ を表す行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ である.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x-2z-w=0 \\ -y-z-2w=0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z=s$, $w=t$ とおけば, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 2s+t \\ -s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} f$ の基底である.

また, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}+w\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解で $s=1$,

$t=0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-3\\2\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s=0, t=1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる．一方 $z=w=0$ とおけば $x=y=0$ が得られるため, $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ は 1 次独立である．故に $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底である．

(2) 与えられた条件と $f$ の線形性から $f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\cdots(i)$, $-f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\\1\end{pmatrix}\cdots(ii)$, $f(\boldsymbol{e}_2)-f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}\cdots(iii)$, $2f(\boldsymbol{e}_3)+f(\boldsymbol{e}_4)=\begin{pmatrix}4\\-4\\-4\\6\end{pmatrix}\cdots(iv)$ が成り立つ．$(i)$, $(ii)$ より, $f(\boldsymbol{e}_2)=f(\boldsymbol{e}_1)+\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}$．従って $(iii)$ より, $f(\boldsymbol{e}_3)=f(\boldsymbol{e}_2)-\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\3\end{pmatrix}$．さらに $(iv)$ から $f(\boldsymbol{e}_4)=-2f(\boldsymbol{e}_3)+\begin{pmatrix}4\\-4\\-4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-4\\-4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ が得られる．故に, $f$ を表す行列は $\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-2&1&-1&-2\\0&-1&-1&-2\\1&2&3&0\end{pmatrix}$ である．

$$\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-2&1&-1&-2\\0&-1&-1&-2\\1&2&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&2\\0&-1&-1&-2\\0&2&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$$

より, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x+z=0\\y+z=0\\-4w=0\end{cases}$ と同値である．従って $z=t$ とおけば, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-t\\-t\\t\\0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, f$ の基底である．

また, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\3\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解で $t=1$ の場合

を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z=0$ とおけば $x=y=w=0$ が得られるため, $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底である.

(3) 与えられた条件と $f$ の線形性から $f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}\cdots(i)$, $f(\boldsymbol{e}_1)-f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\-3\end{pmatrix}\cdots(ii)$, $-f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix}\cdots(iii)$, $f(\boldsymbol{e}_1)-f(\boldsymbol{e}_3)+f(\boldsymbol{e}_4)=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\2-a\end{pmatrix}\cdots(iv)$ が成り立つ. $(i)$, $(ii)$ より, $f(\boldsymbol{e}_2)=f(\boldsymbol{e}_1)-\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix}$. 従って $(iii)$ より, $f(\boldsymbol{e}_3)=f(\boldsymbol{e}_1)+\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$. さらに $(iv)$ から $f(\boldsymbol{e}_4)=-f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_3)+\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\2-a\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\2-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\-a\end{pmatrix}$ が得られる. 故に, $f$ を表す行列は $\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\-1&1&-2&2\\2&3&1&1\\2&5&0&-a\end{pmatrix}$ である.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\-1&1&-2&2\\2&3&1&1\\2&5&0&-a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&2&-1&1\\0&1&-1&3\\0&3&-2&2-a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&2&-4\\0&0&1&-5\\0&1&-1&3\\0&0&1&-a-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix}1&0&0&6\\0&0&1&-5\\0&1&0&-2\\0&0&0&-a-2\end{pmatrix}\cdots(*)$ より, $a\neq-2$ の場合, $(*)\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}\begin{pmatrix}1&0&0&6\\0&1&0&-2\\0&0&1&-5\\0&0&0&-a-2\end{pmatrix}$ となり, これは対角成分がすべて 0 ではない上半三角行列であるため, 正則行列である. 従って, $\mathrm{Ker}\, f$ は零ベクトルのみからなり, $\mathrm{Im}\, f=\boldsymbol{K}^4$ であるため, $\mathrm{Im}\, f$ の基底として基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ がとれる.

$a=-2$ の場合, $(*)=\begin{pmatrix}1&0&0&6\\0&0&1&-5\\0&1&0&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x+6w=0\\z-5w=0\\y-2w=0\end{cases}$ と同値である. 従っ

て $w=t$ とおけば, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-6t\\2t\\5t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-6\\2\\5\\1\end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix}-6\\2\\5\\1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} f$ の基底である.

また, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\2\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解で $t=1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\2\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $w=0$ とおけば $x=y=w=0$ が得られるため, $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} f$ の基底である.

(4) 与えられた条件と $f$ の線形性から $f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}\cdots(i)$, $f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\-3\end{pmatrix}\cdots(ii)$, $f(\boldsymbol{e}_1)-f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}\cdots(iii)$, $f(\boldsymbol{e}_1)-f(\boldsymbol{e}_3)-f(\boldsymbol{e}_4)=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\2-a\end{pmatrix}\cdots(iv)$ が成り立つ. $(i)$, $(ii)$ より, $f(\boldsymbol{e}_2)=-f(\boldsymbol{e}_1)+\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\-3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\\-5\end{pmatrix}$. 従って $(iii)$ より, $f(\boldsymbol{e}_3)=f(\boldsymbol{e}_1)-\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}$. さらに $(iv)$ から $f(\boldsymbol{e}_4)=f(\boldsymbol{e}_1)-f(\boldsymbol{e}_3)-\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\2-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\2-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\a\end{pmatrix}$ が得られる. 故に, $f$ を表す行列は

$\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\2&-3&1&-1\\-1&-1&-2&-2\\2&-5&0&a\end{pmatrix}$ である.

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\2&-3&1&-1\\-1&-1&-2&-2\\2&-5&0&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&-1&-1&-3\\0&-2&-1&-1\\0&-3&-2&a-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&2&4\\0&-1&-1&-3\\0&0&1&5\\0&0&1&a+7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix}1&0&0&-6\\0&-1&0&2\\0&0&1&5\\0&0&0&a+2\end{pmatrix}\cdots(*)$ より, $a\neq-2$ の場合, $(*)$ となり, これは対角成分がすべて 0 ではない上半三角行列であるため, 正則行列である. 従って, $\operatorname{Ker} f$ は零ベクトルのみからなり, $\operatorname{Im} f=\boldsymbol{K}^4$ であるため, $\operatorname{Im} f$ の基底として

基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ がとれる.

$a=-2$ の場合, $(*)=\begin{pmatrix}1&0&0&-6\\0&-1&0&2\\0&0&1&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x-6w=0\\-y+2w=0\\z+5w=0\end{cases}$ と同値である.

従って $w=t$ とおけば, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}6t\\2t\\-5t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}6\\2\\-5\\1\end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix}6\\2\\-5\\1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} f$ の基底である.

また, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $x\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\\-5\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\-2\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解で $t=1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $w=0$ とおけば $x=y=w=0$ が得られるため, $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} f$ の基底である.

(5) 与えられた条件と $f$ の線形性から $f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\a+1\end{pmatrix}\cdots(i)$, $f(\boldsymbol{e}_1)-f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}0\\0\\-a-1\\a-1\end{pmatrix}\cdots(ii)$, $f(\boldsymbol{e}_3)+2f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}-a+2\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\cdots(iii)$, $f(\boldsymbol{e}_3)+f(\boldsymbol{e}_4)=\begin{pmatrix}-2\\-a+3\\4\\-4\end{pmatrix}\cdots(iv)$ が成り立つ. $(i)$, $(ii)$ より, $f(\boldsymbol{e}_2)=f(\boldsymbol{e}_1)-\begin{pmatrix}0\\0\\-a-1\\a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\a+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\-a-1\\a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\a-1\\2\end{pmatrix}$. 従って $(iii)$ より, $f(\boldsymbol{e}_3)=-2f(\boldsymbol{e}_2)+\begin{pmatrix}-a+2\\-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-2a+2\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a+2\\-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\1\\-2a+2\\-2\end{pmatrix}$. さらに $(iv)$ から $f(\boldsymbol{e}_4)=-f(\boldsymbol{e}_3)+\begin{pmatrix}-2\\-a+3\\4\\-4\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-a\\1\\-2a+2\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-a+3\\4\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-2\\-a+2\\2a+2\\-2\end{pmatrix}$ が得られる. 故に, $f$ を表す行列は $\begin{pmatrix}1&1&-a&a-2\\-1&-1&1&-a+2\\-2&a-1&2-2a&2a+2\\a+1&2&-2&-2\end{pmatrix}$ である.

$$\begin{pmatrix}1&1&-a&a-2\\-1&-1&1&-a+2\\-2&a-1&2-2a&2a+2\\a+1&2&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&-a&a-2\\0&0&1-a&0\\0&a+1&2-4a&4a-2\\0&1-a&(a-1)(a+2)&a(1-a)\end{pmatrix}\cdots(*)$$ より, $a\neq 1$ の場合,

$(*) \xrightarrow[\text{を } \frac{1}{1-a} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & 2-4a & 4a-2 \\ 0 & 1 & -a-2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 4a-2 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(4,2)\text{ 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-a)(a-2) \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdots (**)$ である．従って $a \neq 1, 2$ の場合は $(**)$ の行の入れ替えを行って階段行列にすれば, 階数が 4 になることがわかるため, 与えられた行列は正則である．従って, $\mathrm{Ker}\, f$ は零ベクトルのみからなり, $\mathrm{Im}\, f = \boldsymbol{K}^4$ であるため, $\mathrm{Im}\, f$ の基底として基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ がとれる．

$a = 2$ の場合, $(**) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x - 2w = 0 \\ z = 0 \\ y + 2w = 0 \end{cases}$ と同値である．従って $w = t$ とおけば, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, f$ の基底である．

また, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解で $t = 1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる．一方 $w = 0$ とおけば $x = y = z = 0$ が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である．故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底である．

$a = 1$ の場合, $(*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x - 2w = 0 \\ 2y - 2z + 2w = 0 \end{cases}$ と同値である．従って $z = s$, $w = t$ とおけば, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, f$ の基底である．また, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} +$

$z\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-2\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-2\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解で $s=1,t=0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$ は1次従属であることがわかり, $s=0,t=1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-2\end{pmatrix}$ は1次従属であることがわかる. 一方 $z=w=0$ とおけば $x=y=0$ が得られるため, $\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$ は1次独立である. 故に $\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} f$ の基底である.

4. $a_0,a_1,\dots,a_{m-1}\in\boldsymbol{K}$ に対して

$$a_0\boldsymbol{x}+a_1f(\boldsymbol{x})+a_2f^2(\boldsymbol{x})+\cdots+a_{m-1}f^{m-1}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}\ \cdots(*)$$

が成り立つと仮定して, $a_i=0$ が $i=0,1,2,\dots,m-1$ に対して成り立つことを $i$ による数学的帰納法で示す. $(*)$ の両辺を $f^k$ で写せば, $i\geqq m-k$ ならば $f^k(f^i(\boldsymbol{x}))=f^{i+k}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ だから, $k=1,2,\dots,m-1$ に対して

$$a_0f^k(\boldsymbol{x})+a_1f^{k+1}(\boldsymbol{x})+\cdots+a_if^{k+i}(\boldsymbol{x})+\cdots+a_{m-k-1}f^{m-1}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}\ \cdots(**)$$

が成り立つ. $(**)$ で $k=m-1$ の場合, $a_0f^{m-1}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ で, $f^{m-1}(\boldsymbol{x})\neq\mathbf{0}$ だから $a_0=0$ が得られる, $j=0,1,\dots,i-1$ $(1\leqq i<m-1)$ に対して $a_j=0$ が成り立つと仮定すると, $(**)$ で $k=m-i-1$ の場合を考えれば, 仮定から $a_if^{m-1}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ が得られるため, $f^{m-1}(\boldsymbol{x})\neq\mathbf{0}$ より $a_i=0$ である. 故に $a_i=0$ が $i=0,1,2,\dots,m-1$ に対して成り立つため, $\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}),f^2(\boldsymbol{x}),\dots,f^{m-1}(\boldsymbol{x})$ は1次独立である.

5. (1) $\boldsymbol{x}\in\{\boldsymbol{x}\in V\,|\,f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\}$ ならば $\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{x})\in\operatorname{Im} f$ だから $\{\boldsymbol{x}\in V\,|\,f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\}\subset\operatorname{Im} f$ である. $\boldsymbol{x}\in\operatorname{Im} f$ ならば $\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{v})$ を満たす $\boldsymbol{v}\in V$ が存在するため, 仮定から $f(\boldsymbol{x})=f(f(\boldsymbol{v}))=(f\circ f)(\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{x}$ である. 従って $\boldsymbol{x}\in\{\boldsymbol{x}\in V\,|\,f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\}$ だから $\operatorname{Im} f\subset\{\boldsymbol{x}\in V\,|\,f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\}$ が成り立つ. 故に $\operatorname{Im} f=\{\boldsymbol{x}\in V\,|\,f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\}$ である.

(2) $\boldsymbol{x}\in\operatorname{Ker}(id_V-f)$ であることは $\boldsymbol{x}-f(\boldsymbol{x})=(id_V-f)(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ であることと同値だから, $\boldsymbol{x}\in\{\boldsymbol{x}\in V\,|\,f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\}$ であることと同値である. 従って (1) の結果から $\operatorname{Ker}(id_V-f)=\operatorname{Im} f$ が得られる.

(3) $\boldsymbol{x}\in V$ に対し, $f(\boldsymbol{x}-f(\boldsymbol{x}))=f(\boldsymbol{x})-f(f(\boldsymbol{x}))=f(\boldsymbol{x})-(f\circ f)(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ だから, $\boldsymbol{x}-f(\boldsymbol{x})\in\operatorname{Ker} f$ である. また, $f(\boldsymbol{x})\in\operatorname{Im} f$ だから $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}-f(\boldsymbol{x}))+f(\boldsymbol{x})\in\operatorname{Im} f+\operatorname{Ker} f$ である. 従って $V=\operatorname{Im} f+\operatorname{Ker} f$ が成り立つ. $\boldsymbol{x}\in\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Ker} f$ ならば $\boldsymbol{x}\in\operatorname{Im} f=\{\boldsymbol{x}\in V\,|\,f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\}$ だから $\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{x})$ であるが, $\boldsymbol{x}\in\operatorname{Ker} f$ でもあるので, $\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ である. 故に $\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Ker} f$ は零ベクトルのみからなるので, $V=\operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Ker} f$ である.

6. $A$ を $n$ 次正方行列とすれば, $A^2=A$ ならば, $A$ で表される $\boldsymbol{K}^n$ の1次変換 $T_A$ は $T_A\circ T_A=T_{A^2}=T_A$ を満たすため, $\operatorname{rank} A=r$ とおき, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_r$ を $\operatorname{Im} T_A$ の基底, $\boldsymbol{v}_{r+1},\boldsymbol{v}_{r+2},\dots,\boldsymbol{v}_n$ を $\operatorname{Ker} f$ の基底とすれば, 演習問題5の (3) の結果から, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ は $\boldsymbol{K}^n$ の基底である. また, 演習問題5の (1) の結果から, $j=1,2,\dots,r$ に対して $T_A(\boldsymbol{v}_j)=\boldsymbol{v}_j$ であり, $j=r+1,r+2,\dots,n$ に対して $\boldsymbol{v}_j\in\operatorname{Ker} T_A$ だから $T_A(\boldsymbol{v}_j)=\mathbf{0}$ である. 従って, $\boldsymbol{v}_j$ を第 $j$ 列とする $n$ 次正方行列を $P$ とすれば, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ が $\boldsymbol{K}^n$ の基底であることから, $P$ の列ベクトルは $\boldsymbol{K}^n$ を生成するため, $\operatorname{rank} P=n$ となり, $P$ は正則行列である. $F_{nn}(r)$ を, $j=1,2,\dots,r$ ならば第 $j$ 列が $\boldsymbol{e}_j$ であり, $j=r+1,r+2,\dots,n$ ならば第 $j$ 列が $\mathbf{0}$ である $n$ 次正方行列 $\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$ とすれば, $\operatorname{tr} F_{nn}(r)=r$ である. また, $j=1,2,\dots,r$ ならば ($AP$ の第 $j$ 列) $=AP\boldsymbol{e}_j=A\boldsymbol{v}_j=T_A(\boldsymbol{v}_j)=\boldsymbol{v}_j=P\boldsymbol{e}_j=PF_{nn}\boldsymbol{e}_j=$ ($PF_{nn}(r)$ の第 $j$ 列) であり, $j=r+1,r+2,\dots,n$ ならば ($AP$ の第 $j$ 列) $=AP\boldsymbol{e}_j=A\boldsymbol{v}_j=T_A(\boldsymbol{v}_j)=\mathbf{0}=P\mathbf{0}=PF_{nn}(r)\boldsymbol{e}_j=$ ($PF_{nn}(r)$ の第 $j$ 列) だから, $AP=PF_{nn}(r)$ である. 従って $A=PF_{nn}(r)P^{-1}$ であり, 一方, 一般に $m\times n$ 行列 $X$ と $n\times m$ 行列 $Y$ に

対して $\mathrm{tr}(XY)=\mathrm{tr}(YX)$ が成り立つため, $\mathrm{tr}\,A=\mathrm{tr}(PF_{nn}(r)P^{-1})=\mathrm{tr}(F_{nn}(r)P^{-1}P)=\mathrm{tr}\,F_{nn}(r)=r=\mathrm{rank}\,A$ である.

7. $V$ の 1 次変換 $f:V\to V$ で $\mathrm{Ker}\,f=\mathrm{Im}\,f$ を満たすならば, 次元公式より $\dim V=\dim\mathrm{Ker}\,f+\mathrm{rank}\,f=\dim\mathrm{Im}\,f+\mathrm{rank}\,f=2\mathrm{rank}\,f$ だから $\dim V$ は偶数である. $m=\dfrac{1}{2}\dim V$ とおけば, 上式より $\dim\mathrm{Ker}\,f=\dim\mathrm{Im}\,f=\mathrm{rank}\,f=m$ である. そこで, $\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_4,\dots,\boldsymbol{v}_{2m}$ を $\mathrm{Ker}\,f$ の基底とすれば, 各 $i=1,2,\dots,m$ に対して $\boldsymbol{v}_{2i}\in\mathrm{Ker}\,f=\mathrm{Im}\,f$ だから, $f(\boldsymbol{v}_{2i-1})=\boldsymbol{v}_{2i}$ を満たす $\boldsymbol{v}_{2i-1}\in V$ が存在する. このとき, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_{2m}$ は $V$ の基底である. 実際, $f(\boldsymbol{v}_{2i})=\boldsymbol{0}$, $f(\boldsymbol{v}_{2i-1})=\boldsymbol{v}_{2i}$ だから, $x_j\in\boldsymbol{K}$ に対し, $f\left(\sum\limits_{j=1}^{2m}x_j\boldsymbol{v}_j\right)=\sum\limits_{j=1}^{2m}x_jf(\boldsymbol{v}_j)=\sum\limits_{i=1}^{m}x_{2i-1}f(\boldsymbol{v}_{2i-1})=\sum\limits_{i=1}^{m}x_{2i-1}\boldsymbol{v}_{2i}$ となるため, $\sum\limits_{j=1}^{2m}x_j\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{0}$ が成り立つならば, この両辺の $f$ による像を考えれば, $\sum\limits_{i=1}^{m}x_{2i-1}\boldsymbol{v}_{2i}=\boldsymbol{0}$ が得られる. $\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_4,\dots,\boldsymbol{v}_{2m}$ は 1 次独立だから, 上式より $i=1,2,\dots,m$ に対して $x_{2i-1}=0$ である. 従って $\sum\limits_{i=1}^{m}x_{2i}\boldsymbol{v}_{2i}=\boldsymbol{0}$ で, 再度 $\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_4,\dots,\boldsymbol{v}_{2m}$ の 1 次独立性を用いると, $i=1,2,\dots,m$ に対して $x_{2i}=0$ であることがわかる. 故に $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_{2m}$ は 1 次独立で, $\dim V=2m$ だから, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_{2m}$ は $V$ の基底である.

8. $A$ で表される $\boldsymbol{K}^n$ の 1 次変換 $T_A$ を考えれば, $A^2=O$ だから, 任意の $\boldsymbol{y}\in\mathrm{Im}\,T_A$ に対し, $\boldsymbol{y}=T_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ を満たす $x\in\boldsymbol{K}^n$ をとれば, $T_A(\boldsymbol{y})=A\boldsymbol{y}=A(A\boldsymbol{x})=A^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ である. 従って $\boldsymbol{y}\in\mathrm{Ker}\,T_A$ が成り立つため, $\mathrm{Im}\,T_A\subset\mathrm{Ker}\,T_A$ である. 故に $\mathrm{rank}\,A=\dim\mathrm{Im}\,T_A\leqq\dim\,\mathrm{Ker}\,T_A$ であり, 一方, 次元公式から, $\dim\,\mathrm{Ker}\,T_A=\dim\boldsymbol{K}^n-\mathrm{rank}\,A=n-\mathrm{rank}\,A$ だから, $\mathrm{rank}\,A\leqq n-\mathrm{rank}\,A$ が得られ, $\mathrm{rank}\,A\leqq\dfrac{n}{2}$ が成り立つことがわかる.

$n$ が偶数の場合, $i=1,2,\dots,\dfrac{n}{2}$ に対して, 第 $2i-1$ 列が零ベクトルで, 第 $2i$ 列が $\boldsymbol{K}^n$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_{2i-1}$ である $n$ 次正方行列を $A$ とすれば, $A$ の零ベクトルでない $\dfrac{n}{2}$ 個の列ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_5,\dots,\boldsymbol{e}_{n-1}$ は 1 次独立だから $\mathrm{rank}\,A=\dfrac{n}{2}$ である. $N_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ とおけば, $A$ は $N_2$ を $\dfrac{n}{2}$ 個対角線上に並べた行列 $\begin{pmatrix}N_2&O&\cdots&O\\O&N_2&&O\\\vdots&&\ddots&\vdots\\O&O&\cdots&N_2\end{pmatrix}$ で, $N_2^2=O$ だから $A^2=O$ である. あるいは, $A=\begin{pmatrix}O&E_{\frac{n}{2}}\\O&O\end{pmatrix}$, すなわち, 第 1 列から第 $\dfrac{n}{2}$ 列まですべて零ベクトルで, $i=1,2,\dots,\dfrac{n}{2}$ に対して, 第 $\left(\dfrac{n}{2}+i\right)$ 列が $n$ 次元基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ である $n$ 次正方行列を $A$ としても, $\mathrm{rank}\,A=\dfrac{n}{2}$ であり, $A^2=O$ が成り立つ.

9. 教科書の 6 章の演習問題 6.5(4) の等式 $\mathrm{rank}(g\circ f)=\mathrm{rank}\,f-\dim(\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g)$ と, $g$ に関する次元公式 $\dim W=\mathrm{rank}\,g+\dim\mathrm{Ker}\,g$ から

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(g\circ f)-(\mathrm{rank}\,f+\mathrm{rank}\,g-\dim W)&=\mathrm{rank}\,f-\dim(\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g)-(\mathrm{rank}\,f-\dim\mathrm{Ker}\,g)\\&=\dim\mathrm{Ker}\,g-\dim(\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g)\end{aligned}$$

だから $\mathrm{rank}(g\circ f)=\mathrm{rank}\,f+\mathrm{rank}\,g-\dim W$ が成り立つことと $\dim\mathrm{Ker}\,g=\dim(\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g)$ が成り立つことは同値である. $\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g$ は $\mathrm{Ker}\,g$ の部分空間だから $\dim\mathrm{Ker}\,g=\dim(\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g)$ が成り立つことと $\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g=\mathrm{Ker}\,g$ が成り立つことは同値であり, さらに $\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g=\mathrm{Ker}\,g$ は $\mathrm{Ker}\,g\subset\mathrm{Im}\,f$ と同値である. 故に $\mathrm{Ker}\,g\subset\mathrm{Im}\,f$ であるためには, $\mathrm{rank}(g\circ f)=\mathrm{rank}\,f+\mathrm{rank}\,g-\dim W$ が成り立つことが必要十分である.

10. 1 以上 $n$ 以下の整数 $i$, $j$ に対し, $E_{ij}$ を $(i,j)$ 成分だけが 1 で, その他の成分がすべて 0 である $n$ 次正方行列とする. $X=\big(x_{ij}\big)\in M_n(\boldsymbol{K})$ ならば ($E_{ij}X$ の $(p,q)$ 成分) $=\begin{cases}x_{jq}&p=i\\0&p\neq i\end{cases}$ だから, $\mathrm{tr}(E_{ij}X)=x_{ji}$ である.

1 次写像 $f:M_n(\boldsymbol{K})\to\boldsymbol{K}$ に対し, $X=\big(x_{ij}\big)\in M_n(\boldsymbol{K})$ は $X=\sum\limits_{i,j=1}^{n}x_{ij}E_{ij}$ と表されるため, $f(E_{ij})=a_{ji}$

$(i,j=1,2,\ldots,n)$ とおけば,

$$f(X)=f\left(\sum_{i,j=1}^{n}x_{ij}E_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}x_{ij}f(E_{ij})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ji}x_{ij}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ji}\mathrm{tr}(E_{ji}X)=\mathrm{tr}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ji}E_{ji}X\right)$$

が成り立つ. そこで $a_{ij}$ を $(i,j)$ とする $n$ 次正方行列を $A$ とすれば $A=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ji}E_{ji}$ だから, 上式より, すべての $X\in M_n(\boldsymbol{K})$ に対して $f(X)=\mathrm{tr}(AX)$ が成り立つ. 故に $A\in M_n(\boldsymbol{K})$ で, すべての $X\in M_n(\boldsymbol{K})$ に対して $f(X)=\mathrm{tr}(AX)$ を満たすものが存在する

$A=\big(a_{ij}\big), B=\big(b_{ij}\big)\in M_n(\boldsymbol{K})$ がすべての $X\in M_n(\boldsymbol{K})$ に対して $f(X)=\mathrm{tr}(AX)=\mathrm{tr}(BX)$ を満たすとする. このとき $(AE_{ij}$ の $(p,q)$ 成分$)=\begin{cases}a_{pi} & q=j\\ 0 & q\neq j\end{cases}$, $(BE_{ij}$ の $(p,q)$ 成分$)=\begin{cases}b_{pi} & q=j\\ 0 & q\neq j\end{cases}$ だから, 任意の $i,j=1,2,\ldots,n$ に対して $a_{ji}=\mathrm{tr}(AE_{ij})=f(E_{ij})=\mathrm{tr}(BE_{ij})=b_{ji}$ である. 従って $A=B$ となるため, すべての $X\in M_n(\boldsymbol{K})$ に対して $f(X)=\mathrm{tr}(AX)$ を満たす行列 $A$ はただ 1 つしかない.

# 線形数学 II 演習問題　第 16 回　1 次写像の表現行列

1. 以下で与えるベクトル空間 $V$ と, $V$ の基底 $B=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n]$ に関する $V$ の 1 次変換 $f$ の表現行列を求めよ. ただし (5), (7), (8) の行列 $A$ は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で, (5) と (8) の $A$ は正則であり, (6) の $P$ は $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $V=\boldsymbol{K}^3$, $B=\left[\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix}\right]$, $f=T_A$, ただし $A=\begin{pmatrix}-9 & 8 & 12\\ 8 & -9 & 12\\ 12 & 12 & 1\end{pmatrix}$.

(2) $V=\boldsymbol{K}^3$, $B=\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right]$, $f=T_A$, ただし $A=\begin{pmatrix}-1 & -5 & -1\\ 2 & 4 & 0\\ -4 & -8 & 0\end{pmatrix}$.

(3) $V=\boldsymbol{K}^3$, $B=\left[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$, $f=T_A$, ただし $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ -2 & 5 & 4\end{pmatrix}$.

(4) $V=\boldsymbol{K}^3$, $B=\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right]$, $f=T_A$, ただし $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -3 & 9 & -5\\ -5 & 13 & -7\end{pmatrix}$.

(5) $V=\boldsymbol{K}^3$, $B=\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right]$, $f=T_A$, ただし $A=\begin{pmatrix}-1 & -5 & -1\\ 2 & 4 & 0\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

(6) $V=\{X\in M_2(\boldsymbol{K})\,|\,\mathrm{tr}\,X=0\}$, $B=\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]$, $f(X)=AXA^{-1}$.

(7) $V=\{X\in M_3(\boldsymbol{K})\,|\,{}^tX=-X\}$, $B=\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]$, $f(X)=PX-XP$.

(8) $V=M_2(\boldsymbol{K})$, $B=\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]$, $f(X)=AX$.

(9) $V=M_2(\boldsymbol{K})$, $B=\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]$, $f(X)=AXA^{-1}$.

(10) $V=P_n(\boldsymbol{K})$, $B=[1,x,\dots,x^n]$, $f(\varphi(x))=\varphi(x+a)$.

(11) $V=P_n(\boldsymbol{K})$, $B=[1,x,\dots,x^n]$, $f(\varphi(x))=\varphi'(x)$.

(12) $V=P_n(\boldsymbol{R})$, $B=\left[1,x,\dfrac{x^2}{2!},\dots,\dfrac{x^j}{j!},\dots,\dfrac{x^n}{n!}\right]$, $f(\varphi(x))=(ax^2+bx+c)\varphi''(x)+(px+q)\varphi'(x)+r\varphi(x)$.

2. 以下で与えるベクトル空間 $V$ と $V$ の 2 組の基底 $B$, $B'$ に対し, $B$ から $B'$ への基底の変換行列を求めよ.

(1) $V=\boldsymbol{K}^3$, $B=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]$, $B'=\left[\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}\right]$

(2) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^3\,\middle|\,x+y+z=0\right\}$, $B=\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right]$, $B'=\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right]$

(3) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^3\,\middle|\,x+y+z=0\right\}$, $B=\left[\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right]$, $B'=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\right]$

(4) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x+y+z+w=0 \right\}$, $B = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$, $B' = \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$

(5) $V = P_2(\boldsymbol{K})$, $B = [3-4x-x^2, -2+2x+x^2, -2+3x+x^2]$, $B' = [1+x+2x^2, 2-x-x^2, 1+2x+3x^2]$

(6) $V = P_3(\boldsymbol{K})$, $B = \left[1, x, \dfrac{x(x-1)}{2}, \dfrac{x(x-1)(x-2)}{6}\right]$, $B' = [1, x, x^2, x^3]$

3. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおく. 基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ に関する $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f$ の表現行列が $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ であるとき, 基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3]$ に関する $f$ の表現行列を求めよ. また標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ に関する $f$ の表現行列を求めよ.

4. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする. 基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ に関する $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f$ の表現行列が $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき, 標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ に関する $f$ を $n$ 合成した 1 次変換 $f^n = \overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{n\text{ 個}}$ の表現行列を求めよ.

5. $a$, $b$, $c$ を実数の定数とし, $P_n(\boldsymbol{R})$ の 1 次変換 $f$ を $f(\varphi(x)) = (ax+b)\dfrac{d\varphi}{dx}(x) + c\varphi(x)$ で定めるとき, $\dim \operatorname{Ker} f$ を求めよ.

6. $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 $V$ の 1 次変換 $f$ に対し, $V$ の基底を 1 組選び, その基底に関する $f$ の表現行列の行列式を $f$ の行列式と呼び, $\det(f)$ で表す.

(1) $B_V$, $B'_V$ を $V$ の 2 組の基底とし, $A$, $A'$ をそれぞれ $B_V$, $B'_V$ に関する $f$ の表現行列とすれば, $|A| = |A'|$ であることを示せ. 従って $f$ の行列式の値は, $V$ の基底の選び方に依存しない.

(2) $f$, $g$ を $V$ の 1 次変換とするとき, $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$ が成り立つことを示せ.

(3) $V$ の恒等変換 $id_V$ の行列式の値を求めよ.

(4) $V$ の 1 次変換 $f$ が同型写像であるためには, $\det(f) \neq 0$ であることが必要十分であることを示し, このとき $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$ であることを示せ.

7. $V$ を $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間とする. $V$ の複素数倍を与える演算 $\boldsymbol{C} \times V \to V$ の定義域を $\boldsymbol{R} \times V$ に制限することにより, $V$ を $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とみなしたものを $V_{\boldsymbol{R}}$ で表す. また, $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間の間の 1 次写像 $f : V \to W$ に対し, $\boldsymbol{x} \in V_{\boldsymbol{R}}$ を $f(\boldsymbol{x}) \in W_{\boldsymbol{R}}$ に対応させる写像を $f_{\boldsymbol{R}} : V_{\boldsymbol{R}} \to W_{\boldsymbol{R}}$ で表すことにする.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $V$ の基底ならば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n, i\boldsymbol{v}_1, i\boldsymbol{v}_2, \ldots, i\boldsymbol{v}_n$ は $V_{\boldsymbol{R}}$ の基底であることを示せ.

(2) $W$ を $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間とし, $B_V = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $B_W = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ をそれぞれ $V$, $W$ の基底とする. $B_V$, $B_W$ に関する $f$ の表現行列を $A$ とするとき, $B_{V_{\boldsymbol{R}}} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n, i\boldsymbol{v}_1, i\boldsymbol{v}_2, \ldots, i\boldsymbol{v}_n]$, $B_{W_{\boldsymbol{R}}} = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m, i\boldsymbol{w}_1, i\boldsymbol{w}_2, \ldots, i\boldsymbol{w}_m]$ に関する $f_{\boldsymbol{R}} : V_{\boldsymbol{R}} \to W_{\boldsymbol{R}}$ の表現行列を求めよ.

(3) $f$ を $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間 $V$ の 1 次変換とするとき, $V_{\boldsymbol{R}}$ の 1 次変換 $f_{\boldsymbol{R}}$ の行列式の値を, $f$ の行列式の値を用いて表せ.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. $\boldsymbol{R}^5$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5]$ と $\boldsymbol{R}^4$ の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4]$ で, これらの

基底に関する $T_A : \boldsymbol{R}^5 \to \boldsymbol{R}^4$ の表現行列が $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形になるものを 1 組ずつ求めよ.

9. $a, b$ を $\boldsymbol{K}$ の定数とし $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $b \neq 0$ のとき, $\boldsymbol{K}^2$ の 1 次変換 $T_A$ の 1 次元不変部分空間をすべて求めよ.

(2) $\boldsymbol{K}^2$ が $T_A$ の 2 つの 1 次元不変部分空間の直和になるのは $b = 0$ の場合に限ることを示せ.

10. $V_1, V_2$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とするとき, 集合 $V_1 \times V_2$ (教科書 $p.125$) に加法とスカラー倍を

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) + (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}_2), \quad a(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (a\boldsymbol{v}_1, a\boldsymbol{v}_2) \ \ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_1 \in V_1,\ \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_2 \in V_2,\ a \in \boldsymbol{K}$$

によって定義する.

(1) $V_1 \times V_2$ は $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間であることを示せ.

(2) $p_s : V_1 \times V_2 \to V_s$ $(s = 1, 2)$ を $p_s((\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)) = \boldsymbol{v}_s$ によって定義すれば, $p_s$ は 1 次写像であることを示し, $V_1 \times V_2$ は $\mathrm{Ker}\, p_1$ と $\mathrm{Ker}\, p_2$ の直和であることを示せ.

(3) $i_s : V_s \to V_1 \times V_2$ $(s = 1, 2)$ を $i_1(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0})$, $i_2(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v})$ で定めれば, $p_s \circ i_s$ は $V_s$ の恒等写像, $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2$ は $V_1 \times V_2$ の恒等写像であり, $p_2 \circ i_1$ と $p_1 \circ i_2$ は零写像であることを示せ. また, $\mathrm{Im}\, i_1 = \mathrm{Ker}\, p_2$, $\mathrm{Im}\, i_2 = \mathrm{Ker}\, p_1$ が成り立つことを示せ.

(4) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $V_1$ の 1 次独立なベクトル, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ が $V_2$ の 1 次独立なベクトルならば,

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{0}), \ldots, (\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{w}_1), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{w}_2), \ldots, (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{w}_m)$$

は $V \times W$ の 1 次独立なベクトルであることを示せ. また, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $V_1$ を生成し, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ が $V_2$ を生成すれば, 上のベクトルは $V \times W$ を生成することを示せ. 従って, $\dim(V_1 \times V_2) = \dim\, V_1 + \dim\, V_2$ が成り立つ.

11. $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 $V$ の部分空間 $V_1, V_2$ に対し, 写像 $f : V_1 \cap V_2 \to V_1 \times V_2$ と $g : V_1 \times V_2 \to V_1 + V_2$ を, それぞれ $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x})$, $g((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ で定める.

(1) $f$ は単射 1 次写像, $g$ は全射 1 次写像であり, $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ が成り立つことを示せ.

(2) 前問と上の結果と次元公式を用いて, $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$ を示せ.

(3) $V$ が部分空間 $V_1$ と $V_2$ の直和ならば $V$ は $V_1 \times V_2$ と同型であることを示せ.

12. (発展問題) $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 $V$ が部分空間 $V_1$ と $V_2$ の直和であるとき, 写像 $p_{V_s} : V \to V_s$ $(s = 1, 2)$ を次のように定義する. $V$ が $V_1$ と $V_2$ の直和であることから, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ を満たす $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$ と $\boldsymbol{v}_2 \in V_2$ はそれぞれただ 1 つずつ存在するが, このとき, $p_{V_s}$ は $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}_s$ に対応させる写像とする. さらに, 写像 $i_{V_s} : V_s \to V$ $(s = 1, 2)$ を $i_{V_s}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ で定める.

(1) $p_{V_s}$ は 1 次写像であることを示せ.

(2) $s = 1, 2$ に対し, $p_{V_s} \circ i_{V_s}$ は $V_s$ の恒等写像であることを示し, $p_{V_s}$ が全射であることを示せ.

(3) $\mathrm{Ker}\, p_{V_1} = V_2$, $\mathrm{Ker}\, p_{V_2} = V_1$ が成り立つことを示せ.

(4) $i_{V_1} \circ p_{V_1} + i_{V_2} \circ p_{V_2}$ は $V$ の恒等写像であることを示せ.

13. (発展問題) $V, V_1, V_2$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし, 1 次写像 $i_s : V_s \to V$, $p_s : V \to V_s$ $(s = 1, 2)$ が与えられていて, $s = 1, 2$ に対して $p_s \circ i_s$ が $V_s$ の恒等写像であり, かつ $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2$ は $V$ の恒等写像であるとする.

(1) $i_1$, $i_2$ は単射, $p_1$, $p_2$ は全射であり, $\mathrm{Im}\, i_1 = \mathrm{Ker}\, p_2$, $\mathrm{Im}\, i_2 = \mathrm{Ker}\, p_1$ が成り立つことを示せ.

(2) $V$ は $\mathrm{Im}\, i_1$ と $\mathrm{Im}\, i_2$ の直和であることを示せ.

(3) $\varphi : V \to V_1 \times V_2$ を $\varphi(\boldsymbol{v}) = (p_1(\boldsymbol{v}), p_2(\boldsymbol{v}))$ で定めれば, $\varphi$ は同型写像であることを示せ.

14. (発展問題) $V$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする.

(1) $e : V \to V$ は $e \circ e = e$ を満たす 1 次写像とする. このとき, $\mathrm{Ker}\, e = \mathrm{Im}\,(id_V - e)$, $\mathrm{Im}\, e = \mathrm{Ker}\,(id_V - e)$ が成り立つことを示し, $V$ は $\mathrm{Ker}\, e$ と $\mathrm{Im}\, e$ の直和であることを示せ.

(2) 1 次写像 $r : V \to W$ と $s : W \to V$ で, $r \circ s$ が $W$ の恒等写像であるものが与えられれば, $V$ は $\mathrm{Ker}\, r$ と $\mathrm{Im}\, s$ の直和であることを示せ.

15. (発展問題) $V$, $W$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, $f : V \to W$ を 1 次写像とし, $V$ は 2 つの部分空間 $V_1$, $V_2$ の直和であり, $W$ は 2 つの部分空間 $W_1$, $W_2$ の直和であるとする.

(1) $i_{V_r} : V_r \to V$ $(r = 1, 2)$ と $p_{W_s} : W \to W_s$ $(s = 1, 2)$ を問題 12 と同様に定め, $B_{V_1} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k]$, $B_{V_2} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l]$, $B_{W_1} = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$, $B_{W_2} = [\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_n]$ をそれぞれ $V_1$, $V_2$, $W_1$, $W_2$ の基底とし, $p_{W_s} \circ f \circ i_{V_r} : V_r \to W_s$ $(r, s = 1, 2)$ の $B_{V_r}$, $B_{W_s}$ に関する表現行列を $A_{sr}$ とする. このとき, $V$ の基底 $B_V = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l]$, $W$ の基底 $B_W = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_n]$ に関する $f$ の表現行列を, $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{21}$, $A_{22}$ を用いて表せ.

(2) $p_{W_2} \circ f \circ i_{V_1} : V_1 \to W_2$ と $p_{W_1} \circ f \circ i_{V_2} : V_2 \to W_1$ がともに零写像であるとき, $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}(p_{W_1} \circ f \circ i_{V_1}) \oplus \mathrm{Im}(p_{W_2} \circ f \circ i_{V_2})$ が成り立つことを示せ. 従って $\mathrm{rank}\, f = \mathrm{rank}(p_{W_1} \circ f \circ i_{V_1}) + \mathrm{rank}(p_{W_2} \circ f \circ i_{V_2})$ である.

(3) $V = W$ であり, $W_1 = V_1$, $W_2 = V_2$ の場合, $p_{W_2} \circ f \circ i_{V_1} : V_1 \to W_2$ または $p_{W_1} \circ f \circ i_{V_2} : V_2 \to W_1$ が零写像であるとき, $\det(f) = \det(p_{W_1} \circ f \circ i_{V_1}) \det(p_{W_2} \circ f \circ i_{V_2})$ が成り立つことを示せ.

16. (発展問題) $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間の間の 1 次写像 $f : V_1 \to W_1$, $g : V_2 \to W_2$ に対し, 写像 $f \times g : V_1 \times V_2 \to W_1 \times W_2$ を $(f \times g)((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = (f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y}))$ で定める.

(1) $f \times g$ は 1 次写像であることを示せ.

(2) $\mathrm{Im}(f \times g) = \{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2) \in W_1 \times W_2 | \, \boldsymbol{w}_1 \in \mathrm{Im}\, f, \, \boldsymbol{w}_2 \in \mathrm{Im}\, g\}$, $\mathrm{Ker}(f \times g) = \{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \in V_1 \times V_2 | \, \boldsymbol{v}_1 \in \mathrm{Ker}\, f, \, \boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{Ker}\, g\}$, $\mathrm{rank}(f \times g) = \mathrm{rank}\, f + \mathrm{rank}\, g$ が成り立つことを示せ.

(3) $W_1 = V_1$, $W_2 = V_2$ の場合は $\det(f \times g) = \det(f) \det(g)$ が成り立つことを示せ.

17. (発展問題) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. $\boldsymbol{R}^4$ の 1 次変換 $T_A$ の不変部分空間 $W_1$, $W_2$ で, $\boldsymbol{R}^4 = W_1 \oplus W_2$ となるものが存在することを, $W_1$, $W_2$ の基底を 1 組ずつ求めることにより示せ.

18. (発展問題) $A = \big(a_{ij}\big) \in M_{k,m}(\boldsymbol{K})$, $B = \big(b_{ij}\big) \in M_{n,l}(\boldsymbol{K})$ に対し, 1 次写像 $L_A : M_{m,n}(\boldsymbol{K}) \to M_{k,n}(\boldsymbol{K})$, $R_B : M_{m,n}(\boldsymbol{K}) \to M_{m,l}(\boldsymbol{K})$ を $L_A(X) = AX$, $R_B(X) = XB$ で定める.

(1) $\mathrm{rank}\, A = r$, $\mathrm{rank}\, B = s$ のとき, $\mathrm{rank}\, L_A$, $\mathrm{rank}\, R_B$ を求めよ.

(2) $E_{ij}$ を, $(i, j)$ 成分だけが 1 で, $(i, j)$ 成分以外の成分がすべて 0 である $m \times n$ 行列として $M_{mn}(\boldsymbol{K})$ の基底

$$\begin{aligned} B_{m,n} &= [E_{11}, E_{21}, \ldots, E_{m1}, E_{12}, E_{22}, \ldots, E_{m2}, \ldots, E_{1j}, E_{2j}, \ldots, E_{mj}, \ldots, E_{1n}, E_{2n}, \ldots, E_{mn}] \\ B'_{m,n} &= [E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{in}, \ldots, E_{m1}, E_{m2}, \ldots, E_{mn}] \end{aligned}$$

を考える. このとき, $B_{m,n}$, $B_{k,n}$ に関する $L_A$ の表現行列と $B'_{m,n}$, $B'_{m,l}$ に関する $R_B$ の表現行列を求めよ.

(3) $k = m$, $l = n$ の場合に $L_A$ と $R_B$ の行列式の値を求めよ.

19. (発展問題) $V$ を $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とする. $V$ の 1 次変換 $f$ で $f \circ f = -id_V$ を満たすものが存在するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}$ が零ベクトルでない $V$ のベクトルならば $\boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{v})$ は 1 次独立であることを示せ. (ウォーミングアップ)

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ とし, $\boldsymbol{w} \in V$ が $\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_k, f(\boldsymbol{v}_k)$ の 1 次結合ではないならば, $f(\boldsymbol{w})$ は $\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_k, f(\boldsymbol{v}_k), \boldsymbol{w}$ の 1 次結合ではないことを示せ.

(3) $V$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ で, $\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_n, f(\boldsymbol{v}_n)$ が $V$ の基底になるものが存在することを示せ. また, このような $V$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_n, f(\boldsymbol{v}_n)]$ に関する $f$ の表現行列はどのような行列であるか答えよ.

(4) $V$ の次元は偶数で, $n = \dfrac{\dim V}{2}$ とおくと, $V$ は $f$ の $n$ 個の 2 次元不変部分空間の直和であることを示せ.

## 第 16 回の演習問題の解答

1. (1) $T_A(\boldsymbol{v}_1) = A\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 34 \\ 34 \\ 51 \end{pmatrix} = 17\boldsymbol{v}_1$, $T_A(\boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -17 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} = -17\boldsymbol{v}_2$, $T_A(\boldsymbol{v}_3) = A\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -51 \\ -51 \\ 68 \end{pmatrix} = -17\boldsymbol{v}_3$ となるため, 求める行列は $\begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}$ である.

(2) $T_A(\boldsymbol{v}_1) = A\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_1$, $T_A(\boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_2$, $T_A(\boldsymbol{v}_3) = A\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ となるため, 求める行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である.

(3) $T_A(\boldsymbol{v}_1) = A\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_1$, $T_A(\boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $T_A(\boldsymbol{v}_3) = A\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_3$ となるため, 求める行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である.

(4) $T_A(\boldsymbol{v}_1) = A\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$, $T_A(\boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_2$, $T_A(\boldsymbol{v}_3) = A\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_3$ となるため, 求める行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である.

(5) 一般に $A$ を $m \times n$ 行列, $B = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ を $\boldsymbol{K}^n$ の基底, $B' = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ を $\boldsymbol{K}^m$ の基底とするとき, $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ の表現行列を $A' = \left(a'_{ij}\right)$ とおき, $P = \left(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n\right)$, $Q = \left(\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \cdots\ \boldsymbol{w}_m\right)$ とおけば, $\boldsymbol{v}_j = P\boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{w}_i = Q\boldsymbol{e}_i$ より $AP\boldsymbol{e}_j = A\boldsymbol{v}_j = T_A(\boldsymbol{v}_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a'_{ij}\boldsymbol{w}_i = \sum\limits_{i=1}^{m} a'_{ij}Q\boldsymbol{e}_i = Q\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a'_{ij}\boldsymbol{e}_i\right)$ が $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つ. ここで, $\sum\limits_{i=1}^{m} a'_{ij}\boldsymbol{e}_i$ は $A'$ の第 $j$ 列 $A'\boldsymbol{e}_j$ に他ならないため, 上式から $AP\boldsymbol{e}_j = QA'\boldsymbol{e}_j$ が得られる. 従って, $A' = Q^{-1}AP$ が成り立つ.

とくに $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ の場合, $P = Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ であり, (1) の結果から, $B$ に関する $T_A$ の表現行列は次で与えられる.

$$P^{-1}AP = P^{-1}\begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 10 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

(6) $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ より,

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix}$$
$$= \frac{a^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_1 - \frac{ac}{ad-bc}\boldsymbol{v}_2 - \frac{c^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_3,$$
$$f(\boldsymbol{v}_2) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -ad-bc \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{2ab}{ad-bc}\boldsymbol{v}_1 + \frac{ad+bc}{ad-bc}\boldsymbol{v}_2 + \frac{2cd}{ad-bc}\boldsymbol{v}_3,$$
$$f(\boldsymbol{v}_3) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} bd & -b^2 \\ d^2 & -bd \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{b^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_1 + \frac{bd}{ad-bc}\boldsymbol{v}_2 + \frac{d^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_3$$

だから, 求める行列は $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a^2 & -2ab & -b^2 \\ -ac & ad+bc & bd \\ -c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}$ である.

(7) $P$, $f$ の定義より,

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & -a & 0 \\ c & 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 \end{pmatrix} = c\boldsymbol{v}_2 - b\boldsymbol{v}_3,$$
$$f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix} = -c\boldsymbol{v}_1 + a\boldsymbol{v}_3,$$
$$f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -c & 0 & a \\ 0 & -c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & -b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} = b\boldsymbol{v}_1 - a\boldsymbol{v}_2$$

だから, 求める行列は $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = P$ である.

(8) $f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2$, $f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = b\boldsymbol{v}_1 + d\boldsymbol{v}_2$, $f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = a\boldsymbol{v}_3 + c\boldsymbol{v}_4$, $f(\boldsymbol{v}_4) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = b\boldsymbol{v}_3 + d\boldsymbol{v}_4$ だから, 求

める行列は $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$ である.

(9) $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ より,

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}_1) &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad & -ab \\ cd & -bc \end{pmatrix} \\
&= \frac{ad}{ad-bc}\boldsymbol{v}_1 + \frac{cd}{ad-bc}\boldsymbol{v}_2 - \frac{ab}{ad-bc}\boldsymbol{v}_3 - \frac{bc}{ad-bc}\boldsymbol{v}_4, \\
f(\boldsymbol{v}_2) &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} bd & -b^2 \\ d^2 & -bd \end{pmatrix} \\
&= \frac{bd}{ad-bc}\boldsymbol{v}_1 + \frac{d^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_2 - \frac{b^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_3 - \frac{bd}{ad-bc}\boldsymbol{v}_4, \\
f(\boldsymbol{v}_3) &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix} \\
&= -\frac{ac}{ad-bc}\boldsymbol{v}_1 - \frac{c^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_2 + \frac{a^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_3 + \frac{ac}{ad-bc}\boldsymbol{v}_4, \\
f(\boldsymbol{v}_4) &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} -bc & ab \\ -cd & ad \end{pmatrix} \\
&= -\frac{bc}{ad-bc}\boldsymbol{v}_1 - \frac{cd}{ad-bc}\boldsymbol{v}_2 + \frac{ab}{ad-bc}\boldsymbol{v}_3 + \frac{ad}{ad-bc}\boldsymbol{v}_4
\end{aligned}$$

だから, 求める行列は $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad & bd & -ac & -bc \\ cd & d^2 & -c^2 & -cd \\ -ab & -b^2 & a^2 & ab \\ -bc & -bd & ac & ad \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dA & -cA \\ -bA & aA \end{pmatrix}$ である.

(9) 2 項定理より $f(x^{j-1}) = (x+a)^{j-1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{j}\binom{j-1}{i-1}a^{j-i}x^{i-1}$ だから, 求める行列は $\dbinom{j-1}{i-1}a^{j-i}$ を $(i,j)$ 成分とする $n+1$ 次正方行列である. ただし, $i>j$ のときは $\dbinom{j-1}{i-1}=0$ とする.

(10) $f(x^{j-1}) = (x^{j-1})' = (j-1)x^{j-2}$ だから, 求める行列は, 第 1 列が $\mathbf{0}$, 第 $j$ 列 $(2 \leqq j \leqq n+1)$ が $(j-1)\boldsymbol{e}_{j-1}$ である $n+1$ 次正方行列である.

(11) $f(1) = r$, $f(x) = q + (p+r)x$ であり, $j = 2, 3, \ldots, n$ に対し,

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x^j}{j!}\right) &= (ax^2+bx+c)\frac{x^{j-2}}{(j-2)!} + (px+q)\frac{x^{j-1}}{(j-1)!} + r\frac{x^j}{j!} \\
&= c\frac{x^{j-2}}{(j-2)!} + ((j-1)b+q)\frac{x^{j-1}}{(j-1)!} + (j(j-1)a+jp+r)\frac{x^j}{j!}
\end{aligned}$$

だから, $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_{-1} = \mathbf{0}$ とおけば, 求める行列は, 第 $j$ 列が $c\boldsymbol{e}_{j-2} + ((j-2)b+q)\boldsymbol{e}_{j-1} + ((j-1)(j-2)a+(j-1)p+r)\boldsymbol{e}_j$

である $n+1$ 次正方行列である.

$$\begin{pmatrix} r & q & c & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & p+r & b+q & c & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 2a+2p+r & 2b+q & \ddots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 6a+3p+r & \ddots & c & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & (j-2)b+q & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & (j-1)(j-2)a+(j-1)p+r & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & (n-1)b+q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & n(n-1)a+p+r \end{pmatrix}$$

2. (1) 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$ とおけば, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = a_{13}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{33}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$ である.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ である. 従って, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & 4 & \frac{20}{3} \\ -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ である.

(2) 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とおけば, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ である. この等式の両辺の行列の第 1 行と第 2 行を比較すれば, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が得られるため, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ である.

(3) 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ とおけば, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}=a_{12}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ である. この等式の両辺の行列の第 1 行と第 2 行を比較すれば, $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ が得られるため, $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&2\end{pmatrix}$ である.

(4) 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix}$ とおけば, $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-3\end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}+a_{31}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\-1&-1&0\\-1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}=a_{12}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}+a_{32}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\-1&-1&0\\-1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\2\end{pmatrix}=a_{13}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+a_{23}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}+a_{33}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\-1&-1&0\\-1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}$ だから
$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&-2\\0&0&-1\\-3&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\-1&-1&0\\-1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix}$ である. この等式の両辺の行列の第 1,2,3 行を比較すれば,
$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix}$ であり, $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\-1&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$
$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&1&0&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&1\\0&-1&1&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&0&-2\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$
より $\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ が得られるため, $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\2&1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}$ である.

(5) $P_2(\boldsymbol{K})$ の基底 $[1,x,x^2]$ に関する $3-4x-x^2$, $-2+2x+x^2$, $-2+3x+x^2$, $1+x+2x^2$, $2-x-x^2$, $1+2x+3x^2$ の座標は順に $\begin{pmatrix}3\\-4\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ だから, 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ と

おけば,

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix}3\\-4\\-1\end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\-4 & 2 & 3\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix}3\\-4\\-1\end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\-4 & 2 & 3\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = a_{13}\begin{pmatrix}3\\-4\\-1\end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} + a_{33}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\-4 & 2 & 3\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}$$

だから $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & -1 & 2\\2 & -1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\-4 & 2 & 3\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ である. $\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0\\-4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}}$
$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\-4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\3 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1\\-4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\3 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1\\0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -4\\0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3\end{array}\right)$
$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3\\0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -4\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3\\0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$
$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2\end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\-4 & 2 & 3\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\-1 & -1 & 1\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ が得られるため,
$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\-4 & 2 & 3\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & -1 & 2\\2 & -1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\-1 & -1 & 1\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & -1 & 2\\2 & -1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 0 & 7\\0 & -2 & 0\\7 & 1 & 10\end{pmatrix}$ である.

(6) $\dfrac{x(x-1)}{2} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}x^2$, $\dfrac{x(x-1)(x-2)}{6} = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3$ だから, 基底 $B'$ から $B$ への基底の変換行列は $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$ である. 教科書の 175 ページの注意と定理 6.21 により, 基底 $B$ から $B'$ への基底の変換行列は
$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 2 & 6\\0 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$ である.

3. 標準基底に関する $f$ の表現行列を $A$, 基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3]$ に関する $f$ の表現行列を $B$ とし, 標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ から基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3]$ への基底の変換行列をそれぞれ $P, Q$ とすれば, 教科書の問 6.9 から $P = \begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\0 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\0 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ である. さらに, $D = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ とおくと教科書の定理 6.23 により, $P^{-1}AP = D$, $Q^{-1}AQ =$

$B$ が成り立つ. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから $A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} -35 & 38 & -16 \\ 0 & 23 & -10 \\ 4 & 52 & -26 \end{pmatrix}$.

4. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, 教科書の定理 6.20 により, 基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ に関する $f^n$ の表現行列は $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である. 標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ から基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ への基底の変換行列を $P$ とすれば, 教科書の問 6.9 から $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ である. 標準基底に関する $f^n$ の表現行列を $A$ とすれば教科書の定理 6.23 により, $P^{-1}AP = D^n$ が成り立つ. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ だから, $A = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2{\cdot}3^n - 2 & 2^{n+1} - 2{\cdot}3^n \\ 1-2^n & 2{\cdot}3^n - 1 & 2^{n+1} - 2{\cdot}3^n \\ 1-2^n & -1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

5. $f$ の表現行列を $A$ とすれば，問題 1 の (11) で, $a = b = c = 0$, $p = a$. $q = b$, $r = c$ とすれば, $A$ は第 1 列が $c\boldsymbol{e}_1$，第 $j$ 列 $(2 \leqq j \leqq n+1)$ が $b\boldsymbol{e}_{j-1} + ((j-1)a + c)\boldsymbol{e}_j$ である行列である. すなわち

$$A = \begin{pmatrix} c & b & 0 & \cdots & 0 \\ & a+c & b & \ddots & \vdots \\ & & 2a+c & \ddots & 0 \\ & \text{\Large 0} & & \ddots & b \\ & & & & na+c \end{pmatrix}.$$

だから $A$ は対角成分が $c, a+c, 2a+c, \ldots, na+c$ である上半三角行列である. 従って, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ に対して $c \neq -ak$ ならば $|A| = c(a+c)\cdots(na+c) \neq 0$ となり $A$ は正則行列である. 故に $f$ は同型写像で, この場合は $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$ である. $c = -ak$ となる整数 $0 \leqq k \leqq n$ がある場合, $|A| = c(a+c)\cdots(na+c) = 0$ より $A$ は正則行列ではないので $\mathrm{rank} A \leqq n$ である. このとき $a = 0$ ならば $c = 0$ で $A = b\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$ だから $b \neq 0$ ならば $\mathrm{rank} A = n$ である. $a \neq 0$ ならば $A$ の第 $k+1$ 列以外の $n$ 個の列ベクトル

$$-ak\boldsymbol{e}_1, b\boldsymbol{e}_1 - a(k-1)\boldsymbol{e}_2, \ldots, b\boldsymbol{e}_{k-1} - a\boldsymbol{e}_k, b\boldsymbol{e}_{k+1} + a\boldsymbol{e}_{k+2}, \ldots, b\boldsymbol{e}_n + a(n-k)\boldsymbol{e}_{n+1}$$

は 1 次独立だから $\mathrm{rank} A \geqq n$ でもある. 従って, $c = -ak$ となる整数 $0 \leqq k \leqq n$ がある場合, $a \neq 0$ または $b \neq 0$ ならば $\mathrm{rank} A = n$ であり，$\mathrm{rank} F = \mathrm{rank} A = n$ となるため, 次元公式によって $\dim \mathrm{Ker}\, F = \dim P_n(\boldsymbol{R}) - \mathrm{rank} F = n + 1 - n = 1$ である. $a = b = c = 0$ の場合は明らかに $\dim \mathrm{Ker}\, F = \dim P_n(\boldsymbol{R}) = n + 1$ である.
[注意] 微分方程式 $(ax+b)\dfrac{dy}{dx} + cy = 0$ の解は $a \neq 0$, $c = -ak$ ならば$C$ を任意定数として $y = C(ax+b)^k$ で与えられるため $k$ が $0 \leqq k \leqq n$ を満たす整数ならば上の解答における $\mathrm{Ker}\, f$ は $(ax+b)^k$ で生成される．一方 $a = c = 0$, $b \neq 0$ ならば $\mathrm{Ker}, f$ は 1 で生成される.

6. (1) $B_V$ から $B'_V$ への基底の変換行列を $P$ とすれば, $A' = P^{-1}AP$ だから $|A'| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P^{-1}||P||A| = |P^{-1}P||A| = |E_n||A| = |A|$ である.

(2) $B_V$ を $V$ の基底とし, $B_V$ に関する $f$, $g$ の表現行列をそれぞれ $A$, $B$ とすれば, $B_V$ に関する $g \circ f$ の表現行列は $BA$ だから $\det(g \circ f) = |BA| = |B||A| = \det(g)\det(f)$ が得られる.

(3) $V$ の次元を $n$ とし, $B_V$ を $V$ の基底とすれば, $B_V$ に関する $id_V$ の表現行列は $n$ 次単位行列 $E_n$ だから $\det(id_V) = |E_n| = 1$ である.

(4) $f$ が同型写像ならば, $f$ の逆写像 $f^{-1}$ が存在して $f^{-1}\circ f = id_V$ が成り立つため, (2) と (3) の結果から $\det(f^{-1})\det(f) = \det(f^{-1}\circ f) = \det(id_V) = 1$ が得られる. よって $\det(f) \neq 0$ であり, $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$ が成り立つことがわかる.

$\det(f) \neq 0$ であると仮定する. $B_V = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n]$ を $V$ の基底とし, $B_V$ に関する $f$ の表現行列を $A$ とすれば $|A| = \det(f) \neq 0$ だから $A$ は正則行列である. 従って $A$ で表される $\boldsymbol{K}^n$ の 1 次変換 $T_A$ は同型写像である. $\varphi : V \to \boldsymbol{K}^n$ を $\varphi(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{e}_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ で定まる 1 次写像とすれば, $\varphi$ は $V$ の基底を $\boldsymbol{K}^n$ の基底に写すため, 同型写像である. また, $A$ の $(i, j)$ 成分を $a_{ij}$ とすれば, $\varphi\circ f : V \to \boldsymbol{K}^n$ と $T_A\circ\varphi : V \to \boldsymbol{K}^n$ はともに $\boldsymbol{v}_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ を $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i$ に写す 1 次写像だから, $\varphi\circ f = T_A\circ\varphi$ が成り立つ. ここで $\varphi^{-1}\circ\varphi = id_V$ だから $f = id_V\circ f = \varphi^{-1}\circ\varphi\circ f = \varphi^{-1}\circ T_A\circ\varphi$ が得られ, $\varphi^{-1}$, $T_A$ および $\varphi$ はすべて同型写像だから, これらの合成写像である $f$ も同型写像である.

7. (1) $V$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ で生成されるため, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} z_j\boldsymbol{v}_j$ $(z_j \in \boldsymbol{C})$ と表される. $z_j = x_j + y_j i$ $(x_j, y_j \in \boldsymbol{R})$ とおけば $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j i)\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{v}_j + \sum_{j=1}^{n} y_j i\boldsymbol{v}_j$ だから $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n, i\boldsymbol{v}_1, i\boldsymbol{v}_2, \dots, i\boldsymbol{v}_n$ は $V_{\boldsymbol{R}}$ を生成する. $x_j, y_j \in \boldsymbol{R}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ に対して $\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{v}_j + \sum_{j=1}^{n} y_j i\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}$ ならば $\sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j i)\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}$ であり, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は $V$ の 1 次独立なベクトルだから $x_j + y_j i = 0$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ が成り立つ. 従って $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $x_j = y_j = 0$ だから $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n, i\boldsymbol{v}_1, i\boldsymbol{v}_2, \dots, i\boldsymbol{v}_n$ は $V_{\boldsymbol{R}}$ の 1 次独立なベクトルである. 故に $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n, i\boldsymbol{v}_1, i\boldsymbol{v}_2, \dots, i\boldsymbol{v}_n$ は $V_{\boldsymbol{R}}$ の基底である.

(2) $A = \big(a_{jk} + b_{jk}i\big)$ $(a_{jk}, b_{jk} \in \boldsymbol{R})$ とおけば $\big(a_{jk}\big) = \dfrac{1}{2}\big(A + \overline{A}\big)$, $\big(b_{jk}\big) = \dfrac{1}{2i}\big(A - \overline{A}\big)$ であり,

$$f(\boldsymbol{v}_k) = \sum_{j=1}^{n}(a_{jk} + b_{jk}i)\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\boldsymbol{v}_j + \sum_{j=1}^{n} b_{jk}i\boldsymbol{v}_j, \quad f(i\boldsymbol{v}_k) = if(\boldsymbol{v}_k) = \sum_{j=1}^{n}(-b_{jk})\boldsymbol{v}_j + \sum_{j=1}^{n} a_{jk}i\boldsymbol{v}_j$$

だから $B_{V_{\boldsymbol{R}}}$, $B_{W_{\boldsymbol{R}}}$ に関する $f_{\boldsymbol{R}} : V_{\boldsymbol{R}} \to W_{\boldsymbol{R}}$ の表現行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\big(A + \overline{A}\big) & -\frac{1}{2i}\big(A - \overline{A}\big) \\ \frac{1}{2i}\big(A - \overline{A}\big) & \frac{1}{2}\big(A + \overline{A}\big) \end{pmatrix}$ である.

(3) $V$ の基底 $B_V$ をとり, $B_V$ に関する $f$ の表現行列を $A$ とする. $V_{\boldsymbol{R}}$ の基底 $B_{V_{\boldsymbol{R}}}$ を (2) と同様に定めれば, $B_{V_{\boldsymbol{R}}}$ に関する $f_{\boldsymbol{R}}$ の表現行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\big(A + \overline{A}\big) & -\frac{1}{2i}\big(A - \overline{A}\big) \\ \frac{1}{2i}\big(A - \overline{A}\big) & \frac{1}{2}\big(A + \overline{A}\big) \end{pmatrix}$ だから, 第 12 回の演習問題 14 の結果から $\det(f_{\boldsymbol{R}}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\big(A + \overline{A}\big) & -\frac{1}{2i}\big(A - \overline{A}\big) \\ \frac{1}{2i}\big(A - \overline{A}\big) & \frac{1}{2}\big(A + \overline{A}\big) \end{vmatrix} = |A|\,\big|\overline{A}\big| = |A|\overline{|A|} = \det(f)\overline{\det(f)} = |\det(f)|^2$ である.

8. 教科書の 177 ページの注意の方法に従って $\boldsymbol{R}^5$ と $\boldsymbol{R}^4$ の基底を求める. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & q \\ 2 & 1 & 3 & 3 & -1 & r \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & q \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & r-2p \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & s-2q \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2p+q-r}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & s-2q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{(3,5)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & \frac{q-4p+2r}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2p+q-r}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2p-q+s-r \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつ条件は $2p-q+s-r=0$ が成り立つことである. 従って, $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} T_A$ であるためには $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ -2p+q+r \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である. この基底に $\boldsymbol{e}_4$ を加えた $\boldsymbol{R}^4$ の基底 $[\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_4]$ が求める $\boldsymbol{R}^4$ の基底である. $2p-q+s-r=0$ の場合, 上の連立 1 次方程式は, $\begin{cases} x+2z+w=p \\ y-z+w=\frac{q-4p+2r}{3} \\ u=\frac{2p+q-r}{3} \end{cases}$ と同値であるため, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p-2s-t \\ \frac{q-4p+2r}{3}+s-t \\ s \\ t \\ \frac{2p+q-r}{3} \end{pmatrix}$ ($s$, $t$ は任意の定数) と表される. とくに, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{0}$ の場合を考えて, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと $T_A(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_4$, $T_A(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4$, $T_A(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4$, $T_A(\boldsymbol{v}_4) = T_A(\boldsymbol{v}_5) = \boldsymbol{0}$ であり, $\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である. 教科書の定理 6.9 により $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5]$ は $\boldsymbol{R}^5$ の基底で, これが求めるものである.

9. 成分がすべて $\boldsymbol{K}$ に属する $n$ 次正方行列 $A$ に対し, $\boldsymbol{K}^n$ の 1 次変換 $T_A$ を考え, $V$ を $T_A$ の 1 次元不変部分空間とする. $\boldsymbol{v} \in V$ かつ $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ すると $V$ は 1 次元だから $\boldsymbol{v}$ によって生成され, $A\boldsymbol{v} = T_A(\boldsymbol{v}) \in V$ より $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ を満たす $\lambda \in \boldsymbol{K}$ がある. このとき $(\lambda E_n - A)\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} - A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であり, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ だから教科書の命題 4.18 により $|\lambda E_n - A| = 0$ が成り立ち, $\boldsymbol{v}$ は $\lambda E_n - A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の零ベクトルでない解である.

逆に $|\lambda E_n - A| = 0$ を満たす $\lambda \in \boldsymbol{K}$ に対して, $(\lambda E_n - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たす零ベクトルでない $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^n$ が教科書の命題 4.18 により存在するが, このとき $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ が成り立つため, $\boldsymbol{v}$ は $T_A$ の 1 次元不変部分空間の基底になる.

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ に対し, $|\lambda E_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ 0 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a)^2$ だから, $|\lambda E_2 - A| = 0$ を満たす $\lambda$ は $a$ のみである. $aE_2 - A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり, $b \neq 0$ だから $aE_2 - A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底は $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. よって, 上で示したことから, $\langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$ は $T_A$ の 1 次元不変部分空間であり, $T_A$ の 1 次元不変部分空間は $\langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$ 以外に存在しない.

(2) $b \neq 0$ の場合は, (1) の結果から $T_A$ の 1 次元不変部分空間は 1 つしか存在しないため, $\boldsymbol{K}^2$ は $T_A$ の 2 つの 1 次元不変部分空間の直和にはなりえない. $b = 0$ の場合は, $T_A(\boldsymbol{e}_2) = a\boldsymbol{e}_2$ だから $\langle \boldsymbol{e}_2 \rangle$ も $T_A$ の 1 次元不変部分空間であり $\boldsymbol{K}^2$ は $T_A$ の 2 つの 1 次元不変部分空間 $\langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$ と $\langle \boldsymbol{e}_2 \rangle$ の直和になっている.

10. (1) 任意の $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}) \in V \times W$, $a, b \in \boldsymbol{K}$ に対し, $V$, $W$ がベクトル空間であることを用いて, $V \times W$

の加法とスカラー倍が教科書の定義 5.4 の 8 つの条件を満すことを確かめればよい.

$((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}))+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{z})=((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{u},(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{w})+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}),\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{z}))=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+((\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}))$ より, 教科書の定義 5.4 の $(i)$ が成り立つ.

$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{0})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ より, $\boldsymbol{0}=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$ とおくと, 教科書の定義 5.4 の $(ii)$ が成り立つ.

$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(-\boldsymbol{x},-\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y}+(-\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, $(-\boldsymbol{x},-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=((-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x},(-\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ より, 教科書の定義 5.4 の $(iii)$ が成り立つ.

$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ より, 教科書の定義 5.4 の $(iv)$ が成り立つ.

$(ab)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=((ab)\boldsymbol{x},(ab)\boldsymbol{y})=(a(b\boldsymbol{x}),a(b\boldsymbol{y}))=a(b\boldsymbol{x},b\boldsymbol{y})=a(b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ より, 教科書の定義 5.4 の (v) が成り立つ.

$1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(1\boldsymbol{x},1\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ より, 教科書の定義 5.4 の $(vi)$ が成り立つ.

$a((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}))=a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{w})=(a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}),a(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{w}))=(a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{v},a\boldsymbol{y}+a\boldsymbol{w})=(a\boldsymbol{x},a\boldsymbol{y})+(a\boldsymbol{v},a\boldsymbol{w})=a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ より, 教科書の定義 5.4 の $(vii)$ が成り立つ.

$(a+b)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=((a+b)\boldsymbol{x},(a+b)\boldsymbol{y})=(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x},a\boldsymbol{y}+b\boldsymbol{y})=(a\boldsymbol{x},a\boldsymbol{y})+(b\boldsymbol{x},b\boldsymbol{y})=a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ より, 教科書の定義 5.4 の $(viii)$ が成り立つ.

(2) $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2),(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2)\in V_1\times V_2$, $a\in\boldsymbol{K}$ に対し, $p_s((\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)+(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2)=p_s((\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{w}_2))=\boldsymbol{v}_s+\boldsymbol{w}_s=p_s((\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2))+p_s((\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2))$, $p_s(a(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2))=p_s((a\boldsymbol{v}_1,a\boldsymbol{v}_2))=a\boldsymbol{v}_s=ap_s((\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2))$ だから $p_s$ は 1 次写像である.

$p_s$ の定義から $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\in\operatorname{Ker}p_s$ であるためには $\boldsymbol{v}_s=\boldsymbol{0}$ であることが必要十分である. 任意の $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\in V_1\times V_2$ は $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}_2)+(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{0})$ と表され $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}_2)\in\operatorname{Ker}p_1$, $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{0})\in\operatorname{Ker}p_2$ だから $V_1\times V_2=\operatorname{Ker}p_1+\operatorname{Ker}p_2$ である. また, $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\in\operatorname{Ker}p_1\cap\operatorname{Ker}p_2$ であるためには $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{0}$ であることが必要十分だから, $\operatorname{Ker}p_1\cap\operatorname{Ker}p_2=\{\boldsymbol{0}\}$ である. 故に $V_1\times V_2$ は $\operatorname{Ker}p_1$ と $\operatorname{Ker}p_2$ の直和である.

(3) $\boldsymbol{v}\in V_1$ ならば $p_s\circ i_1(\boldsymbol{v})=p_s(i_1(\boldsymbol{v}))=p_s(\boldsymbol{v},\boldsymbol{0})=\begin{cases}\boldsymbol{v} & s=1\\ \boldsymbol{0} & s=2\end{cases}$, $\boldsymbol{v}\in V_2$ ならば $p_s\circ i_2(\boldsymbol{v})=p_s(i_2(\boldsymbol{v}))=p_s(\boldsymbol{0},\boldsymbol{v})=\begin{cases}\boldsymbol{v} & s=2\\ \boldsymbol{0} & s=1\end{cases}$ だから, $p_s\circ i_s$ は $V_s$ の恒等写像, $p_2\circ i_1$ と $p_1\circ i_2$ は零写像である. $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\in V_1\times V_2$ に対して $(i_1\circ p_1+i_2\circ p_2)((\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2))=(i_1\circ p_1)((\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2))+(i_2\circ p_2)((\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2))=i_1(p_1((\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)))+i_2(p_2((\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)))=i_1(\boldsymbol{v}_1)+i_2(\boldsymbol{v}_2)=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{0})+(\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}_2)=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$ だから $i_1\circ p_1+i_2\circ p_2$ は $V_1\times V_2$ の恒等写像である. $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\in\operatorname{Ker}p_s$ であるためには $\boldsymbol{v}_s=\boldsymbol{0}$ であることが必要十分であり, $i_s$ の定義から $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\in\operatorname{Im}i_1$ であるためには $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{0}$ であることが必要十分で, $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\in\operatorname{Im}i_2$ であるためには $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{0}$ であることが必要十分だから, $\operatorname{Im}i_1=\operatorname{Ker}p_2$, $\operatorname{Im}i_2=\operatorname{Ker}p_1$ である.

(4) $x_i,y_j\in\boldsymbol{K}$ $(i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,m)$ に対して $\sum_{i=1}^{n}x_i(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{0})+\sum_{j=1}^{m}y_j(\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_j)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$ が成り立つとする. $V\times W$ の加法とスカラー倍の定義により, この左辺は $\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{v}_i,\sum_{j=1}^{m}y_j\boldsymbol{w}_j\right)$ に等しいため, $\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{0}$ と $\sum_{j=1}^{m}y_j\boldsymbol{w}_j=\boldsymbol{0}$ が成り立つ. $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ および $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_m$ が 1 次独立ならば $x_1=x_2=\cdots=x_1=y_1=y_2=\cdots=y_m=0$ が得られ, $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{0}),(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{0}),\dots,(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{0}),(\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_1),(\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_2),\dots,(\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_m)$ は 1 次独立であることがわかる. 任意の $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in V\times W$ に対し, $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{y}=\sum_{j=1}^{m}y_j\boldsymbol{w}_j$ を満たす $x_i,y_j\in\boldsymbol{K}$ $(i=1,2,\dots,n,$ $j=1,2,\dots,m)$ が存在する. このとき $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{v}_i,\sum_{j=1}^{m}y_j\boldsymbol{w}_j\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{0})+\sum_{j=1}^{m}y_j(\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_j)$ が成り立つため, $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{0}),(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{0}),\dots,(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{0}),(\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_1),(\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_2),\dots,(\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_m)$ は $V$ を生成することがわかる.

11. (1) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}\in V_1\cap V_2$, $r\in\boldsymbol{K}$ に対して $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v},-(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v},-\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{v},-\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{v})$, $f(r\boldsymbol{x})=(r\boldsymbol{x},-r\boldsymbol{x})=r(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{x})=rf(\boldsymbol{x})$ だから $f$ は 1 次写像である. $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ ならば $(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$ より $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となるため, 教科書の補題 6.3 により, $f$ は単射である.

$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in V_1\times V_2$, $r\in\boldsymbol{K}$ に対し, $g((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}))=g((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{w}))=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=g((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))+g((\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}))$, $g(r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=g((r\boldsymbol{x},r\boldsymbol{y}))=r\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{y}=r(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=rg((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ だか

ら $g$ は 1 次写像である．任意の $\boldsymbol{w} \in V_1 + V_2$ に対して $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in V_1$, $\boldsymbol{y} \in V_2$ が存在するため, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in V_1 \times V_2$ であり $g((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{w}$ が成り立つ．故に $g$ は全射である．

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \operatorname{Ker} g$ ならば $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = g((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = \boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}$ である．また, $\boldsymbol{x} \in V_1$ であり, $\boldsymbol{y} \in V_2$ より $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{y} \in V_2$ でもあるので, $\boldsymbol{x} \in V_1 \cap V_2$ である．従って $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となるため, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \operatorname{Im} f$ である．逆に $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \operatorname{Im} f$ ならば $\boldsymbol{v} \in V_1 \cap V_2$ で $f(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を満たすものがあるが, $f(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, -\boldsymbol{v})$ だから $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{v}$ である．故に $g((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ より, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \operatorname{Ker} g$ である．従って $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}, g$ が成り立つ．

(2) (1) より $g$ は全射だから, $\operatorname{rank} g = \dim \operatorname{Im} g = \dim(V_1 + V_2)$ であり, $f$ は $V_1 \cap V_2$ から $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ への同型写像を与えるため, 教科書の定理 6.6 から $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim \operatorname{Ker} g$ が成り立つ．さらに, (2) より $\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ であることに注意して, $g$ に次元公式を用いると, $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ が得られる．この等式の左辺の $\dim(V_1 \cap V_2)$ を移項して結果を得る．

(3) 仮定より $V_1 \cap V_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ であることと, (1) より $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f = \{\boldsymbol{0}\}$ だから, $g$ は単射である．さらに, 仮定より $V = V_1 + V_2$ であることと, (1) より $g$ は $V_1 \times V_2$ から $V$ への全射でもある．従って $g$ は $V_1 \times V_2$ から $V$ への同型写像になるため, $V$ は $V_1 \times V_2$ と同型である．

12. (1) $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, $a \in \boldsymbol{K}$ とする．$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_1 \in V_1,\ \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_2 \in V_2)$ と表せているとすれば, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_1) + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}_2)$, $a\boldsymbol{v} = a(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = a\boldsymbol{v}_1 + a\boldsymbol{v}_2$ であり, $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_1, a\boldsymbol{v}_1 \in V_1$, $\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}_2, a\boldsymbol{v}_2 \in V_2$ だから $p_{V_s}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}_s + \boldsymbol{w}_s = p_{V_s}(\boldsymbol{v}) + p_{V_s}(\boldsymbol{w})$, $p_{V_s}(a\boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{v}_1 = ap_{V_s}(\boldsymbol{v})$ が成り立つ．

(2) $\boldsymbol{x} \in V_1$ ならば $i_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ $(\boldsymbol{v}_1 \in V_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in V_2)$ と表す方法は一通りで, $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ のときに $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ $(\boldsymbol{v}_1 \in V_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in V_2)$ が成り立つため, $p_1$ の定義から $(p_1 \circ i_1)(\boldsymbol{x}) = p_1(i_1(\boldsymbol{x})) = p_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}$ である．よって, $p_1 \circ i_1$ は $V_1$ の恒等写像であり, $p_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ だから $p_1$ が全射であることがわかる．同様にして, $p_2 \circ i_2$ が $V_2$ の恒等写像であり, $p_2$ が全射であることも示される．

(3) $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} p_1$ ならば $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ $(\boldsymbol{v}_1 \in V_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in V_2)$ と表したとき, $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 \in V_2$ である．従って $\operatorname{Ker} p_1 \subset V_2$ である．逆に $\boldsymbol{v} \in V_2$ ならば $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{0} \in V_1,\ \boldsymbol{v} \in V_2)$ と表せて, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ $(\boldsymbol{v}_1 \in V_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in V_2)$ と表す表し方は一通りだから, $p_1(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ である．故に $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} p_1$ となるため, $V_2 \subset \operatorname{Ker} p_1$ である．以上から $\operatorname{Ker} p_1 = V_2$ であり, $\operatorname{Ker} p_2 = V_1$ も同様に示される．

(4) $\boldsymbol{v} \in V$ に対し, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ $(\boldsymbol{v}_1 \in V_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in V_2)$ とすれば, $s = 1, 2$ に対し, $\boldsymbol{v}_s = i_s(\boldsymbol{v}_s) = i_s(p_s(\boldsymbol{v})) = (i_s \circ p_s)(\boldsymbol{v})$ だから, $(i_{V_1} \circ p_{V_1} + i_{V_2} \circ p_{V_2})(\boldsymbol{v}) = (i_{V_1} \circ p_{V_1})(\boldsymbol{v}) + (i_{V_2} \circ p_{V_2})(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}$ が成り立つ．故に $i_{V_1} \circ p_{V_1} + i_{V_2} \circ p_{V_2}$ は $V$ の恒等写像である．

13. (1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_s$ に対し, $i_s(\boldsymbol{x}) = i_s(\boldsymbol{y})$ とすれば, $p_s \circ i_s = id_{V_s}$ より, $\boldsymbol{x} = id_{V_s}(\boldsymbol{x}) = (p_s \circ i_s)(\boldsymbol{x}) = p_s(i_s(\boldsymbol{x})) = p_s(i_s(\boldsymbol{y})) = (p_s \circ i_s)(\boldsymbol{y}) = id_{V_s}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$ だから $i_s$ は単射である．$\boldsymbol{x} \in V_s$ に対し, $p_s \circ i_s = id_{V_s}$ より, $\boldsymbol{x} = id_{V_s}(\boldsymbol{x}) = (p_s \circ i_s)(\boldsymbol{x}) = p_s(i_s(\boldsymbol{x}))$ だから, $p_s$ は全射である．

$i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = id_V$ より $p_2 \circ i_1 = p_2 \circ id_V \circ i_1 = p_2 \circ (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) \circ i_1 = p_2 \circ i_1 \circ p_1 \circ i_1 + p_2 \circ i_2 \circ p_2 \circ i_1 = p_2 \circ i_1 \circ id_{V_1} + id_{V_2} \circ p_2 \circ i_1 = p_2 \circ i_1 + p_2 \circ i_1 = 2(p_2 \circ i_1)$ だから, 任意の $\boldsymbol{x} \in V_1$ に対して $2(p_2 \circ i_1)(\boldsymbol{x}) = (p_2 \circ i_1)(\boldsymbol{x})$ が成り立つため, $p_2(i_1(\boldsymbol{x})) = (p_2 \circ i_1)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ である．従って, 任意の $\boldsymbol{x} \in V_1$ に対して $i_1(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Ker} p_2$ が成り立つため, $\operatorname{Im} i_1 \subset \operatorname{Ker} p_2$ である．$i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = id_V$ より, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x} = id_V(\boldsymbol{x}) = (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2)(\boldsymbol{x}) = (i_1 \circ p_1)(\boldsymbol{x}) + (i_2 \circ p_2)(\boldsymbol{x}) = i_1(p_1(\boldsymbol{x})) + i_2(p_2(\boldsymbol{x}))$ だから, $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} p_2$ ならば $\boldsymbol{x} = i_1(p_1(\boldsymbol{x})) \in \operatorname{Im} i_1$ である．故に $\operatorname{Ker} p_2 \subset \operatorname{Im} i_1$ が成り立つため, $\operatorname{Im} i_1 = \operatorname{Ker} p_2$ である．$\operatorname{Im} i_2 = \operatorname{Ker} p_1$ も同様に示される．

(2) $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = id_V$ より, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し, $\boldsymbol{x} = id_V(\boldsymbol{x}) = (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2)(\boldsymbol{x}) = (i_1 \circ p_1)(\boldsymbol{x}) + (i_2 \circ p_2)(\boldsymbol{x}) = i_1(p_1(\boldsymbol{x})) + i_2(p_2(\boldsymbol{x}))$ であり, $i_1(p_1(\boldsymbol{x})) \in \operatorname{Im} i_1$, $i_2(p_2(\boldsymbol{x})) \in \operatorname{Im} i_2$ だから $V = \operatorname{Im} i_1 + \operatorname{Im} i_2$ が成り立つ．$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Im} i_1 \cap \operatorname{Im} i_2$ ならば $\boldsymbol{x} = i_1(\boldsymbol{v}_1)$ を満たす $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$ が存在する．(1) の結果から, $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Im} i_2 = \operatorname{Ker} p_1$ だから $p_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ である．さらに, 仮定から $\boldsymbol{v}_1 = id_{V_1}(\boldsymbol{v}_1) = (p_1 \circ i_1)(\boldsymbol{v}_1) = p_1(i_1(\boldsymbol{v}_1)) = p_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{x} = i_1(\boldsymbol{v}_1) = i_1(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ となるため, $\operatorname{Im} i_1 \cap \operatorname{Im} i_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ が成り立つ．以上から, $V$ は $\operatorname{Im} i_1$ と $\operatorname{Im} i_2$ の直和である．

(3) $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, $a \in \boldsymbol{K}$ ならば $\varphi(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (p_1(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}), p_2(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})) = (p_1(\boldsymbol{v}) + p_1(\boldsymbol{w}), p_2(\boldsymbol{v}) + p_2(\boldsymbol{w})) = (p_1(\boldsymbol{v}), p_2(\boldsymbol{v})) + (p_1(\boldsymbol{w}), p_2(\boldsymbol{w})) = \varphi(\boldsymbol{v}) + \varphi(\boldsymbol{w})$, $\varphi(a\boldsymbol{v}) = (p_1(a\boldsymbol{v}), p_2(a\boldsymbol{v})) = (ap_1(\boldsymbol{v}), ap_2(\boldsymbol{v})) = a(p_1(\boldsymbol{v}), p_2(\boldsymbol{v})) = a\varphi(\boldsymbol{v})$ だから

$\varphi$ は 1 次写像である．$\psi : V_1 \times V_2 \to V$ を $\psi((\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)) = i_1(\boldsymbol{v}_1) + i_2(\boldsymbol{v}_2)$ によって定義すれば, 仮定から $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $\psi{\circ}\varphi(\boldsymbol{v}) = \psi((p_1(\boldsymbol{v}), p_2(\boldsymbol{v}))) = i_1(p_1(\boldsymbol{v})) + i_2(p_2(\boldsymbol{v})) = i_1{\circ}p_1(\boldsymbol{v}) + i_2{\circ}p_2(\boldsymbol{v}) = (i_1{\circ}p_1 + i_2{\circ}p_2)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ となるため, $\psi{\circ}\varphi$ は $V$ の恒等写像である．(1) で示したように, $p_2(i_1(\boldsymbol{v}_1)) = \boldsymbol{0}$, $p_1(i_2(\boldsymbol{v}_2)) = \boldsymbol{0}$ が任意の $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in V_2$ に対して成り立つことと, 仮定から $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \in V_1 \times V_2$ に対し, $\varphi{\circ}\psi((\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)) = \varphi(\psi(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)) = \varphi(i_1(\boldsymbol{v}_1) + i_2(\boldsymbol{v}_2)) = (p_1(i_1(\boldsymbol{v}_1) + i_2(\boldsymbol{v}_2)), p_2(i_1(\boldsymbol{v}_1) + i_2(\boldsymbol{v}_2))) = (p_1(i_1(\boldsymbol{v}_1)) + p_1(i_2(\boldsymbol{v}_2)), p_2(i_1(\boldsymbol{v}_1)) + p_2(i_2(\boldsymbol{v}_2))) = (p_1{\circ}i_1(\boldsymbol{v}_1), p_2{\circ}i_2(\boldsymbol{v}_2)) = (id_{V_1}(\boldsymbol{v}_1), id_{V_2}(\boldsymbol{v}_2)) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ となるため, $\varphi{\circ}\psi$ は $V_1 \times V_2$ の恒等写像である．故に $\psi$ は $\varphi$ の逆写像である．従って $\varphi$ は逆写像をもつ 1 次写像であるため, 同型写像である．

14. (1) $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} e$ ならば $(id_V - e)(\boldsymbol{x}) = id_V(\boldsymbol{x}) - e(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$ だから $\boldsymbol{x} = (id_V - e)(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im}(id_V - e)$ である．$\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im}(id_V - e)$ ならば $\boldsymbol{y} = (id_V - e)(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in V$ が存在する．このとき, $e{\circ}e = e$ より $e(\boldsymbol{y}) = e((id_V - e)(\boldsymbol{x})) = e(\boldsymbol{x} - e(\boldsymbol{x})) = e(\boldsymbol{x}) - e(e(\boldsymbol{x})) = e(\boldsymbol{x}) - (e{\circ}e)(\boldsymbol{x})) = e(\boldsymbol{x}) - e(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} e$ である．従って $\operatorname{Ker} e = \operatorname{Im}(id_V - e)$ が成り立つ．

$\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} e$ ならば $\boldsymbol{y} = e(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in V$ が存在する．このとき, $e{\circ}e = e$ より $(id_V - e)(\boldsymbol{y}) = (id_V - e)(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} - e(\boldsymbol{y}) = e(\boldsymbol{x}) - e(e(\boldsymbol{x})) = e(\boldsymbol{x}) - (e{\circ}e)(\boldsymbol{x})) = e(\boldsymbol{x}) - e(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker}(id_V - e)$ である．$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker}(id_V - e)$ ならば $(id_V - e)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ であり, この等式の左辺は $id_V(\boldsymbol{x}) - e(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - e(\boldsymbol{x})$ に等しいため, $\boldsymbol{x} = e(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im} e$ である．従って $\operatorname{Im} e = \operatorname{Ker}(id_V - e)$ が成り立つ．$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} e \cap \operatorname{Im} e$ ならば $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Im} e$ より $\boldsymbol{x} = e(\boldsymbol{v})$ を満たす $\boldsymbol{v} \in V$ が存在する．$e{\circ}e = e$ であり, $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} e$ より $e(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ だから, $\boldsymbol{x} = e(\boldsymbol{v}) = (e{\circ}e)(\boldsymbol{v}) = e(e(\boldsymbol{v})) = e(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ が得られる．従って $\operatorname{Ker} e \cap \operatorname{Im} e = \{\boldsymbol{0}\}$ である．任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} - e(\boldsymbol{x})) + e(\boldsymbol{x}) = (id_V - e)(\boldsymbol{x}) + e(\boldsymbol{x})$ であり, $(id_V - e)(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im}(id_V - e) = \operatorname{Ker} e$, $e(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im} e$ だから $V = \operatorname{Ker} e + \operatorname{Im} e$ が成り立つ．以上から, $V = \operatorname{Ker} e \oplus \operatorname{Im} e$ である．

(2) $e : V \to V$ を $e = s{\circ}r$ で定めれば $r{\circ}s = id_V$ だから $e{\circ}e = (s{\circ}r){\circ}(s{\circ}r) = s{\circ}(r{\circ}s){\circ}r = s{\circ}id_V{\circ}r = s{\circ}r = e$ だから, (1) の結果により $V$ は $\operatorname{Ker} e$ と $\operatorname{Im} e$ の直和である．$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} e$ ならば $r(\boldsymbol{x}) = (id_V{\circ}r)(\boldsymbol{x}) = (r{\circ}s{\circ}r)(\boldsymbol{x}) = (r{\circ}e)(\boldsymbol{x}) = r(e(\boldsymbol{x})) = r(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ となるため, $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} r$ である $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} r$ ならば $e(\boldsymbol{x}) = (s{\circ}r)(\boldsymbol{x}) = s(r(\boldsymbol{x})) = s(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} e$ である．故に $\operatorname{Ker} e = \operatorname{Ker} r$ である．$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Im} s$ ならば $\boldsymbol{x} = s(\boldsymbol{w})$ を満たす $\boldsymbol{w} \in W$ が存在する．このとき, $\boldsymbol{x} = s(\boldsymbol{w}) = (s{\circ}id_V)(\boldsymbol{w}) = (s{\circ}r{\circ}s)(\boldsymbol{w}) = (e{\circ}s)(\boldsymbol{w}) = e(s(\boldsymbol{w})) \in \operatorname{Im} e$ である．$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Im} e$ ならば $\boldsymbol{x} = e(\boldsymbol{v})$ を満たす $\boldsymbol{v} \in V$ が存在する．このとき, $\boldsymbol{x} = e(\boldsymbol{v}) = (s{\circ}r)(\boldsymbol{v}) = s(r(\boldsymbol{v})) \in \operatorname{Im} s$ である．故に $\operatorname{Im} e = \operatorname{Im} s$ である．以上から, $V = \operatorname{Ker} r \oplus \operatorname{Im} s$ が得られる．

15. (1) $A_{11} = \big(a_{ij}\big)$, $A_{12} = \big(b_{ij}\big)$, $A_{21} = \big(c_{ij}\big)$, $A_{22} = \big(d_{ij}\big)$ とおけば,

$$p_1(f(\boldsymbol{u}_j)) = p_1{\circ}f{\circ}i_1(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i, \quad p_1(f(\boldsymbol{v}_j)) = p_1{\circ}f{\circ}i_2(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\boldsymbol{w}_i,$$
$$p_2(f(\boldsymbol{u}_j)) = p_2{\circ}f{\circ}i_1(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{z}_i, \quad p_2(f(\boldsymbol{v}_j)) = p_2{\circ}f{\circ}i_2(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\boldsymbol{z}_i$$

だから, 任意の $\boldsymbol{w} \in W$ は $\boldsymbol{w} = p_1(\boldsymbol{w}) + p_2(\boldsymbol{w})$ と表されることに注意すれば,

$$f(\boldsymbol{u}_j) = p_1(f(\boldsymbol{u}_j)) + p_2(f(\boldsymbol{u}_j)) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i + \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{z}_i, \quad f(\boldsymbol{v}_j) = p_1(f(\boldsymbol{v}_j)) + p_2(f(\boldsymbol{v}_j)) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\boldsymbol{w}_i + \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\boldsymbol{z}_i$$

が得られる．従って, $B_V$, $B_W$ に関する $f$ の表現行列は $(m+n) \times (k+l)$ 行列 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ である．

(2) $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} f$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in V$ を選べば, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ $(\boldsymbol{x}_s \in V_s)$ と表せて, さらに $s = 1, 2$ に対し, $f(\boldsymbol{x}_s) = p_1(f(\boldsymbol{x}_s)) + p_2(f(\boldsymbol{x}_s))$ と表せるため, $i_s(\boldsymbol{x}_s) = \boldsymbol{x}_s$ $(s = 1, 2)$ に注意すれば, 仮定から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) &= p_1(f(\boldsymbol{x}_1)) + p_2(f(\boldsymbol{x}_1)) + p_1(f(\boldsymbol{x}_2)) + p_2(f(\boldsymbol{x}_2)) \\ &= (p_1{\circ}f{\circ}i_1)(\boldsymbol{x}_1) + (p_2{\circ}f{\circ}i_2)(\boldsymbol{x}_2)\end{aligned}$$

が得られる．従って $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(p_1{\circ}f{\circ}i_1) + \operatorname{Im}(p_2{\circ}f{\circ}i_2)$ である．$\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im}(p_1{\circ}f{\circ}i_1)$ ならば $\boldsymbol{y} = (p_1{\circ}f{\circ}i_1)(\boldsymbol{x}_1)$ を満たす $\boldsymbol{x}_1 \in V_1$ が存在する．$(f{\circ}i_1)(\boldsymbol{x}_1) \in W$ は $(f{\circ}i_1)(\boldsymbol{x}_1) = p_1((f{\circ}i_1)(\boldsymbol{x}_1)) + p_2((f{\circ}i_1)(\boldsymbol{x}_1))$ と表されるが, 仮

定より $p_2((f\circ i_1)(\boldsymbol{x}_1)) = (p_2\circ f\circ i_1)(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{0}$ だから $(f\circ i_1)(\boldsymbol{x}_1) = p_1((f\circ i_1)(\boldsymbol{x}_1)) = (p_1\circ f\circ i_1)(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}$ が成り立つ．故に $\boldsymbol{y} = (f\circ i_1)(\boldsymbol{x}_1) \in \operatorname{Im} f$ だから $\operatorname{Im}(p_1\circ f\circ i_1) \subset \operatorname{Im} f$ である．同様に $\operatorname{Im}(p_2\circ f\circ i_2) \subset \operatorname{Im} f$ も示されるため，$\operatorname{Im}(p_1\circ f\circ i_1)+\operatorname{Im}(p_2\circ f\circ i_2) \subset \operatorname{Im} f$ が得られる．以上から $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(p_1\circ f\circ i_1)+\operatorname{Im}(p_2\circ f\circ i_2)$ である．$\operatorname{Im}(p_s\circ f\circ i_s) \subset \operatorname{Im} p_s = W_s$ $(s=1,2)$ であり，$W$ は $W_1$ と $W_2$ の直和だから $\operatorname{Im}(p_1\circ f\circ i_1)\cap\operatorname{Im}(p_2\circ f\circ i_2) \subset W_1\cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ が成り立つため，$\operatorname{Im}(p_1\circ f\circ i_1)\cap\operatorname{Im}(p_2\circ f\circ i_2) = \{\boldsymbol{0}\}$ である．従って $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(p_1\circ f\circ i_1)\oplus\operatorname{Im}(p_2\circ f\circ i_2)$ が成り立つ．

(3) $V_1$ の基底 $B_{V_1} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k]$ と $V_2$ の基底 $B_{V_2} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l]$ を考えて，$B_{V_r}$, $B_{V_s}$ に関する $p_s\circ f\circ i_r : V_r \to V_s$ の表現行列を $A_{sr}$ とすれば，(2) の結果より，$V$ の基底 $B_V = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l]$ に関する $f$ の表現行列は $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ であるため，$p_2\circ f\circ i_1 : V_1 \to W_2$ または $p_1\circ f\circ i_2 : V_2 \to W_1$ が零写像であるとき，$A_{12}$ または $A_{21}$ は零行列であるため，$\det(f) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{22}| = \det(p_1\circ f\circ i_1)\det(p_2\circ f\circ i_2)$ が成り立つ．

16. (1) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in V_1\times V_2$, $a \in \boldsymbol{K}$ に対し，$f$, $g$ の線形性から $(f\times g)((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})) = (f\times g)((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{w})) = (f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}), g(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{w})) = (f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{v}), g(\boldsymbol{y})+g(\boldsymbol{w})) = (f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y}))+(f(\boldsymbol{v}), g(\boldsymbol{w})) = (f\times g)((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))+(f\times g)((\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}))$, $(f\times g)(a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) = (f\times g)((a\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{y})) = (f(a\boldsymbol{x}), g(a\boldsymbol{y})) = (af(\boldsymbol{x}), ag(\boldsymbol{y})) = a(f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})) = a(f\times g)((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ が得られるため，$f\times g$ は 1 次写像である．

(2) $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) \in \operatorname{Im}(f\times g)$ ならば $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) = (f\times g)((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ を満たす $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in V_1\times V_2$ が存在する．このとき，$(\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) = (f\times g)((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) = (f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y}))$ だから $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im} f$, $\boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{y}) \in \operatorname{Im} g$ となるため，$(\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) \in \{(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2) \in W_1\times W_2 | \boldsymbol{w}_1 \in \operatorname{Im} f, \boldsymbol{w}_2 \in \operatorname{Im} g\}$ である．$(\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) \in \{(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2) \in W_1\times W_2 | \boldsymbol{w}_1 \in \operatorname{Im} f, \boldsymbol{w}_2 \in \operatorname{Im} g\}$ ならば $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} f$, かつ $\boldsymbol{z} \in \operatorname{Im} g$ だから $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{y})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in V_1$ と $\boldsymbol{y} \in V_2$ が存在する．このとき，$(\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) = (f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})) = (f\times g)((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) \in \operatorname{Im}(f\times g)$ である．以上から $\operatorname{Im}(f\times g) = \{(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2) \in W_1\times W_2 | \boldsymbol{w}_1 \in \operatorname{Im} f, \boldsymbol{w}_2 \in \operatorname{Im} g\}$ が成り立つ．

$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \operatorname{Ker}(f\times g)$ ならば $(f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})) = (f\times g)((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$ だから $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ かつ $g(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ である．従って $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f$ かつ $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker} g$ となるため $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \{(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) \in V_1\times V_2 | \boldsymbol{v}_1 \in \operatorname{Ker} f, \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Ker} g\}$ である．$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \{(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) \in V_1\times V_2 | \boldsymbol{v}_1 \in \operatorname{Ker} f, \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Ker} g\}$ ならば $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f$ かつ $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker} g$ だから $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ かつ $g(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ である．従って $(f\times g)((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) = (f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$ だから $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \operatorname{Ker}(f\times g)$ である．以上から $\operatorname{Ker}(f\times g) = \{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) \in W_1\times W_2 | \boldsymbol{x}_1 \in \operatorname{Ker} f, \boldsymbol{x}_2 \in \operatorname{Ker} g\}$ が成り立つ．

一般に $Z_1$, $Z_2$ をそれぞれ $W_1$, $W_2$ の部分空間とすれば，$(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2) \in Z_1\times Z_2$ を $W_1\times W_2$ の部分空間 $\{(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2) \in W_1\times W_2 | \boldsymbol{w}_1 \in Z_1, \boldsymbol{w}_2 \in Z_2\}$ のベクトル $(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2)$ に対応させる写像は同型写像だから，上の結果より $\operatorname{Im}(f\times g)$, $\operatorname{Ker}(f\times g)$ はそれぞれ $\operatorname{Im} f\times\operatorname{Im} g$, $\operatorname{Ker} f\times\operatorname{Ker} g$ と同型である．従って $\operatorname{rank}(f\times g) = \dim\operatorname{Im}(f\times g) = \dim(\operatorname{Im} f\times\operatorname{Im} g)$ であり，問題 9 の (4) の結果より $\dim(\operatorname{Im} f\times\operatorname{Im} g) = \dim\operatorname{Im} f + \dim\operatorname{Im} g = \operatorname{rank} f + \operatorname{rank} g$ だから $\operatorname{rank}(f\times g) = \operatorname{rank} f + \operatorname{rank} g$ が成り立つ．

(3) $B_1 = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m]$, $B_2 = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ をそれぞれ $V_1$, $V_2$ の基底とする．このとき，問題 9 の (4) から $[(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{0}), (\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{0}), \ldots, (\boldsymbol{v}_m,\boldsymbol{0}), (\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_1), (\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_2), \ldots, (\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_n)]$ は $V_1\times V_2$ の基底である．この基底を $B$ とする．$f$ の $B_1$ に関する表現行列を $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$, $g$ の $B_2$ に関する表現行列を $B = \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}$ とすれば，$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{v}_i$, $g(\boldsymbol{w}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\boldsymbol{w}_i$ だから

$$(f\times g)(\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{0}) = (f(\boldsymbol{v}_j), g(\boldsymbol{0})) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{0}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{0}) + \sum_{i=1}^{n} 0(\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_i)$$
$$(f\times g)(\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_j) = (f(\boldsymbol{0}), g(\boldsymbol{v}_j)) = \left(\boldsymbol{0}, \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\boldsymbol{w}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} 0(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{0}) + \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_i)$$

が成り立つ．従って $B$ に関する $f\times g$ の表現行列は $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ となるため，$\det(f\times g) = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B| = \det(f)\det(g)$ が得られる．

17. 一般に $A$ を成分がすべて実数である $n$ 次正方行列とし, $\boldsymbol{C}^n$ の 1 次変換 $T_A$ を考える. 前問の解答でみたように, $V$ が $T_A$ の 1 次元不変部分空間ならば, $\boldsymbol{v}$ を $V$ の零でないベクトルとすれば, $A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ を満たす $\lambda\in\boldsymbol{C}$ がある. この両辺の共役を考えると, $A$ の成分はすべて実数だから $A\bar{\boldsymbol{v}}=\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}$ を得る.

$\lambda$ が実数でないならば, $\boldsymbol{v},\bar{\boldsymbol{v}}$ が 1 次独立であることを示す. $a\boldsymbol{v}+b\bar{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{0}$ $(a,b\in\boldsymbol{C})$ が成り立つとする. この両辺に左から $A$ をかけると, $A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ と $A\bar{\boldsymbol{v}}=\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}$ から, $a\lambda\boldsymbol{v}+b\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{0}$ が得られるが, この両辺から $a\boldsymbol{v}+b\bar{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{0}$ の両辺に $\lambda,\bar{\lambda}$ をかけたものを辺々引いて $b(\bar{\lambda}-\lambda)\bar{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{0}$ と $a(\lambda-\bar{\lambda})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ を得る. $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ より $\bar{\boldsymbol{v}}\neq\boldsymbol{0}$ であり, 仮定から $\bar{\lambda}\neq\lambda$ だから, $a=b=0$ となって, $\boldsymbol{v},\bar{\boldsymbol{v}}$ が 1 次独立であることがわかる.

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}+\bar{\boldsymbol{v}}$, $\boldsymbol{y}=i(\boldsymbol{v}-\bar{\boldsymbol{v}})$ とおく. $\lambda$ が実数でないならば, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ が 1 次独立であることを示す. $a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ $(a,b\in\boldsymbol{C})$ が成り立つならば, これに上式を代入すれば $(a+bi)\boldsymbol{v}+(a-bi)\bar{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{0}$ が得られる. 上でみたように, $\boldsymbol{v},\bar{\boldsymbol{v}}$ は 1 次独立だから, $a+bi=a-bi=0$ であるが, これより $a=b=0$ が得られ, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ は 1 次独立である.

ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の定義から $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}$, $\bar{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{y}$ となるため, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の成分はすべて実数である. $T_A$ を $\boldsymbol{R}^n$ の 1 次変換とみなし, $\boldsymbol{R}^n$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ で生成される $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間を $W$ とすると, $W$ は $T_A$ の不変部分空間である. 実際, 任意の $\boldsymbol{w}\in W$ は $\boldsymbol{w}=s\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}$ $(s,t\in\boldsymbol{R})$ と表されるが, $\boldsymbol{v}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y})$, $\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y})$ だから $\lambda=\alpha+\beta i$ $(\alpha,\beta\in\boldsymbol{R})$ とおくと, $A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{v}+A\bar{\boldsymbol{v}}=\lambda\boldsymbol{v}+\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$, $A\boldsymbol{y}=iA\boldsymbol{v}-iA\bar{\boldsymbol{v}}=i\lambda\boldsymbol{v}-i\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}=-\beta\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$ が得られるため, $T_A(\boldsymbol{w})=A\boldsymbol{w}=sA\boldsymbol{x}+tA\boldsymbol{y}=(s\alpha-t\beta)\boldsymbol{x}+(t\alpha+s\beta)\boldsymbol{y}\in W$ である. ここで, $\lambda$ が実数でないならば, $W$ は $\boldsymbol{R}^n$ の 1 次変換 $T_A$ の 2 次元不変部分空間であることに注意する.

以上の議論をふまえ, 与えられた 4 次正方行列 $A$ に対し, まず $T_A$ を $\boldsymbol{C}^4$ の 1 次変換とみなした場合の 1 次元不変部分空間を前問の解答の方法に従って求める. $|\lambda E_n-A|=\lambda^4-4\lambda^3+12\lambda^2-16\lambda+16=(\lambda^2-2\lambda+4)^2$ だから $\lambda=1+\sqrt{3}i$ は $|\lambda E_n-A|=0$ を満たす. $A\boldsymbol{v}=\left(1+\sqrt{3}i\right)\boldsymbol{v}$ を満たす $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{C}^4$ は $\left(1+\sqrt{3}i\right)E_4-A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解だから, これを解けば $\boldsymbol{v}=s\begin{pmatrix}-1+\sqrt{3}i\\1+\sqrt{3}i\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}i\\1-\sqrt{3}i\\0\\2\end{pmatrix}$ $(s,t\in\boldsymbol{C})$ と表されることがわかる. そこで, $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}-1+\sqrt{3}i\\1+\sqrt{3}i\\2\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}i\\1-\sqrt{3}i\\0\\2\end{pmatrix}$ とおき, $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{v}_1+\bar{\boldsymbol{v}}_1$, $\boldsymbol{y}_1=i(\boldsymbol{v}_1-\bar{\boldsymbol{v}}_1)$, $\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{v}_2+\bar{\boldsymbol{v}}_2$, $\boldsymbol{y}_2=i(\boldsymbol{v}_2-\bar{\boldsymbol{v}}_2)$ とおけば, $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}-2\\2\\4\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}_1=\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\-2\sqrt{3}\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}_2=\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\2\sqrt{3}\\0\\0\end{pmatrix}$ である. さらに $W_1=\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1\rangle$, $W_2=\langle\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2\rangle$ とおけば, 上の議論から, $W_1$, $W_2$ はともに $T_A$ の 2 次元不変部分空間である. ここで. $a\boldsymbol{x}_1+b\boldsymbol{y}_1+c\boldsymbol{x}_2+d\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{0}$ $(a,b,c,d\in\boldsymbol{R})$ が成り立つとすれば, 左辺の第 3 成分と第 4 成分に注目すれば, $a=c=0$ がわかるため, $-2\sqrt{3}b-2\sqrt{3}d=0$ かつ $-2\sqrt{3}b+2\sqrt{3}d=0$ である. 従って, $b=d=0$ も成り立つため, $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2$ は 1 次独立である. 教科書の定理 5.19 によって, これらは $\boldsymbol{R}^4$ の基底であるため, $\boldsymbol{R}^4=W_1+W_2$ である. 故に教科書の定理 5.20 によって, $\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1+W_2)=2+2-\dim\boldsymbol{R}^4=0$ だから $W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{0}\}$ となるため, 教科書の命題 5.22 から, $\boldsymbol{R}^4=W_1\oplus W_2$ である. ($W_1$ の基底 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1$ と $W_2$ の基底 $\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2$ をとりなおして $W_1=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$, $W_2=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ とした方が, 見栄えがよいかも.)

18. (1) $\dim\operatorname{Im}T_A=\operatorname{rank}T_A=\operatorname{rank}A=r$ だから, $\operatorname{Im}T_A$ の基底 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_r$ をとり, 各 $j=1,2,\ldots,r$ に対して $A\boldsymbol{a}_j=T_A(\boldsymbol{a}_j)=\boldsymbol{b}_j$ を満たす $\boldsymbol{a}_j\in\boldsymbol{K}^m$ を選ぶ. $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,r$ に対し, $A_{ij}$ を第 $i$ 列が $\boldsymbol{a}_j$ で, 第 $i$ 列以外の列はすべて零ベクトルである $m\times n$ 行列とし, $B_{ij}$ を第 $i$ 列が $\boldsymbol{b}_j$ で, 第 $i$ 列以外の列はすべて零ベクトルである $k\times n$ 行列とすると, 教科書の定理 2.3 の (1) により, $L_A(A_{ij})=AA_{ij}=B_{ij}$ が成り立つため, $B_{ij}\in\operatorname{Im}L_A$

である．

$Y \in \operatorname{Im} L_A$ に対し, $L_A(X) = Y$ を満たす $X \in M_{mn}(\boldsymbol{K})$ をとり, $X$ の第 $i$ 列を $\boldsymbol{x}_i$ とすれば, $Y = AX$ の第 $i$ 列は $A\boldsymbol{x}_i = T_A(\boldsymbol{x}_i) \in \operatorname{Im} T_A$ だから, $A\boldsymbol{x}_i = \sum\limits_{j=1}^{r} c_{ji}\boldsymbol{b}_j$ $(c_{ij} \in \boldsymbol{K})$ と表される．このとき, $Y = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & \cdots & A\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{r} c_{j1}\boldsymbol{b}_j & \sum\limits_{j=1}^{r} c_{j2}\boldsymbol{b}_j & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{r} c_{jk}\boldsymbol{b}_j \end{pmatrix} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{r} c_{ji}B_{ij}$ となるため, $B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{nr}$ は $\operatorname{Im} f$ を生成する．

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{r} x_{ji}B_{ij} = O$ が成り立つとする．この両辺の第 $i$ 列を比較すれば, $\sum\limits_{j=1}^{r} x_{ji}\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ の 1 次独立性から, $x_{1i} = x_{2i} = \cdots = x_{ri} = 0$ である．これが $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つため, $B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{nr}$ は 1 次独立である．故に $\operatorname{Im} L_A$ は $nr$ 個のベクトルからなる基底 $B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{nr}$ をもつため, $\operatorname{rank} L_A = \dim \operatorname{Im} L_A = nr$ である．

$\tau_{m,n} : M_{m,n}(\boldsymbol{K}) \to M_{n,m}(\boldsymbol{K})$ を $\tau_{m,n}(X) = {}^tX$ で定めれば $\tau_{m,n}$ は 1 次写像であり, $\tau_{n,m} \circ \tau_{m,n}$, $\tau_{m,n} \circ \tau_{n,m}$ はそれぞれ $M_{m,n}(\boldsymbol{K})$, $M_{n,m}(\boldsymbol{K})$ の恒等写像だから, $\tau_{m,n}$ は同型写像である．$XB = \tau_{l,m}({}^t(XB)) = \tau_{l,m}({}^tB{}^tX) = \tau_{l,m}(L_{{}^tB}(\tau_{m,n}(X)))$ より, $R_B = \tau_{l,m} \circ L_{{}^tB} \circ \tau_{m,n}$ が成り立つ．$\tau_{l,m}$, $\tau_{m,n}$ は同型写像だから, 上の結果から $\operatorname{rank} R_B = \operatorname{rank}(\tau_{l,m} \circ L_{{}^tB} \circ \tau_{m,n}) = \operatorname{rank} L_{{}^tB} = ms$ である．

(2) $L_A(E_{ij}) = AE_{ij}$ は第 $j$ 列が $A$ の第 $i$ 列に等しく, 第 $j$ 列以外の列はすべて零ベクトルである $k \times n$ 行列だから $L_A(E_{ij}) = \sum\limits_{s=1}^{k} a_{si}E_{sj}$ である．$E_{ij} \in M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ は $B_{m,n}$ の $m(j-1)+i$ 番目の基底であり, $E_{sj} \in M_{k,n}(\boldsymbol{K})$ は $B_{k,n}$ の $k(j-1)+s$ 番目の基底だから, $B_{m,n}$, $B_{k,n}$ に関する $L_A$ の表現行列の $(p,q)$ 成分を $L_{pq}$ とすれば, $L_{pq}$ は

$$L_{pq} = \begin{cases} a_{p-m\left[\frac{p-1}{m}\right]\, q-k\left[\frac{q-1}{k}\right]} & \left[\frac{p-1}{m}\right] = \left[\frac{q-1}{k}\right] \\ 0 & \left[\frac{p-1}{m}\right] \neq \left[\frac{q-1}{k}\right] \end{cases}$$

によって与えられる．

$R_B(E_{ij}) = E_{ij}B$ は第 $i$ 行が $B$ の第 $j$ 行に等しく, 第 $i$ 行以外の行はすべて零である $m \times l$ 行列だから $R_B(E_{ij}) = \sum\limits_{s=1}^{l} b_{js}E_{is}$ である．$E_{ij} \in M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ は $B_{m,n}$ の $n(i-1)+j$ 番目の基底であり, $E_{is} \in M_{m,l}(\boldsymbol{K})$ は $B_{m,l}$ の $l(i-1)+s$ 番目の基底だから, $B'_{m,n}$, $B'_{n,l}$ に関する $R_B$ の表現行列の $(p,q)$ 成分を $R_{pq}$ とすれば, $R_{pq}$ は

$$R_{pq} = \begin{cases} b_{p-n\left[\frac{p-1}{n}\right]\, q-l\left[\frac{q-1}{l}\right]} & \left[\frac{p-1}{n}\right] = \left[\frac{q-1}{l}\right] \\ 0 & \left[\frac{p-1}{n}\right] \neq \left[\frac{q-1}{l}\right] \end{cases}$$

によって与えられる．

(3) $B_{m,n}$ に関する $L_A$ の表現行列は $A$ が対角線に $n$ 個並んだ $mn$ 次正方行列だから, その行列式の値は $|A|^n$ である．$B'_{m,n}$ に関する $R_B$ の表現行列は $B$ が対角線に $m$ 個並んだ $mn$ 次正方行列だから, その行列式の値は $|B|^m$ である．従って問題 5 により, $L_A$, $R_B$ の行列式の値はそれぞれ, $|A|^n$, $|B|^m$ である．

19. (1) 実数 $a$, $b$ に対して $a\boldsymbol{v} + bf(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ が成り立つとする．この両辺を $f$ で写すと, $f$ の線形性と, 仮定 $f \circ f = -id_V$ から $-b\boldsymbol{v} + af(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ が得られる．この式の両辺に $-b$ をかけたものと, はじめの式の両辺に $a$ をかけたものを辺々加えれば $(a^2+b^2)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が得られるが, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ だから $a^2+b^2 = 0$ である．$a$, $b$ は実数だから $a = b = 0$ となり, $\boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{v})$ は 1 次独立である．

(2) $f(\boldsymbol{w}) = \sum\limits_{i=1}^{k}(a_i\boldsymbol{v}_i + b_if(\boldsymbol{v}_i)) + c\boldsymbol{w}$ $(a_i, b_i, c \in \boldsymbol{R})$ と表せるとする．この両辺を $f$ で写すと, $f$ の線形性と, 仮定 $f \circ f = -id_V$ から $-\boldsymbol{w} = \sum\limits_{i=1}^{k}(-b_i\boldsymbol{v}_i + a_if(\boldsymbol{v}_i)) + cf(\boldsymbol{w})$ が得られる．この式の右辺の $f(\boldsymbol{w})$ に, 最初の式の右辺を代入して整理すれば, $-(c^2+1)\boldsymbol{w} = \sum\limits_{i=1}^{k}((a_ic - b_i)\boldsymbol{v}_i + (a_i + b_ic)f(\boldsymbol{v}_i))$ が得られるが, $c$ は実数だから $-(c^2+1)$ は 0 でないため, この両辺を $-(c^2+1)$ で割ると, $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_k, f(\boldsymbol{v}_k)$ の 1 次結合で表されることになって仮定と矛盾する．故に $f(\boldsymbol{w})$ は $\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_k, f(\boldsymbol{v}_k), \boldsymbol{w}$ の 1 次結合ではない．

(3) $\dim V = 0$ ならば, 主張は明らかだから, $\dim V > 0$ と仮定する．このとき, $2k - 1 \leqq \dim V$ ならば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ で, $\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_k, f(\boldsymbol{v}_k)$ が 1 次独立になるものが選べることを $k$ による数学的

帰納法で示す．$\dim V > 0$ より，零ベクトルでない $\boldsymbol{v}_1 \in V$ をとれば，(1) から $\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1)$ は 1 次独立であるため，$k = 1$ のときは上の主張は成り立つ．$k = l - 1$ のとき，上の主張が成り立つと仮定すれば，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{l-1} \in V$ で，$\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_{l-1}, f(\boldsymbol{v}_{l-1})$ が 1 次独立になるものが選べる．$2l - 1 \leqq \dim V$ ならば，$2l - 2$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_{l-1}, f(\boldsymbol{v}_{l-1})$ は $V$ を生成しないため，これらの 1 次結合では表されない $V$ のベクトルがある．$\boldsymbol{v}_l$ をそのようなベクトルとすれば，教科書の補題 5.11 の (1) より，$\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_{l-1}, f(\boldsymbol{v}_{l-1}), \boldsymbol{v}_l$ は 1 次独立であり，(2) の結果から $f(\boldsymbol{v}_l)$ は $\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_{l-1}, f(\boldsymbol{v}_{l-1}), \boldsymbol{v}_l$ の 1 次結合ではない．再び教科書の補題 5.11 の (1) より，$\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_{l-1}, f(\boldsymbol{v}_{l-1}), \boldsymbol{v}_l, f(\boldsymbol{v}_l)$ は 1 次独立である．従って $k = l$ の場合も上の主張が成り立つ．

$n$ を $\dfrac{\dim V + 1}{2}$ 以下の最大の整数とすれば，$2n - 1 \leqq \dim V$ であるため，上で示したことから $2n$ 個の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_n, f(\boldsymbol{v}_n)$ が選べる．もし，これらのベクトルの 1 次結合で表されない $V$ のベクトル $\boldsymbol{w}$ が存在すれば，教科書の補題 5.11 の (1) より，$2n + 1$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_n, f(\boldsymbol{v}_n), \boldsymbol{w}$ が 1 次独立になるため，$\dim V \geqq 2n + 1$ である．このとき，$n + 1 \leqq \dfrac{\dim V + 1}{2}$ となるため，$n$ が $\dfrac{\dim V + 1}{2}$ 以下の最大の整数であるという仮定に反する．従って $\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_n, f(\boldsymbol{v}_n)$ は $V$ を生成するため，これらは $V$ の基底である．

$\boldsymbol{w}_{2i-1} = \boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{w}_{2i} = f(\boldsymbol{v}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とおくと $f(\boldsymbol{w}_{2i-1}) = \boldsymbol{w}_{2i}$, $f(\boldsymbol{w}_{2i}) = -\boldsymbol{w}_{2i-1}$ だから，2 次正方行列 $I$ を $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で定めれば $[\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_n, f(\boldsymbol{v}_n)]$ に関する $f$ の表現行列は $\begin{pmatrix} I & O & \cdots & O \\ O & I & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & I \end{pmatrix}$ という形の $2n$ 次正方行列である．

(4) $V$ の次元が偶数であることは (3) で示された．(3) で存在を示した $V$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_n, f(\boldsymbol{v}_n)$ を考え，$W_i = \langle \boldsymbol{v}_i, f(\boldsymbol{v}_i) \rangle$ とおくと，$f(f(\boldsymbol{v}_i)) = -\boldsymbol{v}_i$ より，$W_i$ は $f$ の不変部分空間である．教科書の問 5.15 の (2) から，$W_1 + W_2 + \cdots + W_n = \langle \boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_n, f(\boldsymbol{v}_n) \rangle = V$ であり，各 $W_i$ は 2 次元だから $\dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = \dim V = 2n = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_n$ が成り立つ．よって，教科書の命題 5.23 により $V$ は $W_1, W_2, \ldots, W_n$ の直和である．

# 線形数学 II 演習問題　第 17 回　計量ベクトル空間

1. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{C}^3$ とするとき, 以下の等式が成り立つことを示せ. ただし, $D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ は 3 次正方行列 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}\end{pmatrix}$ の行列式を表す.

(1) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} = -(\boldsymbol{y}, \bar{\boldsymbol{z}})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{z}})\boldsymbol{y}$　(2) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \bar{\boldsymbol{z}}) = (\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \times \bar{\boldsymbol{z}}) = D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

(3) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$　(4) $\|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2$

(5) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}) = D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w})\boldsymbol{z} - D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\boldsymbol{w} = D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})\boldsymbol{y} - D_3(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})\boldsymbol{x}$

(6) $|D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2\|\boldsymbol{z}\|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2|(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})|^2 - \|\boldsymbol{z}\|^2|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2 + 2\mathrm{Re}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}))$

2. 以下で与える計量ベクトル空間 $V$ に対し, 与えられた $V$ の基底 $B = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ をシュミットの直交化法によって正規直交化せよ. ただし (1)〜(14) の内積は標準内積とする.

(1) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]$.　(2) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]$.

(3) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right]$.　(4) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right]$.

(5) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$.　(6) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right]$.

(7) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$.　(8) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\right]$.

(9) $V = \boldsymbol{C}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix}1+i\\1\\-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\-i\\-i\end{pmatrix}\right]$.　(10) $V = \boldsymbol{R}^4$, $B = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-3\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\2\\4\end{pmatrix}\right]$.

(11) $V = \boldsymbol{R}^4$, $B = \left[\begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right]$.　(12) $V = \boldsymbol{R}^4$, $B = \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]$.

(13) $V = \boldsymbol{R}^4$, $B = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-2\\1\end{pmatrix}\right]$.　(14) $V = \boldsymbol{R}^4$, $B = \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right]$.

(15) $V = P_3(\boldsymbol{R})$, $(f(x), g(x)) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ $(a < b,\ f(x), g(x) \in V)$, $B = [1, x, x^2, x^3]$.

3. $\boldsymbol{K}^3$ の基底 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]$ をシュミットの直交化法によって正規直交化して得られる $\boldsymbol{K}^3$ の基底を $[\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}']$ とするとき, 基底 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]$ から $[\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}']$ への基底の変換行列の各成分を, $\|\boldsymbol{x}\|$, $\|\boldsymbol{y}\|$, $\|\boldsymbol{z}\|$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})$ および 3 次正方行列 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}\end{pmatrix}$ の行列式 $D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を用いて表せ.

4. 以下で与えられる $\boldsymbol{R}^3$ の基底を $\boldsymbol{R}^3$ の標準内積に関して正規直交化し, 与えられた基底から, 正規直交化して得られる基底への変換行列を求めよ.

(1) $\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\5\end{pmatrix}\right]$　(2) $\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right]$　(3) $\left[\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}\right]$　(4) $\left[\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\8\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\7\end{pmatrix}\right]$

5. 以下の連立１次方程式の解全体からなる $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間の正規直交基底を１組求めよ.

(1) $\begin{cases} x+y-2z-w=0 \\ y-z+w=0 \\ 2x+3y-5z-w=0 \\ x-z-2w=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y-z+2w=0 \\ y+z-w=0 \\ 2x-y-z+3w=0 \\ x-2y-2z+3w=0 \end{cases}$

6. (1) $(A,B) \in M_{m,n}(\boldsymbol{K}) \times M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ を $\mathrm{tr}\,(AB^*)$ に対応させる関数 $M_{m,n}(\boldsymbol{K}) \times M_{m,n}(\boldsymbol{K}) \to \boldsymbol{K}$ は $M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ の内積であることを示せ.

(2) 実数 $a < b$ に対し, $C[a,b]$ を閉区間 $[a,b]$ で定義され, 実数値をとる連続関数全体からなる, $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とする. 有限個の $x \in [a,b]$ を除いて $p(x) > 0$ である $p \in C[a,b]$ に対し, $(f,g) \in C[a,b] \times C[a,b]$ を $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)p(x)dx$ に対応させる関数 $C[a,b] \times C[a,b] \to \boldsymbol{R}$ は $C[a,b]$ の内積であることを示せ.

7. (1) $V$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, $W$ を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間とし, $f : V \to W$ を単射である１次写像とする. $W$ のベクトル $\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{z}$ の内積を $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z})_W$ で表して $\beta_f : V \times V \to \boldsymbol{K}$ を $\beta_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))_W$ で定めれば, $\beta_f$ は $V$ の内積になることを示せ.

(2) $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ を $\boldsymbol{K}$ の相異なる要素とし, $f : P_n(\boldsymbol{K}) \to \boldsymbol{K}^{n+1}$ を $f(\varphi(x)) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \varphi(a_k)\boldsymbol{e}_k$ により定めれば, $f$ は単射である１次写像であることを示せ. $\boldsymbol{K}^{n+1}$ の標準内積を考えれば, (1) によって $P_n(\boldsymbol{K})$ の内積 $\beta_f$ が $\beta_f(\varphi(x), \psi(x)) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \varphi(a_k)\overline{\psi(a_k)}$ が定義される.

(3) $P_2(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ を, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ の場合と $a_1 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ の場合に, (2) で定めた $P_2(\boldsymbol{R})$ の内積に関してシュミットの直交化法によって正規直交化せよ.

8. (発展問題) $B_1 = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $B_2 = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間 $V$ の２組の基底とし, $B_1$, $B_2$ に対してシュミットの直交化を行って得られる $V$ の正規直交基底をそれぞれ $B_1' = [\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \ldots, \boldsymbol{v}_n']$, $B_2' = [\boldsymbol{w}_1', \boldsymbol{w}_2', \ldots, \boldsymbol{w}_n']$ とする.

(1) $B_1'$ から $B_1$ への基底の変換行列の成分を, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \ldots, \boldsymbol{v}_n'$ の内積を用いて表し, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列であることを示せ.

(2) $B_1' = B_2'$ であるためには, $B_1$ から $B_2$ への基底の変換行列が, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列であることが必要十分であることを示せ.

9. (発展問題) $P(\boldsymbol{R})$ における内積を $(f(x), g(x))_P = \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ で定め, $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $m \neq n$ ならば $(P_m(x), P_n(x))_P = 0$ であることを示せ. また, $(P_n(x), P_n(x))_P$ を求めよ.

(2) $\rho_k = \|P_k(x)\|$ とおく. $P_n(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1, x, \ldots, x^n]$ を上で定めた内積に関し, シュミットの直交化法によって正規直交化すれば $\left[\dfrac{1}{\rho_0}P_0(x), \dfrac{1}{\rho_1}P_1(x), \ldots, \dfrac{1}{\rho_n}P_n(x)\right]$ が得られることを示せ.

(3) 0 以上の任意の整数 $n$ に対して $P_{n+2}(x) = \dfrac{2n+3}{n+2}xP_{n+1}(x) - \dfrac{n+1}{n+2}P_n(x)$ が成り立つことを示せ.

10. (発展問題) $x$ の多項式 $L_n(x)$ を $L_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^x}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$ で定める.

(1) $p(x) \in P(\boldsymbol{R})$ ならば, 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty p(x)e^{-x}dx$ は収束することを示せ.

(2) $f(x), g(x) \in P(\boldsymbol{R})$ に対し, $(f(x), g(x))_L = \displaystyle\int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx$ とおく. $(f(x), g(x)) \in P(\boldsymbol{R}) \times P(\boldsymbol{R})$ を $(f(x), g(x))_L$ に対応させる関数 $P(\boldsymbol{R}) \times P(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ は $P(\boldsymbol{R})$ の内積であることを示せ.

(3) $[L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)]$ は $P_n(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1, x, \ldots, x^n]$ を (2) の内積に関し, シュミットの直交化法によって正規直交化して得られる $P_n(\boldsymbol{R})$ の基底であることを示せ.

(4) 0 以上の任意の整数 $n$ に対して $L_{n+2}(x)=\dfrac{x-2n-3}{n+2}L_{n+1}(x)-\dfrac{n+1}{n+2}L_n(x)$ が成り立つことを示せ.

11. (発展問題) $x$ の多項式 $H_n(x)$ を $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}\big(e^{-x^2}\big)$ で定める.

(1) $p(x)\in P(\boldsymbol{R})$ ならば, 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}p(x)e^{-x^2}dx$ は絶対収束することを示せ.

(2) $f(x),g(x)\in P(\boldsymbol{R})$ に対し, $(f(x),g(x))_H=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx$ とおく. $(f(x),g(x))\in P(\boldsymbol{R})\times P(\boldsymbol{R})$ を $(f(x),g(x))_H$ に対応させる関数 $P(\boldsymbol{R})\times P(\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R}$ は $P(\boldsymbol{R})$ の内積であることを示せ.

(3) $H_n(x)$ は $x^n$ の係数が $2^n$ である $x$ の $n$ 次多項式であることを示せ.

(4) 0 以上の任意の整数 $n$ に対して $H_{n+2}(x)=2xH_{n+1}(x)-2(n+1)H_n(x)$ が成り立つことを示せ.

(5) $m\neq n$ ならば $(H_m(x),H_n(x))_H=0$ であることを示し, $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて $(H_n(x),H_n(x))_H$ を求めよ.

(6) $\eta_k=\|H_k(x)\|$ とおく. $P_n(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1,x,\dots,x^n]$ を (2) で定めた内積に関し, シュミットの直交化法によって正規直交化すれば $\left[\dfrac{1}{\eta_0}H_0(x),\dfrac{1}{\eta_1}H_1(x),\dots,\dfrac{1}{\eta_n}H_n(x)\right]$ が得られることを示せ.

12. (発展問題) $x$ の多項式 $T_n(x)$, $U_n(x)$ を帰納的に $T_1(x)=x$, $U_1(x)=1$, $T_{n+1}(x)=xT_n(x)+(x^2-1)U_n(x)$, $U_{n+1}(x)=T_n(x)+xU_n(x)$ で定める.

(1) $T_n(x)$ は $x^n$ の係数が $2^{n-1}$ である $x$ の $n$ 次多項式であり, $U_n(x)$ は $x^{n-1}$ の係数が $2^{n-1}$ である $x$ の $n-1$ 次多項式であることを示せ.

(2) 任意の自然数 $n$ に対して $T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)$, $U_{n+2}(x)=2xU_{n+1}(x)-U_n(x)$ が成り立つことを示せ.

(3) 任意の $\theta\in\boldsymbol{R}$ に対して $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$, $U_n(\cos\theta)\sin\theta=\sin n\theta$ が成り立つことを示せ.

(4) $p(x)\in P(\boldsymbol{R})$ ならば, 広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ は絶対収束することを示せ.

(5) $f(x),g(x)\in P(\boldsymbol{R})$ に対し, $(f(x),g(x))_T=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ とおく. $(f(x),g(x))\in P(\boldsymbol{R})\times P(\boldsymbol{R})$ を $(f(x),g(x))_T$ に対応させる関数 $P(\boldsymbol{R})\times P(\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R}$ は $P(\boldsymbol{R})$ の内積であることを示せ.

(6) $f(x),g(x)\in P(\boldsymbol{R})$ に対し, $(f(x),g(x))_U=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}\,dx$ とおく. $(f(x),g(x))\in P(\boldsymbol{R})\times P(\boldsymbol{R})$ を $(f(x),g(x))_U$ に対応させる関数 $P(\boldsymbol{R})\times P(\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R}$ は $P(\boldsymbol{R})$ の内積であることを示せ.

(7) $T_0(x)=1$ とおく. $m\neq n$ ならば $(T_m(x),T_n(x))_T=(U_m(x),U_n(x))_U=0$ であることを示し, $(T_n(x),T_n(x))_T$, $(U_n(x),U_n(x))_U$ を求めよ.

(8) $\tau_k=\|T_k(x)\|$ とおく. $P_n(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1,x,\dots,x^n]$ を (3) で定めた内積 $(f(x),g(x))_T$ に関してシュミットの直交化法によって正規直交化すれば, $\left[\dfrac{1}{\tau_0}T_0(x),\dfrac{1}{\tau_1}T_1(x),\dots,\dfrac{1}{\tau_n}T_n(x)\right]$ が得られることを示せ.

(9) $\upsilon_k=\|U_k(x)\|$ とおく. $P_n(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1,x,\dots,x^n]$ を (3) で定めた内積 $(f(x),g(x))_U$ に関してシュミットの直交化法によって正規直交化すれば, $\left[\dfrac{1}{\upsilon_1}U_1(x),\dfrac{1}{\upsilon_2}U_2(x),\dots,\dfrac{1}{\upsilon_{n+1}}U_{n+1}(x)\right]$ が得られることを示せ.

13. (発展問題) $V$ を $\boldsymbol{R}$ 上の計量ベクトル空間とする. $V$ の単位ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ に対して不等式

$$\cos^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\leqq\cos^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\cos^{-1}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

が成り立つことを示せ. また, この不等式の等号が成立するための条件を求めよ.

## 第 17 回の演習問題の解答

1. (1) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ の第 $j$ 成分 $(j=1,2,3)$ をそれぞれ $x_j$, $y_j$, $z_j$ とする．$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_1y_3 + x_3y_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$ より

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z} &= \begin{pmatrix} (-x_1y_3 + x_3y_1)z_3 - (x_1y_2 - x_2y_1)z_2 \\ -(x_2y_3 - x_3y_2)z_3 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_1 \\ (x_2y_3 - x_3y_2)z_2 - (-x_1y_3 + x_3y_1)z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y_2z_2 + y_3z_3)x_1 + (x_2z_2 + x_3z_3)y_1 \\ -(y_1z_1 + y_3z_3)x_2 + (x_1z_1 + x_3z_3)y_2 \\ -(y_1z_1 + y_2z_2)x_3 + (x_1z_1 + x_2z_2)y_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)x_1 + (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_1 \\ -(y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)x_2 + (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_2 \\ -(y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)x_3 + (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\boldsymbol{y},\bar{\boldsymbol{z}})x_1 \\ -(\boldsymbol{y},\bar{\boldsymbol{z}})x_2 \\ -(\boldsymbol{y},\bar{\boldsymbol{z}})x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{z}})y_1 \\ (\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{z}})y_2 \\ (\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{z}})y_3 \end{pmatrix} \\
&= -(\boldsymbol{y},\bar{\boldsymbol{z}})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{z}})\boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

(2) $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$ とおき，$A$ の $(i,j)$ 成分を $a_{ij}$ とすれば $i=1,2,3$ に対して $a_{i1} = x_i$, $a_{i3} = z_i$ だから，教科書の定理 4.14 の (1) から

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\bar{\boldsymbol{z}}) = (x_2y_3 - x_3y_2)z_1 - (x_1y_3 - x_3y_1)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3 = a_{13}|A_{13}| - a_{23}|A_{23}| + a_{33}|A_{33}| = |A| = D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

$$(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{y}}\times\bar{\boldsymbol{z}}) = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + a_{31}|A_{31}| = |A| = D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

(3) (2) と (1) の結果から

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w}) = ((\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\bar{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{w}) = (-(\boldsymbol{y},\bar{\bar{\boldsymbol{z}}})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x},\bar{\bar{\boldsymbol{z}}})\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}) = -(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})$$

(4) (3) で，とくに $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{y}$ の場合を考えれば，

$$\|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} = \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2$$

(5) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{C}^n$ に対して $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) = \overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})} = (\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}})$ が成り立つことに注意すれば，(1) と (2) の結果から

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w}) &= -(\boldsymbol{y},\bar{\boldsymbol{z}}\times\bar{\boldsymbol{w}})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{z}}\times\bar{\boldsymbol{w}})\boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w},\bar{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w},\bar{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{y} \\
&= -D_3(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})\boldsymbol{x} + D_3(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = -D_3(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\boldsymbol{x} + D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\boldsymbol{y}.
\end{aligned}
$$

また $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w}) = -(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w})\times(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})$ だから，今示した結果から

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w}) = -(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w})\times(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = -\left(-D_3(\boldsymbol{w},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{z} + D_3(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w}\right) = D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})\boldsymbol{z} - D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{w}.$$

(6) $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$ とおけば ${}^t\!A\overline{A} = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{x} \\ {}^t\boldsymbol{y} \\ {}^t\boldsymbol{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{x}} & \bar{\boldsymbol{y}} & \bar{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{x}\|^2 & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) & \|\boldsymbol{y}\|^2 & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) & \|\boldsymbol{z}\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{x}\|^2 & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \overline{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})} \\ \overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} & \|\boldsymbol{y}\|^2 & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) & \overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})} & \|\boldsymbol{z}\|^2 \end{pmatrix}$

だから，${}^t\!A\overline{A}$ の行列式を展開すると

$$
\begin{aligned}
\left|{}^t\!A\overline{A}\right| &= \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2\|\boldsymbol{z}\|^2 + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) + \overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})} - \|\boldsymbol{x}\|^2|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})|^2 - \|\boldsymbol{z}\|^2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2 \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2\|\boldsymbol{z}\|^2 + 2\mathrm{Re}((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})) - \|\boldsymbol{x}\|^2|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})|^2 - \|\boldsymbol{z}\|^2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2
\end{aligned}
$$

が得られる．一方，$D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = |A| = |{}^t\!A|$, $\overline{D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})} = \overline{|A|} = \left|\overline{A}\right|$ より $|D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|^2 = |{}^t\!A|\left|\overline{A}\right| = \left|{}^t\!A\overline{A}\right|$ だから，結果が得られる．

2. (1) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 2$, $(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1) = 1$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_1) = -1$, $(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_2) = -\dfrac{3}{2}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = \dfrac{3}{2}$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} +$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = 12$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]$ である.

(2) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 2$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = 1$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$.
$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = -1$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = \frac{15}{2}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = \frac{11}{2}$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{15}{22}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} = \frac{6}{11}\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \frac{36}{11}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}\right]$ である.

(3) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 3$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = -1$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$.
$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = 4$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = \frac{19}{3}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = \frac{14}{3}$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{19}{42}\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \frac{1}{14}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\right]$ である.

(4) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 9$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = 3$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.
$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = 4$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = \frac{2}{3}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = 1$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{4}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} - \frac{2}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{5}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \frac{25}{9}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right]$ である.

(5) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 2$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = 1$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = 1$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = \dfrac{1}{2}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = \dfrac{3}{2}$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} =$ $\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \dfrac{4}{3}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right]$ である.

(6) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 2$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = -1$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = -1$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = -\dfrac{1}{2}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = \dfrac{11}{2}$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} +$ $\dfrac{1}{22}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} = \dfrac{7}{11}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \dfrac{49}{11}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\right]$ である.

(7) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 3$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = -1$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = 0$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = 2$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = \dfrac{8}{3}$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \dfrac{1}{2}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]$ である.

(8) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 6$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = 3$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \dfrac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = 7$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = -\dfrac{5}{2}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = \dfrac{25}{2}$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} - \dfrac{7}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} +$ $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \dfrac{7}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \dfrac{49}{3}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは

$\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right]$ である.

(9) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1+i\\1\\-i\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 4$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = 2-2i$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\i\end{pmatrix} - \frac{1-i}{2}\begin{pmatrix}1+i\\1\\-i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1+i\\1+3i\end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = 2$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = -2$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = 4$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}i\\-i\\-i\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i\\1\\-i\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\1+i\\1+3i\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2i\\-1-3i\\1+i\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = 1$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i\\1\\-i\end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\1+i\\1+3i\end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2i\\-1-3i\\1+i\end{pmatrix}\right]$ である.

(10) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 4$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = -4$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = 0$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = 16$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1) = 4$, $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2) = -16$, $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3) = 0$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = 4$ より $\boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{v}_4 - \frac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3)}{\|\boldsymbol{w}_3\|^2}\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix}0\\-2\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_4\|^2 = 4$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right]$ である.

(11) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 9$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = 3$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\2\end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = 6$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = -2$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = 2$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1) = 3$, $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2) = 1$, $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3) = -1$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = 3$ より $\boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{v}_4 - \frac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3)}{\|\boldsymbol{w}_3\|^2}\boldsymbol{w}_3 =$

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_4\|^2=\frac{1}{6}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right]$ である.

(12) $\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2=2$, $(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)=0$ より $\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{v}_2-\frac{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_1)=(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_2)=1$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2=3$ より $\boldsymbol{w}_3=\boldsymbol{v}_3-\frac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1-\frac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-6\end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{w}_1)=(\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{w}_2)=1$, $(\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{w}_3)=\frac{1}{6}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2=\frac{7}{6}$ より $\boldsymbol{w}_4=\boldsymbol{v}_4-\frac{(\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1-\frac{(\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2-\frac{(\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{w}_3)}{\|\boldsymbol{w}_3\|^2}\boldsymbol{w}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{42}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-6\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_4\|^2=\frac{1}{7}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-6\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}\right]$ である.

(13) $\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2=4$, $(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)=4$ より $\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{v}_2-\frac{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_1)=4$, $(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_2)=-3$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2=6$ より $\boldsymbol{w}_3=\boldsymbol{v}_3-\frac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1-\frac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{w}_1)=2$, $(\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{w}_2)=3$, $(\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{w}_3)=-\frac{5}{2}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2=\frac{1}{2}$ より $\boldsymbol{w}_4=\boldsymbol{v}_4-\frac{(\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1-\frac{(\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2-\frac{(\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{w}_3)}{\|\boldsymbol{w}_3\|^2}\boldsymbol{w}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}+\frac{5}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_4\|^2=3$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法

により正規直交化したものは $\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right]$ である.

(14) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 4$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = -1$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\\3\\-3\\-1\end{pmatrix}$.
$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = -2$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = \frac{1}{2}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = \frac{11}{4}$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{22}\begin{pmatrix}5\\3\\-3\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}3\\4\\7\\6\end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1) = -1$, $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2) = \frac{7}{4}$, $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3) = \frac{2}{11}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \frac{10}{11}$ より $\boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{v}_4 - \frac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3)}{\|\boldsymbol{w}_3\|^2}\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{7}{44}\begin{pmatrix}5\\3\\-3\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{55}\begin{pmatrix}3\\4\\7\\6\end{pmatrix} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_4\|^2 = \frac{32}{5}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{11}}\begin{pmatrix}5\\3\\-3\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{110}}\begin{pmatrix}3\\4\\7\\6\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\2\end{pmatrix}\right]$ である.

(15) $\boldsymbol{w}_1 = 1$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = \int_a^b 1^2 dx = b - a$, $(x, \boldsymbol{w}_1) = \int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$ より $\boldsymbol{w}_2 = x - \frac{(x, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = x - \frac{a+b}{2}$.
$(x^2, \boldsymbol{w}_1) = \int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$, $(x^2, x) = \int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4 - a^4}{4}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{12}$ より $\boldsymbol{w}_3 = x^2 - \frac{(x^2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(x^2, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right) = x^2 - \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - (a+b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{12}$.
$(x^3, 1) = \int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4}$, $(x^3, x) = \int_a^b x^4 dx = \frac{b^5 - a^5}{5}$, $(x^3, x^2) = \int_a^b x^5 dx = \frac{b^6 - a^6}{6}$,
$\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{12}\right)^2 dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left(y^2 - \frac{(b-a)^2}{12}\right)^2 dy = \frac{(b-a)^5}{180}$ より
$\boldsymbol{w}_4 = x^3 - \frac{(x^3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(x^3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 - \frac{(x^3, \boldsymbol{w}_3)}{\|\boldsymbol{w}_3\|^2}\boldsymbol{w}_3 = x^3 - \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{4} - \frac{9a^2 + 12ab + 9b^2}{10}\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \frac{3(a+b)}{2}\left(x^2 - (a+b)x + \frac{a^2 + 4ab + b^2}{6}\right) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \frac{3(a-b)^2}{20}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$.
$\|\boldsymbol{w}_4\|^2 = \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \frac{3(a-b)^2}{20}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right)^2 dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left(y^3 - \frac{3(a-b)^2}{20}y\right)^2 dy = \frac{(b-a)^7}{2800}$ だから, 与えられた基底ををシュミットの直交化法により正規直交化して得られる基底は以下のようになる.

$$\left[\frac{1}{\sqrt{b-a}}, \frac{\sqrt{3}(2x-a-b)}{(b-a)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\sqrt{5}(3(2x-a-b)^2 - (b-a)^2)}{2(b-a)^{\frac{5}{2}}}, \frac{\sqrt{7}(5(2x-a-b)^3 - 3(b-a)^2(2x-a-b))}{2(b-a)^{\frac{7}{2}}}\right]$$

3. $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - \dfrac{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x} = -\dfrac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ とおけば,

$$\|\tilde{\boldsymbol{y}}\|^2 = \left(-\frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, -\frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\right) = -\frac{|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$$

$$(\boldsymbol{z},\tilde{\boldsymbol{y}}) = \left(\boldsymbol{z}, -\frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\right) = -\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2} + (\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) = \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})} - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$$

が成り立つ. さらに $\tilde{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{z} - \dfrac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x} - \dfrac{(\boldsymbol{z},\tilde{\boldsymbol{y}})}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}\|^2}\tilde{\boldsymbol{y}}$ とおけば, 上式より

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{z} - \frac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x} - \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})} - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}\left(-\frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\right)\\
&= \boldsymbol{z} - \frac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x} + \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})} - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2(\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2)}\boldsymbol{x} - \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})} - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}\boldsymbol{y}\\
&= \frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})} - \|\boldsymbol{y}\|^2(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}\boldsymbol{x} + \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) - \|\boldsymbol{x}\|^2\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})}}{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}
\end{aligned}$$

が得られる. $(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}}) = 0$ に注意し, 問題 1 の (6) の結果を用いると

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\boldsymbol{z}}\|^2 &= \left(\boldsymbol{z} - \frac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x} - \frac{(\boldsymbol{z},\tilde{\boldsymbol{y}})}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}\|^2}\tilde{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{z} - \frac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x} - \frac{(\boldsymbol{z},\tilde{\boldsymbol{y}})}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}\|^2}\tilde{\boldsymbol{y}}\right) = \|\boldsymbol{z}\|^2 - \frac{|(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} - \frac{|(\boldsymbol{z},\tilde{\boldsymbol{y}})|^2}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}\|^2}\\
&= \|\boldsymbol{z}\|^2 - \frac{|(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} - \frac{(\|\boldsymbol{x}\|^2\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})} - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}))(\|\boldsymbol{x}\|^2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) - \overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})})}{\|\boldsymbol{x}\|^2(\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2)}\\
&= \|\boldsymbol{z}\|^2 - \frac{|(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} - \frac{\|\boldsymbol{x}\|^4|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) - \|\boldsymbol{x}\|^2\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})} + |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2|(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2(\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2)}\\
&= \|\boldsymbol{z}\|^2 - \frac{|(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}\|^2|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|^2 - 2\mathrm{Re}((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}))}{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}\\
&= \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2\|\boldsymbol{z}\|^2 - \|\boldsymbol{z}\|^2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2|(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|^2 + 2\mathrm{Re}((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}))}{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}\\
&= \frac{|D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}
\end{aligned}$$

である. 故に $\|\tilde{\boldsymbol{y}}\| = \dfrac{\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}}{\|\boldsymbol{x}\|}$, $\|\tilde{\boldsymbol{z}}\| = \dfrac{|D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|}{\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}}$ が成り立つため, 次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}\|}\tilde{\boldsymbol{y}} &= -\frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{\|\boldsymbol{x}\|\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}}\boldsymbol{x} + \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}}\boldsymbol{y}\\
\frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{z}}\|}\tilde{\boldsymbol{z}} &= \frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})} - \|\boldsymbol{y}\|^2(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{|D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}}\boldsymbol{x} + \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) - \|\boldsymbol{x}\|^2\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})}}{|D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}}\boldsymbol{y} + \frac{\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}}{|D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|}\boldsymbol{z}
\end{aligned}$$

$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]$ をシュミットの直交化法によって正規直交化したものは $\left[\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}, \dfrac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}\|}\tilde{\boldsymbol{y}}, \dfrac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{z}}\|}\tilde{\boldsymbol{z}}\right]$ だから, 求める基底の変換行列は, 次で与えられる.

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} & \frac{-\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{\|\boldsymbol{x}\|\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}} & \frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})} - \|\boldsymbol{y}\|^2(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{|D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}}\\
0 & \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}} & \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) - \|\boldsymbol{x}\|^2\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})}}{|D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}}\\
0 & 0 & \frac{\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}}{|D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|}
\end{pmatrix}$$

4. 各問で与えられた基底を $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]$ とし, これを直交化して得られる正規直交基底を $[\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}']$ とする.

(1) $\|\boldsymbol{x}\| = 1$, $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{29}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2$, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 37$, $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = 1$, $D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = -5$ だから, 前問の結果から求める基底の変換行列は $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である. 従って $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}' = -\dfrac{2}{5}\boldsymbol{x} + \dfrac{1}{5}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}' = \dfrac{9}{5}\boldsymbol{x} - \dfrac{7}{5}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

(2) $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{2}$, $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{2}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = -1$, $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = -1$, $D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = -2$ だから, 前問の結果から求める基底の変換行列は $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ である. 従って $\boldsymbol{x}' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}' = -\dfrac{\sqrt{6}}{6}\boldsymbol{x} + \dfrac{\sqrt{6}}{3}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{z}' = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\boldsymbol{x} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\boldsymbol{y} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$.

(3) $\|\boldsymbol{x}\| = 3$, $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{10}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 5$, $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = -5$, $D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 3$ だから, 前問の結果から求める基底の変換行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{89}}{267} & \frac{55\sqrt{89}}{267} \\ 0 & \frac{3\sqrt{89}}{89} & -\frac{50\sqrt{89}}{267} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{89}}{3} \end{pmatrix}$ である. 従って $\boldsymbol{x}' = \dfrac{1}{3}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}' = -\dfrac{\sqrt{89}}{267}\boldsymbol{x} + \dfrac{3\sqrt{89}}{89}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -\frac{11\sqrt{89}}{267} \\ \frac{26\sqrt{89}}{267} \\ -\frac{2\sqrt{89}}{267} \end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{z}' = \dfrac{55\sqrt{89}}{267}\boldsymbol{x} - \dfrac{50\sqrt{89}}{267}\boldsymbol{y} + \dfrac{\sqrt{89}}{3}\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} -\frac{6\sqrt{89}}{89} \\ -\frac{2\sqrt{89}}{89} \\ \frac{7\sqrt{89}}{89} \end{pmatrix}$.

(4) $\|\boldsymbol{x}\| = 7$, $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{146}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 48$, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 84$, $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = 64$, $D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = -94$ だから, 前問の結果から求める基底の変換行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{24\sqrt{194}}{3395} & -\frac{1328\sqrt{194}}{22795} \\ 0 & \frac{7\sqrt{194}}{970} & -\frac{261\sqrt{194}}{22795} \\ 0 & 0 & \frac{5\sqrt{194}}{94} \end{pmatrix}$ である. 従って $\boldsymbol{x}' = \dfrac{1}{7}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}' = \dfrac{-48}{35\sqrt{194}}\boldsymbol{x} + \dfrac{7}{5\sqrt{194}}\boldsymbol{y} =$
$\begin{pmatrix} \frac{69\sqrt{194}}{1358} \\ \frac{124\sqrt{194}}{3395} \\ -\frac{239\sqrt{194}}{6790} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}' = -\dfrac{1328\sqrt{194}}{22795}\boldsymbol{x} - \dfrac{261\sqrt{194}}{22795}\boldsymbol{y} + \dfrac{5\sqrt{194}}{94}\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{194}}{194} \\ -\frac{26\sqrt{194}}{485} \\ \frac{11\sqrt{194}}{970} \end{pmatrix}$.

5. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x - z - 2w = 0 \\ y - z + w = 0 \end{cases}$ と同値である. $z = s$, $w = t$ とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2t \\ s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるため, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が $W$ の基底になる. そこで, $\boldsymbol{w}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{w}_2' = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_2'\|}\boldsymbol{w}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ は $W$ の正規直交基底になる.

(2) $\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\0&1&1&-1\\2&-1&-1&3\\1&-2&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\0&1&1&-1\\0&1&1&-1\\0&-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x+w=0\\y+z-w=0\end{cases}$ と同値である. $z=s$, $w=t$ とおくと $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\-s+t\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ となるため, $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ が $W$ の基底になる. そこで, $\boldsymbol{w}_1=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2'=\boldsymbol{v}_2-(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_2'\|}\boldsymbol{w}_2'=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2$ は $W$ の正規直交基底になる.

6. (1) 正方行列 $X$ に対し, $\mathrm{tr}({}^tX)=\mathrm{tr}(X)$, $\mathrm{tr}\left(\overline{X}\right)=\overline{\mathrm{tr}(X)}$ が成り立つことは容易に確かめられる. $A,B\in M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ に対して $(A,B)_{\mathrm{tr}}=\mathrm{tr}\,(AB^*)$ とおく. $A,B,C\in M_{m,n}(\boldsymbol{K})$, $r\in\boldsymbol{R}$ に対し, ${}^tA^*=\overline{A}$, $\overline{B^*}={}^tB$ が成り立つことに注意すれば, 以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(A+B,C)_{\mathrm{tr}}&=\mathrm{tr}((A+B)C^*)=\mathrm{tr}(AC^*+BC^*)=\mathrm{tr}(AC^*)+\mathrm{tr}(BC^*)=(A,C)_{\mathrm{tr}}+(B,C)_{\mathrm{tr}},\\(rA,B)_{\mathrm{tr}}&=\mathrm{tr}(rAB^*)=r\mathrm{tr}(AB^*)=r(A,B)_{\mathrm{tr}},\\(B,A)_{\mathrm{tr}}&=\mathrm{tr}(BA^*)=\mathrm{tr}\big({}^t(BA^*)\big)=\mathrm{tr}\big(({}^tA^*){}^tB\big)=\mathrm{tr}\big(\overline{AB^*}\big)=\overline{\mathrm{tr}(AB^*)}=\overline{(A,B)_{\mathrm{tr}}}\end{aligned}$$

$A\in M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ の $(i,j)$ 成分を $a_{ij}$ とすれば, $(A,A)_{\mathrm{tr}}=\mathrm{tr}(AA^*)=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$ だから $(A,A)_{\mathrm{tr}}\geqq 0$ であり, $(A,A)_{\mathrm{tr}}=0$ であることと, $A$ が零行列であることは同値である.

(2) $f,g\in C[a,b]$ に対し, $(f,g)_p=\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)p(x)dx$ とおく. $f,g,h\in C[a,b]$, $r\in\boldsymbol{R}$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(f+g,h)_p&=\int_a^b(f(x)+g(x))h(x)p(x)dx=\int_a^b(f(x)h(x)+g(x)h(x))p(x)dx\\&=\int_a^b f(x)h(x)p(x)dx+\int_a^b g(x)h(x)p(x)dx=(f,h)_p+(g,h)_p,\\(rf,g)_p&=\int_a^b rf(x)g(x)p(x)dx=r\int_a^b f(x)g(x)p(x)dx=r(f,g)_p,\\(g,f)_p&=\int_a^b g(x)f(x)p(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)p(x)dx=(f,g)_p\end{aligned}$$

もし, $p(\alpha)<0$ となる $\alpha\in[a,b]$ が存在すれば, $p$ の連続性から $r_1>0$ で, $x\in(\alpha-r_1,\alpha+r_1)\cap[a,b]$ ならば $|p(x)-p(\alpha)|<\dfrac{p(\alpha)}{2}$ を満たすものがあるため, $x\in(\alpha-r_1,\alpha+r_1)\cap[a,b]$ ならば $p(x)<\dfrac{3p(\alpha)}{2}<0$ となるが, $(\alpha-r_1,\alpha+r_1)\cap[a,b]$ は無限集合だから,「有限個の $x\in[a,b]$ を除いて $p(x)>0$ である.」という仮定と矛盾する. 故に, 任意の $x\in[a,b]$ に対して $p(x)\geqq 0$ である.

$f$ が常に値が $0$ である定数値関数でないならば, $f(\beta)\neq 0$ となる $\beta\in[a,b]$ が存在し, $f$ の連続性から $r_2>0$ で, $x\in(\beta-r_2,\beta+r_2)\cap[a,b]$ ならば $|f(x)-f(\beta)|<\dfrac{f(\beta)}{2}$ を満たすものがある. 従って $x\in(\beta-r_2,\beta+r_2)\cap[a,b]$ なら

ば $\dfrac{f(\beta)}{2} < f(x) < \dfrac{3f(\beta)}{2}$ となるため, $f(\beta) > 0$ ならば $f(x)^2 > \dfrac{f(\beta)^2}{4}$ であり, $f(\beta) < 0$ ならば $f(x)^2 > \dfrac{9f(\beta)^2}{4} > \dfrac{f(\beta)^2}{4}$ である. 故に $x \in (\beta - r_2, \beta + r_2) \cap [a, b]$ ならば $f(x)^2 > \dfrac{f(\beta)^2}{4}$ である.

一方, $c = \max\{a, \beta - r_2\}$, $d = \min\{b, \beta + r_2\}$ とおけば, $(\beta - r_2, \beta + r_2) \cap (a, b) = (c, d)$ であり, $(c, d)$ は無限集合だから, $p(\gamma) > 0$ となる $\gamma \in (c, d)$ が存在し, さらに $p$ の連続性から $0 < r_3 < \min\{\gamma - c, d - \gamma\}$ で, $x \in [\gamma - r_3, \gamma + r_3]$ ならば $|p(x) - p(\gamma)| < \dfrac{p(\gamma)}{2}$ となるものが存在する. このとき, $p(x) > \dfrac{p(\gamma)}{2}$ であり, $[\gamma - r_3, \gamma + r_3] \subset (c, d) = (\beta - r_2, \beta + r_2) \cap (a, b)$ だから, $x \in [\gamma - r_3, \gamma + r_3]$ ならば $f(x)^2 p(x) > \dfrac{f(\beta)^2 p(\gamma)}{8}$ が成り立つ. 故に

$$
\begin{aligned}
(f, f)_p = \int_a^b f(x)^2 p(x)dx &= \int_a^{\gamma - r_3} f(x)^2 p(x)dx + \int_{\gamma - r_3}^{\gamma + r_3} f(x)^2 p(x)dx + \int_{\gamma + r_3}^{b} f(x)^2 p(x)dx \\
&\geqq \int_{\gamma - r_3}^{\gamma + r_3} f(x)^2 p(x)dx \geqq \int_{\gamma - r_3}^{\gamma + r_3} \frac{f(\beta)^2 p(\gamma)}{8} dx = \frac{r_3 f(\beta)^2 p(\gamma)}{4} > 0
\end{aligned}
$$

である.

7. (1) $f$ の線形性と $(\ ,\ )_W$ が $W$ の内積であることから, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$, $r \in \boldsymbol{K}$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\beta_f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) &= (f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{z}))_W = (f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{z}))_W = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{z}))_W + (f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{z}))_W \\
&= \beta_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta_f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}), \\
\beta_f(r\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (f(r\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))_W = (rf(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))_W = r(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))_W = r\beta_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \\
\beta_f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) &= (f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}))_W = \overline{(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))_W} = \overline{\beta_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば, $f$ が単射であることから $f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ であるため, $\beta_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}))_W > 0$ が成り立つ. 以上から, $\beta_f$ は $V$ の内積である.

(2) $\varphi(x), \psi(x) \in P_n(\boldsymbol{K})$, $r, s \in \boldsymbol{K}$ に対し, 次の等式が成り立つため, $f$ は 1 次写像である.

$$
f(r\varphi(x) + s\psi(x)) = \sum_{k=1}^{n+1} (r\varphi(a_k) + s\psi(a_k))\boldsymbol{e}_k = r\sum_{k=1}^{n+1} \varphi(a_k)\boldsymbol{e}_k + s\sum_{k=1}^{n+1} \psi(a_k)\boldsymbol{e}_k = rf(\varphi(x)) + sf(\psi(x))
$$

$\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{n+1} c_j x^{j-1} \in P_n(\boldsymbol{R})$ が $f(\varphi(x)) = \boldsymbol{0}$ を満たせば $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \varphi(a_k)\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{0}$ だから, $\sum\limits_{j=1}^{n+1} a_k^{j-1} c_j = \varphi(a_k) = 0$ が $k = 1, 2, \ldots, n+1$ に対して成り立つ. そこで, $a_k^{j-1}$ を $(k, j)$ 成分とする $n+1$ 次正方行列を $A$ とし, $c_j$ を第 $j$ 成分とする $\boldsymbol{K}^{n+1}$ のベクトルを $\boldsymbol{c}$ とすれば, 上式から $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ である. 一方, $|A|$ は Vandermonde の行列式であり, $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ は相異なるため, $|A| = \prod\limits_{1 \leqq j \leqq k \leqq n} (a_k - a_j) \neq 0$ である. 従って $A$ は正則行列だから, $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ が得られるため, $c_1 = c_2 = \cdots = c_{n+1} = 0$, すなわち $\varphi(x) = 0$ である. 故に, $f$ は単射である.

(3) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ の場合 ; $\beta_f(1, 1) = \beta_f(x, 1) = 3$, $\beta_f(x, x) = \beta_f(x^2, 1) = 5$, $\beta_f(x^2, x) = 9$ だから $\varphi_1(x) = x - \dfrac{\beta_f(x, 1)}{\beta_f(1, 1)}$, $\varphi_2(x) = x^2 - \dfrac{\beta_f(x^2, 1)}{\beta_f(1, 1)} - \dfrac{\beta_f(x^2, \varphi_1(x))}{\beta_f(\varphi_1(x), \varphi_1(x))}\varphi_1(x)$ とおけば, $\varphi_1(x) = x - 1$, $\varphi_2(x) = x^2 - 2x + \dfrac{1}{3}$ である. さらに $\beta_f(\varphi_1(x), \varphi_1(x)) = 2$, $\beta_f(\varphi_2(x), \varphi_2(x)) = \dfrac{2}{3}$ だから, 求める正規直交基底は $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-1), \dfrac{1}{\sqrt{6}}(3x^2 - 6x + 1)\right]$ である.

$a_1 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ の場合 ; $\beta_f(1, 1) = 3$, $\beta_f(x, 1) = 0$, $\beta_f(x, x) = \beta_f(x^2, 1) = 2$, $\beta_f(x^2, x) = 0$ だから $\psi_1(x) = x - \dfrac{\beta_f(x, 1)}{\beta_f(1, 1)}$, $\psi_2(x) = x^2 - \dfrac{\beta_f(x^2, 1)}{\beta_f(1, 1)} - \dfrac{\beta_f(x^2, \psi_1(x))}{\beta_f(\psi_1(x), \psi_1(x))}\psi_1(x)$ とおけば, $\psi_1(x) = x$, $\psi_2(x) = x^2 - \dfrac{2}{3}$ である. さらに $\beta_f(\psi_1(x), \psi_1(x)) = 2$, $\beta_f(\psi_2(x), \psi_2(x)) = \dfrac{2}{3}$ だから, 求める正規直交基底は $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}x, \dfrac{1}{\sqrt{6}}(3x^2 - 2)\right]$ である.

8. (1) $\tilde{\boldsymbol{v}}_1, \tilde{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \tilde{\boldsymbol{v}}_n \in V$ を $\tilde{\boldsymbol{v}}_1 = \boldsymbol{v}_1$, $\tilde{\boldsymbol{v}}_j = \boldsymbol{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\boldsymbol{v}_j, \tilde{\boldsymbol{v}}_i)}{\|\tilde{\boldsymbol{v}}_i\|^2} \tilde{\boldsymbol{v}}_i$ によって帰納的に定めれば, $\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \dots, \boldsymbol{v}'_n$ は $\boldsymbol{v}'_j = \frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{v}}_j\|} \tilde{\boldsymbol{v}}_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ で与えられるため, $\|\tilde{\boldsymbol{v}}_j\| \boldsymbol{v}'_j = \tilde{\boldsymbol{v}}_j = \boldsymbol{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\boldsymbol{v}_j, \tilde{\boldsymbol{v}}_i)}{\|\tilde{\boldsymbol{v}}_i\|^2} \tilde{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}'_i) \boldsymbol{v}'_i$ が $j = 1, 2, \dots, n$ に対して成り立つ. 故に $\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{j-1} (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}'_i) \boldsymbol{v}'_i + \|\tilde{\boldsymbol{v}}_j\| \boldsymbol{v}'_j$ であり, $B'_1$ が正規直交基底であることに注意すれば, $(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}'_j) = \left( \sum_{i=1}^{j-1} (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}'_i) \boldsymbol{v}'_i + \|\tilde{\boldsymbol{v}}_j\| \boldsymbol{v}'_j, \boldsymbol{v}'_j \right) = \sum_{i=1}^{j-1} (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}'_i)(\boldsymbol{v}'_i, \boldsymbol{v}'_j) + \|\tilde{\boldsymbol{v}}_j\| (\boldsymbol{v}'_j, \boldsymbol{v}'_j) = \|\tilde{\boldsymbol{v}}_j\|$ が得られる. 従って $\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{j} (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}'_i) \boldsymbol{v}'_i$ となるため, $B'_1$ から $B_1$ への基底の変換行列の $(i, j)$ 成分は $i \leqq j$ ならば $(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}'_i)$ であり, $i > j$ ならば $0$ である. $B'_1$ から $B_1$ への基底の変換行列の $(j, j)$ 成分は $(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}'_j) = \|\tilde{\boldsymbol{v}}_j\|$ で, $\tilde{\boldsymbol{v}}_i \neq \boldsymbol{0}$ だから, 対角成分は $0$ でない実数である.

(2) $B'_1$ から $B_1$ への基底の変換行列を $P$, $B'_2$ から $B_2$ への基底の変換行列を $Q$ とし, さらに $B_1$ から $B_2$ への基底の変換行列を $A$, $B'_1$ から $B'_2$ への基底の変換行列を $B$ とする. このとき, $B$ は $V$ の恒等写像 $id_V : V \to V$ の $B'_2$, $B'_1$ に関する表現行列であり, $P$ は $id_V$ の $B_1$, $B'_1$ に関する表現行列だから, $P^{-1}$ は $id_V$ の $B'_1$, $B_1$ に関する表現行列であり, $P^{-1}B$ は $id_V \circ id_V = id_V$ の $B'_2$, $B_1$ に関する表現行列である. 一方, $Q$ は $id_V$ の $B_2$, $B'_2$ に関する表現行列だから, $Q^{-1}$ は $id_V$ の $B'_2$, $B_2$ に関する表現行列であり, $A$ は $id_V$ の $B_2$, $B_1$ に関する表現行列だから, $AQ^{-1}$ も $id_V \circ id_V = id_V$ の $B'_2$, $B_1$ に関する表現行列であるため $P^{-1}B = AQ^{-1}$ が成り立つ.

$B'_1 = B'_2$ ならば $B = E_n$ だから, $P^{-1}B = AQ^{-1}$ から $A = P^{-1}Q$ が得られる. (1) より, $P$, $Q$ は対角成分がすべて正の実数である上半三角行列だから, 第 4 回の演習問題 8 の (2) から $P^{-1}$ も対角成分がすべて正の実数である上半三角行列であり, さらに第 4 回の演習問題 8 の (1) から $A = P^{-1}Q$ も対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である.

$A$ が対角成分がすべて正の実数である上半三角行列であると仮定して, $\boldsymbol{v}'_j = \boldsymbol{w}'_j$ が $j = 1, 2, \dots, k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ に対して成り立つことを $k$ による数学的帰納法で示す.

$A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$ とおけば, 仮定から $i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ であり, $a_{ii}$ は正の実数である. 従って $\boldsymbol{w}_1 = a_{11}\boldsymbol{v}_1$ かつ $a_{11} > 0$ であり, $\boldsymbol{v}'_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} \boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{w}'_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} \boldsymbol{w}_1$ だから $\boldsymbol{w}'_1 = \frac{a_{11}}{\|a_{11}\boldsymbol{v}_1\|} \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}'_1$ が成り立つため, $k = 1$ の場合には帰納法の仮定は成り立つ. $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $\tilde{\boldsymbol{w}}_j = \|\tilde{\boldsymbol{w}}_j\| \boldsymbol{w}'_j$ であり, $\boldsymbol{v}'_j = \boldsymbol{w}'_j$ が $j = 1, 2, \dots, k-1$ に対して成り立つと仮定して, $\boldsymbol{w}_k = \sum_{i=1}^{k} a_{ik} \boldsymbol{v}_i$ および, (1) で得た等式 $\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{i} (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}'_j) \boldsymbol{v}'_j$ を用いて, $B'_1$ が正規直交基底であることに注意すれば, $j \geqq i+1$ ならば $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}'_j) = \left( \sum_{l=1}^{i} (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}'_l) \boldsymbol{v}'_l, \boldsymbol{v}'_j \right) = \sum_{l=1}^{i} (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}'_l)(\boldsymbol{v}'_l, \boldsymbol{v}'_j) = 0$ が成り立ち, (1) で得た等式 $(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}'_k) = \|\tilde{\boldsymbol{v}}_k\|$ を用いると, 次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\boldsymbol{w}}_k\| \boldsymbol{w}'_k = \tilde{\boldsymbol{w}}_k &= \boldsymbol{w}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\boldsymbol{w}_k, \tilde{\boldsymbol{w}}_j)}{\|\tilde{\boldsymbol{w}}_j\|^2} \tilde{\boldsymbol{w}}_j = \boldsymbol{w}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{w}'_j) \boldsymbol{w}'_j = \boldsymbol{w}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{v}'_j) \boldsymbol{v}'_j \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_{ik} \boldsymbol{v}_i - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k} a_{ik} (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}'_j) \boldsymbol{v}'_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ik} \left( \boldsymbol{v}_i - \sum_{j=1}^{k-1} (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}'_j) \boldsymbol{v}'_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_{ik} \left( \sum_{j=1}^{i} (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}'_j) \boldsymbol{v}'_j - \sum_{j=1}^{k-1} (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}'_j) \boldsymbol{v}'_j \right) = \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} \left( - \sum_{j=i+1}^{k-1} (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}'_j) \boldsymbol{v}'_j \right) + (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}'_k) \boldsymbol{v}'_k = \|\tilde{\boldsymbol{v}}_k\| \boldsymbol{v}'_k
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{v}'_k$ と $\boldsymbol{w}'_k$ はともに単位ベクトルだから, $\|\tilde{\boldsymbol{w}}_k\| \boldsymbol{w}'_k = \|\tilde{\boldsymbol{v}}_k\| \boldsymbol{v}'_k$ の両辺の長さを考えれば $\|\tilde{\boldsymbol{w}}_k\| = \|\tilde{\boldsymbol{v}}_k\|$ が得られる. $\|\tilde{\boldsymbol{v}}_k\|$ は $0$ でないので, $\|\tilde{\boldsymbol{w}}_k\| \boldsymbol{w}'_k = \|\tilde{\boldsymbol{v}}_k\| \boldsymbol{v}'_k$ の両辺に $\frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{w}}_k\|} = \frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{v}}_k\|}$ をかければ $\boldsymbol{w}'_k = \boldsymbol{v}'_k$ が得られ, 帰納法が進む.

9. (1) $f_m(x) = \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^n$ とおくと, $f_m(x)$ は $(x^2 - 1)^{n-m}$ で割り切れることを $m$ による数学的帰納法で示す. $f_0(x) = (x^2 - 1)^n$ だから $m = 0$ のときは, 主張が成り立つ. $f_{m-1}(x)$ が $(x^2 - 1)^{n-m+1}$ で割り切れると仮定して

$f_{m-1}(x)=(x^2-1)^{n-m+1}g(x)$ ($g(x)$ は $x$ の多項式) とおく.

$$\begin{aligned} f_m(x)=f'_{m-1}(x)&=2(n-m+1)x(x^2-1)^{n-m}g(x)+(x^2-1)^{n-m+1}g'(x)\\ &=(x^2-1)^{n-m}(2(n-m+1)xg(x)+(x^2-1)g'(x)) \end{aligned}$$

だから $f_m(x)$ は $(x^2-1)^{n-m}$ で割り切れる.

従って $m<n$ ならば $f_m(1)=f_m(-1)=0$ となるため, $m\geqq 1$ のとき部分積分法により

$$\int_{-1}^{1}x^k f_m(x)\,dx=\left[x^k f_{m-1}(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}kx^{k-1}f_{m-1}(x)\,dx=-k\int_{-1}^{1}x^{k-1}f_{m-1}(x)\,dx$$

である. この等式を繰り返し用いると $k\leqq n$ ならば

$$\int_{-1}^{1}x^k f_n(x)\,dx=-k\int_{-1}^{1}x^{k-1}f_{n-1}(x)\,dx=(-k)(-k+1)\int_{-1}^{1}x^{k-2}f_{n-2}(x)\,dx=\cdots=(-1)^k k!\int_{-1}^{1}f_{n-k}(x)\,dx$$

が成り立つ. $k<n$ の場合, 上式は $(-1)^k k!\left[f_{n-k-1}(x)\right]_{-1}^{1}=(-1)^k k!(f_{n-k-1}(1)-f_{n-k-1}(-1))=0$ に等しい. $k=n$ の場合は $x=\sin t$ とおいて置換積分をすれば, $\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\,dx=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ より

$$\int_{-1}^{1}x^n f_n(x)\,dx=(-1)^n n!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx=2n!\int_0^1(1-x^2)^n\,dx=\frac{2n!(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

が得られ, $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}f_n(x)$ だから, 上の結果から次の等式が得られる.

$$(x^k,P_n(x))_P=\int_{-1}^{1}x^kP_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & k=0,1,\dots,n-1\\ \dfrac{(2n)!!}{2^{n-1}(2n+1)!!} & k=n\end{cases}\quad\cdots\ (*)$$

$\dfrac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m$ は $x^{2m}$ の係数が 1 である $2m$ 次多項式を $m$ 回微分した多項式だから, $m$ 次多項式で, $x^m$ の係数は $(2m)(2m-1)\cdots(m+1)=\dfrac{(2m)!}{m!}$ である. 従って $P_m(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}c_{m,k}\,x^k$ とおくと, $c_{m,m}=\dfrac{(2m)!}{2^m(m!)^2}$ である. $(*)$ より $m<n$ ならば

$$\begin{aligned} (P_m(x),P_n(x))_P&=\left(\sum_{k=0}^{m}c_{m,k}\,x^k,P_n(x)\right)_P=\sum_{k=0}^{m}c_{m,k}(x^k,P_n(x))_P=0\\ (P_n(x),P_n(x))_P&=\left(\sum_{k=0}^{n}c_{n,k}\,x^k,P_n(x)\right)_P=\sum_{k=0}^{n}c_{n,k}(x^k,P_n(x))_P=c_{n,n}(x^n,P_n(x))_P=\frac{(2n)!(2n)!!}{2^{2n-1}(n!)^2(2n+1)!!}\\ &=\frac{2(2n)!(2n)!!}{(2^n n!)^2(2n+1)!!}=\frac{2(2n)!}{(2n+1)!}=\frac{2(2n)!(2n)!!}{((2n)!!)^2(2n+1)!!}=\frac{2(2n)!}{(2n+1)!}=\frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $\dfrac{1}{\rho_0}P_0(x),\dfrac{1}{\rho_1}P_1(x),\dots,\dfrac{1}{\rho_n}P_n(x)$ は $P_n(\boldsymbol{R})$ の正規直交系だから 1 次独立である. $\dim P_n(\boldsymbol{R})=n+1$ だから $\dfrac{1}{\rho_0}P_0(x),\dfrac{1}{\rho_1}P_1(x),\dots,\dfrac{1}{\rho_n}P_n(x)$ は $P_n(\boldsymbol{R})$ の正規直交基底になる. そこで, $B_1=[1,x,\dots,x^n]$, $B_2=\left[\dfrac{1}{\rho_0}P_0(x),\dfrac{1}{\rho_1}P_1(x),\dots,\dfrac{1}{\rho_n}P_n(x)\right]$ とおく. (1) の解答で $P_m(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}c_kx^k$ とおけば $c_m$ は正の実数 $\dfrac{(2m)!}{2^m(m!)^2}$ であることを示したため, $B_1$ から $B_2$ への基底の変換行列は, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である. $B_1$, $B_2$ に対してシュミットの直交化を行って得られる $V$ の正規直交基底をそれぞれ $B_1'$, $B_2'$ とすれば, $B_2$ はすでに $V$ の正規直交基底だから $B_2'=B_2$ である. 従って問題 8 の (2) から $B_1'=B_2$ である.

(3) $\left(x^k, \dfrac{2n+3}{n+2}xP_{n+1}(x) - \dfrac{n+1}{n+2}P_n(x)\right)_P = \dfrac{2n+3}{n+2}\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{k+1}P_{n+1}(x)\,dx - \dfrac{n+1}{n+2}\int_{-1}^{1} x^kP_n(x)\,dx$ だから, $(*)$ により $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ならば $\left(x^k, \dfrac{2n+3}{n+2}xP_{n+1}(x) - \dfrac{n+1}{n+2}P_n(x)\right)_P = 0$ であり,

$$\begin{aligned}\left(x^n, \frac{2n+3}{n+2}xP_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2}P_n(x)\right)_P &= \frac{2n+3}{n+2}\frac{(2n+2)!!}{2^n(2n+3)!!} - \frac{n+1}{n+2}\frac{(2n)!!}{2^{n-1}(2n+1)!!} \\ &= \frac{1}{n+2}\frac{(2n+2)!!}{2^n(2n+1)!!} - \frac{1}{n+2}\frac{(2n+2)!!}{2^n(2n+1)!!} = 0\end{aligned}$$

が成り立つため, $P_{n+2}(\boldsymbol{R})$ において, $\dfrac{2n+3}{n+2}xP_{n+1}(x) - \dfrac{n+1}{n+2}P_n(x) \in \langle 1, x, x^2, \ldots, x^n\rangle^\perp$ が成り立つ. 一方 (1) の結果から $\langle 1, x, x^2, \ldots, x^n\rangle^\perp = \langle P_{n+1}(x), P_{n+2}(x)\rangle$ だから $\dfrac{2n+3}{n+2}xP_{n+1}(x) - \dfrac{n+1}{n+2}P_n(x) = aP_{n+1}(x) + bP_{n+2}(x)$ を満たす実数 $a, b$ が存在する. $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ は $x$ の $n$ 次多項式で $x^n$ の係数は $\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$, $x^{n-1}$ の係数は 0 である. 従って $\dfrac{2n+3}{n+2}xP_{n+1}(x) - \dfrac{n+1}{n+2}P_n(x)$ の $x^{n+2}$ の係数は $\dfrac{2n+3}{n+2}\dfrac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2} = \dfrac{(2n+4)!}{2^{n+2}((n+2)!)^2}$, $x^{n+1}$ の係数は 0 であり, $aP_{n+1}(x) + bP_{n+2}(x)$ の $x^{n+2}$ の係数は $\dfrac{b(2n+4)!}{2^{n+2}((n+2)!)^2}$, $x^{n+1}$ の係数は $\dfrac{a(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}$ となるため, $a = 0$, $b = 1$ である.

10. (1) 0 以上の整数 $k$ に対して $I_k(t) = \displaystyle\int_0^t x^k e^{-x}dx$ とおけば, $I_0(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^t = 1 - e^{-t}$ であり, $k \geqq 1$ ならば部分積分法により $I_k(t) = \left[-x^k e^{-x}\right]_0^t + k\displaystyle\int_0^t x^{k-1}e^{-x}dx = kI_{k-1}(t) - t^k e^{-t}$ が得られる. 従って $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} I_0(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - e^{-t}\right) = 1$ であり, 帰納的に $\displaystyle\int_0^\infty x^{k-1}e^{-x}dx = (k-1)!$ が成り立つと仮定すれば, $\displaystyle\int_0^\infty x^k e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} I_k(t) = \lim_{t\to\infty}\left(kI_{k-1}(t) - t^k e^{-t}\right) = k\lim_{t\to\infty} I_{k-1}(t) - \lim_{t\to\infty} t^n e^{-t} = k(k-1)! = k!$ である. 故に, $p(x) \in P(\boldsymbol{R})$ に対して $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k$ とおけば,

$$\int_0^\infty p(x)e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t\left(\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right)e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_0^t c_k x^k e^{-x}dx = \sum_{k=0}^{n} c_k\left(\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^k e^{-x}dx\right) = \sum_{k=0}^{n} k!c_k$$

だから, $\displaystyle\int_0^\infty p(x)e^{-x}dx$ は $\sum\limits_{k=0}^{n} k!c_k$ に収束する.

(2) $f(x), g(x), h(x) \in P(\boldsymbol{R})$, $r \in \boldsymbol{R}$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x), h(x))_L &= \int_0^\infty (f(x)+g(x))h(x)e^{-x}dx = \int_0^\infty (f(x)h(x)+g(x)h(x))e^{-x}dx \\ &= \int_0^\infty f(x)h(x)e^{-x}dx + \int_0^\infty g(x)h(x)e^{-x}dx = (f(x), h(x))_L + (g(x), h(x))_L, \\ (rf(x), g(x))_L &= \int_0^\infty rf(x)g(x)e^{-x}dx = r\int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx = r(f(x), g(x))_L, \\ (g(x), f(x))_L &= \int_0^\infty g(x)f(x)e^{-x}dx = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx = (f(x), g(x))_L\end{aligned}$$

$f$ が常に値が 0 である定数値関数でないならば, $f$ が多項式関数であることから, $f(x) = 0$ を満たす $x \in \boldsymbol{R}$ は有限個である. 従って $f$ が常に値が 0 である定数値関数でないならば, $f(\alpha) \neq 0$ となる $\alpha \in [0, \infty)$ が存在し, $f$ の連続性から $r_2 > 0$ で, $x \in (\alpha - r_2, \alpha + r_2) \cap [0, \infty)$ ならば $|f(x) - f(\alpha)| < \dfrac{f(\alpha)}{2}$ を満たすものがある. そこで, $\max\{0, \alpha - r_2\} < a < b < \alpha + r_2$ を満たす $a, b$ を選べば, $x \in [a, b]$ ならば $\dfrac{f(\alpha)}{2} < f(x) < \dfrac{3f(\alpha)}{2}$ となるため, $f(\alpha) > 0$ ならば $f(x)^2 > \dfrac{f(\alpha)^2}{4}$ であり, $f(\alpha) < 0$ ならば $f(x)^2 > \dfrac{9f(\alpha)^2}{4} > \dfrac{f(\alpha)^2}{4}$ である. 故に $x \in [a, b]$ ならば

$f(x)^2 > \dfrac{f(\alpha)^2}{4}$ であり, このとき $e^{-x} \geqq e^{-b}$ だから, $x \in [a,b]$ ならば $f(x)^2e^{-x} > \dfrac{f(\alpha)^2e^{-b}}{4}$ が成り立つ. 故に

$$\begin{aligned}(f(x), f(x))_L &= \int_0^\infty f(x)^2e^{-x}dx = \int_0^a f(x)^2e^{-x}dx + \int_a^b f(x)^2e^{-x}dx + \int_b^\infty f(x)^2e^{-x}dx \\ &\geqq \int_a^b f(x)^2e^{-x}dx \geqq \int_a^b \frac{f(\alpha)^2e^{-b}}{4}dx = \frac{f(\alpha)^2e^{-b}(b-a)}{4} > 0\end{aligned}$$

である.

(3) $f_k(x) = \dfrac{(-1)^ne^x}{n!}\dfrac{d^k}{dx^k}(e^{-x}x^n)$ とおくと, ライプニッツの公式より

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{(-1)^{k+n-i}}{(n-i)!}x^{n-i} \ \cdots\ (*)$$

となる. よって, $k < n$ ならば $f_k(x)$ は $x^{n-k}$ で割り切れる $x$ の $n$ 次多項式であるため $f_k(0) = 0$ である. また, $(f_{k-1}(x)e^{-x})' = \left(\dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(x^ne^{-x})\right)' = \dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{d^k}{dx^k}(x^ne^{-x}) = f_k(x)e^{-x}$ であり, 任意の $n \geqq 0$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^ne^{-x} = 0$ だから, $x$ の任意の多項式 $p(x)$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty} p(x)e^{-x} = 0$ であるから $m \geqq 0$, $1 \leqq k \leqq n$ のとき, 部分積分法により

$$\int_0^\infty x^mf_k(x)e^{-x}dx = \left[x^mf_{k-1}(x)e^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty mx^{m-1}f_{k-1}(x)e^{-x}dx = -m\int_0^\infty x^{m-1}f_{k-1}(x)e^{-x}dx$$

である. この等式を繰り返し用いると $m \leqq k \leqq n$ ならば

$$\int_0^\infty x^mf_k(x)e^{-x}dx = -m\int_0^\infty x^{m-1}f_{k-1}(x)e^{-x}dx = \cdots = (-1)^mm!\int_0^\infty f_{k-m}(x)e^{-x}dx$$

が成り立つ. $m < k$ の場合, 上式は $(-1)^mm!\left[f_{k-m-1}(x)e^{-x}\right]_0^\infty = 0$ に等しい. $m = n$ の場合は, (1) の解答で得た結果を用いると

$$\int_0^\infty x^nf_n(x)e^{-x}dx = (-1)^nn!\int_0^\infty \frac{(-1)^nx^n}{n!}e^{-x}dx = n!$$

が得られる. $L_n(x) = f_n(x)$ だから, 上の結果から次の等式が得られる.

$$(x^m, L_n(x))_L = \int_0^\infty x^mL_n(x)e^{-x}dx = \begin{cases}0 & m = 0,1,\ldots,n-1 \\ n! & m = n\end{cases} \cdots\ (**)$$

$(*)$ より $L_m(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\frac{(-1)^{2m-i}}{(m-i)!}x^{m-i} = \sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{m-i}}{i!}\binom{m}{i}x^i$ だから, $(**)$ によって $m < n$ ならば

$$\begin{aligned}(L_m(x), L_n(x))_L &= \left(\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{m-i}}{i!}\binom{m}{i}x^i, L_n(x)\right)_L = \sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{m-i}}{i!}\binom{m}{i}(x^i, L_n(x))_L = 0 \\ (L_n(x), L_n(x))_L &= \left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!}\binom{n}{i}x^i, L_n(x)\right)_L = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!}\binom{n}{i}(x^i, L_n(x))_L = \frac{1}{n!}(x^n, L_n(x))_L = \frac{1}{n!}n! = 1.\end{aligned}$$

となるため, $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ は $P_n(\boldsymbol{R})$ の正規直交系である. 従って, これらは1次独立であり, $\dim P_n(\boldsymbol{R}) = n+1$ だから $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ は $P_n(\boldsymbol{R})$ の正規直交基底になる. そこで, $B_1 = [1, x, \ldots, x^n]$, $B_2 = [L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)]$ とおく. $L_j(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{j}\frac{(-1)^{j-i}}{i!}\binom{j}{i}x^i$ だから, $B_1$ から $B_2$ への基底の変換行列は, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である. $B_1$, $B_2$ に対してシュミットの直交化を行って得られる $V$ の正規直交基底をそれぞれ $B_1'$, $B_2'$ とすれば, $B_2$ はすでに $V$ の正規直交基底だから $B_2' = B_2$ である. 従って問題 8 の (2) から $B_1' = B_2$ である.

(4) 上でみたように $L_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^{n-k}}{k!}\dbinom{n}{k}x^k$ だから, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}L_{n+2}(x)&=\frac{1}{(n+2)!}x^{n+2}-\frac{n+2}{(n+1)!}x^{n+1}+\frac{(n+1)(n+2)}{2n!}x^n+(x\text{ の }n-1\text{ 次以下の項})\\ \frac{x}{n+2}L_{n+1}(x)&=\frac{1}{(n+2)!}x^{n+2}-\frac{n+1}{(n+2)n!}x^{n+1}+\frac{n(n+1)}{2(n+2)(n-1)!}x^n+(x\text{ の }n-1\text{ 次以下の項})\end{aligned}$$

故に $L_{n+2}(x)-\dfrac{x}{n+2}L_{n+1}(x)=-\dfrac{2n+3}{(n+2)!}x^{n+1}+\dfrac{2(n+1)^2}{(n+2)n!}x^n+(x$ の $n-1$ 次以下の項) であり,

$$\frac{2n+3}{n+2}L_{n+1}(x)=\frac{2n+3}{(n+2)!}x^{n+1}-\frac{(n+1)(2n+3)}{(n+2)n!}x^n+(x\text{ の }n-1\text{ 次以下の項})$$

が成り立つため, $L_{n+2}(x)-\dfrac{x-2n-3}{n+2}L_{n+1}(x)=-\dfrac{n+1}{(n+2)n!}x^n+(x$ の $n-1$ 次以下の項) が得られる. さらに, $\dfrac{n+1}{n+2}L_n(x)=\dfrac{n+1}{(n+2)n!}x^n+(x$ の $n-1$ 次以下の項) だから $L_{n+2}(x)-\dfrac{x-2n-3}{n+2}L_{n+1}(x)+\dfrac{n+1}{n+2}L_n(x)$ は $x$ の $n-1$ 次以下の多項式である. 一方, $(x^k,xL_m(x))_L=\displaystyle\int_0^\infty x^{k+1}L_m(x)e^{-x}dx=(x^{k+1},L_m(x))_L$ であることに注意すれば, $k\leqq n-1$ の場合, $(**)$ から次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}\left(x^k,L_{n+2}(x)-\frac{x-2n-3}{n+2}L_{n+1}(x)+\frac{n+1}{n+2}L_n(x)\right)_L&=(x^k,L_{n+2}(x))_L-\frac{1}{n+2}(x^k,xL_{n+1}(x))\\&\quad+\frac{2n+3}{n+2}(x^k,L_{n+1}(x))+\frac{n+1}{n+2}(x^k,L_n(x))=0\end{aligned}$$

従って $P_{n-1}(\boldsymbol{R})$ において, $L_{n+2}(x)-\dfrac{x-2n-3}{n+2}L_{n+1}(x)+\dfrac{n+1}{n+2}L_n(x)\in\langle 1,x,x^2,\dots,x^{n-1}\rangle^\perp=\{0\}$ が成り立つため, $L_{n+2}(x)-\dfrac{x-2n-3}{n+2}L_{n+1}(x)+\dfrac{n+1}{n+2}L_n(x)=0$ である.

11. (1) $J_n(t)=\displaystyle\int_0^t x^ne^{-x^2}dx$ によって関数 $J_n:[0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を定めれば, $J_n'(t)=t^ne^{-t^2}\geqq 0$ だから, $J_n(t)$ は単調増加関数である. $x\geqq 1$ ならば $e^{-x^2}\leqq e^{-x}$ だから, 問題 10 の (1) の解答で示したことから $t\geqq 1$ ならば

$$\begin{aligned}J_n(t)&=\int_0^t x^ne^{-x^2}dx=\int_0^1 x^ne^{-x^2}dx+\int_1^t x^ne^{-x^2}dx\leqq\int_0^1 x^ne^{-x^2}dx+\int_1^t x^ne^{-x}dx\\&=\int_0^1 x^n\left(e^{-x^2}-e^{-x}\right)dx+\int_0^t x^ne^{-x}dx\leqq\int_0^1 x^n\left(e^{-x^2}-e^{-x}\right)dx+\int_0^\infty x^ne^{-x}dx\\&\leqq\int_0^1 x^n\left(e^{-x^2}-e^{-x}\right)dx+n!\end{aligned}$$

が成り立つ. 故に $J_n(t)$ は上に有界だから $\displaystyle\int_0^\infty x^ne^{-x^2}dx$ は収束する. $s<0$ に対し, $y=-x$ と変数変換を行えば $\displaystyle\int_s^0\left|x^ne^{-x^2}\right|dx=\int_0^{-s}y^ne^{-y^2}dy=J_n(-s)$ となるため, 上で示したことから, $\displaystyle\int_{-\infty}^0\left|x^ne^{-x^2}\right|dx$ は収束する. 従って $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x^ne^{-x^2}dx$ は絶対収束するため, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^ne^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^0 x^ne^{-x^2}dx+\int_0^\infty x^ne^{-x^2}dx$ も絶対収束する. $p(x)\in P(\boldsymbol{R})$ に対して $p(x)=\sum\limits_{k=0}^n c_kx^k$ とおけば,

$$\int_{-\infty}^\infty p(x)e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^\infty\left(\sum_{k=0}^n c_kx^k\right)e^{-x^2}dx=\sum_{k=0}^n\int_{-\infty}^\infty c_kx^ke^{-x^2}dx=\sum_{k=0}^n c_k\left(\int_{-\infty}^\infty x^ke^{-x^2}dx\right)$$

だから, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty p(x)e^{-x^2}dx$ も絶対収束する.

(2) $f(x), g(x), h(x) \in P(\boldsymbol{R})$, $r \in \boldsymbol{R}$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x), h(x))_H &= \int_{-\infty}^{\infty}(f(x)+g(x))h(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}(f(x)h(x)+g(x)h(x))\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx = (f(x), h(x))_H + (g(x), h(x))_H, \\ (rf(x), g(x))_H &= \int_{-\infty}^{\infty} rf(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx = r\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx = r(f(x), g(x))_H, \\ (g(x), f(x))_H &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx = (f(x), g(x))_H\end{aligned}$$

$f$ が常に値が $0$ である定数値関数でないならば, $f(\alpha) \neq 0$ となる $\alpha \in \boldsymbol{R}$ が存在し, $f$ の連続性から $r_2 > 0$ で, $x \in (\alpha - r_2, \alpha + r_2)$ ならば $|f(x) - f(\alpha)| < \dfrac{f(\alpha)}{2}$ を満たすものがある. そこで, $\alpha - r_2 < a < b < \alpha + r_2$ を満たす $a$, $b$ を選べば, $x \in [a, b]$ ならば $\dfrac{f(\alpha)}{2} < f(x) < \dfrac{3f(\alpha)}{2}$ となるため, $f(\alpha) > 0$ ならば $f(x)^2 > \dfrac{f(\alpha)^2}{4}$ であり, $f(\alpha) < 0$ ならば $f(x)^2 > \dfrac{9f(\alpha)^2}{4} > \dfrac{f(\alpha)^2}{4}$ である. 故に $x \in [a, b]$ ならば $f(x)^2 > \dfrac{f(\alpha)^2}{4}$ であり, このとき $c = \max\{|a|, |b|\}$ とおけば $e^{-x^2} \geqq e^{-c^2}$ だから, $x \in [a, b]$ ならば $f(x)^2 e^{-x^2} > \dfrac{f(\alpha)^2 e^{-c^2}}{4}$ が成り立つ. 故に

$$\begin{aligned}(f(x), f(x))_H &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)^2\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx + \int_{a}^{b} f(x)^2\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx + \int_{b}^{\infty} f(x)^2\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx \\ &\geqq \int_{a}^{b} f(x)^2\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx \geqq \int_{a}^{b}\frac{f(\alpha)^2 e^{-c^2}}{4}dx = \frac{f(\alpha)^2 e^{-c^2}(b-a)}{4} > 0\end{aligned}$$

である.

(3) $(-1)^n\dfrac{d^n}{dx^n}\bigl(e^{-x^2}\bigr) = e^{-x^2}H_n(x)$ の両辺を微分すると $(-1)^n\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\bigl(e^{-x^2}\bigr) = -2xe^{-x^2}H_n(x) + e^{-x^2}H_n'(x)$ となる. この両辺に $-e^{x^2}$ をかけて $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$ を得る.

$n$ による数学的帰納法で, $H_n(x)$ は $x^n$ の係数が $2^n$ である $x$ の $n$ 次多項式であることを示す. $H_1(x) = 2x$ だから $n = 1$ のとき, 主張は正しい. $n = k$ のときに主張が正しいと仮定すると, $2xH_k(x)$ は $x^{k+1}$ の係数が $2^{k+1}$ である $x$ の $k+1$ 次多項式であり, $H_k'(x)$ は $x$ の $k-1$ 次多項式だから, $H_{k+1}(x) = 2xH_k(x) - H_k'(x)$ は $x^{k+1}$ の係数が $2^{k+1}$ である $x$ の $k+1$ 次多項式である.

(4) $\dfrac{d}{dx}\bigl(e^{-x^2}\bigr) = -2xe^{-x^2}$ よりライプニッツの公式から

$$\begin{aligned}H_{n+2}(x) &= (-1)^{n+2}e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\bigl(-2xe^{-x^2}\bigr) = (-1)^{n+1}2e^{x^2}\left(x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\bigl(e^{-x^2}\bigr) + (n+1)\frac{d^n}{dx^n}\bigl(e^{-x^2}\bigr)\right) \\ &= 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x)\end{aligned}$$

(5) 任意の $n \geqq 0$ に対して $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^{-x^2} = 0$ だから, $x$ の任意の多項式 $p(x)$ に対して $\lim\limits_{x\to\infty} p(x)e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} p(x)e^{-x^2} = 0$ であることに注意する. $m \geqq 0$, $n \geqq 1$ のとき部分積分法により

$$\begin{aligned}(x^m, H_n(x))_H &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n x^m}{\sqrt{\pi}}\frac{d^n}{dx^n}\bigl(e^{-x^2}\bigr)dx = \left[\frac{(-1)^n x^m}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\bigl(e^{-x^2}\bigr)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n m x^{m-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\bigl(e^{-x^2}\bigr)dx \\ &= m\int_{-\infty}^{\infty} x^{m-1}H_{n-1}(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx = m(x^{m-1}, H_{n-1}(x))_H\end{aligned}$$

である. この等式を繰り返し用いると $m \leqq n$ ならば次の等式が成り立つ.

$$(x^m, H_n(x))_H = m(x^{m-1}, H_{n-1}(x))_H = \cdots = m!(1, H_{n-m}(x))_H = m!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{n-m}}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\bigl(e^{-x^2}\bigr)dx$$

$m<n$ の場合, 上式は $m!\left[\dfrac{(-1)^{n-m}}{\sqrt{\pi}}\dfrac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}\left(e^{-x^2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}=m!\left[-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}H_{n-m-1}(x)e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty}=0$ に等しく, $m=n$ の場合は $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ より, 上式は $\displaystyle n!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx=2n!\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx=n!$ に等しい. 故に次の等式が成り立つ.

$$(x^m,H_n(x))_H=\begin{cases}0 & m=0,1,\dots,n-1\\ n! & m=n\end{cases}$$

(3) より $H_m(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}c_{m,k}x^k$ $(c_{m,m}=2^m)$ と表せるため, 上式により $m<n$ ならば次の等式が成り立つ.

$$(H_m(x),H_n(x))_H=\left(\sum_{k=0}^{m}c_{m,k}x^k,H_n(x)\right)_H=\sum_{k=0}^{m}c_{m,k}(x^k,H_n(x))_H=0$$
$$(H_n(x),H_n(x))_H=\left(\sum_{k=0}^{n}c_{n,k}x^k,H_n(x)\right)_H=\sum_{k=0}^{n}c_{n,k}(x^k,H_n(x))_H=c_{n,n}(x^n,H_n(x))_H=2^nn!$$

(6) 上の結果から $\dfrac{1}{\eta_0}H_0(x),\dfrac{1}{\eta_1}H_1(x),\dots,\dfrac{1}{\eta_n}H_n(x)$ は $P_n(\boldsymbol{R})$ の正規直交系だから 1 次独立である. $\dim P_n(\boldsymbol{R})=n+1$ だから $\dfrac{1}{\eta_0}H_0(x),\dfrac{1}{\eta_1}H_1(x),\dots,\dfrac{1}{\eta_n}H_n(x)$ は $P_n(\boldsymbol{R})$ の正規直交基底になる. そこで, $B_1=[1,x,\dots,x^n]$, $B_2=\left[\dfrac{1}{\eta_0}H_0(x),\dfrac{1}{\eta_1}H_1(x),\dots,\dfrac{1}{\eta_n}H_n(x)\right]$ とおく. (3) より $H_m(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}c_{m,k}x^k$ とおけば $c_{m,m}$ は正の実数 $2^m$ だから, $B_1$ から $B_2$ への基底の変換行列は, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である. $B_1$, $B_2$ に対してシュミットの直交化を行って得られる $V$ の正規直交基底をそれぞれ $B_1'$, $B_2'$ とすれば, $B_2$ はすでに $V$ の正規直交基底だから $B_2'=B_2$ である. 従って問題 8 の (2) から $B_1'=B_2$ である.

12. (1) $n$ による数学的帰納法によって主張を示す. $T_1(x)=x$, $U_1(x)=1$ だから, $n=1$ の場合は主張は成り立つ. $n$ のときに主張が成り立つならば, $T_{n+1}(x)=xT_n(x)+(x^2-1)U_n(x)$ だから $T_{n+1}(x)$ の $x^{n+1}$ の係数は $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$ であり, $U_{n+1}(x)=T_n(x)+xU_n(x)$ だから $U_{n+1}(x)$ の $x^n$ の係数も $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$ である. 従って $n+1$ のときも主張が成り立つ.

(2) $T_n(x)$, $U_n(x)$ の定義から $T_{n+1}(x)=x(T_n(x)+xU_n(x))-U_n(x)=xU_{n+1}(x)-U_n(x)$ である. 従って

$$\begin{aligned}T_{n+2}(x)-2xT_{n+1}(x)+T_n(x)&=xU_{n+2}(x)-U_{n+1}(x)+T_n(x)-2xT_{n+1}(x)\\&=x(U_{n+2}(x)-U_n(x)-2T_{n+1}(x))\\&=x(T_{n+1}(x)+xU_{n+1}(x)-U_n(x)-2T_{n+1}(x))\\&=x(xU_{n+1}(x)-U_n(x)-T_{n+1}(x))=0\\U_{n+2}(x)-2xU_{n+1}(x)+U_n(x)&=T_{n+1}(x)+xU_{n+1}(x)-2xU_{n+1}(x)+U_n(x)\\&=xU_{n+1}(x)-U_n(x)-xU_{n+1}(x)+U_n(x)=0.\end{aligned}$$

(3) $n$ による数学的帰納法によって主張を示す. $T_1(\cos\theta)=\cos\theta$, $U_1(\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta$ だから, $n=1$ の場合は主張は成り立つ. $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$, $U_n(\cos\theta)\sin\theta=\sin n\theta$ が成り立つと仮定すれば,

$$T_{n+1}(\cos\theta)=\cos\theta T_n(\cos\theta)+(\cos^2\theta-1)U_n(\cos\theta)=\cos\theta\cos n\theta+\sin\theta\sin n\theta=\cos((n+1)\theta)$$
$$U_{n+1}(\cos\theta)\sin\theta=T_n(\cos\theta)\sin\theta+\cos\theta U_n(\cos\theta)\sin\theta=\cos n\theta\sin\theta+\cos\theta\sin n\theta=\sin((n+1)\theta)$$

だから, $n+1$ のときも主張が成り立つ.

(4) $x=\sin\theta$ と変数変換を行えば,

$$\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\lim_{t\to1-0}\int_0^t\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\lim_{t\to1-0}\int_0^{\sin^{-1}t}\sin^n\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta$$

となるため, 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ は収束する. 同様に, $x=-\sin\theta$ と変数変換を行えば,

$$\int_{-1}^0 \frac{|x|^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{t\to -1+0}\int_t^0 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{t\to -1+0}\int_{-\sin^{-1}t}^0 |\sin^n\theta|\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\,d\theta$$

となるため, 広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{|x|^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ も収束する. 従って, 広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ は絶対収束するため, 任意の $p(x)\in P(\boldsymbol{R})$ に対して, 広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ は絶対収束する.

(5) $f(x), g(x), h(x) \in P(\boldsymbol{R})$, $r\in\boldsymbol{R}$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
(f(x)+g(x), h(x))_T &= \int_{-1}^1 \frac{(f(x)+g(x))h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^1 \frac{f(x)h(x)+g(x)h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \int_{-1}^1 \frac{f(x)h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{-1}^1 \frac{g(x)h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (f(x),h(x))_T + (g(x),h(x))_T, \\
(rf(x), g(x))_T &= \int_{-1}^1 \frac{rf(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = r\int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = r(f(x),g(x))_T, \\
(g(x), f(x))_T &= \int_{-1}^1 \frac{g(x)f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (f(x),g(x))_T
\end{aligned}$$

$f$ が常に値が $0$ である定数値関数でないならば, $f$ が多項式関数であることから, $f(x)=0$ を満たす $x\in\boldsymbol{R}$ は有限個である. 従って $f(\alpha)\neq 0$ となる $\alpha\in[-1,1]$ が存在し, $f$ の連続性から $r>0$ で, $x\in(\alpha-r,\alpha+r)\cap[-1,1]$ ならば $|f(x)-f(\alpha)|<\dfrac{f(\alpha)}{2}$ を満たすものがある. そこで, $\alpha-r<a<b<\alpha+r$ を満たす $a,b\in(-1,1)$ を選べば, $x\in[a,b]$ ならば $\dfrac{f(\alpha)}{2}<f(x)<\dfrac{3f(\alpha)}{2}$ となるため, $f(\alpha)>0$ ならば $f(x)^2>\dfrac{f(\alpha)^2}{4}$ であり, $f(\alpha)<0$ ならば $f(x)^2>\dfrac{9f(\alpha)^2}{4}>\dfrac{f(\alpha)^2}{4}$ である. 故に $x\in[a,b]$ ならば $f(x)^2>\dfrac{f(\alpha)^2}{4}$ であり, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\geqq 1$ であることに注意すれば, 次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
(f(x), f(x))_T &= \int_{-1}^1 \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^a \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_a^b \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_b^1 \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&\geqq \int_a^b \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \geqq \int_a^b \frac{f(\alpha)^2}{4}\,dx = \frac{f(\alpha)^2(b-a)}{4} > 0
\end{aligned}$$

(6) $f(x), g(x), h(x) \in P(\boldsymbol{R})$, $r\in\boldsymbol{R}$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
(f(x)+g(x), h(x))_U &= \int_{-1}^1 (f(x)+g(x))h(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-1}^1 f(x)h(x)+g(x)h(x)\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= \int_{-1}^1 f(x)h(x)\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{-1}^1 g(x)h(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = (f(x),h(x))_U + (g(x),h(x))_U, \\
(rf(x), g(x))_U &= \int_{-1}^1 rf(x)g(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = r\int_{-1}^1 f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = r(f(x),g(x))_U, \\
(g(x), f(x))_U &= \int_{-1}^1 g(x)f(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = (f(x),g(x))_U
\end{aligned}$$

$f$ が常に値が $0$ である定数値関数でないならば, $f$ が多項式関数であることから, $f(x)=0$ を満たす $x\in\boldsymbol{R}$ は有限個である. 従って $f(\alpha)\neq 0$ となる $\alpha\in[-1,1]$ が存在し, $f$ の連続性から $r>0$ で, $x\in(\alpha-r,\alpha+r)\cap[-1,1]$ ならば $|f(x)-f(\alpha)|<\dfrac{f(\alpha)}{2}$ を満たすものがある. そこで, $\alpha-r<a<b<\alpha+r$ を満たす $a,b\in(-1,1)$ を選べば, $x\in[a,b]$ ならば $\dfrac{f(\alpha)}{2}<f(x)<\dfrac{3f(\alpha)}{2}$ となるため, $f(\alpha)>0$ ならば $f(x)^2>\dfrac{f(\alpha)^2}{4}$ であり, $f(\alpha)<0$ な

らば $f(x)^2 > \dfrac{9f(\alpha)^2}{4} > \dfrac{f(\alpha)^2}{4}$ である．故に $x \in [a,b]$ ならば $f(x)^2 > \dfrac{f(\alpha)^2}{4}$ であり, $c = \max\{|a|,|b|\}$ とおけば $\sqrt{1-x^2} \geqq \sqrt{1-c^2} > 0$ であることに注意すれば, 次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(f(x),f(x))_U &= \int_{-1}^{1} f(x)^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-1}^{a} f(x)^2\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{a}^{b} f(x)^2\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{b}^{1} f(x)^2\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &\geqq \int_{a}^{b} f(x)^2\sqrt{1-x^2}\,dx \geqq \int_{a}^{b} \frac{f(\alpha)^2}{4}\sqrt{1-c^2}\,dx = \frac{f(\alpha)^2(b-a)\sqrt{1-c^2}}{4} > 0\end{aligned}$$

(7) $x = \cos\theta$ と変数変換を行い, (3) の結果を用いると次の等式が得られる.

$$(T_m(x),T_n(x))_T = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x))\,dx$$

従って $m \neq n$ ならば $(T_m(x),T_n(x))_T = 0$ であり, $(T_n(x),T_n(x))_T = \dfrac{\pi}{2}$ である．同様に次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}(U_m(x),U_n(x))_U &= \int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x))\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}\end{aligned}$$

(8) 上の結果から $\dfrac{1}{\tau_0}T_0(x), \dfrac{1}{\tau_1}T_1(x), \dots, \dfrac{1}{\tau_n}T_n(x)$ は $P_n(\boldsymbol{R})$ の正規直交系だから 1 次独立である．$\dim P_n(\boldsymbol{R}) = n+1$ だから $\dfrac{1}{\tau_0}T_0(x), \dfrac{1}{\tau_1}T_1(x), \dots, \dfrac{1}{\tau_n}T_n(x)$ は $P_n(\boldsymbol{R})$ の正規直交基底になる．そこで, $B_1 = [1, x, \dots, x^n]$, $B_2 = \left[\dfrac{1}{\tau_0}T_0(x), \dfrac{1}{\tau_1}T_1(x), \dots, \dfrac{1}{\tau_n}T_n(x)\right]$ とおく．(1) より $T_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} c_k x^k$ とおけば $c_m$ は正の実数 $2^{m-1}$ だから, $B_1$ から $B_2$ への基底の変換行列は, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である．$B_1$, $B_2$ に対してシュミットの直交化を行って得られる $V$ の正規直交基底をそれぞれ $B_1'$, $B_2'$ とすれば, $B_2$ はすでに $V$ の正規直交基底だから $B_2' = B_2$ である．従って問題 8 の (2) から $B_1' = B_2$ である.

(9) (7) より $\dfrac{1}{\upsilon_1}U_1(x), \dfrac{1}{\upsilon_2}U_2(x), \dots, \dfrac{1}{\upsilon_{n+1}}U_{n+1}(x)$ は $P_n(\boldsymbol{R})$ の正規直交系だから 1 次独立である．$\dim P_n(\boldsymbol{R}) = n+1$ だから $\dfrac{1}{\upsilon_1}U_1(x), \dfrac{1}{\upsilon_2}U_2(x), \dots, \dfrac{1}{\upsilon_{n+1}}U_{n+1}(x)$ は $P_n(\boldsymbol{R})$ の正規直交基底になる．そこで, $B_1 = [1, x, \dots, x^n]$, $B_2 = \left[\dfrac{1}{\upsilon_1}U_1(x), \dfrac{1}{\upsilon_2}U_2(x), \dots, \dfrac{1}{\upsilon_{n+1}}U_{n+1}(x)\right]$ とおく．(1) より $U_m(x) = \sum\limits_{k=1}^{1} c_k x^{k-1}$ とおけば $c_m$ は正の実数 $2^{m-1}$ だから, $B_1$ から $B_2$ への基底の変換行列は, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である．$B_1$, $B_2$ に対してシュミットの直交化を行って得られる $V$ の正規直交基底をそれぞれ $B_1'$, $B_2'$ とすれば, $B_2$ はすでに $V$ の正規直交基底だから $B_2' = B_2$ である．従って問題 8 の (2) から $B_1' = B_2$ である.

13. まず $\alpha, \beta, \gamma \in [-1,1]$ に対し, $\cos^{-1}\alpha \leqq \cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma$ が成り立つためには $\alpha \geqq \beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ または $\beta+\gamma < 0$ が成り立つことが必要十分である．実際, $\cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma > \pi$ は $\pi - \cos^{-1}\beta < \cos^{-1}\gamma$ と同値で, これはさらに $-\beta > \gamma$, すなわち $\beta + \gamma < 0$ と同値である．$\cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma \leqq \pi$ の場合, $\beta+\gamma \geqq 0$ であり, $\cos^{-1}\alpha \leqq \cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma$ は

$$\alpha \geqq \cos(\cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma) = \beta\gamma - \sin(\cos^{-1}\beta)\sin(\cos^{-1}\gamma) = \beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$$

と同値である．また, $\cos^{-1}\alpha = \cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma$ が成り立つことは $\cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma \leqq \pi$ すなわち $\beta+\gamma \geqq 0$ かつ $\alpha = \beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ が成り立つことが必要十分である.

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$ ならば $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 1$ だから $\cos^{-1}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0$ となり, $\cos^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \cos^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \cos^{-1}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ が成り立つ. $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{z}$ ならば $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = -1$ だから $\cos^{-1}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \pi$ であり, $|x| \leqq 1$ ならば $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$ が成り立つため, $\cos^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \cos^{-1}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 2\pi - \cos^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \geqq \cos^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ が成り立つ．このとき等号が成立するのは $\cos^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \pi$ すなわち $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = -1$ の場合で, $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ が成り立つ場合である．以後, $\boldsymbol{y} \neq \pm\boldsymbol{z}$ と仮定する.

$\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ がともに単位ベクトルであることと, シュワルツの不等式の等号が成立する条件から, $|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})| = 1$ となるのは $\boldsymbol{y} = \pm\boldsymbol{z}$ の場合に限る. 従って $\boldsymbol{y} \neq \pm\boldsymbol{z}$ ならば $\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ は 1 次独立で, $\varphi = \cos^{-1}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ とおけば $0 < \varphi < \pi$ である. $\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{\sin\varphi}\boldsymbol{z} - \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\boldsymbol{y}$ とおくと, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}$ は正規直交系で, $\boldsymbol{z} = \cos\varphi\boldsymbol{y} + \sin\varphi\boldsymbol{u}$ が成り立つ.

$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ が 1 次独立ならば $\boldsymbol{x} \neq (\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{y}$ であり, $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{v} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}'\|}\boldsymbol{v}'$ とおくと, $\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ は正規直交系である. このとき $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + \|\boldsymbol{v}'\|\boldsymbol{v}$ であり, $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ だから

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sin\theta\cos\psi, \qquad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \sin\theta\sin\psi, \qquad \|\boldsymbol{v}'\| = \cos\theta$$

を満たす $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \psi < 2\pi$ が存在する. 従って $\boldsymbol{x} = \sin\theta\cos\psi\boldsymbol{y} + \sin\theta\sin\psi\boldsymbol{u} + \cos\theta\boldsymbol{v}$ だから

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = (\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{y} + \sin\theta\sin\psi\boldsymbol{u} + \cos\theta\boldsymbol{v}, \cos\varphi\boldsymbol{y} + \sin\varphi\boldsymbol{u}) = \sin\theta(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) \cdots (i)\\
&(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{y} + \sin\theta\sin\psi\boldsymbol{u} + \cos\theta\boldsymbol{v}, \boldsymbol{y}) = \sin\theta\cos\psi \cdots (ii)
\end{aligned}$$

が成り立つ. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ が 1 次従属ならば $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{y}$ であり, $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ だから, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \cos\psi$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \sin\psi$ を満たす $0 \leqq \psi < 2\pi$ が存在する. このとき $\boldsymbol{x} = \cos\psi\boldsymbol{y} + \sin\psi\boldsymbol{u}$ だから $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \cos\psi$ が成り立ち, これらはそれぞれ上の $(i)$, $(ii)$ において $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ として得られる等式に他ならない. さらに $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \cos\varphi$ だから

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) + \sqrt{1-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}\sqrt{1-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})^2}\\
&\quad = \sin\theta(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) - \sin\theta\cos\psi\cos\varphi + \sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\psi}\sqrt{1-\cos^2\varphi}\\
&\quad = \sin\varphi\left(\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\psi} + \sin\theta\sin\psi\right) = \frac{\sin\varphi\cos^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\psi} - \sin\theta\sin\psi}
\end{aligned}$$

が得られる. $0 \leqq \psi \leqq \pi$ の場合は $\sin\varphi\left(\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\psi} + \sin\theta\sin\psi\right) \geqq 0$ であり, $\pi < \psi < 2\pi$ の場合は $\dfrac{\sin\varphi\cos^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\psi} - \sin\theta\sin\psi} \geqq 0$ である. 従って上の等式から

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \geqq (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) - \sqrt{1-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}\sqrt{1-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})^2}$$

が得られる. 故に $\alpha = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$, $\beta = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\gamma = (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ とおけば $\cos^{-1}\alpha \leqq \cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma$ が成り立つ. この等号が成立するのは初めに示した結果から, $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) \geqq 0$ かつ $\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\psi} = -\sin\theta\sin\psi$ の場合である. 後者の条件は $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\pi \leqq \psi < 2\pi$ と同値で, このとき $\boldsymbol{x} = \cos\psi\boldsymbol{y} + \sin\psi\boldsymbol{u}$ が成り立つ. この等式と $\boldsymbol{z} = \cos\varphi\boldsymbol{y} + \sin\varphi\boldsymbol{u}$ を $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) \geqq 0$ に代入すれば $\cos\psi + \cos\varphi \geqq 0$ が得られる. この不等式は $\cos\varphi \geqq \cos(\psi-\pi)$ と同値で, $\varphi, \psi-\pi \in [0,\pi]$ だから, $\varphi \leqq \psi - \pi$ と同値であることがわかる. さらに $\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{\sin\varphi}\boldsymbol{z} - \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\boldsymbol{y}$ より $\boldsymbol{x} = \dfrac{\sin\psi}{\sin\varphi}\boldsymbol{z} + \dfrac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\varphi}\boldsymbol{y}$ が成り立つため, $\varphi = \psi - \pi$ ならば $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{z}$ であり, $\varphi < \psi - \pi$ ならば $\boldsymbol{y} = p\boldsymbol{x} + q\boldsymbol{z}$ $(p,q > 0)$ の形になる, 逆に $\boldsymbol{y} = p\boldsymbol{x} + q\boldsymbol{z}$ $(p,q > 0)$ の形ならば $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ は 1 次従属で, $\boldsymbol{x} = \cos\psi\boldsymbol{y} + \sin\psi\boldsymbol{u} = \dfrac{\sin\psi}{\sin\varphi}\boldsymbol{z} + \dfrac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\varphi}\boldsymbol{y}$ の形に表され, $\boldsymbol{z}$ の係数が負になることから $\pi < \psi < 2\pi$ である. 従って上の議論から $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) + \sqrt{1-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}\sqrt{1-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})^2}$ が成り立つ. また $\boldsymbol{y} = p\boldsymbol{x} + q\boldsymbol{z} = \dfrac{p\sin\psi + q\sin\varphi}{\sin\varphi}\boldsymbol{z} + \dfrac{p\sin(\varphi-\psi)}{\sin\varphi}\boldsymbol{y}$ で, $\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ は 1 次独立だから $p\sin(\varphi-\psi) = \sin\varphi > 0$ が得られるため, $p > 0$ より $-2\pi < \varphi - \psi < -\pi$ すなわち $\varphi < \psi - \pi$ が成り立つ. 故に $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) = \cos\psi + \cos\varphi > 0$ となり, $\cos^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \cos^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \cos^{-1}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ が成り立つ. 以上の議論をまとめると, $\cos^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \leqq \cos^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \cos^{-1}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ が成り立つための条件は $\boldsymbol{y} = p\boldsymbol{x} + q\boldsymbol{z}$ $(p,q \geqq 0)$ または $\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{x}$ である.

# 線形数学 II 演習問題　第 18 回　直交補空間

1. 以下で与えられるベクトル空間 $V$ の部分空間 $W$ とその直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底をそれぞれ求めよ．なお，数ベクトル空間は標準内積をもつ計量ベクトル空間とする．ただし，(1) と (2) の $a, b, c$ は実数の定数で $(a,b) \neq (0,0)$ とする．

(1) $V = \boldsymbol{R}^3$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle$

(2) $V = \boldsymbol{R}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ ax + by + cz = 0 \right\}$

(3) $V = \boldsymbol{K}^4$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \ \begin{matrix} x + y - z - 2w = 0 \\ -x + 2y + z - w = 0 \end{matrix} \right\}$

(4) $V = \boldsymbol{K}^4$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \ \begin{matrix} x + 2y + 2z - 3w = 0 \\ -4x + 2y - 3z + 2w = 0 \end{matrix} \right\}$

(5) $V = \boldsymbol{K}^4$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \ \begin{matrix} x + y + 2z + 3w = 0 \\ 3y + 3z - 2w = 0 \end{matrix} \right\}$

(6) $V = \boldsymbol{K}^4$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \ \begin{matrix} x + 2y + 3z + 2w = 0 \\ x + 3y + 4z + 2w = 0 \end{matrix} \right\}$

(7) $V = \boldsymbol{K}^4$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(8) $V = \boldsymbol{K}^4$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

2. $\boldsymbol{K}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ が以下で与えられるとき, $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間 $V$, $W$ を $V = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$, $W = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ で定める．$V^\perp \cap W^\perp$ の正規直交基底を求め, その基底を含むような $V^\perp$, $W^\perp$ および $V^\perp + W^\perp$ の正規直交基底を一組ずつ求めよ．

(1) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

(4) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. $a$, $b$, $c$, $p$, $q$, $r$, $\alpha$, $\beta$ を実数の定数とする．以下 (1) から (3) で与えられる $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間 $W$ に対し, $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f$ は $W$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\alpha \boldsymbol{x}$ に写し, $W$ の直交補空間 $W^\perp$ の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ を $\beta \boldsymbol{y}$ に写すとする．このとき, $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ で, $1 \leqq i \leqq \dim W$ に対して $\boldsymbol{v}_i \in W$ であるものを 1 組求め, $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ に関する $f$ の表現行列を求めよ．

(1) $W = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle$ (2) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ ax + by + cz = 0 \right\}$ (3) $W = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \right\rangle$. ただし $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ は 1 次独立.

4. $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して, $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f_{\boldsymbol{a}} : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$ で定める．

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ のとき, $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ に関する $f_{\boldsymbol{a}}$ の表現行列を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, $\operatorname{Ker} f_{\boldsymbol{a}} = \langle \boldsymbol{a} \rangle$, $\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{a}} = \langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp$ であることを示せ．

(3) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直ならば $\mathrm{Im}(f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}}) = \langle \boldsymbol{a} \rangle$ であることを示せ.

(4) $\mathrm{rank}(f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}}) = 1$ であるためには, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直であることが必要十分であることを示せ.

5. (1) 実数を成分とする $n$ 次正方行列 $A$ で表される $\boldsymbol{R}^n$ の 1 次変換 $T_A$ が, 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $(T_A(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = 0$ を満たすためには, ${}^tA = -A$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f$ が, 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して $(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = 0$ を満たすためには, 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$ が成り立つような $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^3$ が存在することが必要十分であることを示せ.

6. $W$ を $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間とし, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ を $W$ の正規直交基底とする.

(1) $\boldsymbol{K}^n$ から $W$ への正射影 $\mathrm{pr}_W$ を表す行列を求めよ. また, $W^{\perp}$ への正射影 $\mathrm{pr}_{W^{\perp}}$ を表す行列を求めよ.

(2) $W$ に関する対称移動を表す行列を求めよ.

7. (発展問題) $V = \{A \in M_2(\boldsymbol{C}) \mid A^* = -A\}$ とおき, $V$ を行列の加法と実数倍により $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とみなして, $V$ における内積を $(A, B) = \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(AB^*)$ によって定義する (第 17 回の問題 6 の (1) 参照). また, $V$ の部分空間 $W$ を $W = \{A \in V \mid \mathrm{tr}\, A = 0\}$ で定める.

(1) $B = \left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right]$, $B' = \left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right]$ は, それぞれ $V$, $W$ の正規直交基底であることを示せ.

(2) 2 次正方行列 $A$ に対し, $X \in V$ ならば $AXA^* \in V$ であることを示せ. また $A$ が 2 次のユニタリー行列であり, $X \in W$ ならば $AXA^* \in W$ であることを示せ.

(3) 2 次正方行列 $A$ に対して $V$ の 1 次変換 $f_A$ を $f_A(X) = AXA^*$ で定めるとき, $V$ の基底 $B$ に関する $f_A$ の表現行列を求めよ. また, $A$ を 2 次のユニタリー行列として, $W$ の 1 次変換 $g_A$ を $g_A(X) = AXA^*$ で定めるとき, $W$ の基底 $B'$ に関する $g_A$ の表現行列を求めよ.

(4) $f_A$ の行列式の値を求めよ. また, $A$ が 2 次のユニタリー行列のとき, $g_A$ の行列式の値を求めよ.

(5) $A$ がユニタリー行列ならば任意の $X, Y \in V$ に対して $(f_A(X), f_A(Y)) = (X, Y)$ が成り立つことを示せ.

8. (発展問題) (1) $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつ $n$ 正則行列 $A$ に対し, $A = UT$ を満たすユニタリー行列 $U$ と対角成分がすべて正の実数である上半三角行列 $T$ が存在することを示せ.

(2) 上半三角行列であるユニタリー行列は, 対角成分の絶対値がすべて 1 である対角行列であることを示せ.

(3) $U$ と $U'$ がともにユニタリー行列で, $T$ と $T'$ がともに対角成分がすべて正の実数である上半三角行列であり, $UT = U'T'$ が成り立てば $U = U'$ かつ $T = T'$ であることを示せ.

9. (発展問題) $V$ を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間とし, $V$ の有限個のベクトルの列 $S = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$, $T = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n)$ に対して $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_j)$ を $(i, j)$ 成分とする $m \times n$ 行列を $G(S, T)$ で表す.

(1) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l$ を $\boldsymbol{u}_j = \sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{z}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} q_{ij}\boldsymbol{w}_i$ $(p_{ij}, q_{ij} \in \boldsymbol{K})$ で与えられる $V$ のベクトルとする. $S' = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$, $T' = (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l)$ とおき, $p_{ij}$ を $(i, j)$ 成分とする $m \times k$ 行列を $P$ とし, $q_{ij}$ を $(i, j)$ 成分とする $n \times l$ 行列を $Q$ とするとき, $G(S', T')$ を $P$, $Q$ と $G(S, T)$ を用いて表し, $\mathrm{rank}\, P = m$ かつ $\mathrm{rank}\, Q = n$ ならば $\mathrm{rank}\, G(S, T) = \mathrm{rank}\, G(S', T')$ であることを示せ.

(2) $G(T, S) = G(S, T)^*$ を示し, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ が $V$ の正規直交基底のとき $U = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$ とおけば, $G(S, T) = G(S, U)G(U, T)$ が成り立つことを示せ.

(3) 不等式 $\min\{\dim\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle, \dim\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n \rangle\} \geqq \mathrm{rank}\, G(S, T)$ が成り立つことを示せ.

(4) 等式 $\dim\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle = \mathrm{rank}\, G(S, S)$ を示せ. とくに, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ が 1 次独立であるためには, $G(S, S)$ が正則行列であることが必要十分である.

(5) 不等式 $\dim(\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle \cap \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n \rangle) \leqq \mathrm{rank}\, G(S, T)$ が成り立つことを示せ.

10. (発展問題) 実数 $a < b$ に対し, $P_n(\boldsymbol{R})$ の内積を $(f(x), g(x))_{a,b} = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\, dx$ で定めるとき, $1, x, \ldots, x^{n-1}$ で生成される $P_n(\boldsymbol{R})$ の部分空間の直交補空間の基底で長さが 1 のものを求めよ.

# 第 18 回の演習問題の解答

1. (1) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ は $W$ の正規直交基底である. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ は単位ベクトル $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直な単位ベクトルだから, 外積 $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} -ac \\ -bc \\ a^2+b^2 \end{pmatrix}$ は $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ と $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ の両方に垂直な単位ベクトルである.

従って $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} -ac \\ -bc \\ a^2+b^2 \end{pmatrix}$ は $W^{\perp}$ の正規直交基底である.

(2) $W$ は $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直なベクトル全体からなるため, $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle$ の直交補空間である. 従って, (1) の結果より $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} -ac \\ -bc \\ a^2+b^2 \end{pmatrix}$ は $W$ の正規直交基底である. $W$ の直交補空間は $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle$ だから $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ はその正規直交基底である.

(3) 与えられた部分空間 $W$ は第 4 回の演習問題 1 の (1) の $W$ と同じものだから, $W$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底にもつ. 前者のベクトルを $\boldsymbol{v}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{v}_2$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ より, $W$ の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が得られる. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W^{\perp}$ であるためには $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2) = 0$ であることが必要十分だから, $W^{\perp}$ は連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+z=0 \\ x+y+w=0 \end{cases}$ の解空間である. この方程式の解は, $s$, $t$ を任意のスカラーとして $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ -s \\ -s-t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $W^{\perp}$ の基底で

ある. 前者のベクトルを $\boldsymbol{w}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{w}_2$ とおけば, $\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

より, $W^\perp$ の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ が得られる.

(4) 与えられた部分空間 $W$ は第 4 回の演習問題 1 の (1) の $W$ と同じものだから, $W$ は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底に

もつ. 前者のベクトルを $\boldsymbol{v}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{v}_2$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ よ

り, $W$ の正規直交基底 $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ が得られる. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W^\perp$ であるためには $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2) = 0$

であることが必要十分だから, $W^\perp$ は連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ -x + 2z + w = 0 \end{cases}$ の解空間である. この方程式の解は, $s$, $t$

を任意のスカラーとして $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -2s + 2t \\ t \\ s - 2t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は $W^\perp$ の

基底である. 前者のベクトルを $\boldsymbol{w}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{w}_2$ とおけば, $\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

より, $W^\perp$ の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が得られる.

(5) 与えられた部分空間 $W$ は第 4 回の演習問題 1 の (2) の $W$ と同じものだから, $W$ は $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ を基底に

もつ. 前者のベクトルを $\boldsymbol{v}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{v}_2$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ より,

$W$ の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{107}}\begin{pmatrix}-8\\5\\-3\\3\end{pmatrix}$ が得られる．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in W^{\perp}$ であるためには $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2) = 0$ であることが必要十分だから，$W^{\perp}$ は連立 1 次方程式 $\begin{cases}-x-y+z=0\\-11x+2y+3w=0\end{cases}$ の解空間である．この方程式の解は，$s$, $t$ を任意のスカラーとして $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3s\\3t\\3s+3t\\11s-2t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}3\\0\\3\\11\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\3\\3\\-2\end{pmatrix} = 3s\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix} + (t-s)\begin{pmatrix}0\\3\\3\\-2\end{pmatrix}$ で与えられるため，$\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\3\\-2\end{pmatrix}$ は $W^{\perp}$ の基底である．前者のベクトルを $\boldsymbol{w}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{w}_2$ とおけば，$\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}0\\3\\3\\-2\end{pmatrix} - \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\14\\13\\-13\end{pmatrix}$ より，$W^{\perp}$ の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{562}}\begin{pmatrix}-1\\14\\13\\-13\end{pmatrix}$ が得られる．

(6) 与えられた部分空間 $W$ は第 4 回の演習問題 1 の (2) の $W$ と同じものだから，$W$ は $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ を基底にもつ．前者のベクトルを $\boldsymbol{v}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{v}_2$ とおけば，$\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\\3\end{pmatrix}$ より，$W$ の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{33}}\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\\3\end{pmatrix}$ が得られる．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in W^{\perp}$ であるためには $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2) = 0$ であることが必要十分だから，$W^{\perp}$ は連立 1 次方程式 $\begin{cases}-x-y+z=0\\-2x+w=0\end{cases}$ の解空間である．この方程式の解は，$s$, $t$ を任意のスカラーとして $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\t\\s+t\\2s\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ で与えられるため，$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ は $W^{\perp}$ の基底である．前者のベクトルを $\boldsymbol{w}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{w}_2$ とおけば，$\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\4\end{pmatrix}$ より，

$W^{\perp}$ の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\4\end{pmatrix}$ が得られる.

(7) $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ とおけば, $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=0$, $\|\boldsymbol{v}_1\|=\|\boldsymbol{v}_2\|=2$ だから $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ は $W$ の正規直交基底である. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in W^{\perp}$ であるためには $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_1)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_2)=0$ であることが必要十分だから, $W^{\perp}$ は連立 1 次方程式 $\begin{cases}x+y+z+w=0\\x-y+z-w=0\end{cases}$ の解空間である. $s=\dfrac{x+y}{2}$, $t=\dfrac{x-y}{2}$ とおけば, $x=s+t$, $y=s-t$ であり, $\begin{cases}z+w=-2s\\z-w=-2t\end{cases}$ だから $z=-s+t$, $w=-s-t$ である. 従って上の連立 1 次方程式の解は, $s$, $t$ を任意のスカラーとして $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s+t\\s-t\\-s-t\\-s+t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ で与えられるため, $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ は $W^{\perp}$ の基底である. 前者のベクトルを $\boldsymbol{w}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{w}_2$ とおけば, $(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2)=0$, $\|\boldsymbol{w}_1\|=\|\boldsymbol{w}_2\|=2$ だから $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ は $W^{\perp}$ の正規直交基底である.

(8) $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2-\dfrac{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\4\\1\\2\end{pmatrix}$ より, $W$ の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}1\\4\\1\\2\end{pmatrix}$ が得られる. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in W^{\perp}$ であるためには $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_1)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_2)=0$ であることが必要十分だから, $W^{\perp}$ は連立 1 次方程式 $\begin{cases}x-z=0\\x+2y+w=0\end{cases}$ の解空間である. この方程式の解は, $s$, $t$ を任意のスカラーとして $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\t\\s\\-s-2y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$ で与えられるため, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$ は $W^{\perp}$ の基底である. 前者のベクトルを $\boldsymbol{w}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{w}_2$ とおけば, $\boldsymbol{w}_2-\dfrac{(\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}-\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\\-4\end{pmatrix}$ より, $W^{\perp}$

の正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{33}}\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\\-4\end{pmatrix}$ が得られる.

2. $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}$ とおくと, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^n$ に対し, 次の等式が成り立つ

$$A^*\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}{}^t\bar{\boldsymbol{a}}_1\boldsymbol{x}\\{}^t\bar{\boldsymbol{a}}_2\boldsymbol{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{a}}_1\\{}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{a}}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_1)\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_2)\end{pmatrix},\quad B^*\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}{}^t\bar{\boldsymbol{b}}_1\boldsymbol{x}\\{}^t\bar{\boldsymbol{b}}_2\boldsymbol{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{b}}_1\\{}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{b}}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_1)\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_2)\end{pmatrix}$$

従って $\boldsymbol{x}\in V^\perp$ は $A^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ と同値, $\boldsymbol{x}\in W^\perp$ は $B^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ と同値であり, $\boldsymbol{x}\in V^\perp\cap W^\perp$ は $\begin{pmatrix}A^*\\B^*\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ と同値である.

(1) $A^*=\begin{pmatrix}1&2&3&2\\-1&0&-2&2\end{pmatrix}$, $B^*=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\-1&2&1&2\end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix}A^*\\B^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&2\\-1&0&-2&2\\2&1&2&3\\-1&2&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&2&1&4\\0&-3&-4&-1\\0&4&4&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}}\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&2&1&4\\0&-3&-4&-1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}}\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&1&1&1\\0&-3&-4&-1\\0&2&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&-1&2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix}A^*\\B^*\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x+2w=0\\y+3w=0\\-z+2w=0\end{cases}$ と同値である. この方程式の解は $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$ ($t\in\boldsymbol{K}$ は任意) だから, $\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$ は $V^\perp\cap W^\perp$ の基底である. よって $\boldsymbol{u}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{u}$ は $V^\perp\cap W^\perp$ の正規直交基底である. $A^*=\begin{pmatrix}1&2&3&2\\-1&0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&2&1&4\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-4&0&-10\\0&2&1&4\end{pmatrix}$ より, $A^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x-4y-10w=0\\2y+z+4w=0\end{cases}$ と同値である. この方程式の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}4s+10t\\s\\-2s-4t\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}4\\1\\-2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}10\\0\\-4\\1\end{pmatrix}$ ($s,t\in\boldsymbol{K}$ は任意) で与えられるため, $\begin{pmatrix}4\\1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\0\\-4\\1\end{pmatrix}$ は $V^\perp$ の基底になり, $\dim V^\perp=2$ である. また $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}4s+10t\\s\\-2s-4t\\t\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するためには, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\frac{-1}{\sqrt{2}}(5s+9t)$ より, $t=-\frac{5s}{9}$ であることが必要十分である. このとき, $\boldsymbol{x}=-\frac{s}{9}\begin{pmatrix}14\\-9\\-2\\5\end{pmatrix}$ だから, $\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{34}}\begin{pmatrix}14\\-9\\-2\\5\end{pmatrix}$ は $V^\perp$ の正規直交基底であ

る．$B^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ より, $B^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} -x - \frac{3}{5}z - \frac{4}{5}w = 0 \\ 5y + 4z + 7w = 0 \end{cases}$ と同値である．この方程式の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3s-4t \\ -4s-7t \\ 5s \\ 5t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ $(s, t \in \boldsymbol{K}$ は任意$)$ で与えられるため, $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ は $W^\perp$ の基底になり, $\dim W^\perp = 2$ である．また $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3s-4t \\ -4s-7t \\ 5s \\ 5t \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するためには, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}(28s+34t)$ より, $t = -\dfrac{14s}{17}$ であることが必要十分である．このとき, $\boldsymbol{x} = \dfrac{5s}{17}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 17 \\ -14 \end{pmatrix}$ だから, $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{58}}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 17 \\ -14 \end{pmatrix}$ は $W^\perp$ の正規直交基底である．以上から, $\dim(V^\perp + W^\perp) = \dim V^\perp + \dim W^\perp - \dim(V^\perp \cap W^\perp) = 3$ であり, $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 14 \\ -9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{58}}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 17 \\ -14 \end{pmatrix}$ は $V^\perp + W^\perp$ を生成するため, これらのベクトルは $V^\perp + W^\perp$ の基底になる．2 つ目のベクトルを $\boldsymbol{v}'$, 3 つ目のベクトルを $\boldsymbol{w}'$ とおけば, $\|\boldsymbol{v}'\| = 1$, $(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{u}) = 0$, $(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{v}') = -\dfrac{8}{\sqrt{493}}$ より $\boldsymbol{w}' - \dfrac{(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u} - \dfrac{(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{v}')}{\|\boldsymbol{v}'\|^2}\boldsymbol{v}' = \dfrac{1}{17\sqrt{58}}\begin{pmatrix} 43 \\ 10 \\ 91 \\ -66 \end{pmatrix}$ となるため, $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 14 \\ -9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{14586}}\begin{pmatrix} 43 \\ 10 \\ 91 \\ -66 \end{pmatrix}$ は $V^\perp + W^\perp$ の正規直交基底である．

(2) $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(4,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x - w = 0 \\ -7z = 0 \\ y + w = 0 \end{cases}$ と同値である．この方程式の解は $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \boldsymbol{K}$ は任意$)$ だから, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $V^\perp \cap W^\perp$ の基

底である．よって $\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{u}$ は $V^\perp\cap W^\perp$ の正規直交基底である．$A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&0&-1&-2\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&-2&-3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&-1\\0&-2&-3&-2\end{pmatrix}$ より, $A^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x-\frac{1}{2}z-w=0\\2y+3z+2w=0\end{cases}$ と同値である．この方程式の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}s+t\\-3s-t\\2s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $(s,t\in\boldsymbol{K}$ は任意) で与えられるため, $\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ は $V^\perp$ の基底になり, $\dim V^\perp=2$ である．また $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}s+t\\-3s-t\\2s\\t\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するためには, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(4s+3t)$ より, $t=-\dfrac{4s}{3}$ であることが必要十分である．このとき, $\boldsymbol{x}=-\dfrac{s}{3}\begin{pmatrix}1\\5\\-6\\4\end{pmatrix}$ だから, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{78}}\begin{pmatrix}1\\5\\-6\\4\end{pmatrix}$ は $V^\perp$ の正規直交基底である．$B^*=\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\2&3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}1&0&-3&-1\\0&1&2&1\end{pmatrix}$ より, $B^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x-3z-w=0\\y+2z+w=0\end{cases}$ と同値である．この方程式の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3s+t\\-2s-t\\s\\t\end{pmatrix}=$ $s\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $(s,t\in\boldsymbol{K}$ は任意) で与えられるため, $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ は $W^\perp$ の基底になり, $\dim W^\perp=2$ である．また $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3s+t\\-2s-t\\s\\t\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するためには, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(5s+3t)$ より, $t=-\dfrac{5s}{3}$ であることが必要十分である．このとき, $\boldsymbol{x}=\dfrac{s}{3}\begin{pmatrix}4\\-1\\3\\-5\end{pmatrix}$ だから, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix}4\\-1\\3\\-5\end{pmatrix}$ は $W^\perp$ の正規直交基底である．以上から, $\dim(V^\perp+W^\perp)=\dim V^\perp+\dim W^\perp-\dim(V^\perp\cap W^\perp)=3$ であり, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{78}}\begin{pmatrix}1\\5\\-6\\4\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix}4\\-1\\3\\-5\end{pmatrix}$ は $V^\perp+W^\perp$ を生成するため, これらのベクトルは $V^\perp+W^\perp$ の基底になる．2 つ目のベクトルを $\boldsymbol{v}'$, 3 つ目のベクト

ルを $\boldsymbol{w}'$ とおけば, $\|\boldsymbol{v}'\|=1$, $(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{u})=0$, $(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v}')=-\dfrac{13}{\sqrt{442}}$ より $\boldsymbol{w}'-\dfrac{(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}-\dfrac{(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v}')}{\|\boldsymbol{v}'\|^2}\boldsymbol{v}'=\dfrac{3}{2\sqrt{51}}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$ と

なるため, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{78}}\begin{pmatrix}1\\5\\-6\\4\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$ は $V^{\perp}+W^{\perp}$ の正規直交基底である.

(3) $A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&0&2&3\end{pmatrix}$, $B^*=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&1&-1&-4\end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix}A^*\\B^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&0&2&3\\1&3&-1&-2\\2&1&-1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&-2&0&-1\\0&2&-2&-4\\0&-1&-3&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(4,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-2&-6\\0&0&6&15\\0&0&-8&-20\\0&-1&-3&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&0&6&15\\0&0&0&0\\0&-1&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix}A^*\\B^*\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

は $\begin{cases}x-w=0\\6z+15w=0\\-y-\frac{1}{2}w=0\end{cases}$ と同値である. この方程式の解は $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\\2\end{pmatrix}$ ($t\in\boldsymbol{K}$ は任意) だから, $\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\\2\end{pmatrix}$ は $V^{\perp}\cap W^{\perp}$

の基底である. よって $\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\\2\end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{u}$ は $V^{\perp}\cap W^{\perp}$ の正規直交基底である. $A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&0&2&3\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&-2&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(2,4) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-3&1&0\\0&-2&0&-1\end{pmatrix}$ より, $A^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x-3y+z=0\\-2y-w=0\end{cases}$ と

同値である. この方程式の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3s-t\\s\\t\\-2s\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ ($s,t\in\boldsymbol{K}$ は任意) で与えられるため,

$\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ は $V^{\perp}$ の基底になり, $\dim V^{\perp}=2$ である. また $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3s-t\\s\\t\\-2s\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するためには, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=$

$\dfrac{1}{\sqrt{34}}(s-7t)$ より, $s=7t$ であることが必要十分である. このとき, $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}20\\7\\1\\-14\end{pmatrix}$ だから, $\dfrac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\\2\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{646}}\begin{pmatrix}20\\7\\1\\-14\end{pmatrix}$

は $V^{\perp}$ の正規直交基底である. $B^*=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&1&-1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-5&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1&-2&0&-2\\0&-5&1&0\end{pmatrix}$ より, $B^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x-2y-2w=0\\-5y+z=0\end{cases}$ と同値である. この方程式の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2s+2t\\s\\5s\\t\end{pmatrix}=$

$s\begin{pmatrix}2\\1\\5\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ ($s,t\in\boldsymbol{K}$ は任意) で与えられるため, $\begin{pmatrix}2\\1\\5\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ は $W^\perp$ の基底になり, $\dim W^\perp=2$ である.

また $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2s+2t\\s\\5s\\t\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するためには, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\dfrac{1}{\sqrt{34}}(-22s+6t)$ より, $t=\dfrac{11s}{3}$ であることが必要十分である. このとき, $\boldsymbol{x}=\dfrac{s}{3}\begin{pmatrix}28\\3\\15\\11\end{pmatrix}$ だから, $\dfrac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\\2\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1139}}\begin{pmatrix}28\\3\\15\\11\end{pmatrix}$ は $W^\perp$ の正規直交基底である. 以上から,

$\dim(V^\perp+W^\perp)=\dim V^\perp+\dim W^\perp-\dim(V^\perp\cap W^\perp)=3$ であり, $\dfrac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\\2\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{646}}\begin{pmatrix}20\\7\\1\\-14\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1139}}\begin{pmatrix}28\\3\\15\\11\end{pmatrix}$ は $V^\perp+W^\perp$ を生成するため, これらのベクトルは $V^\perp+W^\perp$ の基底になる. 2 つ目のベクトルを $\boldsymbol{v}'$, 3 つ目のベクトルを $\boldsymbol{w}'$ とおけば, $\|\boldsymbol{v}'\|=1$, $(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{u})=0$, $(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v}')=\dfrac{26}{\sqrt{2546}}$ より $\boldsymbol{w}'-\dfrac{(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}-\dfrac{(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v}')}{\|\boldsymbol{v}'\|^2}\boldsymbol{v}'=\dfrac{17}{19\sqrt{1139}}\begin{pmatrix}16\\-2\\16\\23\end{pmatrix}$

となるため, $\dfrac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\\2\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{646}}\begin{pmatrix}20\\7\\1\\-14\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1045}}\begin{pmatrix}16\\-2\\16\\23\end{pmatrix}$ は $V^\perp+W^\perp$ の正規直交基底である.

(4) $A^*=\begin{pmatrix}1&1&-2&-1&4\\2&2&5&7&-1\end{pmatrix}$, $B^*=\begin{pmatrix}1&3&5&6&1\\1&5&3&4&7\end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix}A^*\\B^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-2&-1&4\\2&2&5&7&-1\\1&3&5&6&1\\1&5&3&4&7\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&-2&-1&4\\0&0&9&9&-9\\0&2&7&7&-3\\0&4&5&5&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{11}{2}&-\frac{9}{2}&\frac{11}{2}\\0&0&9&9&-9\\0&2&7&7&-3\\0&0&-9&-9&9\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&0&9&9&-9\\0&2&0&0&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix}A^*\\B^*\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x+v=0\\9z+9v-9w=0\\2y+4w=0\end{cases}$ と同値である. この方程式の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}s\\-2t\\s+t\\-s\\t\end{pmatrix}=$

$s\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ ($s,t\in\boldsymbol{K}$ は任意) だから, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ は $V^\perp\cap W^\perp$ の基底である. $\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ とおき,

$\boldsymbol{u}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, $(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より, $\boldsymbol{u}' - \dfrac{(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|}\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ だから, $\boldsymbol{v} = \dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおけば,

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は $V^{\perp} \cap W^{\perp}$ の正規直交基底である. $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & -9 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & -9 \end{pmatrix}$ より, $A^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x + y + v + 2w = 0 \\ 9z + 9v - 9w = 0 \end{cases}$ と同値である. この方程式の解は

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -s-t-2u \\ s \\ -t+u \\ t \\ u \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s, t, u \in \boldsymbol{K}$ は任意) で与えられるため, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

は $V^{\perp}$ の基底になり, $\dim V^{\perp} = 3$ である. また $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -s-t-2u \\ s \\ -t+u \\ t \\ u \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ が直交するためには, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) =$

$\dfrac{-s-3t-u}{\sqrt{3}}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \dfrac{-5s+7u}{\sqrt{51}}$ より, $u = \dfrac{5s}{7}$, $t = -\dfrac{4s}{7}$ であることが必要十分である. このとき, $\boldsymbol{x} = \dfrac{s}{7}\begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ 9 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

だから, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2\sqrt{85}}\begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ 9 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ は $V^{\perp}$ の正規直交基底である. $B^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 9 & -8 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ より, $B^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は

$\begin{cases} x + 8z + 9v - 8w = 0 \\ 2y - 2z - 2v + 6z = 0 \end{cases}$ と同値である. この方程式の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -8s-9t+8u \\ s+t-3u \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(s, t, u \in \boldsymbol{K}$ は任意) で与えられるため, $\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $W^{\perp}$ の基底になり, $\dim W^{\perp} = 3$ である. また $\boldsymbol{x} =$

$\begin{pmatrix}-8s-9t+8u\\ s+t-3u\\ s\\ t\\ u\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するためには, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\dfrac{-7s-10t+8u}{\sqrt{3}}$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=\dfrac{4s+4t+13u}{\sqrt{51}}$ より, $s=-\dfrac{27u}{2}$, $t=\dfrac{41u}{4}$ であることが必要十分である. このとき, $\boldsymbol{x}=\dfrac{u}{4}\begin{pmatrix}95\\ -25\\ -54\\ 41\\ 4\end{pmatrix}$ だから, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix}-1\\ -6\\ 2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{14263}}\begin{pmatrix}95\\ -25\\ -54\\ 41\\ 4\end{pmatrix}$ は $W^\perp$ の正規直交基底である. 以上から, $\dim(V^\perp+W^\perp)=\dim V^\perp+\dim W^\perp-\dim(V^\perp\cap W^\perp)=4$ であり, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix}-1\\ -6\\ 2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}, \dfrac{1}{2\sqrt{85}}\begin{pmatrix}-13\\ 7\\ 9\\ -4\\ 5\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{14263}}\begin{pmatrix}95\\ -25\\ -54\\ 41\\ 4\end{pmatrix}$ は $V^\perp+W^\perp$ を生成するため, これらのベクトルは $V^\perp+W^\perp$ の基底になる. 3 つ目のベクトルを $\boldsymbol{v}'$, 4 つ目のベクトルを $\boldsymbol{w}'$ とおけば, $\|\boldsymbol{v}'\|=1$, $(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v})=0$, $(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v}')=-\dfrac{60}{\sqrt{4195}}$ より $\boldsymbol{w}'-\dfrac{(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}-\dfrac{(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\boldsymbol{v}-\dfrac{(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v}')}{\|\boldsymbol{v}'\|^2}\boldsymbol{v}'=\dfrac{17}{\sqrt{14263}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ となるため,

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix}-1\\ -6\\ 2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}, \dfrac{1}{2\sqrt{85}}\begin{pmatrix}-13\\ 7\\ 9\\ -4\\ 5\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ は $V^\perp+W^\perp$ の正規直交基底である.

3. (1) $(a,b)\neq(0,0)$ の場合, 問題 1 の (1) より, $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}\frac{-ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ \frac{-bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{v}_1$ は $W$ の正規直交基底で, $\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ は $W^\perp$ の正規直交基底である. 従って $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$ が求める $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底である. $\boldsymbol{v}_1\in W$, $\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\in W^\perp$ だから, 仮定から $f(\boldsymbol{v}_1)=\alpha\boldsymbol{v}_1$, $f(\boldsymbol{v}_2)=\beta\boldsymbol{v}_2$, $f(\boldsymbol{v}_3)=\beta\boldsymbol{v}_3$ である. 従って $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$ に関する $f$ の表現行列は $\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\ 0&\beta&0\\ 0&0&\beta\end{pmatrix}$ である. $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ から $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$ への基底の変換行列を $P$ とおけば $P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 & \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{pmatrix}$ であり, $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ に関する $f$ の表現行列を $A$ とすれば $P^{-1}AP$ は $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$ に関する $f$ の表現行列だから, $A$ は以下で与えられる.

$$A=P\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\ 0&\beta&0\\ 0&0&\beta\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha a^2+\beta(b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} & \frac{ab(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} & \frac{ac(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2}\\ \frac{ab(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} & \frac{\alpha b^2+\beta(a^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} & \frac{bc(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2}\\ \frac{ac(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} & \frac{bc(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} & \frac{\alpha c^2+\beta(a^2+b^2)}{a^2+b^2+c^2}\end{pmatrix}$$

$a=b=0$ の場合は, $\boldsymbol{e}_1$ は $W$ の正規直交基底で, $\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ は $W^\perp$ の正規直交基底だから, $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ が求める $\boldsymbol{R}^3$ の

正規直交基底である．このとき, $f$ の表現行列は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ である．

(2) $(a,b) \neq (0,0)$ の場合, 問題 1 の (2) より, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{-bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は $W$ の正規直交基底で, $\boldsymbol{v}_3$ は $W^\perp$ の正規直交基底である．従って $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ が求める $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底である．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in W$, $\boldsymbol{v}_3 \in W^\perp$ だから, 仮定から $f(\boldsymbol{v}_1) = \alpha \boldsymbol{v}_1$, $f(\boldsymbol{v}_2) = \alpha \boldsymbol{v}_2$, $f(\boldsymbol{v}_3) = \beta \boldsymbol{v}_3$ である．従って $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ に関する $f$ の表現行列は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ である．$\boldsymbol{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ から $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ への基底の変換行列を $P$ とおけば $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ 0 & \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}$ であり, $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ に関する $f$ の表現行列を $A$ とすれば $P^{-1}AP$ は $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ に関する $f$ の表現行列だから, $A$ は以下で与えられる．

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta a^2 + \alpha(b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} & -\frac{ab(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} & -\frac{ac(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} \\ -\frac{ab(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} & \frac{\beta b^2 + \alpha(a^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} & -\frac{bc(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} \\ -\frac{ac(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} & -\frac{bc(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} & \frac{\beta c^2 + \alpha(a^2+b^2)}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}$$

$a = b = 0$ の場合は, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は $W$ の正規直交基底で, $\boldsymbol{e}_3$ は $W^\perp$ の正規直交基底だから, $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ が求める $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底である．このとき, $f$ の表現行列は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ である．

(3) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} - \dfrac{ap+bq+cr}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c(cp-ar)-b(aq-bp)}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{a(aq-bp)-c(br-cq)}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{b(br-cq)-a(cp-ar)}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}$ である． $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ は 1 次独立だから $\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1$ と $\boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2$ は零ベクトルではなく, $\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_1\|}\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\left\|\boldsymbol{w}_2 - \frac{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1\right\|}\left(\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1\right)$, $\boldsymbol{v}_3 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2\|}\boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2$ とおけば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は $W$ の正規直交基底で, $\boldsymbol{v}_3$ は $W^\perp$ の正規直交基底であり, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ が求める $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底である．$\|\boldsymbol{w}_1\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $\left\|\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1\right\| = \dfrac{\sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\|\boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2\| = \sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}$ だから, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の成分は以下で与えられる．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{c(cp-ar)-b(aq-bp)}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)((br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2)}} \\ \frac{a(aq-bp)-c(br-cq)}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)((br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2)}} \\ \frac{b(br-cq)-a(cp-ar)}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)((br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2)}} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{br-cq}{\sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}} \\ \frac{cp-ar}{\sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}} \\ \frac{aq-bp}{\sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in W$, $\boldsymbol{v}_3 \in W^\perp$ だから, 仮定から $f(\boldsymbol{v}_1) = \alpha \boldsymbol{v}_1$, $f(\boldsymbol{v}_2) = \alpha \boldsymbol{v}_2$, $f(\boldsymbol{v}_3) = \beta \boldsymbol{v}_3$ となるため, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ に関する $f$ の表現行列を $B$ とおけば $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ である．標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ から $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ への基底の変換行列を $P$

とおけば $P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{c(cp-ar)-b(aq-bp)}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)((br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2)}} & \frac{br-cq}{\sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a(aq-bp)-c(br-cq)}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)((br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2)}} & \frac{cp-ar}{\sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a(aq-bp)-c(br-cq)}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)((br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2)}} & \frac{aq-bp}{\sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}} \end{pmatrix}$ であり, $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ に関する $f$ の表現行列を $A$ とすれば $P^{-1}AP$ は $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$ に関する $f$ の表現行列だから, $A$ は以下で与えられる.

$$A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{\alpha((cp-ar)^2+(aq-bp)^2)+\beta(br-cq)^2}{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2} & -\frac{(\alpha-\beta)(br-cq)(cp-ar)}{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2} & -\frac{(\alpha-\beta)(br-cq)(aq-bp)}{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2} \\ -\frac{(\alpha-\beta)(br-cq)(cp-ar)}{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2} & \frac{\alpha((br-cq)^2+(aq-bp)^2)+\beta(cp-ar)^2}{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2} & -\frac{(\alpha-\beta)(cp-ar)(aq-bp)}{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2} \\ -\frac{(\alpha-\beta)(br-cq)(aq-bp)}{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2} & -\frac{(\alpha-\beta)(cp-ar)(aq-bp)}{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2} & \frac{\alpha((br-cq)^2+(cp-ar)^2)+\beta(aq-bp)^2}{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2} \end{pmatrix}$$

4. (1) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$ に対し, $f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-cy+bz\\cx-az\\-bx+ay\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ だから $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ に関する $f_{\boldsymbol{a}}$ の表現行列は $\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}$ である.

(2) $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ より, 外積の性質から $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となるためには $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}$ の実数倍であることが必要十分だから $\operatorname{Ker} f_{\boldsymbol{a}}=\langle\boldsymbol{a}\rangle$ である. また $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}$ はつねに $\boldsymbol{a}$ と垂直なベクトルだから $\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{a}}$ は $\langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}$ に含まれる. $\dim\operatorname{Ker} f_{\boldsymbol{a}}=1$ だから, 次元公式により $\dim\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{a}}=\operatorname{rank} f_{\boldsymbol{a}}=2$ となり $\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{a}}$ の次元は $\langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}$ の次元に等しくなるため, $\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{a}}=\langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}$ である.

(3) 第 10 回の問題 2 の (1) より $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$ に対し,

$$(f_{\boldsymbol{b}}\circ f_{\boldsymbol{a}})(\boldsymbol{x})=f_{\boldsymbol{b}}(f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}))=f_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}$$

が得られる. 従って, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直ならば $(f_{\boldsymbol{b}}\circ f_{\boldsymbol{a}})(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}\in\langle\boldsymbol{a}\rangle$ だから $\operatorname{Im}(f_{\boldsymbol{b}}\circ f_{\boldsymbol{a}})\subset\langle\boldsymbol{a}\rangle$ である. また, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ だから, $\bar{\boldsymbol{b}}=\dfrac{1}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}\boldsymbol{b}$ とおけば, $(\bar{\boldsymbol{b}},\boldsymbol{b})=1$ だから $t\in\boldsymbol{R}$ に対し, $(f_{\boldsymbol{b}}\circ f_{\boldsymbol{a}})(t\bar{\boldsymbol{b}})=(t\bar{\boldsymbol{b}},\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}=t(\bar{\boldsymbol{b}},\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}=t\boldsymbol{a}$ となって, $\operatorname{Im}(f_{\boldsymbol{b}}\circ f_{\boldsymbol{a}})\supset\langle\boldsymbol{a}\rangle$ であることがわかる. 故に $\operatorname{Im}(f_{\boldsymbol{b}}\circ f_{\boldsymbol{a}})=\langle\boldsymbol{a}\rangle$ である.

(4) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ ならば $f_{\boldsymbol{a}}$ はすべてのベクトルを零ベクトルに写す写像になるため, $f_{\boldsymbol{b}}\circ f_{\boldsymbol{a}}$ の階数が 1 ならば $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ である. 従って (2) により $\operatorname{rank} f_{\boldsymbol{a}}=\dim\langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}=2$, $\operatorname{rank} f_{\boldsymbol{b}}=\dim\langle\boldsymbol{b}\rangle^{\perp}=2$ だから, $\operatorname{rank}(f_{\boldsymbol{b}}\circ f_{\boldsymbol{a}})=\operatorname{rank} f_{\boldsymbol{a}}+\operatorname{rank} f_{\boldsymbol{b}}-\dim\boldsymbol{R}^3$ が成り立つ. 故に第 15 回の問題 8 の結果と (1) により $\langle\boldsymbol{b}\rangle=\operatorname{Ker} f_{\boldsymbol{b}}\subset\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{a}}=\langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}$ だから $\boldsymbol{b}\in\langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}$ となるため, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は垂直である. 逆に $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直ならば $f_{\boldsymbol{b}}\circ f_{\boldsymbol{a}}$ の階数が 1 になることは (3) から明らかである.

5. (1) 任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $(T_A(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})=0$ が成り立つと仮定する. $A=\begin{pmatrix}a_{ij}\end{pmatrix}$ とおけば, $(T_A(\boldsymbol{e}_j),\boldsymbol{e}_k)=(A\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)=a_{kj}$ だから, $j=1,2,\dots,n$ に対して $a_{jj}=(T_A(\boldsymbol{e}_j),\boldsymbol{e}_j)=0$ である. また, $(T_A(\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_k),\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_k)=0$ が $j,k=1,2,\dots,n$ に対して成り立ち, この左辺は $(A(\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_k),\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_k)=(A\boldsymbol{e}_j+A\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_k)=(A\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_j)+(A\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)+(A\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_j)+(A\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_k)=a_{jj}+a_{jk}+a_{kj}+a_{kk}=a_{jk}+a_{kj}$ に等しいため $j,k=1,2,\dots,n$ に対して $a_{jk}=-a_{kj}$ が成り立つ. 故に ${}^tA=-A$ である. 逆に ${}^tA=-A$ が成り立つと仮定すると, 任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $(T_A(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})=(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},{}^tA\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},-A\boldsymbol{x})=-(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x})=-(\boldsymbol{x},T_A(\boldsymbol{x}))=-(T_A(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})$ だから, $(T_A(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})=0$ が成り立つ.

(2) $f$ を表す 3 次正方行列を $A=\begin{pmatrix}a_{ij}\end{pmatrix}$ とおき, $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_{32}\\a_{13}\\a_{21}\end{pmatrix}$ とおけば, (1) の結果より $j,k=1,2,3$ に対して $a_{jj}=0$, $a_{jk}=-a_{kj}$ だから, 任意の $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$ に対して $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0&-a_{21}&a_{13}\\a_{21}&0&-a_{32}\\-a_{13}&a_{32}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} a_{13}z - a_{21}y \\ -a_{32}z + a_{21}x \\ a_{32}y - a_{13}x \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$ が成り立つ. 逆に, 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$ が成り立つような $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^3$ が存在すれば, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$ はつねに $\boldsymbol{x}$ と垂直なベクトルだから $(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = 0$ が任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して成り立つ.

6. (1) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し, $\mathrm{pr}_W(\boldsymbol{x})$ は $W$ に含まれるベクトルだから $\mathrm{pr}_W(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} y_i \boldsymbol{w}_i$ を満たす $y_i \in \boldsymbol{K}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ がある. 各 $j = 1, 2, \ldots, k$ に対して $\mathrm{pr}_W(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} y_i \boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{w}_j$ は垂直だから $\left( \sum_{i=1}^{k} y_i \boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}_j \right) = 0$ である. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ は $W$ の正規直交基底だから, この左辺は $\sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_j) y_i = y_j$ に等しいため, $y_j = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}_j)$ である. 故に $\mathrm{pr}_W(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}_i) \boldsymbol{w}_i$ だから, $\mathrm{pr}_W$ を表す行列の第 $j$ 列は $\sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{w}_i) \boldsymbol{w}_i$ である. 従って, $\mathrm{pr}_W$ を表す行列は, $\boldsymbol{w}_j$ の第 $i$ 成分を $w_{ij}$ とすれば, $\sum_{l=1}^{k} w_{il} \bar{w}_{jl}$ を $(i, j)$ 成分とする $n$ 次正方行列となるため, $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \cdots & \boldsymbol{w}_k \end{pmatrix}$ とおけば $PP^*$ で与えられる.

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し, $\boldsymbol{x} - \mathrm{pr}_{W^\perp}(\boldsymbol{x})$ は $W^\perp$ に垂直だから $\left(W^\perp\right)^\perp = W$ に含まれる. さらに $\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x} - \mathrm{pr}_{W^\perp}(\boldsymbol{x})) = \mathrm{pr}_{W^\perp}(\boldsymbol{x})$ は $W^\perp$ に含まれるため, $W$ と垂直である. 従って $\boldsymbol{x} - \mathrm{pr}_{W^\perp}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ の $W$ への正射影だから $\boldsymbol{x} - \mathrm{pr}_{W^\perp}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{pr}_W(\boldsymbol{x})$ が成り立つ. 故に $\mathrm{pr}_{W^\perp}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \mathrm{pr}_W(\boldsymbol{x}) = (id_V - \mathrm{pr}_W)(\boldsymbol{x})$ がすべての $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対して成り立つため, $\mathrm{pr}_{W^\perp} = id_V - \mathrm{pr}_W$ である. 従って, $\mathrm{pr}_{W^\perp}$ を表す行列は $E_n - PP^*$ である.

(2) $W$ に関する対称移動を $\rho_W : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ とすれば, 各 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対して $\rho_W(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{x}$ の中点 $\frac{1}{2}(\rho_W(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x})$ は $\mathrm{pr}_W(\boldsymbol{x})$ に一致するため, (1) の結果から $\rho_W(\boldsymbol{x}) = 2\mathrm{pr}_W(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} = 2PP^*\boldsymbol{x} - E_n\boldsymbol{x} = (2PP^* - E_n)\boldsymbol{x}$ である. 従って, $\rho_W$ を表す行列は $2PP^* - E_n$ である.

7. (1) $A_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ とおくと, これらの行列の列のベクトルはすべて単位行列で, 第 1 列と第 2 列の内積はすべて 0 であるため, これらはすべて ユニタリー行列である. 従って $A_j^* = A_j^{-1}$ だから $A_j A_j^* = E_2$ となるため, $(A_j, A_j) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_j A_j^*) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(E_2) = 1$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ である. また, $A_1 A_2^* = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -A_3$, $A_2 A_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -A_1$, $A_3 A_1^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A_2$ だから $(A_j, A_k) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_j A_k^*) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(-A_l) = 0$ $((j, k, l) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2))$ であり, $A_4 = iE_2$ だから $(A_j, A_4) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_j A_4^*) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(-iA_j) = 0$ $(j = 1, 2, 3)$ である.

また $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が $X^* = -X$ を満たすことと, $\frac{x}{i}, \frac{w}{i} \in \boldsymbol{R}$ であり, $z = -\bar{y}$ が成り立つことと同値であるため, $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & w \end{pmatrix} \middle| \, \frac{x}{i}, \frac{w}{i} \in \boldsymbol{R},\ y \in \boldsymbol{C} \right\}$ である. ここで, $\begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & w \end{pmatrix} = \frac{x - w}{2i} A_1 + \mathrm{Re}(y) A_2 + \mathrm{Im}(y) A_3 + \frac{x + w}{2i} A_4$ だから, $A_1, A_2, A_3, A_4$ は $V$ を生成する. 故に $B$ は $V$ の正規直交基底である.

$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が $X^* = -X$ かつ $\mathrm{tr}X = 0$ を満たすことと, $\frac{x}{i} \in \boldsymbol{R}$ であり, $z = -\bar{y}$ かつ $w = -x$ が成り立つことと同値であるため, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & -x \end{pmatrix} \middle| \, \frac{x}{i} \in \boldsymbol{R},\ y \in \boldsymbol{C} \right\}$ であり, $\begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & -x \end{pmatrix} = \frac{x}{i} A_1 + \mathrm{Re}(y) A_2 + \mathrm{Im}(y) A_3$ だから, $A_1, A_2, A_3$ は $W$ を生成する. 故に $B'$ は $W$ の正規直交基底である.

(2) 2 次正方行列 $A$ に対し, $X \in V$ ならば $X^* = -X$ だから $(AXA^*)^* = (A^*)^* X^* A^* = A(-X)A^* = -AXA^*$ となるため, $AXA^* \in V$ である. 一般に $m \times n$ 行列 $X$ と $n \times m$ 行列 $Y$ に対して $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$ が成り立つため, $A$ が 2 次のユニタリー行列ならば $A^* = A^{-1}$ だから, $X \in W$ ならば $\mathrm{tr}(AXA^*) = \mathrm{tr}((AX)A^{-1}) = \mathrm{tr}(A^{-1}(AX)) = \mathrm{tr}((A^{-1}A)X) = \mathrm{tr}(E_2 X) = \mathrm{tr}\, X = 0$ である. 故に $AXA^* \in W$ である.

(3) $\mathrm{Re}(iz) = \dfrac{iz - i\bar{z}}{2} = -\dfrac{z - \bar{z}}{2i} = -\mathrm{Im}(z)$, $\mathrm{Im}(iz) = \dfrac{iz + i\bar{z}}{2i} = \dfrac{z + \bar{z}}{2} = \mathrm{Re}(z)$ だから, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{aligned}
f_A(A_1) &= AA_1A^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia & -ib \\ ic & -id \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(|a|^2 - |b|^2) & i(a\bar{c} - b\bar{d}) \\ i(\bar{a}c - \bar{b}d) & i(|c|^2 - |d|^2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{|a|^2 - |b|^2 - |c|^2 + |d|^2}{2}A_1 + \frac{\bar{a}c - a\bar{c} + b\bar{d} - \bar{b}d}{2i}A_2 + \frac{\bar{a}c + a\bar{c} - b\bar{d} - \bar{b}d}{2}A_3 + \frac{|a|^2 - |b|^2 + |c|^2 - |d|^2}{2}A_4 \\
f_A(A_2) &= AA_2A^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{b} - \bar{a}b & a\bar{d} - b\bar{c} \\ -\bar{a}d + \bar{b}c & c\bar{d} - \bar{c}d \end{pmatrix} \\
&= \frac{a\bar{b} - \bar{a}b - c\bar{d} + \bar{c}d}{2i}A_1 + \frac{a\bar{d} + \bar{a}d - b\bar{c} - \bar{b}c}{2}A_2 + \frac{a\bar{d} - \bar{a}d - b\bar{c} + \bar{b}c}{2i}A_3 + \frac{a\bar{b} - \bar{a}b + c\bar{d} - \bar{c}d}{2i}A_4 \\
f_A(A_3) &= AA_3A^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bi & ai \\ di & ci \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(a\bar{b} + \bar{a}b) & i(a\bar{d} + b\bar{c}) \\ i(\bar{a}d + \bar{b}c) & i(c\bar{d} + \bar{c}d) \end{pmatrix} \\
&= \frac{a\bar{b} + \bar{a}b - c\bar{d} - \bar{c}d}{2}A_1 + \frac{-a\bar{d} + \bar{a}d - b\bar{c} + \bar{b}c}{2i}A_2 + \frac{a\bar{d} + \bar{a}d + b\bar{c} + \bar{b}c}{2}A_3 + \frac{a\bar{b} + \bar{a}b + c\bar{d} + \bar{c}d}{2}A_4 \\
f_A(A_4) &= AA_4A^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia & ib \\ ic & id \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(|a|^2 + |b|^2) & i(a\bar{c} + b\bar{d}) \\ i(\bar{a}c + \bar{b}d) & i(|c|^2 + |d|^2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2}{2}A_1 + \frac{\bar{a}c - a\bar{c} - b\bar{d} + \bar{b}d}{2i}A_2 + \frac{\bar{a}c + a\bar{c} + b\bar{d} + \bar{b}d}{2}A_3 + \frac{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}{2}A_4
\end{aligned}$$

である. 従って $B$ に関する $f_A$ の表現行列は $\begin{pmatrix} \frac{|a|^2-|b|^2-|c|^2+|d|^2}{2} & \frac{a\bar{b}-\bar{a}b-c\bar{d}+\bar{c}d}{2i} & \frac{a\bar{b}+\bar{a}b-c\bar{d}-\bar{c}d}{2} & \frac{|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2}{2} \\ \frac{\bar{a}c-a\bar{c}+b\bar{d}-\bar{b}d}{2i} & \frac{a\bar{d}+\bar{a}d-b\bar{c}-\bar{b}c}{2} & \frac{-a\bar{d}+\bar{a}d-b\bar{c}+\bar{b}c}{2i} & \frac{\bar{a}c-a\bar{c}-b\bar{d}+\bar{b}d}{2i} \\ \frac{\bar{a}c+a\bar{c}-b\bar{d}-\bar{b}d}{2} & \frac{a\bar{d}-\bar{a}d-b\bar{c}+\bar{b}c}{2i} & \frac{a\bar{d}+\bar{a}d+b\bar{c}+\bar{b}c}{2} & \frac{\bar{a}c+a\bar{c}+b\bar{d}+\bar{b}d}{2} \\ \frac{|a|^2-|b|^2+|c|^2-|d|^2}{2} & \frac{a\bar{b}-\bar{a}b+c\bar{d}-\bar{c}d}{2i} & \frac{a\bar{b}+\bar{a}b+c\bar{d}+\bar{c}d}{2} & \frac{|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2}{2} \end{pmatrix}$

である. $A$ がユニタリー行列ならば $|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1$, $a\bar{b} + c\bar{d} = 0$ が成り立ち, $A^* = A^{-1}$ もユニタリー行列だから $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1$, $\bar{a}c + \bar{b}d = 0$ が成り立つ. 故に, 上式から

$$\begin{aligned}
AA_1A^* &= (|a|^2 - |c|^2)A_1 + \frac{\bar{a}c - a\bar{c}}{i}A_2 + (\bar{a}c + a\bar{c})A_3 \\
AA_2A^* &= \frac{a\bar{b} - \bar{a}b}{i}A_1 + \frac{a\bar{d} + \bar{a}d - b\bar{c} - \bar{b}c}{2}A_2 + \frac{a\bar{d} - \bar{a}d - b\bar{c} + \bar{b}c}{2i}A_3 \\
AA_3A^* &= (a\bar{b} + \bar{a}b)A_1 + \frac{-a\bar{d} + \bar{a}d - b\bar{c} + \bar{b}c}{2i}A_2 + \frac{a\bar{d} + \bar{a}d + b\bar{c} + \bar{b}c}{2}A_3
\end{aligned}$$

が得られるため, $B'$ に関する $g_A$ の表現行列は, $\begin{pmatrix} |a|^2 - |c|^2 & \frac{a\bar{b}-\bar{a}b}{i} & a\bar{b} + \bar{a}b \\ \frac{\bar{a}c-a\bar{c}}{i} & \frac{a\bar{d}+\bar{a}d-b\bar{c}-\bar{b}c}{2} & \frac{-a\bar{d}+\bar{a}d-b\bar{c}+\bar{b}c}{2i} \\ \bar{a}c + a\bar{c} & \frac{a\bar{d}-\bar{a}d-b\bar{c}+\bar{b}c}{2i} & \frac{a\bar{d}+\bar{a}d+b\bar{c}+\bar{b}c}{2} \end{pmatrix}$ である.

(4) $L_A : M_2(\boldsymbol{C}) \to M_2(\boldsymbol{C})$, $R_{A^*} : M_2(\boldsymbol{C}) \to M_2(\boldsymbol{C})$ を $L_A(X) = AX$, $R_{A^*}(X) = XA^*$ で定義すれば, 第 17 回の問題 18 の (3) の結果から $\det(L_A) = |A|^2$, $\det(R_{A^*}) = |A^*|^2 = \left|{}^t\overline{A}\right|^2 = \left|\overline{A}\right|^2 = \overline{|A|}^2$ が成り立つ. 従って第 16 回の問題 7 の (2) の結果から, $\det(R_{A^*} \circ L_A) = \det(R_{A^*})\det(L_A) = \overline{|A|}^2|A|^2 = \left(\overline{|A|}|A|\right)^2 = |\det A|^4$ が得られる. $B$ は $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間 $M_2(\boldsymbol{C})$ の基底であり, $(R_{A^*} \circ L_A)(A_j) = f_A(A_j)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ だから, $B$ に関する $R_{A^*} \circ L_A$ の表現行列は $B$ に関する $f_A$ の表現行列と一致する. 故に $\det(f_A) = \det(R_{A^*} \circ L_A) = |\det A|^4$ である.

$A$ が 2 次のユニタリー行列のとき, $f_A(A_4) = A_4$ であり, $B'$ に関する $g_A$ の表現行列を $P$ とすれば, (3) の結果から $B$ に関する $f_A$ の表現行列は $\begin{pmatrix} P & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$ となるため, ユニタリー行列の行列式の値は絶対値が 1 である複素数であることに注意すれば, $\det(g_A) = |P| = \begin{vmatrix} P & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} = |\det A|^4 = 1$ である.

(5) $A$ がユニタリー行列ならば $A^* = A^{-1}$ だから, $X, Y \in V$ に対して次の等式が成り立つ.

$$(f_A(X), f_A(Y)) = (AXA^*, AYA^*) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(AXA^*(AYA^*)^*) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(AXA^*(A^*)^*Y^*A^*) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}((AXA^*A)(Y^*A^*))$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}((Y^*A^*)(AXA^*A)) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(Y^*A^{-1}AXA^{-1}A) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(Y^*X) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY^*) = (X, Y)$$

8. (1) $A$ は正則行列だから, $A$ の列ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^n$ の基底 $B = [A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n]$ が考えられる. シュミットの直交化法により, $B$ を直交化して得られる $\boldsymbol{K}^n$ の正規直交基底を $B' = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n]$ とし, $\boldsymbol{u}_j$ を第 $j$ 列とする $n$ 次正方行列を $U$ とすれば, $U$ はユニタリー行列である. $B'$ から $B$ への基底の変換行列を $T = \left(p_{ij}\right)$ とすれば, 第 17 回の問題 8 の (1) により, $T$ は対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である. さらに $A\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{u}_i$ であり, この等式の右辺は $UT$ の第 $j$ 列だから $A = UT$ が成り立つ.

(2) $U = \left(u_{ij}\right)$ を $n$ 次ユニタリー行列かつ上半三角行列である行列とする. $j$ による帰納法で $|u_{jj}| = 1$ かつ $U$ の第 $j$ 列が $u_{jj}\boldsymbol{e}_j$ に等しいことを示す. $i > 1$ ならば $u_{i1} = 0$ だから $U\boldsymbol{e}_1 = u_{11}\boldsymbol{e}_1$ であり, $U\boldsymbol{e}_1$ は単位ベクトルだから $|u_{11}| = \|u_{11}\boldsymbol{e}_1\| = \|U\boldsymbol{e}_1\| = 1$ が得られる. 故に $j = 1$ の場合は主張が成り立つ. $j \leqq k-1$ ならば $|u_{jj}| = 1$ かつ $U$ の第 $j$ 列が $u_{jj}\boldsymbol{e}_j$ に等しいと仮定すれば, $j \leqq k-1$ のとき, $U$ の第 $k$ 列と第 $j$ 列の内積 $(U\boldsymbol{e}_k, U\boldsymbol{e}_j)$ は $(U\boldsymbol{e}_k, u_{jj}\boldsymbol{e}_j) = u_{jk}\bar{u}_{jj}$ に等しく, 一方 $U$ がユニタリー行列であることから $U\boldsymbol{e}_j$ と $U\boldsymbol{e}_k$ は直交するため, $u_{jk}\bar{u}_{jj} = 0$ である. ここで, $|u_{jj}| = 1 \neq 0$ だから, 上式から $u_{jk} = 0$ $(j \leqq k-1)$ が得られる. $U$ は上半三角行列だから $j > k$ ならば $u_{jk} = 0$ であるため, $U$ の第 $k$ 列は $u_{kk}\boldsymbol{e}_k$ に等しい. さらに $U$ がユニタリー行列であることから $U$ の第 $k$ 列は単位ベクトルだから $|u_{kk}| = \|u_{kk}\boldsymbol{e}_k\| = \|U\boldsymbol{e}_k\| = 1$ である. 従って $j = k$ の場合も主張が成り立つ.

(3) 仮定から, $(U')^{-1}$ もユニタリー行列であり, $(U')^{-1}U$ もユニタリー行列である. 一方, 仮定から $T^{-1}$ は対角成分がすべて正の実数である上半三角行列であり, $T^{-1}T'$ も対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である. $U'$, $T$ は正則行列だから $UT = U'T'$ より $(U')^{-1}U = T^{-1}T'$ が得られ, この左辺はユニタリー行列であり, 右辺は対角成分がすべて正の実数である上半三角行列だから, (2) の結果から $(U')^{-1}U = T^{-1}T'$ は対角成分がすべて 1 である対角行列, すなわち単位行列である. 従って $(U')^{-1}U = E_n$ かつ $T^{-1}T' = E_n$ だから $U = U'$ かつ $T = T'$ である.

9. (1) $G(S', T')$ の $(i, j)$ 成分は $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{z}_j) = \left(\sum_{s=1}^{m} p_{si}\boldsymbol{v}_s, \sum_{t=1}^{n} q_{tj}\boldsymbol{w}_t\right) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} p_{si}(\boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{w}_t)\bar{q}_{tj}$ であり, $\sum_{t=1}^{n}(\boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{w}_t)\bar{q}_{tj}$ は $G(S, T)\overline{Q}$ の $(s, j)$ 成分だから, 上式より $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{z}_j)$ は ${}^t\!PG(S, T)\overline{Q}$ の $(i, j)$ 成分に等しいことがわかる. 従って $G(S', T') = {}^t\!PG(S, T)\overline{Q}$ が成り立つ.

$\mathrm{rank}\, P = m$ かつ $\mathrm{rank}\, Q = n$ ならば $\mathrm{rank}\, {}^t\!P = \mathrm{rank}\, P = m$ かつ $\mathrm{rank}\, \overline{Q} = \mathrm{rank}\, Q = n$ であり, ${}^t\!P$ は $k \times m$ 行列, $\overline{Q}$ は $n \times l$ 行列だから, 1 次写像 $T_{{}^t\!P} : \boldsymbol{K}^m \to \boldsymbol{K}^k$ は単射であり, $T_{\overline{Q}} : \boldsymbol{K}^l \to \boldsymbol{K}^n$ は全射である. 従って

$$\mathrm{rank}\, G(S', T') = \mathrm{rank}\, {}^t\!PG(S, T)\overline{Q} = \mathrm{rank}\, T_{{}^t\!PG(S,T)\overline{Q}} = \mathrm{rank}\left(T_{{}^t\!P} \circ T_{G(S,T)} \circ T_{\overline{Q}}\right) = \mathrm{rank}\, T_{G(S,T)} = \mathrm{rank}\, G(S, T).$$

(2) $S = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$, $T = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n)$ のとき, $G(T, S)$ の $(i, j)$ 成分は $(\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{v}_j) = \overline{(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{w}_i)}$ だから, $G(S, T)^*$ の $(i, j)$ 成分と一致する. 従って $G(T, S) = G(S, T)^*$ が成り立つ.

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ は $V$ の正規直交基底だから $G(U, U)$ は $k$ 次単位行列であり, $\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_i = \sum_{i=1}^{k}\overline{(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j)}\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{w}_j = \sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_i = \sum_{i=1}^{k}\overline{(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{w}_j)}\boldsymbol{u}_i$ だから $P = \overline{G(U, S)}$, $Q = \overline{G(U, T)}$ とおけば, (1) と上で示したことから, $G(S, T) = {}^t\!PG(U, U)\overline{Q} = G(U, S)^*G(U, T) = G(S, U)G(U, T)$ が得られる.

(3) $r = \mathrm{rank}\, G(S, T)$ とおき, $G(S, T)\boldsymbol{e}_{n_1}, G(S, T)\boldsymbol{e}_{n_2}, \ldots, G(S, T)\boldsymbol{e}_{n_r}$ が 1 次独立であるとする. このとき, $\boldsymbol{v}_{n_1}, \boldsymbol{v}_{n_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{n_r}$ が 1 次従属であると仮定すれば, $a_1\boldsymbol{v}_{n_1} + a_2\boldsymbol{v}_{n_2} + \cdots + a_r\boldsymbol{v}_{n_r} = \boldsymbol{0}$ を満たす $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \boldsymbol{K}$ で, ある $s$ に対して $a_s \neq 0$ であるものが存在する. $\boldsymbol{w}_j$ との内積を考えれば $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $a_1(\boldsymbol{v}_{n_1}, \boldsymbol{w}_j) + a_2(\boldsymbol{v}_{n_2}, \boldsymbol{w}_j) + \cdots + a_r(\boldsymbol{v}_{n_r}, \boldsymbol{w}_j) = 0$ が得られるが, これより $a_1G(S, T)\boldsymbol{e}_{n_1} + a_2G(S, T)\boldsymbol{e}_{n_2} + \cdots + a_rG(S, T)\boldsymbol{e}_{n_r} = \boldsymbol{0}$ が得られ, $G(S, T)\boldsymbol{e}_{n_1}, G(S, T)\boldsymbol{e}_{n_2}, \ldots, G(S, T)\boldsymbol{e}_{n_r}$ が 1 次独立であることと矛盾する. 故に $\boldsymbol{v}_{n_1}, \boldsymbol{v}_{n_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{n_r}$ は 1 次独立であるため, $\dim\langle\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\rangle \geqq r$ である. 従って, $\dim\langle\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n\rangle \geqq \mathrm{rank}\, G(T, S)$ であり, (2) より $G(T, S) = G(S, T)^* = \overline{{}^tG(S, T)}$ だから $\mathrm{rank}\, G(T, S) = \mathrm{rank}\, \overline{{}^tG(S, T)} = \mathrm{rank}\, {}^tG(S, T) = \mathrm{rank}\, G(S, T)$ となるため, $\dim\langle\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n\rangle \geqq \mathrm{rank}\, G(S, T)$ が得られる.

(4) $d=\dim\langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_m\rangle$ とおき, $\boldsymbol{v}_{n_1},\boldsymbol{v}_{n_2},\dots,\boldsymbol{v}_{n_d}$ は 1 次独立であるとする. $a_1,a_2,\dots,a_d\in\boldsymbol{K}$ が

$$a_1G(S,S)\boldsymbol{e}_{n_1}+a_2G(S,S)\boldsymbol{e}_{n_2}+\cdots+a_dG(S,S)\boldsymbol{e}_{n_d}=\boldsymbol{0}$$

を満たすとすれば, すべての $i=1,2,\dots,m$ に対して $a_1(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_{n_1})+a_2(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_{n_2})+\cdots+a_d(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_{n_d})=0$ が成り立つ. $\boldsymbol{a}=\bar{a}_1\boldsymbol{v}_{n_1}+\bar{a}_2\boldsymbol{v}_{n_2}+\cdots+\bar{a}_d\boldsymbol{v}_{n_d}$ とおけば, この等式の右辺は $(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{a})$ に等しいため, $(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{a})=0$ である. 従って $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=(\bar{a}_1\boldsymbol{v}_{n_1}+\bar{a}_2\boldsymbol{v}_{n_2}+\cdots+\bar{a}_d\boldsymbol{v}_{n_d},\boldsymbol{a})=\bar{a}_1(\boldsymbol{v}_{n_1},\boldsymbol{a})+\bar{a}_2(\boldsymbol{v}_{n_2},\boldsymbol{a})+\cdots+\bar{a}_d(\boldsymbol{v}_{n_d},\boldsymbol{a})=0$ だから $\bar{a}_1\boldsymbol{v}_{n_1}+\bar{a}_2\boldsymbol{v}_{n_2}+\cdots+\bar{a}_d\boldsymbol{v}_{n_d}=\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ が得られる. 故に $\boldsymbol{v}_{n_1},\boldsymbol{v}_{n_2},\dots,\boldsymbol{v}_{n_d}$ の 1 次独立性から $a_1=a_2=\cdots=a_d=0$ となるため, $G(S,S)\boldsymbol{e}_{n_1},G(S,S)\boldsymbol{e}_{n_2},\dots,G(S,S)\boldsymbol{e}_{n_d}$ は 1 次独立である. よって $\operatorname{rank}G(S,S)\geqq d$ であり, 一方 (3) より $\operatorname{rank}G(S,S)\leqq d$ だから $\operatorname{rank}G(S,S)=d$ である.

(5) $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\dots,\boldsymbol{u}_k\in V$ を $\langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_m\rangle\cap\langle \boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n\rangle$ を生成するように選び, $U=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\dots,\boldsymbol{u}_k)$ とおく. $\boldsymbol{u}_j\in\langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_m\rangle$ だから $\boldsymbol{u}_j=\sum\limits_{i=1}^{m}p_{ij}\boldsymbol{v}_i$ $(p_{ij}\in\boldsymbol{K})$ と表され, $\boldsymbol{u}_j\in\langle \boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n\rangle$ だから $\boldsymbol{u}_j=\sum\limits_{i=1}^{n}q_{ij}\boldsymbol{w}_i$ $(q_{ij}\in\boldsymbol{K})$ と表される. $p_{ij}$ を $(i,j)$ 成分とする $m\times k$ 行列を $P$ とし, $q_{ij}$ を $(i,j)$ 成分とする $n\times l$ 行列を $Q$ とすれば, (1) の結果から $G(U,U)={}^tPG(S,T)\overline{Q}$ が成り立つため, $\operatorname{rank}G(U,U)=\operatorname{rank}{}^tPG(S,T)\overline{Q}\leqq\operatorname{rank}G(S,T)$ である. 一方, (4) の結果から $\dim(\langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_m\rangle\cap\langle \boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n\rangle)=\dim\langle \boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\dots,\boldsymbol{u}_k\rangle=\operatorname{rank}G(U,U)$ だから, $\dim(\langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_m\rangle\cap\langle \boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n\rangle)\leqq\operatorname{rank}G(S,T)$ が成り立つ.

10. 変数変換 $y=\dfrac{2x-a-b}{b-a}$ を行うと, $x$ が $a$ から $b$ まで動けば, $y$ は $-1$ から $1$ まで動き, $x=\dfrac{b-a}{2}y+\dfrac{a+b}{2}$ だから $(f(x),g(x))_{a,b}=\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}f\left(\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2}\right)dy$ が成り立つ. 写像 $\varphi:P_n(\boldsymbol{R})\to P_n(\boldsymbol{R})$ を $\varphi(f(x))=\dfrac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{2}}f\left(\dfrac{b-a}{2}x+\dfrac{a+b}{2}\right)$ で定めれば, $\varphi$ は 1 次写像で, 任意の $f(x),g(x)\in P_n(\boldsymbol{R})$ に対して $(f(x),g(x))_{a,b}=(\varphi(f(x)),\varphi(g(x)))_{-1,1}$ が成り立つため, $\varphi$ は内積 $(\ ,\ )_{a,b}$ をもつ計量ベクトル空間 $P_n(\boldsymbol{R})$ から 内積 $(\ ,\ )_{-1,1}$ をもつ計量ベクトル空間 $P_n(\boldsymbol{R})$ への内積を保つ 1 次写像だから, 単射であり, 故に $\varphi$ は次元が等しいベクトル空間の間の単射である 1 次写像であるため同型写像である. $1,x,\dots,x^{n-1}$ で生成される $P_n(\boldsymbol{R})$ の部分空間は $P_{n-1}(\boldsymbol{R})$ であり, $\varphi$ は $P_{n-1}(\boldsymbol{R})$ を $P_{n-1}(\boldsymbol{R})$ 全体に写すため, $j=0,1,2,\dots,n-1$ に対して $(f(x),x^j)_{a,b}=0$ であることは, 任意の $g(x)\in P_{n-1}(\boldsymbol{R})$ に対して $(\varphi(f(x)),g(x))_{-1,1}=0$ であること同値である. 第 17 回の問題 9 の結果から $P_k(x)=\dfrac{1}{2^kk!}\dfrac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k$ とおけば, $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}P_0(x),\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}P_1(x),\dots,\dfrac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}}P_n(x)\right]$ は $P_n(\boldsymbol{R})$ の内積 $(\ ,\ )_{-1,1}$ に関する正規直交基底であり, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}P_0(x),\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}P_1(x),\dots,\dfrac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}P_{n-1}(x)$ は $P_{n-1}(\boldsymbol{R})$ を生成する. 従って, $P_n(\boldsymbol{R})$ の内積 $(\ ,\ )_{-1,1}$ に関する $P_{n-1}(\boldsymbol{R})$ の直交補空間は $\dfrac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}}P_n(x)$ で生成される 1 次元部分空間だから, 任意の $g(x)\in P_{n-1}(\boldsymbol{R})$ に対して $(\varphi(f(x)),g(x))_{-1,1}=0$ が成り立つためには $\varphi(f(x))=\dfrac{c\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}}P_n(x)$ を満たす実数 $c$ が存在することが必要十分である. ここで, $\varphi$ の逆写像 $\varphi^{-1}$ は $\varphi^{-1}(g(x))=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}}g\left(\dfrac{2x-a-b}{b-a}\right)$ で与えられるため, $f(x)$ が $j=0,1,2,\dots,n-1$ に対して $(f(x),x^j)_{a,b}=0$ であることは, $f(x)=\dfrac{c\sqrt{2n+1}}{\sqrt{b-a}}P_n\left(\dfrac{2x-a-b}{b-a}\right)$ を満たす実数 $c$ が存在することが必要十分である. 一般に関数 $f$ が関数 $g$ の $n$ 次導関数 $f(x)=g^{(n)}(x)$ ならば $f(px+q)=\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{p^n}g(px+q)\right)$ だから, $P_n\left(\dfrac{2x-a-b}{b-a}\right)=\dfrac{1}{n!(b-a)^n}\dfrac{d^n}{dx^n}(x-a)^n(x-b)^n$ である. $\varphi$ が内積を保つことと, $\dfrac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}}P_n(x)$ の長さが 1 であることから, $\varphi(f(x))=\dfrac{c\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}}P_n(x)$ を満たす $f(x)$ の, 内積 $(\ ,\ )_{a,b}$ に関する長さは $|c|$ であるため, $1,x,\dots,x^{n-1}$ のすべてと直交して長さが 1 である $P_n(\boldsymbol{R})$ の要素は $\pm\dfrac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{b-a}}P_n\left(\dfrac{2x-a-b}{b-a}\right)=\pm\dfrac{\sqrt{2n+1}}{n!(b-a)^{n+\frac{1}{2}}}\dfrac{d^n}{dx^n}(x-a)^n(x-b)^n$ である.

# 線形数学 II 演習問題　第 19 回　行列の対角化

1. 次の行列の固有値と固有空間の基底を求め, 対角化可能ならば対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -5 & 17 & 10 \\ 7 & -21 & -12 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -6 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 2 & 8 \end{pmatrix}$　(10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$　(12) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$　(13) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　(14) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(15) $\begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -7 & 8 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(16) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$　(17) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$　(18) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(19) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$　(20) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　(21) $\begin{pmatrix} 0 & -5 & -7 \\ -1 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$　(22) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -5 & 0 & -7 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

(23) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 7 & 7 & 3 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$　(24) $\begin{pmatrix} -5 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　(25) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$　(26) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(27) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(28) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$　(29) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$　(30) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

(31) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -6 & -8 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　(32) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(33) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & 3 \\ -8 & -8 & 5 \end{pmatrix}$　(34) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 3 \\ -12 & -12 & -10 \end{pmatrix}$

(35) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & a \\ -1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$　(36) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$　(37) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ a & 1-a & a \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$　(38) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & a-1 \\ 1 & 0 & a-1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

(39) $\begin{pmatrix} a & -2 & 1 \\ -a+5 & 7 & -1 \\ a-5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$　(40) $\begin{pmatrix} 2 & a & -2a \\ 0 & 8 & -18 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$　(41) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$　(42) $\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 3a-1 & 0 \\ 0 & 3a-3 & -1 \end{pmatrix}$

(43) $\begin{pmatrix} 2b-a & 0 & 2a-2b \\ b-a & c & a-b \\ b-a & 0 & 2a-b \end{pmatrix}$　(44) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & -7 & 1 \\ 2 & 10 & -10 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$　(45) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -9 & -3 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$　(46) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(47) $\begin{pmatrix} -3a+4 & -4a+2 & -2a+1 \\ 8a-4 & 9a-2 & 4a-2 \\ -4a+2 & -4a+2 & -a+3 \end{pmatrix}$　(48) $\begin{pmatrix} ab-2 & a^2 & 3a \\ b^2 & ab-2 & 3b \\ -b & -a & -5 \end{pmatrix}$　(49) $\begin{pmatrix} -3a+9 & -2 & -a+2 \\ -3a+1 & 0 & -a \\ 9a-18 & 6 & 3a-3 \end{pmatrix}$

(50) $\begin{pmatrix} -6a+5 & 6 & -2a+3 \\ -3a+6 & 5 & -a+3 \\ 18a-18 & -18 & 6a-10 \end{pmatrix}$　(51) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$　(52) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(53) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & -8 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ (54) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (55) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & -8 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. 次の行列の $n$ 乗を求めよ.
(1) $\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \lambda+ac & ad \\ bc & \lambda+bd \end{pmatrix}$

3. $f$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 $V$ の 1 次変換, $A$ を $V$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $f$ の表現行列とする. $\lambda \in \boldsymbol{K}$ が $f$ の固有値であるためには, $\lambda$ が $A$ の固有値であることが必要十分であり, $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v}_j$ が $\lambda$ に対する $f$ の固有ベクトルであるためには, $x_j$ を第 $j$ 成分とする $n$ 次元数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{x}}$ が $\lambda$ に対する $A$ の固有ベクトルであることが必要十分であることを示せ.

4. $A$ を $n$ 次正方行列, $P$ を $n$ 次正則行列とし, $P$ の第 $j$ 列を $\boldsymbol{v}_j$ とする. $P^{-1}AP$ が, $\lambda_j$ を $(j,j)$ 成分とする対角行列であるためには, $\lambda_j$ が $A$ の固有値で, $\boldsymbol{v}_j$ が $\lambda_j$ に対する固有ベクトルであることが必要十分であることを示せ.

5. $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に写す.
(1) $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ に関する $f$ の表現行列を求めよ.
(2) $f$ の固有値を求め, $f$ の固有空間の基底を $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ の 1 次結合で表せ.

6. $a$ を $\dfrac{2}{3}$ と異なる実数の定数とする. $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f$ は $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ 2a-1 \end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1-2a \\ 2a \\ a-1 \end{pmatrix}$ に写す.
(1) $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ に関する $f$ の表現行列を求めよ.
(2) $f$ の固有値をすべて求めよ.
(3) $f$ の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ. $f$ の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{R}^3$ の基底が存在するか?

7. $V$ を $x$ を変数とする 2 次以下の実数係数多項式全体からなる集合とし, 多項式の加法と実数倍によって $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とみなすことにする. 1 次写像 $f: V \to V$ を $f(P(x)) = 2P(x) + P'(x)$ で定める.
(1) $V$ の基底 $[1, x, x^2]$ に関する $f$ の表現行列を求めよ.
(2) 上で求めた行列が対角化可能であれば対角化し, そうでなければその理由を述べよ.

8. $A$ を $n$ 次複素正方行列する.
(1) $A$ の固有多項式と $A$ の転置行列 ${}^tA$ の固有多項式は一致することを示せ.
(2) $A$ の固有多項式 $F_A(x)$ における $x^k$ の係数を $c_k(A)$ とおく. $A$ の $(i,j)$ 成分 $a_{ij}$ の共役複素数 $\bar{a}_{ij}$ を $(i,j)$ 成分とする $n$ 次正方行列 $\overline{A}$ の固有多項式は, $c_k(A)$ の共役複素数を $x^k$ の係数とする $n$ 次多項式であることを示せ.
(3) $\lambda$ が $A$ の固有値ならば, $\lambda$ の共役複素数は $A$ の随伴行列の固有値であることを示せ.

9. $\lambda$ を $n$ 次正方行列 $A$ の固有値とする. $\lambda$ に対する $A$ の固有空間の次元が $m$ ならば, $A$ の固有多項式は $(t-\lambda)^m$ を因数にもつことを示せ.

10. $A = (a_{ij})$ を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分とする $n$ 次正方行列とし, $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ が成り立つとする.

(1) $A$ は 1 を固有値にもつことを示せ.

(2) $\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{e}_j$ とおき, $k \in \boldsymbol{K}$ に対し, $\boldsymbol{K}^n$ の部分集合 $H_k$ を $H_k = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \,|\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = k\}$ で定めるとき, $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ は $H_k$ のベクトルを $H_k$ のベクトルに写すことを示せ.

11. (発展問題) $m$ を $n-1$ 以下の自然数とし, $P$, $Q$ はそれぞれ $\boldsymbol{K}$ の要素を成分とする $n \times m$ 行列, $m \times n$ 行列で, $\operatorname{rank} P = \operatorname{rank} Q = m$ であるとする. $\lambda \in \boldsymbol{K}$ に対し, $A = \lambda E_n + PQ$ とおく. このとき $A$ が対角化可能であるためには $m$ 次正方行列 $QP$ が正則であり, かつ対角化可能であることが必要十分であることを示せ.

12. (発展問題) $\lambda \in \boldsymbol{K}$ と零ベクトルではない $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^n$ ($n$ は 2 以上の整数) に対し, $A = \lambda E_n + \boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b}$ とおく.

(1) $A$ の固有多項式は $(t-\lambda)^{n-1}(t-\lambda-{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a})$ であり, 固有値 $\lambda$ に対する $A$ の固有空間は ${}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} = 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ 全体からなることを示せ.

(2) $A$ の最小多項式を求めよ.

(3) ${}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a} \neq 0$ の場合, 固有値 $\lambda + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$ に対する $A$ の固有空間は $\boldsymbol{a}$ で生成される 1 次元部分空間であることを示せ. さらに $\boldsymbol{b}$ の第 $j$ 成分を $b_j$ とするとき, $A$ を対角化せよ.

13. (発展問題) $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \boldsymbol{K}$ に対し, $n$ 次正方行列 $A$ を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & \text{\huge 0} & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{e}_n, A\boldsymbol{e}_n, A^2\boldsymbol{e}_n, \ldots, A^{n-1}\boldsymbol{e}_n$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $A$ の最小多項式は $A$ の固有多項式に一致することを示せ.

# 第 19 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -1 & t-4 \end{vmatrix} = t^2-6t+5=(t-1)(t-5)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 5 である. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(2) $\begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -4 & t-3 \end{vmatrix} = t^2-4t-5=(t+1)(t-5)$ より, 与えられた行列の固有値は $-1$ と 5 である. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(3) $\begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ 0 & t-1 \end{vmatrix} = t^2-4t-5=(t-1)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 1 のみである. このとき, 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(4) $\begin{vmatrix} t-3 & -8 & -12 \\ -2 & t-3 & -6 \\ 2 & 4 & t+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -8 & -12 \\ -2 & t-3 & -6 \\ 0 & t+1 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & 4 & -12 \\ -2 & t+3 & -6 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t-3 & 4 \\ -2 & t+3 \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-1)$ より, 与えられた行列の固有値は $\pm 1$ である. $\begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ -2 & -2 & -6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ -2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -4 & -8 & -12 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ だから $-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(5) $\begin{vmatrix} t-4 & 1 & 2 \\ -2 & t-1 & 2 \\ -1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -(t-2) & 0 \\ -2 & t-1 & 2 \\ -1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ -2 & t-3 & 2 \\ -1 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t-3 & 2 \\ 0 & t-1 \end{vmatrix} =$ $(t-1)(t-2)(t-3)$ より, 与えられた行列の固有値は 1, 2, 3 である. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(6) $\begin{vmatrix} t-4 & -1 & -1 \\ -2 & t-4 & -1 \\ 0 & -1 & t-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-4 & -1 & 0 \\ -2 & t-4 & -(t-3) \\ 0 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-4 & -1 & 0 \\ -2 & t-5 & 0 \\ 0 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix} t-4 & -1 \\ -2 & t-5 \end{vmatrix} =$ $(t-3)(t^2-9t+18) = (t-3)^2(t-6)$ より, 与えられた行列の固有値は 3 と 6 である. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 6 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(7) $\begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ 5 & t-17 & -10 \\ -7 & 21 & t+12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ 5 & t-17 & -10 \\ 7(t-2) & 0 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+13 & -3 & -2 \\ 75 & t-17 & -10 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t+13 & -3 \\ 75 & t-17 \end{vmatrix} =$ $(t-2)(t^2-4t+4) = (t-2)^3$ より, 与えられた行列の固有値は 2 のみである. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & -15 & -10 \\ -7 & 21 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(8) $\begin{vmatrix} t-4 & 4 & -2 \\ -2 & t+2 & -1 \\ 4 & -4 & t+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 4 & -2 \\ t & t+2 & -1 \\ 0 & -4 & t+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 4 & -2 \\ 0 & t-2 & 1 \\ 0 & -4 & t+2 \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ -4 & t+2 \end{vmatrix} = t^3$ より, 与えられた行列の固有値は 0 のみである. $\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(9) $\begin{vmatrix} t+6 & 2 & 6 \\ -4 & t-3 & -3 \\ -8 & -2 & t-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 2(t-2) & 0 \\ -4 & t-3 & -3 \\ -8 & -2 & t-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ -4 & t+5 & -3 \\ -8 & 14 & t-8 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t+5 & -3 \\ 14 & t-8 \end{vmatrix} =$ $(t-2)(t^2-3t+2) = (t-1)(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ -4 & -2 & -3 \\ -8 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & -3 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ -4 & -1 & -3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(10) $\begin{vmatrix} t-1 & -2 & -1 \\ 1 & t-4 & -1 \\ -2 & 4 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -(t-2) & 0 \\ 1 & t-4 & -1 \\ -2 & 4 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ 1 & t-3 & -1 \\ -2 & 2 & t \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t-3 & -1 \\ 2 & t \end{vmatrix} = (t-2)(t^2-3t+2) =$ $(t-1)(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(11) $\begin{vmatrix} t-6 & 3 & 7 \\ 1 & t-2 & -1 \\ -5 & 3 & t+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -(t-1) \\ 1 & t-2 & -1 \\ -5 & 3 & t+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 1 & t-2 & 0 \\ -5 & 3 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-2 & 0 \\ 3 & t+1 \end{vmatrix} =$ $(t+1)(t-1)(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $\pm1$ と 2 である. $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -7 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -18 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -18 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $-1$ に対する固有空

間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-4&3&7\\1&0&-1\\-5&3&8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&3&3\\1&0&-1\\0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&3&3\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ に対角化される.

(12) $\begin{vmatrix}t-1&-3&2\\3&t-13&7\\5&-19&t+10\end{vmatrix}=(t-1)(t-13)(t+10)-114-105+9(t+10)+133(t-1)-10(t-13)=t^3-4t^2+5t-2=(t-1)(t^2-3t+2)=(t-1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix}0&-3&2\\3&-12&7\\5&-19&11\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行を }-2\text{ 倍して}}\begin{pmatrix}0&-3&2\\3&-12&7\\-1&5&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-3&2\\0&3&-2\\-1&5&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&-2\\-1&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-11&7\\5&-19&12\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-3&2\\0&-2&1\\0&-4&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(13) $\begin{vmatrix}t-5&2&-4\\-2&t&-2\\2&-1&t+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-5&2&-4\\-2&t&-2\\0&t-1&t-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-5&6&-4\\-2&t+2&-2\\0&0&t-1\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}t-5&6\\-2&t+2\end{vmatrix}=(t-1)(t^2-3t+2)=(t-1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix}-4&2&-4\\-2&1&-2\\2&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-3&2&-4\\-2&2&-2\\2&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-2&2&-2\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&0&-4\\0&1&1\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}1&0&2\\2&2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ に対角化される.

(14) $\begin{vmatrix}t+1&-2&-2\\-3&t+1&4\\2&-2&t-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t+1&-2&-2\\-3&t+1&4\\-(t-1)&0&t-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1&-2&-2\\1&t+1&4\\0&0&t-1\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}t-1&-2\\1&t+1\end{vmatrix}=(t-1)(t^2+1)$ より, 与えられた行列の固有値は 1, $\pm i$ である. $\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-3&2&4\\2&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}2&-2&-2\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}2&0&-4\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}i+1&-2&-2\\-3&i+1&4\\2&-2&i-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を }-1\text{ 倍して}}$

$$\begin{pmatrix} i+1 & -2 & -2 \\ -3 & i+1 & 4 \\ -(i-1) & 0 & i-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{i-1}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} i+1 & -2 & -2 \\ -3 & i+1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} i-1 & -2 & 0 \\ 1 & i+1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & i+1 & 0 \\ 0 & i+1 & 1 \end{pmatrix}$ だから $i$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -i+1 & -2 & -2 \\ -3 & -i+1 & 4 \\ 2 & -2 & -i-3 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を }-1\text{ 倍して}} \begin{pmatrix} -i+1 & -2 & -2 \\ -3 & -i+1 & 4 \\ i+1 & 0 & -(i+1) \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{i+1}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} -i+1 & -2 & -2 \\ -3 & -i+1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} -i-1 & -2 & 0 \\ 1 & -i+1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i+1 & 0 \\ 0 & i-1 & -1 \end{pmatrix}$ だから $-i$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 2 & 1+i & 1-i \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1+i & 1-i \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ に対角化される.

(15) $\begin{vmatrix} t+5 & -6 & -4 \\ 7 & t-8 & -4 \\ 2 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -(t-2) & 0 \\ 7 & t-8 & -4 \\ 2 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ 7 & t-1 & -4 \\ 2 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t-1 & -4 \\ 0 & t-3 \end{vmatrix} =$ $(t-1)(t-2)(t-3)$ より, 与えられた行列の固有値は $1, 2, 3$ である. $\begin{pmatrix} 6 & -6 & -4 \\ 7 & -7 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ だから $1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & -4 \\ 7 & -6 & -4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから $2$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 8 & -6 & -4 \\ 7 & -5 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ だから $3$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(16) $\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 2 \\ -2 & t+1 & 2 \\ 2 & -2 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 2 \\ -(t+1) & t+1 & 0 \\ 2 & -2 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 2 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 0 & -2 & t \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t-1 & 2 \\ 0 & t \end{vmatrix} = t(t+1)(t-1)$ より, 与えられた行列の固有値は $0, \pm 1$ である. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ だから $-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}0&0&2\\-2&2&2\\2&-2&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&0&2\\-2&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&0&2\\-2&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}2&2&1\\1&2&1\\2&1&0\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ に対角化される.

(17) $\begin{vmatrix}t-1&-2&3\\1&t&-1\\1&-2&t+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-1&-2&3\\1&t&-1\\0&-(t+2)&t+2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-1&1&3\\1&t-1&-1\\0&0&t+2\end{vmatrix} = (t+2)\begin{vmatrix}t-1&1\\1&t-1\end{vmatrix} = (t+2)(t^2-2t) =$ $t(t+2)(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $-2, 0, 2$ である. $\begin{pmatrix}-3&-2&3\\1&-2&-1\\1&-2&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&-8&0\\1&-2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&-8&0\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから $-2$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-1&-2&3\\1&0&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&-2&2\\1&0&-1\\0&-2&2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&-2&2\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&2&-1\\1&-2&3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&-2&3\\0&4&-4\\0&0&0\end{pmatrix} D \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&4&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ に対角化される.

(18) $\begin{vmatrix}t-3&6&4\\-1&t+2&2\\1&-3&t-3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-3&6&4\\-1&t+2&2\\0&t-1&t-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-3&2&4\\-1&t&2\\0&0&t-1\end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix}t-3&2\\-1&t\end{vmatrix} = (t-1)(t^2-3t+2) =$ $(t-1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である.
$\begin{pmatrix}-2&6&4\\-1&3&2\\1&-3&-2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&0&0\\-1&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる.
$\begin{pmatrix}-1&6&4\\-1&4&2\\1&-3&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}-1&6&4\\0&-2&-2\\0&3&3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&-2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}3&2&2\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ に対角化される.

(19) $\begin{vmatrix}t&0&-1\\-1&t&0\\-3&-2&t\end{vmatrix} = t^3-3t-2 = (t+1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $-1$ と 2 である.

$\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-1&-1&0\\-3&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&1\\0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから $-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&2&0\\-3&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&4&-1\\-1&2&0\\0&-8&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&4&-1\\-1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(20) $\begin{vmatrix}t&-1&0\\0&t&-1\\2&-3&t\end{vmatrix}=t^3-3t+2=(t-1)^2(t+2)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と $-2$ である. $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\2&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-2&-1&0\\0&-2&-1\\2&-3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-2&-1&0\\0&-2&-1\\2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0\\4&0&-1\\2&1&0\end{pmatrix}$ だから $-2$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(21) $\begin{vmatrix}t&5&7\\1&t+1&4\\-1&-3&t-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t&5&7\\1&t+1&4\\0&t-2&t-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t&-2&7\\1&t-3&4\\0&0&t-2\end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix}t&-2\\1&t-3\end{vmatrix}=(t-2)^2(t-1)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix}2&5&7\\1&3&4\\-1&-3&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&3&4\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}1&5&7\\1&2&4\\-1&-3&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&5&7\\0&-3&-3\\0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(22) $\begin{vmatrix}t+1&1&4\\5&t&7\\-3&-1&t-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t+1&1&4\\5&t&7\\t-2&0&t-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-3&1&4\\-2&t&7\\0&0&t-2\end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix}t-3&1\\-2&t\end{vmatrix}=(t-2)^2(t-1)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix}3&1&4\\5&2&7\\-3&-1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}3&1&4\\-1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}2&1&4\\5&1&7\\-3&-1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&3\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(23) $\begin{vmatrix} t+1 & 2 & 1 \\ -7 & t-7 & -3 \\ 5 & 4 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 1 \\ -7 & t-1 & -3 \\ 5 & -2t+2 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 1 \\ -7 & t-1 & -3 \\ -9 & 0 & t-5 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t+1 & 1 \\ -9 & t-5 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)^2$

より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -7 & -5 & -3 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(24) $\begin{vmatrix} t+5 & -5 & 1 \\ 2 & t-1 & 0 \\ 1 & -1 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+5 & -5 & 1 \\ 0 & t+1 & -2t-2 \\ 1 & -1 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+5 & -5 & -9 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t+5 & -9 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} = (t+1)(t+2)^2$

より, 与えられた行列の固有値は $-1$ と $-2$ である. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $-2$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ だから $-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(25) $\begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ 1 & t-3 & 0 \\ 1 & -4 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ 1 & t-3 \end{vmatrix} = (t+1)(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は $-1$ と 2 である. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(26) $\begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ 0 & t-4 & -1 \\ 0 & 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t-4 & -1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)(t-3)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 2 と 3

である. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(27) $\begin{vmatrix}t-3&-1&1\\-2&t-3&2\\-1&-1&t-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-2&0&-(t-2)\\-2&t-3&2\\-1&-1&t-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-2&0&0\\-2&t-3&0\\-1&-1&t-2\end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix}t-3&0\\-1&t-2\end{vmatrix}=$ $(t-2)^2(t-3)$ より, 与えられた行列の固有値は 2 と 3 である. $\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-2&-1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&0&2\\-1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&0&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(28) $\begin{vmatrix}t-6&1&-5\\3&t-2&3\\7&-1&t+6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t+1&0&t+1\\3&t-2&3\\7&-1&t+6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t+1&0&0\\3&t-2&0\\7&-1&t-1\end{vmatrix}=(t+1)\begin{vmatrix}t-2&0\\-1&t-1\end{vmatrix}=$ $(t+1)(t-1)(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $\pm1, 2$ である. $\begin{pmatrix}-7&1&-5\\3&-3&3\\7&-1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-6&2\\3&-3&3\\0&6&-2\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-6&2\\3&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから $-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-5&1&-5\\3&-1&3\\7&-1&7\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}-5&1&-5\\-2&0&-2\\2&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-4&1&-5\\3&0&3\\7&-1&8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&0&3\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&1&-1\\-2&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\1&0&1\\3&1&1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ に対角化される.

(29) $\begin{vmatrix}t-2&1&-1\\-1&t+2&-1\\-1&5&t-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-2&1&0\\-1&t+2&t+1\\-1&5&t+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-2&1&0\\0&t-3&0\\-1&5&t+1\end{vmatrix}=(t+1)\begin{vmatrix}t-2&1\\0&t-3\end{vmatrix}=(t+1)(t-2)(t-3)$ より, 与えられた行列の固有値は $-1, 2, 3$ である. $\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-1&1&-1\\-1&5&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-2&2\\-1&1&-1\\0&4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(30) $\begin{vmatrix} t-4 & 5 & -1 \\ -3 & t+4 & -1 \\ -3 & 5 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -(t-1) & 0 \\ -3 & t+4 & -1 \\ -3 & 5 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ -3 & t+1 & -1 \\ -3 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t+1 & -1 \\ 2 & t-2 \end{vmatrix} =$ $(t-1)(t^2-t) = t(t-1)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 0 と 1 である. $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(31) $\begin{vmatrix} t-3 & -3 & 1 \\ 6 & t+8 & -3 \\ -2 & -3 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -(t-1) \\ 6 & t+8 & -3 \\ -2 & -3 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 6 & t+8 & 3 \\ -2 & -3 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t+8 & 3 \\ -3 & t-2 \end{vmatrix} =$
$(t-1)(t^2+6t-7) = (t-1)^2(t+7)$ より, 与えられた行列の固有値は $-7$ と 1 である.
$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 6 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -10 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -10 & -3 & 1 \\ -24 & -8 & 0 \\ -72 & -24 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -24 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $-7$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(32) $\begin{vmatrix} t-4 & -6 & -2 \\ 1 & t-4 & -2 \\ -2 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-4)^2(t-1)+2-24+6(t-1)-2(t-4)-4(t-4) = t^3-9t^2+24t-20 = (t-2)(t^2-7t+10)$

$= (t-2)^2(t-5)$ より, 与えられた行列の固有値は 2 と 5 である. $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -10 & -6 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(33) $\begin{vmatrix} t-3 & -2 & 1 \\ 6 & t+5 & -3 \\ 8 & 8 & t-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 1 \\ -(t-1) & t+5 & -3 \\ 0 & 8 & t-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 1 \\ 0 & t+3 & -2 \\ 0 & 8 & t-5 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t+3 & -2 \\ 8 & t-5 \end{vmatrix} =$ $(t-1)(t^2-2t+1) = (t-1)^3$ より, 与えられた行列の固有値は 1 のみである. $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 6 & 6 & -3 \\ 8 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(34) $\begin{vmatrix} t-8 & -6 & -6 \\ -3 & t-5 & -3 \\ 12 & 12 & t+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-8 & 0 & -6 \\ -3 & t-2 & -3 \\ 12 & -(t-2) & t+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-8 & 0 & -6 \\ -3 & t-2 & -3 \\ 9 & 0 & t+7 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t-8 & -6 \\ 9 & t+7 \end{vmatrix} =$ $(t-2)(t^2-t-2) = (t+1)(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は $-1$ と 2 である. $\begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ -3 & -3 & -3 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -9 & -6 & -6 \\ -3 & -6 & -3 \\ 12 & 12 & 9 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 3 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(35) $\begin{vmatrix} t-2 & 1 & -a \\ 1 & t-2 & -a \\ 1 & -1 & t-a-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & t-1 & -a \\ 1 & t-1 & -a \\ 1 & 0 & t-a-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & 0 & 0 \\ 1 & t-1 & -a \\ 1 & 0 & t-a-2 \end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix} t-1 & -a \\ 0 & t-a-2 \end{vmatrix} =$ $(t-1)(t-3)(t-a-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $1, 3, a+2$ である. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -a \\ 1 & -1 & -a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -a \\ 0 & 0 & -2a \\ 0 & 0 & -2a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行を } -1 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -a \\ 0 & 0 & -2a \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間

の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}1&1&-a\\1&1&-a\\1&-1&1-a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&-a\\0&0&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1-2a&0\\0&0&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2a-1\\1\\2\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}a&1&-a\\1&a&-a\\1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&a+1&-a\\0&a+1&-a\\1&-1&0\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 1 行を } -1 \text{ 倍して}}\begin{pmatrix}0&a+1&-a\\0&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$ だから $a+2$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}a\\a\\a+1\end{pmatrix}$ で与えられる. $a\neq\pm1$ ならば, 与えられた行列の固有値 1, 3, $a+2$ は相異なるため, $\begin{pmatrix}1&2a-1&a\\1&1&a\\0&2&a+1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&a+2\end{pmatrix}$ に対角化される. $a=\pm1$ ならば, 与えられた行列の固有値は 1 と 3 のみで, どちらの固有値に対する固有空間も 1 次元だから, 与えられた行列は対角化不可能である.

(36) $\begin{vmatrix}t-1&-a&0\\0&t-1&0\\-a&-a&t-2\end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix}t-1&-a\\0&t-1\end{vmatrix}=(t-1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $a=0$ ならば, 与えられた行列は対角行列である. $a\neq0$ の場合, $\begin{pmatrix}0&-a&0\\0&0&0\\-a&-a&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{a}\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\-a&-a&-1\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\-a&0&-1\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\-a\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}1&-a&0\\0&1&0\\-a&-a&0\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-a&0\\0&1&0\\0&-a^2-a&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\boldsymbol{e}_3$ で与えられる. 故に, $a\neq0$ ならば与えられた行列は対角化不可能である.

(37) $\begin{vmatrix}t-2&1&-1\\-a&t-1+a&-a\\-1&1&t-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-2&0&-1\\-a&t-1&-a\\-1&t-1&t-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-2&0&-1\\-a&t-1&-a\\a-1&0&t-2+a\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}t-2&-1\\a-1&t-2+a\end{vmatrix}=$ $(t-1)^2(t+a-3)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と $-a+3$ である. $\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-a&a&-a\\-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}1-a&1&-1\\-a&2&-a\\-1&1&1-a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}1-a&1&-1\\a-2&0&2-a\\a-2&0&2-a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行を } -1 \text{ 倍して}}\begin{pmatrix}1-a&1&-1\\a-2&0&2-a\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから, $a\neq2$ ならば $-a+3$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 従って $a\neq2$ ならば与えられた行列は $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&a\\-1&1&1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-a+3\end{pmatrix}$ に対角化される. $a=2$ ならば, 与えられた行列の固有値は 1 のみで, 1 に対する固有空間の次元は 2 だから, 与えられた行列は対角化不可能である.

(38) $\begin{vmatrix} t-2 & 1 & -a+1 \\ -1 & t & -a+1 \\ -1 & 1 & t-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 1 & -a+1 \\ t-1 & t & -a+1 \\ 0 & 1 & t-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 1 & -a+1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 1 & t-a \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-1 & 0 \\ 1 & t-a \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-a)$

より, 与えられた行列の固有値は 1 と $a$ である. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1-a \\ -1 & 1 & 1-a \\ -1 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $a \neq 1$ の場合, $\begin{pmatrix} a-2 & 1 & 1-a \\ -1 & a & 1-a \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} a-1 & 1-a & 0 \\ -1 & a & 1-a \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{a-1}\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & a & 1-a \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{a-1}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $a$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, $a \neq 1$ ならば, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ に対角化され, $a = 1$ ならば, 与えられた行列は対角化不可能である.

(39) $\begin{vmatrix} t-a & 2 & -1 \\ a-5 & t-7 & 1 \\ -a+5 & 2 & t-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-a & 2 & -1 \\ a-5 & t-7 & 1 \\ 0 & t-5 & t-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-a & 3 & -1 \\ a-5 & t-8 & 1 \\ 0 & 0 & t-5 \end{vmatrix} = (t-5)\begin{vmatrix} t-a & 3 \\ a-5 & t-8 \end{vmatrix} =$
$(t-5)(t^2-(a+8)t+5(a+3)) = (t-5)^2(t-a-3)$ より, 与えられた行列の固有値は 5 と $a+3$ である. $\begin{pmatrix} 5-a & 2 & -1 \\ a-5 & -2 & 1 \\ 5-a & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 5-a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5-a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $a \neq 2$ の場合, $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a-5 & a-4 & 1 \\ -a+5 & 2 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a-2 & a-2 & 0 \\ 2a-4 & 2a-4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{a-2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2a-4 & 2a-4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $a+3$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, $a \neq 2$ ならば, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5-a & 2 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$ に対角化され, $a = 2$ ならば, 与えられた行列は対角化不可能である.

(40) $\begin{vmatrix} t-2 & -a & 2a \\ 0 & t-8 & 18 \\ 0 & -3 & t+7 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t-8 & 18 \\ -3 & t+7 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t+1)$ より, 与えられた行列の固有値は 2 と $-1$ である. $\begin{pmatrix} 0 & -a & 2a \\ 0 & -6 & 18 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は, $a \neq 0$ ならば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられ, $a = 0$ ならば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -3 & -a & 2a \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ だから

$-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ で与えられる．故に, $a=0$ ならば与えられた行列は $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ に対角化され, $a\neq 0$ ならば固有値は 2, $-1$ に対する固有空間の次元はともに 1 次元であるため, 与えられた行列は対角化不可能である．

(41) $\begin{vmatrix}t-a&0&0\\0&t-b&-c\\0&0&t-b\end{vmatrix}=(t-a)(t-b)^2$ より, 与えられた行列の固有値は $a$ と $b$ である．$c=0$ ならば, 与えられた行列はすでに対角行列だから, $c\neq 0$ の場合を考える．$a=b$ ならば, 与えられた行列の $a$ に対する固有空間は $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間だから, その基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ で与えられる．$a\neq b$ ならば $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&a-b&-c\\0&0&a-b\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&a-b&0\\0&0&a-b\end{pmatrix}$ だから $a$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ で与えられ, $b$ に対する固有空間は $\begin{pmatrix}b-a&0&0\\0&0&-c\\0&0&0\end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間だから, その基底は $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ で与えられる．故に, $c\neq 0$ の場合は, 与えられた行列は対角化不可能である．

(42) $\begin{vmatrix}t-2&-a&0\\0&t-3a+1&0\\0&-3a+3&t+1\end{vmatrix}=(t-2)(t-3a+1)(t+1)$ より, 与えられた行列の固有値は 2, $-1$, $3a-1$ である．$\begin{pmatrix}0&-a&0\\0&-3a+3&0\\0&-3a+3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 1 行を } -3 \text{ 倍して}}\begin{pmatrix}0&-a&0\\0&3&0\\0&-3a+3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ で与えられる．$\begin{pmatrix}-3&-a&0\\0&-3a&0\\0&-3a+3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 3 行を } -1 \text{ 倍して}}\begin{pmatrix}-3&-a&0\\0&-3&0\\0&-3a+3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから $-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる．$a=0$ ならば $3a-1=-1$ であり, $a=1$ ならば $3a-1=2$ だから, いずれにしても, 与えられた行列の固有値は $-1$ と 2 のみで, それぞれの固有値に対する固有空間の次元はともに 1 次元だから, 与えられた行列は対角化不可能である．$a\neq 0,1$ の場合, $3a-1$ に対する固有空間は $\begin{pmatrix}3a-3&-a&0\\0&0&0\\0&3-3a&3a\end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間だから, その基底は $\begin{pmatrix}a^2\\a(a-1)\\(a-1)^2\end{pmatrix}$ で与えられる．故に, $a\neq 0,1$ ならば, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}1&0&a^2\\0&0&a(a-1)\\0&1&(a-1)^2\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3a-1\end{pmatrix}$ に対角化され, $a=0$ または $a=1$ ならば, 与えられた行列は対角化不可能である．

(43) $\begin{vmatrix} t+a-2b & 0 & -2a+2b \\ a-b & t-c & -a+b \\ a-b & 0 & t-2a+b \end{vmatrix} = (t-c)\begin{vmatrix} t+a-2b & -2a+2b \\ a-b & t-2a+b \end{vmatrix} = (t-c)(t^2-(a+b)t+ab)$ より, 与えられた行列の固有値は $a, b, c$ である. $\begin{pmatrix} 2a-2b & 0 & -2a+2b \\ a-b & a-c & -a+b \\ a-b & 0 & -a+b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-c & 0 \\ a-b & 0 & -a+b \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $a$ に対する固有ベクトルである. $\begin{pmatrix} a-b & 0 & -2a+2b \\ a-b & b-c & -a+b \\ a-b & 0 & -2a+2b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} a-b & 0 & -2a+2b \\ 0 & b-c & a-b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $b$ に対する固有ベクトルである. また, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $c$ に対する固有ベクトルである. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であり, 与えられた行列の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^3$ の基底だから, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ に対角化される.

(44) $\begin{vmatrix} t-3 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & t-7 & 7 & -1 \\ -2 & -10 & t+10 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & t+3 & -(t+3) & 0 \\ -2 & -10 & t+10 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & t+3 & 0 & 0 \\ -2 & -10 & t & -1 \\ 0 & 4 & 0 & t-1 \end{vmatrix} =$ $(t+3)\begin{vmatrix} t-3 & 1 & -1 \\ -2 & t & -1 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t+3)(t-1)\begin{vmatrix} t-3 & 1 \\ -2 & t \end{vmatrix} = (t+3)(t-1)(t^3-3t+2) = (t+3)(t-1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $-3, 1, 2$ である. $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & -6 & 7 & -1 \\ -2 & -10 & 11 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(1,4)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -6 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & -10 & 7 & -1 \\ -2 & -10 & 7 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -6 & -3 & 4 & 0 \\ -2 & -11 & 8 & 0 \\ -2 & -11 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -6 & -3 & 4 & 0 \\ 10 & -5 & 0 & 0 \\ 10 & -5 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -12 & 0 & 4 & 0 \\ 10 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ だから $-3$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 7 & -1 \\ -2 & -10 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(45) $$\begin{vmatrix} t-4 & -6 & 9 & 3 \\ -1 & t-3 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & t+5 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -6 & 9 & 3 \\ 0 & t-3 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & t+5 & 2 \\ t-1 & -2 & 3 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -6 & 9 & 3 \\ 0 & t-3 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & t+5 & 2 \\ 0 & 4 & -6 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-3 & 3 & 1 \\ -4 & t+5 & 2 \\ 4 & -6 & t-3 \end{vmatrix} =$$
$$(t-1) \begin{vmatrix} t-3 & 3 & 1 \\ -4 & t+5 & 2 \\ 0 & t-1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-3 & 2 & 1 \\ -4 & t+3 & 2 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 \begin{vmatrix} t-3 & 2 \\ -4 & t+3 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t^2-1) = (t-1)^3(t+1)$$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と $-1$ である. $$\begin{pmatrix} -3 & -6 & 9 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $$\begin{pmatrix} -5 & -6 & 9 & 3 \\ -1 & -4 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 14 & -6 & -2 \\ -1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 12 & -6 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ だから $-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(46) $$\begin{vmatrix} t & 0 & 0 & -1 \\ 2 & t & 2 & 0 \\ -3 & -1 & t-3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & t & 2 & 0 \\ t-3 & -1 & t-3 & 1 \\ t^2-3t+2 & 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & t & 2 \\ t-3 & -1 & t-3 \\ t^2-3t+2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (t^2-3t+2) \begin{vmatrix} t & -1 \\ 2 & t-3 \end{vmatrix} =$$
$(t-1)(t-2)(t^2-3t+2) = (t-1)^2(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ だから 1 に対する固有空間の基底は

$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(1,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(47) $\begin{vmatrix} t+3a-4 & 4a-2 & 2a-1 \\ -8a+4 & t-9a+2 & -4a+2 \\ 4a-2 & 4a-2 & t+a-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+3a-4 & 0 & 2a-1 \\ -8a+4 & t-a-2 & -4a+2 \\ 4a-2 & -2(t-a-2) & t+a-3 \end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix} t+3a-4 & 0 & 2a-1 \\ -8a+4 & t-a-2 & -4a+2 \\ -12a+6 & 0 & t-7a+1 \end{vmatrix} = (t-a-2)\begin{vmatrix} t+3a-4 & 2a-1 \\ -12a+6 & t-7a+1 \end{vmatrix} = (t-a-2)^2(t-3a-1)$ より, 与えられた行列の固有値は $a+2$ と $3a+1$ である. $\begin{pmatrix} 4a-2 & 4a-2 & 2a-1 \\ -8a+4 & -8a+4 & -4a+2 \\ 4a-2 & 4a-2 & 2a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 4a-2 & 4a-2 & 2a-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $a+2$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 6a-3 & 4a-2 & 2a-1 \\ -8a+4 & -6a+3 & -4a+2 \\ 4a-2 & 4a-2 & 4a-2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 6a-3 & 4a-2 & 2a-1 \\ 4a-2 & 2a-1 & 0 \\ -8a+4 & -4a+2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -2a+1 & 0 & 2a-1 \\ 4a-2 & 2a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $3a+1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 3a+1 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(48) $\begin{vmatrix} t-ab+2 & -a^2 & -3a \\ -b^2 & t-ab+2 & -3b \\ b & a & t+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+2 & 0 & a(t+2) \\ -b^2 & t-ab+2 & -3b \\ b & a & t+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+2 & 0 & 0 \\ -b^2 & t-ab+2 & ab^2-3b \\ b & a & t-ab+5 \end{vmatrix} =$ $(t+2)\begin{vmatrix} t-ab+2 & ab^2-3b \\ a & t-ab+5 \end{vmatrix} = (t+2)^2(t-2ab+5)$ より, 与えられた行列の固有値は $-2$ と $2ab-5$ である. $\begin{pmatrix} -ab & -a^2 & -3a \\ -b^2 & -ab & -3b \\ b & a & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & a & 3 \end{pmatrix}$ だから $-2$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -a \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} ab-3 & -a^2 & -3a \\ -b^2 & ab-3 & -3b \\ b & a & 2ab \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行に加える}]{\text{第 3 行を } -a \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} -3 & -2a^2 & -2a^2b-3a \\ -b^2 & ab-3 & -3b \\ b & a & 2ab \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -3 & -2a^2 & -2a^2b-3a \\ 0 & \frac{2}{3}a^2b+ab-3 & b\left(\frac{2}{3}a^2b^2+ab-3\right) \\ 0 & -\frac{2}{3}a^2b+a & b\left(-\frac{2}{3}a^2b+a\right) \end{pmatrix}$ だから $2ab-5$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に,

与えられた行列は $\begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 3 & b \\ -b & -a & -1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2ab-5 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(49) $\begin{vmatrix} t+3a-9 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & t & a \\ -9a+18 & -6 & t-3a+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+3a-9 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & t & a \\ 3(t-3) & 0 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & 2 & a-2 \\ -1 & t & a \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix} t-3 & 2 \\ -1 & t \end{vmatrix} =$

$(t-3)(t^2-3t+2) = (t-1)(t-2)(t-3)$ より, 与えられた行列の固有値は $1, 2, 3$ である. $\begin{pmatrix} 3a-8 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & 1 & a \\ -9a+18 & -6 & -3a+4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 行を第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を 2 倍したものと}} \begin{pmatrix} 3a-8 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3a-6 & 0 & a-2 \\ 3a & 0 & a \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行に加える}]{\text{第 2 行を } -1 \text{ 倍して}}$

$\begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 \\ 3a & 0 & a \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$\begin{pmatrix} 3a-7 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & 2 & a \\ -9a+18 & -6 & -3a+5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を 2 倍したものと}} \begin{pmatrix} 3a-7 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & 2 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 \\ 3a-1 & 2 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 3a-6 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & 3 & a \\ -9a+18 & -6 & -3a+6 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 行を第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を 2 倍したものと}} \begin{pmatrix} 3a-6 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & 3 & a \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3a-16 & 0 & a-6 \\ 3a-16 & 0 & a-6 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行に加える}]{\text{第 2 行を } -1 \text{ 倍して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3a-16 & 0 & a-6 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -a+6 \\ -a+2 \\ 3a-16 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a+6 \\ 1 & 1 & -a+2 \\ -3 & -6 & 3a-16 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(50) $\begin{vmatrix} t+6a-5 & -6 & 2a-3 \\ 3a-6 & t-5 & a-3 \\ -18a+18 & 18 & t-6a+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+6a-5 & -6 & 2a-3 \\ 3a-6 & t-5 & a-3 \\ 3(t+1) & 0 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+4 & -6 & 2a-3 \\ 3 & t-5 & a-3 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t+4 & -6 \\ 3 & t-5 \end{vmatrix} =$

$(t+1)(t^2-t-2) = (t+1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $-1$ と 2 である. $\begin{pmatrix} 6a-6 & -6 & 2a-3 \\ 3a-6 & -6 & a-3 \\ -18a+18 & 18 & -6a+9 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 6a-6 & -6 & 2a-3 \\ -3a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots (*)$ だから, $a=0$ ならば $-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

で与えられる. $a \neq 0$ ならば $(*) \xrightarrow[-\frac{1}{a} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 6a-6 & -6 & 2a-3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $-1$ に対す

る固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 6a-3 & -6 & 2a-3 \\ 3a-6 & -3 & a-3 \\ -18a+18 & 18 & -6a+12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 3a-6 & -3 & a-3 \\ -18 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $a=0$ ならば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化され, $a \neq 0$ ならば対角化不可能である.

(51) $\begin{vmatrix} t+4 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & t+1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & t+1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & t-5 \end{vmatrix} = (t+1)^2 \begin{vmatrix} t+4 & -3 \\ 6 & t-5 \end{vmatrix} = (t+1)^2(t^2-t+2) = (t+1)^3(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $-1$ と 2 である. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(1,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(52) $\begin{vmatrix} t+3 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & t-3 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & t-2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 & -(t-1) \\ -2 & t-3 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & t-2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & t-3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & t-2 & -2 \\ 4 & 2 & 2 & t+2 \end{vmatrix} =$ $(t-1) \begin{vmatrix} t-3 & -2 & -2 \\ -1 & t-2 & -2 \\ 2 & 2 & t+2 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -2 \\ -(t-1) & t-2 & -2 \\ 0 & 2 & t+2 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -2 \\ 0 & t-4 & -4 \\ 0 & 2 & t+2 \end{vmatrix} = (t-1)^2 \begin{vmatrix} t-4 & -4 \\ 2 & t+2 \end{vmatrix} =$ $t(t-1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は 0, 1, 2 である. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(1,4) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(1,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(4,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(53) $\begin{vmatrix} t-3 & -2 & -4 & -1 \\ 5 & t+2 & 8 & -1 \\ -2 & 0 & t-4 & 2 \\ -5 & -2 & -8 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -2 & -4 & -1 \\ 5 & t+2 & 8 & -1 \\ -2 & 0 & t-4 & 2 \\ 0 & t & 0 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -4 & -1 \\ 5 & t+3 & 8 & -1 \\ -2 & -2 & t-4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -4 \\ 5 & t+3 & 8 \\ -2 & -2 & t-4 \end{vmatrix} =$ $t \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -4 \\ -(t-2) & t+3 & 8 \\ 0 & -2 & t-4 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -4 \\ 0 & t+2 & 4 \\ 0 & -2 & t-4 \end{vmatrix} = t(t-2) \begin{vmatrix} t+2 & 4 \\ -2 & t-4 \end{vmatrix} = t^2(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 0 と 2 である. $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & 8 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ -5 & -2 & -8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -1 \\ 5 & 4 & 8 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & -2 & -8 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(54) $\begin{vmatrix} t+1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & t-1 & -1 & 0 \\ -a & -1 & t-a & -2 \\ -1 & -1 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & t-1 & -1 & 0 \\ t-a+1 & 0 & t-a+1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 0 & t-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t-a+1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & t-3 \end{vmatrix} =$ $(t-a+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-a+1)(t-1) \begin{vmatrix} t & 2 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-a+1)(t-1)(t^2-3t+2) = (t-a+1)(t-1)^2(t-2)$ よ

り, 与えられた行列の固有値は $1, 2, a-1$ である. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -a & -1 & 1-a & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -a & -1 & 2-a & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -a-1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -a+3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

だから 2 に対する固有空間の基底は, $a=3$ ならば $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられ, $a \neq 3$ ならば $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$a \neq 2,3$ の場合, $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ -1 & a-2 & -1 & 0 \\ -a & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & a^2-2a+1 & -a+1 & 2 \\ -1 & a-2 & -1 & 0 \\ 0 & -a^2+2a-1 & a-1 & -2 \\ 0 & -a+1 & 1 & a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{に加える}]{\text{第 1 行を第 3 行}}$

$\begin{pmatrix} 0 & a^2-2a+1 & -a+1 & 2 \\ -1 & a-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+1 & 1 & a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{して第 1 行に加える}]{\text{第 4 行を } a-1 \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (a-2)(a-3) \\ -1 & a-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+1 & 1 & a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (a-2)(a-3) \\ -1 & a-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(4,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (a-2)(a-3) \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ だから $a-1$ に対する

固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 以上から, $a=3$ の場合, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ に

よって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化され, $a=2$ の場合, 与えられた行列は対角化不可能, $a \neq 2,3$ の場合, 与えられた

行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(55) $\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & t+3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & t-1 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & t-3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & t+3 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & t-1 & -4 \\ -2 & -4 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t+1)(t-1) \begin{vmatrix} t+3 & 0 & 2 \\ 8 & t-1 & -4 \\ -4 & 0 & t-3 \end{vmatrix} =$

$(t+1)(t-1)^2\begin{vmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-1)^3$ より, 与えられた行列の固有値は 1, $-1$ である.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{\text{(5,5) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 8 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから $-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対角化される.

2. (1) 与えられた行列を $A$ とする. $p=q=0$ の場合は, $A=E_2$ だから $(p,q)\neq(0,0)$ と仮定する. $A$ の固有多項式は $t^2-(2-p-q)t+1-p-q=(t-1)(t-1+p+q)$ だから, $A$ の固有値は 1 と $1-p-q$ である. $E_2-A=\begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix}$, $(1-p-q)E_2-A=\begin{pmatrix} -q & -q \\ -p & -p \end{pmatrix}$ だから, 1, $1-p-q$ に対する $A$ の固有ベクトルとして, それぞれ $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ. $p+q\neq 0$ の場合, $P=\begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{p+q} & \frac{1}{p+q} \\ \frac{-p}{p+q} & \frac{q}{p+q} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}$ だから, $A^n$ は次で与えられる.

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{q+p(1-p-q)^n}{2} & \frac{q-q(1-p-q)^n}{2} \\ \frac{p-p(1-p-q)^n}{2} & \frac{p+q(1-p-q)^n}{2} \end{pmatrix}$$

$p+q=0$ の場合, $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & -2p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから, $A^n$ は次で与えられる.

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & -2p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2np \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-np & -np \\ np & 1+np \end{pmatrix}$$

(2) 与えられた行列を $A$ とする. $A$ の固有多項式は $t^2-(2\lambda+ac+bd)t+\lambda(\lambda+ac+bd)=(t-\lambda)(t-\lambda-ac-bd)$ だから, $A$ の固有値は $\lambda$ と $\lambda+ac+bd$ である. $\lambda E_2-A=\begin{pmatrix} -ac & -ad \\ -bc & -bd \end{pmatrix}$, $(\lambda+ac+bd)E_2-A=\begin{pmatrix} bd & -ad \\ -bc & ac \end{pmatrix}$

だから, $ac+bd\neq 0$ の場合は, $\lambda$, $\lambda+ac+bd$ に対する $A$ の固有ベクトルとして, それぞれ $\begin{pmatrix}-d\\ c\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ を選ぶ. $P=\begin{pmatrix}a & -d\\ b & c\end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda+ac+bd & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{c}{ac+bd} & \frac{d}{ac+bd}\\ -\frac{b}{ac+bd} & \frac{a}{ac+bd}\end{pmatrix}$ だから, $A^n$ は次で与えられる.

$$A^n=P\begin{pmatrix}\lambda+ac+bd & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^n P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{ac(\lambda+ac+bd)^n+bd\lambda^n}{ac+bd} & \frac{ad((\lambda+ac+bd)^n-\lambda^n)}{ac+bd}\\ \frac{bc((\lambda+ac+bd)^n-\lambda^n)}{ac+bd} & \frac{bd(\lambda+ac+bd)^n+ac\lambda^n}{ac+bd}\end{pmatrix}$$

$a=b=0$ の場合は $A=\lambda E_2$ だから $A^n=\lambda^n E_2$ である. $ac+bd=0$ かつ $(a,b)\neq(0,0)$ の場合, $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ は $\lambda$ に対する固有ベクトルで, $P=\begin{pmatrix}a & -\bar{b}\\ b & \bar{a}\end{pmatrix}$ とおけば $P$ は正則行列である. このとき, $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\bar{a}}{|a|^2+|b|^2} & \frac{\bar{b}}{|a|^2+|b|^2}\\ -\frac{b}{|a|^2+|b|^2} & \frac{a}{|a|^2+|b|^2}\end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda & \bar{a}d-\bar{b}c\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ であり, $n$ による数学的帰納法で $\begin{pmatrix}\lambda & \bar{a}d-\bar{b}c\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & n(\bar{a}d-\bar{b}c)\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$ が示されるため, $A^n$ は以下で与えられる.

$$A^n=P\begin{pmatrix}\lambda & \bar{a}d-\bar{b}c\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^n P^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda^n+acn\lambda^{n-1} & adn\lambda^{n-1}\\ bcn\lambda^{n-1} & \lambda^n+bdn\lambda^{n-1}\end{pmatrix}$$

3. $A=\big(a_{ij}\big)$ とすれば, $f(\boldsymbol{v}_j)=\sum\limits_{i=1}^n a_{ij}\boldsymbol{v}_i$ だから

$$f(\boldsymbol{v})=f\left(\sum_{j=1}^n x_j\boldsymbol{v}_j\right)=\sum_{j=1}^n x_jf(\boldsymbol{v}_j)=\sum_{j=1}^n x_j\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\boldsymbol{v}_i\right)=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j\boldsymbol{v}_i=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)\boldsymbol{v}_i$$

である. 一方 $\lambda\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^n\lambda x_i\boldsymbol{v}_i$ より $f(\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{x}$ が成り立つことと, $\sum\limits_{i=1}^n\left(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)\boldsymbol{v}_i=\sum\limits_{i=1}^n\lambda x_i\boldsymbol{v}_i$ が成り立つことは同値である. さらに, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立性から, $f(\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{x}$ が成り立つためには $\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j=\lambda x_i$ が $i=1,2,\dots,n$ に対して成り立つことが必要十分である. この等式の左辺は $A\tilde{\boldsymbol{x}}$ の第 $i$ 成分に他ならないため, $f(\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{x}$ が成り立つためには $A\tilde{\boldsymbol{x}}=\lambda\tilde{\boldsymbol{x}}$ が成り立つことが必要十分である. また, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立だから $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ であることと $\tilde{\boldsymbol{x}}\neq\boldsymbol{0}$ であることは同値である. 従って $\lambda$ が $f$ の固有値であり, かつ $\boldsymbol{x}$ が $\lambda$ に対する $f$ の固有ベクトルであるためには, $\lambda$ が $A$ の固有ベクトルであり, かつ $\tilde{\boldsymbol{x}}$ が $\lambda$ に対する $A$ の固有ベクトルであることが必要十分である.

4. $P^{-1}AP$ が, $\lambda_j$ を $(j,j)$ 成分とする対角行列ならば, $P^{-1}AP=\big(\lambda_1\boldsymbol{e}_1\ \lambda_2\boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \lambda_j\boldsymbol{e}_j\ \cdots\ \lambda_n\boldsymbol{e}_n\big)$ だから, $P\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{v}_j$ に注意すれば $AP=P\big(\lambda_1\boldsymbol{e}_1\ \lambda_2\boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \lambda_j\boldsymbol{e}_j\ \cdots\ \lambda_n\boldsymbol{e}_n\big)=\big(P(\lambda_1\boldsymbol{e}_1)\ P(\lambda_2\boldsymbol{e}_2)\ \cdots\ P(\lambda_j\boldsymbol{e}_j)\ \cdots\ P(\lambda_n\boldsymbol{e}_n)\big)=\big(\lambda_1\boldsymbol{v}_1\ \lambda_2\boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \lambda_j\boldsymbol{v}_j\ \cdots\ \lambda_n\boldsymbol{v}_n\big)$ が得られるため, $j=1,2,\dots,n$ に対して $AP$ の第 $j$ 列は $\lambda_j\boldsymbol{v}_j$ である. 一方, $P$ の第 $j$ 列は $\boldsymbol{v}_j$ だから, $AP$ の第 $j$ 列は $A\boldsymbol{v}_j$ である. 従って $A\boldsymbol{v}_j=\lambda_j\boldsymbol{v}_j$ が成り立ち, $P$ が正則行列であることから, $P$ の各列ベクトルは零ベクトルではないため, $\lambda_j$ は $A$ の固有値で, $\boldsymbol{v}_j$ が $\lambda_j$ に対する固有ベクトルである.

逆に $\lambda_j$ が $A$ の固有値で, $\boldsymbol{v}_j$ が $\lambda_j$ に対する固有ベクトルであるとする. このとき $A\boldsymbol{v}_j=\lambda_j\boldsymbol{v}_j$ だから $AP=A\big(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_j\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n\big)=\big(A\boldsymbol{v}_1\ A\boldsymbol{v}_2\ \cdots\ A\boldsymbol{v}_j\ \cdots\ A\boldsymbol{v}_n\big)=\big(\lambda_1\boldsymbol{v}_1\ \lambda_2\boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \lambda_j\boldsymbol{v}_j\ \cdots\ \lambda_n\boldsymbol{v}_n\big)$ である. $\boldsymbol{v}_j=P\boldsymbol{e}_j$ に注意すれば, 上式から $AP=\big(\lambda_1P\boldsymbol{e}_1\ \lambda_2P\boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \lambda_jP\boldsymbol{e}_j\ \cdots\ \lambda_nP\boldsymbol{e}_n\big)=P\big(\lambda_1\boldsymbol{e}_1\ \lambda_2\boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \lambda_j\boldsymbol{e}_j\ \cdots\ \lambda_n\boldsymbol{e}_n\big)$ が得られ, $P$ が正則行列であることから, $P^{-1}AP=\big(\lambda_1\boldsymbol{e}_1\ \lambda_2\boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \lambda_j\boldsymbol{e}_j\ \cdots\ \lambda_n\boldsymbol{e}_n\big)$ が成り立ち, $P^{-1}AP$ は $\lambda_j$ を $(j,j)$ 成分とする対角行列である.

5. (1) $f(\boldsymbol{u})=a_{11}\boldsymbol{u}+a_{21}\boldsymbol{v}+a_{31}\boldsymbol{w}$, $f(\boldsymbol{v})=a_{12}\boldsymbol{u}+a_{22}\boldsymbol{v}+a_{33}\boldsymbol{w}$, $f(\boldsymbol{w})=a_{13}\boldsymbol{u}+a_{23}\boldsymbol{v}+a_{33}\boldsymbol{w}$ とおき, 各等式の両辺の

成分を比較すれば, $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{31}\\a_{11}+a_{21}\\a_{21}+a_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12}+a_{32}\\a_{12}+a_{22}\\a_{22}+a_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{13}+a_{33}\\a_{13}+a_{23}\\a_{23}+a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}$ が得られるため, $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$ が成り立つ. ここで, $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&2&1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$ より, $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ だから, $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]$ に関する $f$ の表現行列は $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ である.

(2) (1) で求めた $f$ の表現行列を $A$ とすれば, 問題 3 の結果から, $f$ の固有値は $A$ の固有値である. $\begin{vmatrix}t-1&0&1\\0&t-1&1\\1&1&t-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1&-(t-1)&0\\0&t-1&1\\1&1&t-2\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&t-1&1\\1&1&t-2\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}1&0&0\\0&t-1&1\\1&2&t-2\end{vmatrix}=$ $(t-1)\begin{vmatrix}t-1&1\\2&t-2\end{vmatrix}=t(t-1)(t-3)$ だから, $f$ の固有値は $0, 1, 3$ である. $\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから $A$ の $0$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ だから $A$ の $1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-2&-1\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ だから $A$ の $3$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に問題 3 の結果から, $f$ の固有値 $0, 1, 3$ に対する固有空間の基底はそれぞれ $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{w}$ で与えられる.

6. (1) 求める表現行列を $A=\big(a_{ij}\big)$ とおくと, $j=1,2,3$ に対し, $f(\boldsymbol{v}_j)=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}\boldsymbol{v}_i=\begin{pmatrix}a_{1j}-a_{3j}\\-a_{1j}+a_{2j}+aa_{3j}\\-a_{2j}+(2a-1)a_{3j}\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&a\\0&-1&2a-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\a_{3j}\end{pmatrix}$ である. 従って $P=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&a\\0&-1&2a-1\end{pmatrix}$ とおけば $PA=\big(f(\boldsymbol{v}_1)\ f(\boldsymbol{v}_2)\ f(\boldsymbol{v}_3)\big)$ が成

り立つ. ここで, $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a-1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a-1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3a-2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3a-2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3a-1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2a-1}{3a-2} & \frac{2a-1}{3a-2} & -\frac{a-1}{3a-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} \end{array}\right)$ より, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3a-1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} \\ \frac{2a-1}{3a-2} & \frac{2a-1}{3a-2} & -\frac{a-1}{3a-2} \\ \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} \end{pmatrix}$ だから $A = P^{-1}\big(f(\boldsymbol{v}_1)\ f(\boldsymbol{v}_2)\ f(\boldsymbol{v}_3)\big) =$ $\begin{pmatrix} \frac{3a-1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} \\ \frac{2a-1}{3a-2} & \frac{2a-1}{3a-2} & -\frac{a-1}{3a-2} \\ \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1-2a \\ -2 & 1 & 2a \\ 0 & -2 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{6a^2-8a+2}{3a-2} \\ 0 & 2 & -\frac{a^2-4a+2}{3a-2} \\ 0 & 0 & \frac{a}{3a-2} \end{pmatrix}$ である.

(2) $|tE_3 - A| = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & \frac{6a^2-8a+2}{3a-2} \\ 0 & t-2 & \frac{a^2-4a+2}{3a-2} \\ 0 & 0 & t-\frac{a}{3a-2} \end{vmatrix} = (t-2)^2\left(t - \dfrac{a}{3a-2}\right)$ だから $A$ の固有値は固有値は 2 と $\dfrac{a}{3a-2}$ である. 故に, 問題 3 の結果から $f$ の固有値は 2 と $\dfrac{a}{3a-2}$ である.

(3) $2E_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{6a^2-8a+2}{3a-2} \\ 0 & 0 & \frac{a^2-4a+2}{3a-2} \\ 0 & 0 & \frac{5a-4}{3a-2} \end{pmatrix}$ であり, $\dfrac{a^2-4a+2}{3a-2}$ と $\dfrac{5a-4}{3a-2}$ の少なくとも一方は 0 でないため, $A$ の固有値 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $a \neq \dfrac{4}{5}$ の場合, $A$ の固有値 $\dfrac{a}{3a-2}$ は 2 と異なり, $\dfrac{a}{3a-2}E_3 - A = \begin{pmatrix} \frac{-5a+4}{3a-2} & -1 & \frac{6a^2-8a+2}{3a-2} \\ 0 & \frac{-5a+4}{3a-2} & \frac{a^2-4a+2}{3a-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} \frac{-5a+4}{3a-2} & 0 & \frac{27a^3-50a^2+28a-4}{(3a-2)(5a-4)} \\ 0 & \frac{-5a+4}{3a-2} & \frac{a^2-4a+2}{3a-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $A$ の固有値 $\dfrac{a}{3a-2}$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 27a^3-50a^2+28a-4 \\ (5a-4)(a^2-4a+2) \\ (5a-4)^2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 問題 3 の結果から $f$ の固有値 2 に対する固有空間の基底は $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられ, $a \neq \dfrac{4}{5}$ の場合, $f$ の固有値 $\dfrac{a}{3a-2}$ に対する固有空間の基底は $(27a^3-50a^2+28a-4)\boldsymbol{v}_1 + (5a-4)(a^2-4a+2)\boldsymbol{v}+2 + (5a-4)^2\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 27a^3-75a^2+68a-20 \\ 3a^3-14a^2+14a-4 \\ 45a^3-81a^2+46a-8 \end{pmatrix}$ で与えられる. 以上から, $f$ の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{R}^3$ の基底は存在しない.

7. (1) $f(1) = 2$, $f(x) = 2x+1$, $f(x^2) = 2x^2+2x$ だから, 求める行列は $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) 上で求めた行列を $A$ とすると $A$ の固有多項式は $(t-2)^3$ となるため $A$ の固有値は 2 だけである. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を 2 に対する $A$ の固有ベクトルとすれば $2E_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $y = z = 0$ となるため, $A$ の固有ベクトルは $\boldsymbol{e}_1$

のスカラー倍である. 従って, $A$ の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{R}^3$ の基底は存在しないため, $A$ は対角化不可能である.

8. (1) 正方行列 $X$ に対して $|{}^tX| = |X|$ だから $F_A(x) = |xE_n - A| = |{}^t(xE_n - A)| = |x{}^tE_n - {}^tA| = |xE_n - {}^tA| = F_{{}^tA}(x)$.

(2) $F_A(x) = |xE_n - A| = \sum_{k=0}^{n} c_k(A)x^k$ とおけば, 行列式の定義から, 各 $c_k(A)$ は $a_{ij}$ の整数係数の多項式である. すなわち, $x_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ を変数とし, 各単項式の係数が整数である $n^2$ 変数多項式 $f_k(x_{11}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{nn})$ で, 任意の $n$ 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$ に対して $c_k(A) = f_k(a_{11}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{nn})$ となるものがある. 共役複素数に関して $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ が成り立ち, $f_k(x_{11}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{nn})$ の各単項式の係数が整数であることから, $c_k(\overline{A}) = f_k(\overline{a_{11}}, \ldots, \overline{a_{ij}}, \ldots, \overline{a_{nn}}) = \overline{f_k(a_{11}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{nn})} = \overline{c_k(A)}$ が得られる.

(3) $F_A(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(A)x^k$ とおけば, (1) と (2) の結果から $A^*$ の固有多項式 $F_{A^*}(x)$ は $F_{A^*}(x) = \sum_{k=0}^{n} \overline{c_k(A)}x^k$ である. $\lambda$ が $A$ の固有値ならば $F_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k(A)\lambda^k = 0$ だから $F_{A^*}(\bar{\lambda}) = \sum_{k=0}^{n} \overline{c_k(A)}\bar{\lambda}^k = \overline{\sum_{k=0}^{n} c_k(A)\lambda^k} = \bar{0} = 0$ となるため, $\bar{\lambda}$ は $A^*$ の固有値である.

9. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ を $\lambda$ に対する $A$ の固有空間の基底として, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $\boldsymbol{K}^n$ 基底になるようにベクトル $\boldsymbol{v}_{m+1}, \boldsymbol{v}_{m+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を選ぶ. $\boldsymbol{v}_j$ を第 $j$ 列とする $n$ 次正方行列を $P$ とし, $A\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{v}_i$ とおいて, $c_{ij}$ を $(i, j)$ 成分とする $n$ 次正方行列を $A'$ とすれば, $P^{-1}AP = A'$ が成り立つ. $j = 1, 2, \ldots, m$ ならば $A\boldsymbol{v}_j = \lambda\boldsymbol{v}_j$ だから $c_{jj} = 1$, $c_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ となるため, $A'$ は $\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ O & C \end{pmatrix}$ という形になる. $P^{-1}AP = A'$ より $A$ の固有多項式は $A'$ の固有多項式と一致し, $A'$ の固有多項式は

$$|tE_n - A'| = \begin{vmatrix} (t-\lambda)E_m & -B \\ O & tE_{n-m} - C \end{vmatrix} = |(t-\lambda)E_m||tE_{n-m} - C| = (t-\lambda)^m|tE_{n-m} - C|$$

となって $(t-\lambda)^m$ を因数にもつことがわかる.

10. (1) 第 $2, 3, \ldots, n$ 行を第 1 行に加えれば, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ より $A$ の固有多項式 $|xE_n - A|$ は

$$\begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & x-1 & \cdots & x-1 \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

に等しい. 従って $A$ の固有多項式は $x - 1$ を因数にもつため, $A$ は 1 を固有値にもつ.

(2) 仮定から $\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij} = 1$ だから $A^*\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ が成り立つ. 従って $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ だから, $\boldsymbol{x} \in H_k$ ならば $A\boldsymbol{x} \in H_k$ である.

11. まず $\operatorname{rank} P = m$ だから $\operatorname{rank} PQ \leqq m < n$ であるため, $A - \lambda E_n = PQ$ は正則行列ではないため, $\lambda$ は $A$ の固有値である. 再び $\operatorname{rank} P = m$ より $T_P : \boldsymbol{K}^m \to \boldsymbol{K}^n$ は単射であるため, $\lambda$ に対する $A$ の固有空間は $\operatorname{Ker} T_Q$ である. 従って次元公式から $\lambda$ に対する $A$ の固有空間の次元は $n - m$ であるため, $A$ が対角化可能ならば $\lambda$ 以外の固有値に対する $m$ 個の 1 次独立な $A$ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ が存在する. $\boldsymbol{v}_j$ は $A$ の固有値 $\mu_j$ に対する固有ベクトルであるとすれば, $A\boldsymbol{v}_j = \mu_j\boldsymbol{v}_j$ より $PQ\boldsymbol{v}_j = (\mu_j - \lambda)\boldsymbol{v}_j$ が成り立つため, $\boldsymbol{v}_j$ は $P$ の列ベクトルの 1 次結合である.

そこで, $P$ の第 $i$ 列を $\boldsymbol{p}_i$ として $\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}\boldsymbol{p}_i$ と表し, $c_{ij}$ を第 $i$ 成分とする $\boldsymbol{K}^m$ のベクトルを $\boldsymbol{c}_j$ とすれば $\boldsymbol{v}_j = P\boldsymbol{c}_j$ が成り立つ. ここで, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ が 1 次独立で $\boldsymbol{v}_j = P\boldsymbol{c}_j$ より, $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m$ も 1 次独立であることに注意する. $\boldsymbol{v}_j = P\boldsymbol{c}_j$ を $PQ\boldsymbol{v}_j = (\mu_j - \lambda)\boldsymbol{v}_j$ に代入すれば $PQP\boldsymbol{c}_j = P((\mu_j - \lambda)\boldsymbol{c}_j)$ が得られるが, $T_P$ が単射であることから, $QP\boldsymbol{c}_j = (\mu_j - \lambda)\boldsymbol{c}_j$ が成り立つ. これは $\mu_j - \lambda$ が $m$ 次正方行列 $QP$ の固有値で, $\boldsymbol{c}_j$ が固有値 $\mu_j - \lambda$ に

関する $QP$ の固有ベクトルであることを意味し, $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m$ は $\boldsymbol{K}^m$ の基底であるから, $QP$ が $\boldsymbol{c}_j$ を第 $j$ 列とする $m$ 次正方行列によって $\mu_j - \lambda$ を $(j,j)$ 成分とする対角行列に対角化されることがわかる. さらに, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ はすべて $\lambda$ と異なるため, $\mu_j - \lambda$ を $(j,j)$ 成分とする対角行列は正則行列である. 従って $QP$ も正則行列である.

逆に, $QP$ は正則行列で, $m$ 次正則行列 $C$ によって対角化されると仮定する. 対角行列 $C^{-1}QPC$ を $D$ とおき, $\nu_j$ を $D$ の $(j,j)$ 成分とする. このとき, $D$ は正則だから, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ はどれも $0$ ではないことに注意する. $\operatorname{rank} P = m$ で $C$ は正則だから $\operatorname{rank} PC = m$ となるため, $PC$ の第 $j$ 列を $\boldsymbol{v}_j$ とすれば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ 1 次独立である. $C^{-1}QPC = D$ の両辺に左から $PC$ をかけると $PQPC = PCD$ であり, この両辺の第 $j$ 列をみると, $PQ\boldsymbol{v}_j = \nu_j \boldsymbol{v}_j$ が成り立つことがわかる. 従って $A\boldsymbol{v}_j = (\lambda + \nu_j)\boldsymbol{v}_j$ となるため, $\lambda + \nu_j$ は $A$ の固有値で, $\boldsymbol{v}_j$ は $\lambda + \nu_j$ に対する $A$ の固有ベクトルである. 一方 $T_P$ は単射だから $\operatorname{Ker} T_{PQ} = \operatorname{Ker}(T_P \circ T_Q) = \operatorname{Ker} T_Q$ である. 従って $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ が $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ を満たすことと $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} T_Q$ であることは同値だから, $\lambda$ は $A$ の固有値で $\lambda$ に対する $A$ の固有空間は $\operatorname{Ker} T_Q$ である. $\operatorname{rank} Q = m$ だから, $\dim \operatorname{Ker} T_Q = n - m$ であるため, $\boldsymbol{v}_{m+1}, \boldsymbol{v}_{m+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を $\operatorname{Ker} T_Q$ の基底とすれば, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ はどれも $0$ ではないため, $\lambda + \nu_1, \lambda + \nu_2, \ldots, \lambda + \nu_m$ はどれも $\lambda$ とは異なることから $A$ の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \boldsymbol{v}_{m+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立であり, $\boldsymbol{K}^n$ の基底となる. 故に $A$ は対角化可能である.

12. (1) ${}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} = 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ 全体からなる $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間を $Z$ とする. $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ より, $n \times 1$ 行列 $\boldsymbol{a}$ で表される 1 次写像 $T_{\boldsymbol{a}} : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{K}^n$ は単射であり, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し, $(\lambda E_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} = T_{\boldsymbol{a}}({}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x})$ だから $(\lambda E_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であることと ${}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であることは同値であるため, $\operatorname{Ker} T_{{}^t\boldsymbol{b}} = Z = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n | (\lambda E_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ が成り立つ. $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ だから $T_{{}^t\boldsymbol{b}} : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}$ は全射であるため, 次元公式から $\dim Z = \dim \operatorname{Ker} T_{{}^t\boldsymbol{b}} = n - 1$ である. 故に $\lambda$ は $A$ の固有値であり, $\lambda$ に対する $A$ の固有空間は $Z$ に一致して, その次元は $n-1$ である. 従って, 問題 9 により $A$ の固有多項式は $(t-\lambda)^{n-1}$ を因数にもつため, $A$ の固有多項式は $(t-\lambda)^{n-1}(t-\mu)$ $(\mu \in \boldsymbol{K})$ の形に因数分解される. ここで, $\operatorname{tr} A = n\lambda + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$ であり, $A$ の固有多項式の $t^{n-1}$ の係数 $-((n-1)\lambda + \mu)$ は $-\operatorname{tr} A$ に等しいことから, $(n-1)\lambda + \mu = n\lambda + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$ が成り立ち, $\mu = \lambda + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$ が得られる.

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ はともに零ベクトルではないため $\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b}$ は零行列ではなく, $\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b}$ が表す $\boldsymbol{K}^n$ の 1 次変換は階数が 1 の 1 次写像 $T_{{}^t\boldsymbol{b}} : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}$ と $T_{\boldsymbol{a}} : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{K}^n$ の合成写像だから, $\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b}$ の階数は 1 である. 従って $\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b}$ は単位行列のスカラー倍ではないため, $A = \lambda E_n + \boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b}$ も単位行列のスカラー倍ではない. 故に $A$ の最小多項式は 2 次以上の多項式になる. 一方, ${}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$ がスカラーであることに注意すれば

$$(A - \lambda E_n)(A - (\lambda + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a})E_n) = \boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b} - {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}E_n) = \boldsymbol{a}({}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}){}^t\boldsymbol{b} - ({}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b}E_n = ({}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b} - ({}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b} = O$$

だから, $(t-\lambda)(t-\lambda-{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a})$ が $A$ の最小多項式である.

(3) $(\lambda E_n + \boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} = (\lambda + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$ だから, $\boldsymbol{a}$ は $\lambda + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$ に対する固有ベクトルである. $W$ を $\lambda + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$ に対する $A$ の固有空間とすれば, ${}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a} \neq 0$ の場合, $\lambda + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a} \neq \lambda$ だから $Z \cap W = \{\boldsymbol{0}\}$ である. 従って $\dim Z + \dim W = \dim(Z+W) \leqq n$ が成り立ち, $\dim Z = n-1$ だから $1 \leqq \dim W \leqq 1$ となり, $W$ の次元は 1 で, $\boldsymbol{a}$ によって生成されることがわかる.

$b_k \neq 0$ となる $k$ を選んで, 各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対し, $\boldsymbol{v}_j = b_j\boldsymbol{e}_k - b_k\boldsymbol{e}_j$ によって $\boldsymbol{v}_j \in \boldsymbol{K}^n$ を定めると, ${}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{v}_j = 0$ だから $\boldsymbol{v}_j \in V$ であり, さらに $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立でもあるため, $V$ の基底である. そこで, $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \ldots & \boldsymbol{v}_{k-1} & \boldsymbol{v}_{k+1} & \cdots & \boldsymbol{v}_n & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ とおけば, $P$ は正則で, $P$ の第 1 列から第 $n-1$ 列までは $\lambda E_n + \boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b}$ の固有値 $\lambda$ に対する固有ベクトルで, $P$ の第 $n$ 列は $\lambda E_n + \boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b}$ の固有値 $\lambda + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$ に対する固有ベクトルだから, $P^{-1}(\lambda E_n + \boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b})P$ は対角行列 $\begin{pmatrix} \lambda E_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ {}^t\boldsymbol{0} & \lambda + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ である.

13. (1) $i = 0, 1, \ldots, n-1$ に対し, $A^i\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_{n-i} + \sum_{j=n-i+1}^{n} b_j\boldsymbol{e}_j$ という形になることを示せば, $A^{i-1}\boldsymbol{e}_n$ を第 $i$ 列とする $n$ 次正方行列は対角成分がすべて 1 の下半三角行列になるため $\boldsymbol{e}_n, A\boldsymbol{e}_n, A^2\boldsymbol{e}_n, \ldots, A^{n-1}\boldsymbol{e}_n$ は 1 次独立である. まず, $i = 0$ のときは上の主張は明らかである. $A\boldsymbol{e}_1 = -a_0\boldsymbol{e}_n$, $A\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_{i-1} - a_{i-1}\boldsymbol{e}_n$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ だから,

$A^{i-1}\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_{n-i+1} + \sum\limits_{j=n-i+2}^{n} b_j \boldsymbol{e}_j$ と仮定すれば, $i < n$ ならば

$$A^i\boldsymbol{e}_n = A\left(\boldsymbol{e}_{n-i+1} + \sum_{j=n-i+2}^{n} b_j\boldsymbol{e}_j\right) = A\boldsymbol{e}_{n-i+1} + \sum_{j=n-i+2}^{n} b_j A\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_{n-i} - a_{n-i}\boldsymbol{e}_n + \sum_{j=n-i+2}^{n} b_j(\boldsymbol{e}_{j-1} - a_{j-1}\boldsymbol{e}_n)$$
$$= \boldsymbol{e}_{n-i} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} b_{j+1}\boldsymbol{e}_j - \left(\sum_{j=n-i+2}^{n} b_j a_{j-1} - a_{n-i}\right)\boldsymbol{e}_n$$

となるため, 数学的帰納法により主張が示される.

(2) $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i x^i$ として $f(A) = O$ と仮定すれば, $\sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i A^i \boldsymbol{e}_n = f(A)\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}$ となるため, (1) で示したことにより $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$ である. 従って $n-1$ 次以下の零でない任意の多項式 $f(x)$ に対して $f(A) \neq O$ だから, $A$ の最小多項式の次数は $n$ 以上であり, $A$ の固有多項式が最小多項式になる.

# 線形数学 II 演習問題　第 20 回　正規行列の対角化

1. 以下の行列はそれぞれ次のいずれの場合にあてはまるか答え, その理由も述べよ.
(a) ユニタリー行列で対角化可能　(b) ユニタリー行列では対角化できないが, 対角化可能　(c) 対角化不可能

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 4 \\ -6 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & -6 & -6 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

2. 次の対称行列を対角化する直交行列を求めよ. ただし (1), (2) では $ab \neq 0$ とし, (9) では $(a, b) \neq (0, 0)$ かつ $\varepsilon \neq 0$, (10) では $(b, c) \neq (0, 0)$, (13) では $c \neq 0$ とする.

(1) $\begin{pmatrix} a^2+c & ab \\ ab & b^2+c \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a^2+c & 0 & ab \\ 0 & d & 0 \\ ab & 0 & b^2+c \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} & 4 \\ \sqrt{2} & 3 & 2\sqrt{2} \\ 4 & 2\sqrt{2} & 15 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} \lambda+\varepsilon a^2 & \varepsilon ab & \varepsilon ac \\ \varepsilon ab & \lambda+\varepsilon b^2 & \varepsilon bc \\ \varepsilon ac & \varepsilon bc & \lambda+\varepsilon c^2 \end{pmatrix}$ (10) $\begin{pmatrix} a & 2bc & b^2-8c^2 \\ 2bc & a & 2bc \\ b^2-8c^2 & 2bc & a \end{pmatrix}$ (11) $\begin{pmatrix} 3 & -2a & 2a-2 \\ -2a & a+1 & -2 \\ 2a-2 & -2 & -a+2 \end{pmatrix}$

(12) $\begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ (13) $\begin{pmatrix} a & br & cr & crs \\ br & a+b(1-r^2) & c & cs \\ cr & c & p+(1-s^2)q & qs \\ crs & cs & qs & p \end{pmatrix}$ (14) $\begin{pmatrix} a & c & d & b \\ c & a & b & d \\ d & b & a & c \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$

(15) $a_{ij} = \begin{cases} b & i = j \\ a & i \neq j \end{cases}$ を $(i, j)$ 成分とする $n$ 次対称行列

(16) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & i+j \neq n+1 \end{cases}$ を $(i, j)$ 成分とする $n$ 次対称行列

3. 複素数 $a$, $b$, $c$ に対し, 2 次正方行列 $A$ を $A = \begin{pmatrix} a-bc & b^2 \\ -c^2 & a+bc \end{pmatrix}$ で定める.
(1) 2 次ユニタリー行列 $P$ で, $P^{-1}AP$ が上半三角行列になるようなものを求めよ.
(2) $A^n$ を求めよ.

4. (1) $A$ が $n$ 次正規行列ならば, $\lambda \in \boldsymbol{C}$ に対し, $\lambda E_n + A$ も正規行列であることを示せ.
(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ が正規行列ならば, $|b| = |c|$ であり, $|b| = |c| \neq 0$ のとき, $b$, $c$ の偏角をそれぞれ $\beta$, $\gamma$ とすれば, $a = \pm|a|\left(\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2} + i\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)$ が成り立つことを示せ.
(3) $\lambda, \xi, \zeta \in \boldsymbol{C}$, $\kappa, \rho \in \boldsymbol{R}$ とする. $\rho > 0$, $|\xi| = |\zeta| = 1$ のとき, $\begin{pmatrix} \lambda+2\kappa\xi\zeta & \rho\xi^2 \\ \rho\zeta^2 & \lambda \end{pmatrix}$ をユニタリー行列で対角化せよ.

5. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ を 1 次独立な $\boldsymbol{R}^3$ ベクトル, $\alpha, \beta$ を実数の定数とし, $V = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle, W = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \right\rangle$ とおく.

(1) $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f$ は, $\boldsymbol{x} \in V$ ならば $f(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in V^{\perp}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) = \beta\boldsymbol{x}$ を満たすとする. このとき, $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底に関する $f$ の表現行列を対角化する直交行列を求めよ.

(2) $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $g$ は, $\boldsymbol{x} \in W$ ならば $g(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in W^{\perp}$ ならば $g(\boldsymbol{x}) = \beta\boldsymbol{x}$ を満たすとする. このとき, $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底に関する $g$ の表現行列を対角化する直交行列を求めよ.

6. $\lambda$ を複素数, $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{C}^n$ の零ベクトルでないベクトル, $\varepsilon$ を 1 または $-1$ とし, $A = \lambda E_n + \varepsilon \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^*$ とおく.

(1) $\lambda, \boldsymbol{a}, \varepsilon$ を用いて, $A$ の固有値とそれらに対する固有空間を表せ.

(2) $\boldsymbol{a}$ の第 $j$ 成分を $a_j$ とする. $a_1 \neq 0$ のとき $n = 2, 3, 4$ の場合に, $A$ を対角化するユニタリー行列を一つ求めよ.

7. 次の正規行列を対角化するユニタリー行列を求めよ. ただし $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & i & -1 \\ -i & 5 & i \\ -1 & -i & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ $(\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}$, $c = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ とする.

(1) $B$ の固有値は $0, ci, -ci$ であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{u}$ を $ci$ に対する長さ 1 の固有ベクトルとし, $\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{u}})$, $\boldsymbol{y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}i}(\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}})$, $\boldsymbol{z} = \dfrac{1}{c}\boldsymbol{b}$ とおけば, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の各成分は実数で, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底であることを示せ.

(3) $B\boldsymbol{x}$, $B\boldsymbol{y}$, $B\boldsymbol{z}$ を, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ の 1 次結合で表せ.

(4) $P$ を $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ をそれぞれ第 1 列, 第 2 列, 第 3 列にもつ行列とするとき, $P^{-1}BP$ を求めよ.

9. (発展問題) 直交行列に関する以下の命題を示せ.

(1) 直交行列 $P$ の実数の固有値は 1 または $-1$ であることを示し, $P$ の固有方程式が $-1$ を $s$ 重根にもてば $|P| = (-1)^s$ である.

(2) 対称行列ではない直交行列は虚数の固有値をもつ.

(3) 行列式の値が 1 である奇数次の直交行列は 1 を固有値にもつ.

10. (発展問題) $A$ を行列式の値が 1 である 3 次実直交行列とし, 対称行列ではないとする.

(1) $0 < \theta < \pi$ を満たす $\theta$ と行列式の値が 1 である直交行列 $P$ で, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるものが存在することを示し, $\theta$ は $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}A - 1)$ を満たすことを示せ. (従って, $\theta$ は $0 < \theta < \pi$ の範囲で直交行列 $P$ の選び方によらずに一通りに定まる.)

(2) $\dfrac{1}{2}(A - {}^tA) = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{b}$ は長さが $\sin\theta$ で, $A\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ を満たし, $\boldsymbol{b}$ を方向ベクトルとして原点を通る直線を $\ell$ とすれば, $A$ が表す $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換は, $\ell$ を軸に $\boldsymbol{b}$ の方向を向いて時計回りに $\theta$ だけ回転する 1 次変換を表すことを示せ.

11. (発展問題) 原点を通り, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線を軸として, $\boldsymbol{v}$ の方向を向いて $\dfrac{\pi}{3}$ だけ時計回りに

回転する $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換を表す行列を求めよ.

12. (発展問題) $A$ を 3 次実直交行列かつ対称行列であり, $A \neq \pm E_3$ である行列とする.

(1) $A$ の行列式の値が 1 の場合, $A$ が表す $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換は, $A$ の固有値 1 に対する固有ベクトルを方向ベクトルとし, 原点を通る直線を軸とした角度 $\pi$ の回転移動であることを示せ.

(2) $A$ の行列式の値が $-1$ の場合, $A$ が表す $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換は, $A$ は $-1$ を固有値にもち, $A$ が表す $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換は, $-1$ に対する固有ベクトルを法線ベクトルとし, 原点を通る平面に関する対称移動であることを示せ.

13. (発展問題) 以下の行列は回転を表すことを示し, その回転軸と回転角を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & \sqrt{6} \\ 3 & 1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$　(3) $\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ -14 & 5 & 2 \\ -2 & -10 & 11 \end{pmatrix}$　(4) $\dfrac{1}{17}\begin{pmatrix} -9 & 8 & 12 \\ 8 & -9 & 12 \\ 12 & 12 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$　(6) $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$　(7) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(8) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

(9) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

14. (発展問題) $A$ を $2n$ 次正方行列とし, $A$ の成分はすべて実数であるとする. 虚数 $\lambda$ と $n$ 個の $\boldsymbol{C}^{2n}$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ で, $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$ であり, 次の等式を満たすものが存在すると仮定する.

$$A\boldsymbol{v}_j = \begin{cases} \lambda \boldsymbol{v}_1 & j = 1 \\ \lambda \boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{v}_{j-1} & j = 2, 3, \ldots, n \end{cases}$$

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{v}}_n$ は $\boldsymbol{C}^{2n}$ の基底であることを示せ.

(3) $f : \boldsymbol{C}^{2n} \to \boldsymbol{C}^{2n}$ を $A$ で表される $\boldsymbol{C}^{2n}$ の 1 次変換とする. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{2n} \in \boldsymbol{C}^{2n}$ を $\boldsymbol{w}_{2k-1} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{v}_k + \bar{\boldsymbol{v}}_k)$, $\boldsymbol{w}_{2k} = \dfrac{1}{2i}(\boldsymbol{v}_k - \bar{\boldsymbol{v}}_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ によって定めるとき, $\boldsymbol{C}^{2n}$ の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{2n}]$ に関する $f$ の表現行列を求めよ.

# 第 20 回の演習問題の解答

1. (1) と (8) は対称行列だから (a). (4) と (5) は正規行列になっているためこれらも (a). (3) は固有値 1, 2 をもち, これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $l\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$ の形になり, 固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^3$ の基底 $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$ がとれるため, この行列は対角化可能である. しかし, 相異なる固有値に対する固有ベクトル (たとえば $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$) は直交しないため, ユニタリー行列では対角化不可能である. (6) は固有値 1, 2 をもち, これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $l\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ の形になり, 固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^3$ の基底 $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ がとれるため, この行列は対角化可能である. しかし, 相異なる固有値に対する固有ベクトル (たとえば $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$) は直交しないため, ユニタリー行列では対角化不可能である. 従って, (3) と (6) は (b) の場合にあてはまる. (2) は固有値 1, 2 をもち, これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $l\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ の形になるが, $\boldsymbol{K}^3$ を生成しないため, 対角化不可能. (7) は固有値 1, 3 をもち, これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $l\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ の形になるが, $\boldsymbol{K}^3$ を生成しないため, 対角化不可能. 従って, (2) と (7) は (c) の場合にあてはまる.

2. (1) $\begin{vmatrix}t-a^2-c & -ab\\ -ab & t-b^2-c\end{vmatrix}=(t-a^2-c)(t-b^2-c)-a^2b^2=t^2-(a^2+b^2+2c)t+c(a^2+b^2+c)=(t-c)(t-a^2-b^2-c)$ だから, 与えられた行列の固有値は $c$ と $a^2+b^2+c$ である. $\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}-a^2 & -ab\\ -ab & -b^2\end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底であり, $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}b^2 & -ab\\ -ab & a^2\end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底だから, $\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ は, それぞれ $c$, $a^2+b^2+c$ に対する固有ベクトルである. 故に, 与えられた行列は $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}b & a\\ -a & b\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & a^2+b^2+c\end{pmatrix}$ に対角化される.

(2) $\begin{vmatrix}t-a^2-c & 0 & -ab\\ 0 & t-d & 0\\ -ab & 0 & t-b^2-c\end{vmatrix}=(t-d)\begin{vmatrix}t-a^2-c & -ab\\ -ab & t-b^2-c\end{vmatrix}=(t-d)(t-c)(t-a^2-b^2-c)$ だから, 与

えられた行列の固有値は $c$, $d$, $a^2+b^2+c$ である．$d\neq c, a^2+b^2+c$ の場合，$\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & -ab \\ 0 & c-d & 0 \\ -ab & 0 & -b^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} d-a^2-c & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \\ -ab & 0 & d-b^2-c \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底であり，$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} b^2 & 0 & -ab \\ 0 & a^2+b^2+c-d & 0 \\ -ab & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底である．$d=c$ の場合，$\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \\ -ab & 0 & -b^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底であり，$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} b^2 & 0 & -ab \\ 0 & a^2+b^2+c-d & 0 \\ -ab & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底である．$d=a^2+b^2+c$ の場合，$\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & -ab \\ 0 & -a^2-b^2 & 0 \\ -ab & 0 & -b^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底であり，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} b^2 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \\ -ab & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底である．以上から，$\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ は，それぞれ $c$, $d$, $a^2+b^2+c$ に対する固有ベクトルであり，互いに直交するため，与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c \end{pmatrix}$ に対角化される．

(3) $\begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t & 0 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ -1 & t & -t \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ -2 & t & 0 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ -2 & t \end{vmatrix} = t(t^2-t-2) = t(t-2)(t+1)$ より，与えられた行列の固有値は $-1, 0, 2$ である．$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから $-1$ に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる．$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $0$ に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる．

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ だから $2$ に対する固有空間

の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ に対角化される.

(4) $\begin{vmatrix}t-1 & 0 & -2\\ 0 & t-1 & -2\\ -2 & -2 & t+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-1 & 0 & -2\\ -t+1 & t-1 & -2\\ 0 & -2 & t+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-1 & 0 & -2\\ 0 & t-1 & -4\\ 0 & -2 & t+1\end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix}t-1 & -4\\ -2 & t+1\end{vmatrix} = (t-1)(t^2-9) =$ $(t-1)(t-3)(t+3)$ より, 与えられた行列の固有値は $-3, 1, 3$ である. $\begin{pmatrix}-4&0&-2\\0&-4&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}-4&0&-2\\0&-4&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}-4&0&-2\\0&-4&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから $-3$ に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\-2&-2&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&2&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}2&0&-2\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}2&0&-2\\0&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ に対角化される.

(5) $\begin{vmatrix}t-1 & 1 & 3\\ 1 & t+1 & 1\\ 3 & 1 & t-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-4 & 1 & 3\\ 0 & t+1 & 1\\ -t+4 & 1 & t-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-4 & 1 & 3\\ 0 & t+1 & 1\\ 0 & 2 & t+2\end{vmatrix} = (t-4)\begin{vmatrix}t+1 & 1\\ 2 & t+2\end{vmatrix} = (t-4)(t^2+3t) =$ $t(t-4)(t+3)$ より, 与えられた行列の固有値は $-3, 0, 4$ である. $\begin{pmatrix}-4&1&3\\1&-2&1\\3&1&-4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&-7&7\\1&-2&1\\0&7&-7\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&-7&7\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから $-3$ に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-1&1&3\\1&1&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&2&4\\1&1&1\\0&-2&-4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&2&4\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}3&1&3\\1&5&1\\3&1&3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&-14&0\\1&5&1\\0&-14&0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&-14&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 4 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ によって

$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(6) $\begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ -3 & t-1 & -2 \\ -2 & -2 & t+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+2 & -3 & -2 \\ -t-2 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+2 & -3 & -2 \\ 0 & t-4 & -4 \\ 0 & -2 & t+3 \end{vmatrix} = (t+2)\begin{vmatrix} t-4 & -4 \\ -2 & t+3 \end{vmatrix} = (t+2)(t^2-t-20) =$ $(t+2)(t+4)(t-5)$ より, 与えられた行列の固有値は $-4, -2, 5$ である. $\begin{pmatrix} -5 & -3 & -2 \\ -3 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから $-4$ に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -7 & -7 & 0 \\ -7 & -7 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから $-2$ に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 14 \\ 0 & 7 & -14 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(7) $\begin{vmatrix} t-8 & -3 & 2 \\ -3 & t & -6 \\ 2 & -6 & t+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-8 & 3t-27 & 2 \\ -3 & t-9 & -6 \\ 2 & 0 & t+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 20 \\ -3 & t-9 & -6 \\ 2 & 0 & t+7 \end{vmatrix} = (t-9)\begin{vmatrix} t+1 & 20 \\ 2 & t+7 \end{vmatrix} = (t-9)(t^2+8t-33) =$ $(t-9)(t-3)(t+11)$ より, 与えられた行列の固有値は $-11, 3, 9$ である. $\begin{pmatrix} -19 & -3 & 2 \\ -3 & -11 & -6 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -19 & -3 & 2 \\ -60 & -20 & 0 \\ -36 & -12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -10 & 0 & 2 \\ -60 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $-11$ に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \\ 2 & -6 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 12 \\ -3 & 3 & -6 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ だから 9 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与

えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{35}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(8) $\begin{vmatrix} t-4 & -\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & t-3 & -2\sqrt{2} \\ -4 & -2\sqrt{2} & t-15 \end{vmatrix} = (t-4)(t-3)(t-15)-16-16-2(t-15)-8(t-4)-16(t-3) = t^3-22t^2+91t-102 = (t-2)(t^2-20t+51) = (t-2)(t-3)(t-17)$ より, 与えられた行列の固有値は 2, 3, 17 である. $\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & -1 & -2\sqrt{2} \\ -4 & -2\sqrt{2} & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & -1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ -4 & -2\sqrt{2} & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 13 & -\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & 14 & -2\sqrt{2} \\ -4 & -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 5 & -5\sqrt{2} & 0 \\ -5\sqrt{2} & 10 & 0 \\ -4 & -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 5 & -5\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ だから 17 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(9) 与えられた行列を $A$ とおき, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおけば, $A = \lambda E_3 + \varepsilon \boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{a}$ である. $A\boldsymbol{a} = \lambda E_3\boldsymbol{a} + \varepsilon\boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} = (\lambda+\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2)\boldsymbol{a}$ だから, $\lambda+\varepsilon|\boldsymbol{a}\|^2$ は $A$ の固有値であり, $\boldsymbol{a}$ はこの固有値に対する固有ベクトルである. $\boldsymbol{x} \in \langle\boldsymbol{a}\rangle^\perp$ ならば ${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0$ だから, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となるため, $\lambda$ は $A$ の固有値であり, $\langle\boldsymbol{a}\rangle^\perp$ は $\lambda$ に対する固有空間である. そこで, $\boldsymbol{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{b}$, $\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\langle\boldsymbol{a}\rangle^\perp$ の正規直交基底である. 故に $A$ は直交行列 $\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \quad \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-ac}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 & \frac{a^2+b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} \lambda-\varepsilon(a^2+b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ に対角化される.

(10) $\begin{vmatrix} t-a & -2bc & -b^2+8c^2 \\ -2bc & t-a & -2bc \\ -b^2+8c^2 & -2bc & t-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-a+b^2-8c^2 & -2bc & -b^2+8c^2 \\ 0 & t-a & -2bc \\ -t+a-b^2+8c^2 & -2bc & t-a \end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix} t-a+b^2-8c^2 & -2bc & -b^2+8c^2 \\ 0 & t-a & -2bc \\ 0 & -4bc & t-a-b^2+8c^2 \end{vmatrix} = (t-a+b^2-8c^2)\begin{vmatrix} t-a & -2bc \\ -4bc & t-a-b^2+8c^2 \end{vmatrix} =$ $(t-a+b^2-8c^2)(t^2-(2a+b^2-8c^2)t+(a+b^2)(a-8c^2)) = (t-a+b^2-8c^2)(t-a-b^2)(t-a+8c^2)$ より, 与えら

れた行列の固有値は $a-b^2+8c^2$, $a+b^2$, $a-8c^2$ である. $\begin{pmatrix} -b^2+8c^2 & -2bc & -b^2+8c^2 \\ -2bc & -b^2+8c^2 & -2bc \\ -b^2+8c^2 & -2bc & -b^2+8c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を } -1 \text{ 倍して}}$ $\begin{pmatrix} -b^2+8c^2 & -2bc & -b^2+8c^2 \\ -2bc & -b^2+8c^2 & -2bc \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 $a-b^2+8c^2$ に対する固有ベクトルである.
$\begin{pmatrix} b^2 & -2bc & -b^2+8c^2 \\ -2bc & b^2 & -2bc \\ -b^2+8c^2 & -2bc & b^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行に加える}]{\text{第 3 行を } -1 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 2b^2-8c^2 & 0 & -2b^2+8c^2 \\ -2bc & b^2 & -2bc \\ -b^2+8c^2 & -2bc & b^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を } \frac{1}{2} \text{ 倍して}}$ $\begin{pmatrix} 2b^2-8c^2 & 0 & -2b^2+8c^2 \\ -2bc & b^2 & -2bc \\ 4c^2 & -2bc & 4c^2 \end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix} b \\ 4c \\ b \end{pmatrix}$ は固有値 $a+b^2$ に対する固有ベクトルである.
$\begin{pmatrix} -8c^2 & -2bc & -b^2+8c^2 \\ -2bc & -8c^2 & -2bc \\ -b^2+8c^2 & -2bc & -8c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行に加える}]{\text{第 3 行を } -1 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} b^2-16c^2 & 0 & -b^2+16c^2 \\ -2bc & -8c^2 & -2bc \\ -b^2+8c^2 & -2bc & -8c^2 \end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix} 2c \\ -b \\ 2c \end{pmatrix}$ は固有値 $a-8c^2$ に対する固有ベクトルである. さらに, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2b^2+16c^2}}\begin{pmatrix} b \\ 4c \\ b \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{b^2+8c^2}}\begin{pmatrix} 2c \\ -b \\ 2c \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底になるため, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{b}{\sqrt{2b^2+16c^2}} & \frac{2c}{\sqrt{b^2+8c^2}} \\ 0 & \frac{4c}{\sqrt{2b^2+16c^2}} & -\frac{b}{\sqrt{b^2+8c^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{b}{\sqrt{2b^2+16c^2}} & \frac{2c}{\sqrt{b^2+8c^2}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} a-b^2+8c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a-8c^2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(11) $\begin{vmatrix} t-3 & 2a & -2a+2 \\ 2a & t-a-1 & 2 \\ -2a+2 & 2 & t+a-2 \end{vmatrix} = (t-3)(t-a-1)(t+a-2)-16a(a-1)-4(t-3)-4(a-1)^2(t-a-1)-4a^2(t+a-2) = t^3-6t^2-3(3a^2-3a+1)t-9a^2+9a+10 = (t+1)(t^2-7t-(3a-5)(3a+2)) = (t+1)(t+3a-5)(t-3a-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $-1$, $-3a+5$, $3a+2$ である.
$\begin{pmatrix} -4 & 2a & -2a+2 \\ 2a & -a-2 & 2 \\ -2a+2 & 2 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 2 & -a & a-1 \\ 2a & -a-2 & 2 \\ -2a+2 & 2 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 2 & -a & a-1 \\ 0 & (a+1)(a-2) & -(a+1)(a-2) \\ 0 & -(a+1)(a-2) & (a+1)(a-2) \end{pmatrix}$ だから, $-1$ に対する固有空間の基底は, $a \neq -1, 2$ ならば $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられ, $a=-1$ または $2$ ならば $\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -a+1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -3a+2 & 2a & -2a+2 \\ 2a & -4a+4 & 2 \\ -2a+2 & 2 & -2a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を } -1 \text{ 倍して}}$ $\begin{pmatrix} -3a+2 & 2a & -2a+2 \\ 2a & -4a+4 & 2 \\ a & -2a+2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} (2a-1)(a-2) & -2(2a-1)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & -2a+2 & 1 \end{pmatrix}$ だから, $-3a+5$ に対する固有空間の基底は, $a \neq \dfrac{1}{2}, 2$ ならば $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられ, $a=\dfrac{1}{2}$ または $2$ ならば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 3a-1 & 2a & -2a+2 \\ 2a & 2a+1 & 2 \\ -2a+2 & 2 & 4a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を 2 倍して}} \begin{pmatrix} 3a-1 & 2a & -2a+2 \\ 2a & 2a+1 & 2 \\ 4a & 4a+2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} (2a-1)(a+1) & (2a-1)(a+1) & 0 \\ 2a & 2a+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, $3a+2$ に対する固有空間の基底は, $a \neq -1, \dfrac{1}{2}$ ならば $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられ, $a=-1$ または $\dfrac{1}{2}$ ならば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2a-1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$a \neq -1, \dfrac{1}{2}, 2$ の場合, $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ はそれぞれ, 固有値 $-1$, $-3a+5$, $3a+2$ に対する固有空間の正規直交基底だから, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3a+5 & 0 \\ 0 & 0 & 3a+2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$a=-1$ の場合, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ は固有値 $-1$ に対する固有空間の基底であり, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は固有値 $8$ に対する固有空間の基底である. $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \dfrac{2}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{2}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ だから $-1$ に対する固有空間の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ が得られる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$a = \dfrac{1}{2}$ の場合, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ は固有値 $-1$ に対する固有空間の基底であり, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 $\dfrac{7}{2}$ に対する固有空間の基底である. $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ だから $\dfrac{7}{2}$ に対する固有空間の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ が得られる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ に対角化される.

$a=2$ の場合, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は固有値 $-1$ に対する固有空間の基底であり, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 $8$ に対する固有空間の基底である. $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \dfrac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ だから $-1$ に

対する固有空間の正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$ が得られる．故に，与えられた行列は $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&8&0\\0&0&8\end{pmatrix}$ に対角化される．

(12) $$\begin{vmatrix}t-10&1&0&1\\1&t-7&-3&-4\\0&-3&t-6&3\\1&-4&3&t-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-10&2&0&1\\1&t-11&-3&-4\\0&0&t-6&3\\1&t-11&3&t-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-12&2&0&1\\-t+12&t-11&-3&-4\\0&0&t-6&3\\-t+12&t-11&3&t-7\end{vmatrix}=$$
$$\begin{vmatrix}t-12&2&0&1\\0&t-9&-3&-3\\0&0&t-6&3\\0&t-9&3&t-6\end{vmatrix}=(t-12)\begin{vmatrix}t-9&-3&-3\\0&t-6&3\\t-9&3&t-6\end{vmatrix}=(t-12)\begin{vmatrix}t-9&-3&-3\\0&t-6&3\\0&6&t-3\end{vmatrix}=(t-9)(t-12)\begin{vmatrix}t-6&3\\6&t-3\end{vmatrix}=$$
$t(t-9)^2(t-12)$ より，与えられた行列の固有値は 0, 9, 12 である． $\begin{pmatrix}-10&1&0&1\\1&-7&-3&-4\\0&-3&-6&3\\1&-4&3&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(4,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}0&-39&30&-69\\0&-3&-6&3\\0&-3&-6&3\\1&-4&3&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&108&-108\\0&-3&-6&3\\0&0&0&0\\1&0&11&-11\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&108&-108\\0&-3&0&-3\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ だから，0 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる． $\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\1&2&-3&-4\\0&-3&3&3\\1&-4&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\0&3&-3&-3\\0&-3&3&3\\0&-3&3&3\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(4,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\0&3&-3&-3\\0&-3&3&3\\0&-3&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&0&1&2\\0&3&-3&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ だから，9 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる． $\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{v}_2-\frac{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$ より，9 に対する固有空間の正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$ が得られる． $\begin{pmatrix}2&1&0&1\\1&5&-3&-4\\0&-3&6&3\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(4,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}0&9&-6&-9\\0&9&-6&-9\\0&-3&6&3\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&12&0\\0&0&12&0\\0&-3&6&3\\1&0&-5&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&12&0\\0&0&0&0\\0&-3&0&3\\1&0&0&1\end{pmatrix}$ だから，12 に対す

る固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる．故に，与えられた行列は $\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ に

よって $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&9&0&0\\0&0&9&0\\0&0&0&12\end{pmatrix}$ に対角化される．

(13) $\begin{vmatrix}t-a & -br & -cr & -crs\\ -br & t-a+b(r^2-1) & -c & -cs\\ -cr & -c & t-p+q(s^2-1) & -qs\\ -crs & -cs & -qs & t-p\end{vmatrix}=$

$\begin{vmatrix}t-a+br^2 & -br & -cr & 0\\ -r(t-a+br^2) & t-a+b(r^2-1) & -c & 0\\ 0 & -c & t-p+q(s^2-1) & -s(t-p+qs^2)\\ 0 & -cs & -qs & t-p+qs^2\end{vmatrix}=$

$\begin{vmatrix}t-a+br^2 & -br & -cr & 0\\ 0 & t-a-b & -c(r^2+1) & 0\\ 0 & -c(s^2+1) & t-p-q & 0\\ 0 & -cs & -qs & t-p+qs^2\end{vmatrix}=(t-a+br^2)(t-p+qs^2)\begin{vmatrix}t-a-b & -c(r^2+1)\\ -c(s^2+1) & t-p-q\end{vmatrix}=$

$(t-a+br^2)(t-p+cs^2)(t^2-(a+b+p+q)t+(a+b)(p+q)-c^2(r^2+1)(s^2+1))$ より，$D=(a+b-p-q)^2+4c^2(r^2+1)(s^2+1)$ とおけば，与えられた行列の固有値は $a-br^2$, $p-qs^2$, $\frac{a+b+p+q\pm\sqrt{D}}{2}$ である．

$\begin{pmatrix}-br^2 & -br & -cr & -crs\\ -br & -b & -c & -cs\\ -cr & -c & a-br^2-p+q(s^2-1) & -qs\\ -crs & -cs & -qs & a-br^2-p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-r\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix}1\\-r\\0\\0\end{pmatrix}$ は $a-br^2$ に対する固有ベクトルである．$\begin{pmatrix}p-qs^2-a & -br & -cr & -crs\\ -br & p-qs^2-a+b(r^2-1) & -c & -cs\\ -cr & -c & -q & -qs\\ -crs & -cs & -qs & -qs^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-s\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix}0\\0\\-s\\1\end{pmatrix}$ は $p-cs^2$ に対する固有ベクトルである．$\begin{pmatrix}1\\-r\\0\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0\\0\\-s\\1\end{pmatrix}$ で生成される部分空間の直交補空間のベクトルは $\begin{pmatrix}ru\\u\\v\\sv\end{pmatrix}$ と表され，$\lambda=\frac{a+b+p+q\pm\sqrt{D}}{2}$ に対し，$\begin{pmatrix}\lambda-a & -br & -cr & -crs\\ -br & \lambda-a+b(r^2-1) & -c & -cs\\ -cr & -c & \lambda-p+q(s^2-1) & -qs\\ -crs & -cs & -qs & \lambda-p\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 行を } -s \text{ 倍して第 4 行に加える}]{\text{第 2 行を } -r \text{ 倍して第 1 行に加え，}}$

$\begin{pmatrix}\lambda-a+br^2 & -r(\lambda-a+br^2) & 0 & 0\\ -br & \lambda-a+b(r^2-1) & -c & -cs\\ -cr & -c & \lambda-p+q(s^2-1) & -qs\\ 0 & 0 & -s(\lambda-p+qs^2) & \lambda-p+qs^2\end{pmatrix}$ だから，$\begin{pmatrix}ru\\u\\v\\sv\end{pmatrix}$ が $\lambda$ に対する固有空間に属す

るためには, $\begin{pmatrix} -br & \lambda-a+b(r^2-1) & -c & -cs \\ -cr & -c & \lambda-p+q(s^2-1) & -qs \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ru \\ u \\ v \\ sv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つことが必要十分である.

これは, $\begin{pmatrix} \lambda-a-b & -c(s^2+1) \\ -c(r^2+1) & \lambda-p-q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と同値だから, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(s^2+1) \\ -\frac{a+b-p-q+\sqrt{D}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{a+b-p-q+\sqrt{D}}{2} \\ c(r^2+1) \end{pmatrix}$ として $\begin{pmatrix} cr(s^2+1) \\ c(s^2+1) \\ -\frac{a+b-p-q+\sqrt{D}}{2} \\ -\frac{s\left(a+b-p-q+\sqrt{D}\right)}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{r\left(a+b-p-q+\sqrt{D}\right)}{2} \\ \frac{a+b-p-q+\sqrt{D}}{2} \\ c(r^2+1) \\ cs(r^2+1) \end{pmatrix}$ は, それぞれ $\dfrac{a+b+p+q-\sqrt{D}}{2}$, $\dfrac{a+b+p+q+\sqrt{D}}{2}$ に対する固有ベクトルである. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{r^2+1}} & \frac{cr\sqrt{2(s^2+1)}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}} & \frac{r\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{2(r^2+1)}} & 0 \\ -\frac{r}{\sqrt{r^2+1}} & \frac{c\sqrt{2(s^2+1)}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}} & \frac{\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{2(r^2+1)}} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{2(s^2+1)}} & \frac{c\sqrt{2(r^2+1)}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}} & -\frac{s}{\sqrt{s^2+1}} \\ 0 & -\frac{s\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{2(s^2+1)}} & \frac{cs\sqrt{2(r^2+1)}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}} & \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} a-br^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a+b+p+q-\sqrt{D}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a+b+p+q+\sqrt{D}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p-qs^2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(14) $\begin{vmatrix} t-a & -c & -d & -b \\ -c & t-a & -b & -d \\ -d & -b & t-a & -c \\ -b & -d & -c & t-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-a-b-c-d & -c & -d & -b \\ t-a-b-c-d & t-a & -b & -d \\ t-a-b-c-d & -b & t-a & -c \\ t-a-b-c-d & -d & -c & t-a \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} t-a-b-c-d & -c & -d & -b \\ 0 & t-a+c & -b+d & b-d \\ 0 & -b+c & t-a+d & b-c \\ 0 & c-d & -c+d & t-a+b \end{vmatrix} = (t-a-b-c-d)\begin{vmatrix} t-a+c & -b+d & b-d \\ -b+c & t-a+d & b-c \\ c-d & -c+d & t-a+b \end{vmatrix} =$

$(t-a-b-c-d)\begin{vmatrix} t-a-b+c+d & -b+d & b-d \\ t-a-b+c+d & t-a+d & b-c \\ 0 & -c+d & t-a+b \end{vmatrix} = (t-a-b-c-d)\begin{vmatrix} t-a-b+c+d & -b+d & b-d \\ 0 & t-a+b & -c+d \\ 0 & -c+d & t-a+b \end{vmatrix} =$

$(t-a-b-c-d)(t-a-b+c+d)\begin{vmatrix} t-a+b & -c+d \\ -c+d & t-a+b \end{vmatrix} = (t-a-b-c-d)(t-a-b+c+d)(t-a+b-c+d)(t-a+b+c-d)$

より, 与えられた行列の固有値は $a+b+c+d$, $a+b-c-d$, $a-b+c-d$, $a-b-c+d$ である.

$\begin{pmatrix} b+c+d & -c & -d & -b \\ -c & b+c+d & -b & -d \\ -d & -b & b+c+d & -c \\ -b & -d & -c & b+c+d \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 行に加える}]{\text{第 1,2,3 行を}} \begin{pmatrix} b+c+d & -c & -d & -b \\ -c & b+c+d & -b & -d \\ -d & -b & b+c+d & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $a+b+c+d$ に対する固有ベクトルである. $\begin{pmatrix} b-c-d & -c & -d & -b \\ -c & b-c-d & -b & -d \\ -d & -b & b-c-d & -c \\ -b & -d & -c & b-c-d \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{と第 1 行を第 4 行に加える}]{\text{第 2,3 行を } -1 \text{ 倍したもの}}$

$$\begin{pmatrix} b-c-d & -c & -d & -b \\ -c & b-c-d & -b & -d \\ -d & -b & b-c-d & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ だから, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $a+b-c-d$ に対する固有ベクトルである.

$$\begin{pmatrix} -b+c-d & -c & -d & -b \\ -c & -b+c-d & -b & -d \\ -d & -b & -b+c-d & -c \\ -b & -d & -c & -b+c-d \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{と第 3 行を第 4 行に加える}]{\text{第 1,2 行を } -1 \text{ 倍したもの}} \begin{pmatrix} -b+c-d & -c & -d & -b \\ -c & -b+c-d & -b & -d \\ -d & -b & -b+c-d & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $a-b+c-d$ に対する固有ベクトルである. $\begin{pmatrix} -b-c+d & -c & -d & -b \\ -c & -b-c+d & -b & -d \\ -d & -b & -b-c+d & -c \\ -b & -d & -c & -b-c+d \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{と第 2 行を第 4 行に加える}]{\text{第 1,3 行を } -1 \text{ 倍したもの}} \begin{pmatrix} -b-c+d & -c & -d & -b \\ -c & -b-c+d & -b & -d \\ -d & -b & -b-c+d & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $a-b-c+d$ に対する固有ベクトルである. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{K}^4$ の正規直交系だから 1 次独立であるため, これらは $\boldsymbol{K}^4$ の正規直交基底である. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ によって

$$\begin{pmatrix} a+b+c+d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b-c-d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b+c-d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b-c+d \end{pmatrix}$$ に対角化される.

(15) 与えられた行列を $A$ とおく. $tE_n-A$ の第 $2,3,\ldots,n$ 列をすべて第 1 列に加えた行列の行列式を考える.

$$|tE_n-A| = \begin{vmatrix} t-(n-1)a-b & -a & -a & \cdots & -a \\ t-(n-1)a-b & t-b & -a & \cdots & -a \\ \vdots & & \ddots & & \\ t-(n-1)a-b & -a & -a & \cdots & t-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-(n-1)a-b & -a & -a & \cdots & -a \\ 0 & t+a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t+a-b \end{vmatrix} =$$

$(t-(n-1)a-b)(t+a-b)^{n-1}$ だから $A$ の固有値は $b-a$, $(n-1)a+b$ である. $((b-a)E_n-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間の基底は $\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_{j+1}$ $(j=1,2,\ldots,n-1)$ で与えられ, $(((n-1)a+b)E_n-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間の基底は $\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{e}_i$ で与えられる. $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{v}_j$ $(j=1,2,\ldots,n-1)$ を帰納的に $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_{j+1}-\sum\limits_{i=1}^{j-1}\dfrac{(\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_{j+1},\boldsymbol{v}_i)}{\|\boldsymbol{v}_i\|^2}\boldsymbol{v}_i$ で定めれば, $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1, \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_2\|}\boldsymbol{v}_2, \ldots, \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_{n-1}\|}\boldsymbol{v}_{n-1}$ は固有値 $b-a$ に対する $A$ の固有空間の正規直交基底である. ここで, $\boldsymbol{v}_j=\dfrac{1}{j}\sum\limits_{k=1}^{j}\boldsymbol{e}_k-\boldsymbol{e}_{j+1}$ であることを $j$ による帰納法で示す. $j=1$ のとき, $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ だから, 主張は成り立つ. $i \leqq j-1$ のとき, $\boldsymbol{v}_i=\dfrac{1}{i}\sum\limits_{k=1}^{i}\boldsymbol{e}_k-\boldsymbol{e}_{i+1}$ が成り立つと仮定すれば, $\|\boldsymbol{v}_i\|^2=\dfrac{i+1}{i}$, $(\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_{j+1},\boldsymbol{v}_i)=$

$\left(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_{j+1}, \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_{i+1}\right) = \begin{cases} 0 & i < j-1 \\ -1 & i = j-1 \end{cases}$ だから

$$\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_{j+1} - \sum_{i=1}^{j-1}\frac{(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_{j+1}, \boldsymbol{v}_i)}{\|\boldsymbol{v}_i\|^2}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_{j+1} + \frac{j-1}{j}\left(\frac{1}{j-1}\sum_{k=1}^{j-1}\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_j\right) = \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_{j+1}$$

が成り立つ. $\boldsymbol{p}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を $j \leqq n-1$ ならば $\boldsymbol{p}_j = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_j\|}\boldsymbol{v}_j = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\left(\sum_{k=1}^{j}\boldsymbol{e}_k - j\boldsymbol{e}_{j+1}\right)$, $\boldsymbol{p}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{e}_i$ で定め, $\boldsymbol{p}_j$ を第 $j$ 列とする行列を $P$ とすれば, $P$ は $A$ を対角化する直交行列である.

(16) 与えられた行列を $A_n$ とおき, $p_n(t) = |tE_n - A_n|$ とおけば, $p_1(t) = t-1$, $p_2(t) = (t-1)(t+1)$ であり,

$$\begin{aligned} p_n(t) &= t\left|tE_{n-1} - \begin{pmatrix} A_{n-2} & \boldsymbol{0} \\ {}^t\boldsymbol{0} & 0 \end{pmatrix}\right| + (-1)^n\left|\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{0} & 0 \\ tE_{n-1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} - A_{n-1}\right| \\ &= t^2|tE_{n-2} - A_{n-2}| - |tE_{n-2} - A_{n-2}| = (t^2-1)p_{n-2}(t) \end{aligned}$$

だから $p_{2m-1}(t) = (t-1)^m(t+1)^{m-1}$, $p_{2m}(t) = (t-1)^m(t+1)^m$ となるため, $A_n$ の固有値は $1$, $-1$ である. $(E_{2m-1} - A_{2m-1})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の基底は $\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_{2m-j}$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$ と $\boldsymbol{e}_m$ で与えられ, $(-E_{2m-1} - A_{2m-1})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の基底は $\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_{2m-j}$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$ で与えられる. $(E_{2m} - A_{2m})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の基底は $\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_{2m-j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ で与えられ, $(-E_{2m} - A_{2m})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の基底は $\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_{2m-j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ で与えられる. $\boldsymbol{R}^{2m-1}$ のベクトル $\boldsymbol{p}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, 2m-1)$ を $\boldsymbol{p}_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_{2m-j}) & 1 \leqq j \leqq m-1 \\ \boldsymbol{e}_m & j = m \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_{j-m} - \boldsymbol{e}_{3m-j}) & m+1 \leqq j \leqq 2m-1 \end{cases}$ で定めて $\boldsymbol{p}_j$ を第 $j$ 列とする行列を $P$ とすれば, $P$ は $A_{2m-1}$ を対角化する直交行列である. $\boldsymbol{R}^{2m}$ のベクトル $\boldsymbol{p}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, 2m)$ を $\boldsymbol{p}_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_{2m-j+1}) & 1 \leqq j \leqq m \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_{j-m} - \boldsymbol{e}_{3m-j+1}) & m+1 \leqq j \leqq 2m \end{cases}$ で定めて $\boldsymbol{p}_j$ を第 $j$ 列とする行列を $P$ とすれば, $P$ は $A_{2m}$ を対角化する直交行列である.

3. (1) $b = c = 0$ の場合は, $A = aE_2$ だから $P = E_2$ とすればよい. 以後 $b$, $c$ の少なくとも一方は $0$ でないとする.

$A = aE_2 + \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c & b \end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ とおけば, $A\boldsymbol{v}_1 = \left(aE_2 + \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c & b \end{pmatrix}\right)\boldsymbol{v}_1 = a\boldsymbol{v}_1$ となるため, $a$ は $A$ の固有値で, $\boldsymbol{v}_1$ は $a$ に対する $A$ の固有ベクトルである. $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -\bar{c} \\ \bar{b} \end{pmatrix}$ とおき, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1 & \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_2\|}\boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ とおけば, $\frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1, \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_2\|}\boldsymbol{v}_2$ は $\boldsymbol{C}^2$ の正規直交基底だから $P$ はユニタリー行列で, $\frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1 = P\boldsymbol{e}_1$, $\|\boldsymbol{v}_1\| = \|\boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{|b|^2 + |c|^2}$ だから $A\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{v}_2\|}\boldsymbol{v}_2\right) = \frac{a}{\|\boldsymbol{v}_2\|}\boldsymbol{v}_2 + \sqrt{|b|^2 + |c|^2}\boldsymbol{v}_1 = (|b|^2 + |c|^2)P\boldsymbol{e}_1 + aP\boldsymbol{e}_2 = P\big((|b|^2 + |c|^2)\boldsymbol{e}_1 + a\boldsymbol{e}_2\big)$ が成り立つ. 従って $AP = \left(A\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1\right)\ A\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{v}_2\|}\boldsymbol{v}_2\right)\right) = \Big(aP\boldsymbol{e}_1\ \ P\big((|b|^2 + |c|^2)\boldsymbol{e}_1 + a\boldsymbol{e}_2\big)\Big) = P\Big(a\boldsymbol{e}_1\ \ (|b|^2 + |c|^2)\boldsymbol{e}_1 + a\boldsymbol{e}_2\Big)$ より $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & |b|^2 + |c|^2 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ は上半三角行列となり, $P = \frac{1}{\sqrt{|b|^2 + |c|^2}}\begin{pmatrix} b & -\bar{c} \\ c & \bar{b} \end{pmatrix}$ が求めるユニタリー行列である.

(2) $P^{-1}A^nP = \left(P^{-1}AP\right)^n = \begin{pmatrix} a & |b|^2 + |c|^2 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}(|b|^2 + |c|^2) \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ が成り立つことが, $n$ による数学的帰納法で示される. 従って $A^n = P\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}(|b|^2 + |c|^2) \\ 0 & a^n \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} a^n - na^{n-1}bc & na^{n-1}b^2 \\ -na^{n-1}c^2 & a^n + na^{n-1}bc \end{pmatrix}$ である.

4. (1) $(\lambda E_n + A)^*(\lambda E_n + A) = |\lambda|^2E_n + \bar{\lambda}A + \lambda A^* + A^*A$, $(\lambda E_n + A)(\lambda E_n + A)^* = |\lambda|^2E_n + \bar{\lambda}A + \lambda A^* + AA^*$ であり, 仮定から $A^*A = AA^*$ だから, $(\lambda E_n + A)^*(\lambda E_n + A) = (\lambda E_n + A)(\lambda E_n + A)^*$ が成り立つため, $\lambda E_n + A$ も正規行列である.

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2+|c|^2 & \bar{a}b \\ a\bar{b} & |b|^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & 0 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} |a|^2+|b|^2 & a\bar{c} \\ \bar{a}c & |c|^2 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ が正規行列であるためには $|b| = |c|$ かつ $\bar{a}b = a\bar{c}$ が成り立つことが必要十分である. $a = 0$ の場合は主張は明らかである. $a \neq 0$ の場合, $a$ の偏角を $\alpha$ として $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $b = |b|(\cos\beta + i\sin\beta)$, $c = |c|(\cos\gamma + i\sin\gamma)$ を $\bar{a}b = a\bar{c}$ に代入すれば, $|a| \neq 0$ かつ $|b| = |c| \neq 0$ だから $\cos(\beta-\alpha) + i\sin(\beta-\alpha) = \cos(\alpha-\gamma) + i\sin(\alpha-\gamma)$ が得られる. 従って $\alpha - \gamma = \beta - \alpha + 2n\pi$ を満たす整数 $n$ が存在する. このとき, $\alpha = \dfrac{\beta+\gamma}{2} + n\pi$ だから次の等式が成り立つ.

$$a = |a|\left(\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2} + n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2} + n\pi\right)\right) = \begin{cases} |a|\left(\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2} + i\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right) & n \text{ は偶数} \\ -|a|\left(\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2} + i\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right) & n \text{ は奇数} \end{cases}$$

(3) 与えられた行列の固有方程式は $(t-\lambda)^2 - 2\kappa\xi\zeta(t-\lambda) - \rho^2\xi^2\zeta^2 = 0$ であり, $\rho > 0$ だから, 2 つの相異なる固有値 $\lambda + \xi\zeta\left(\kappa \pm \sqrt{\kappa^2+\rho^2}\right)$ がある. このとき, $\begin{pmatrix} \rho\xi \\ \zeta\left(\kappa - \sqrt{\kappa^2+\rho^2}\right) \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda + \xi\zeta\left(\kappa + \sqrt{\kappa^2+\rho^2}\right)$ に対する固有ベクトルであり, $\begin{pmatrix} \rho\xi \\ \zeta\left(\kappa + \sqrt{\kappa^2+\rho^2}\right) \end{pmatrix}$ は $\lambda - \xi\zeta\left(\kappa - \sqrt{\kappa^2+\rho^2}\right)$ に対する固有ベクトルである. これらの固有ベクトルは直交し, 長さはそれぞれ $\sqrt{2\sqrt{\kappa^2+\rho^2}\left(\sqrt{\kappa^2+\rho^2} - \kappa\right)}$, $\sqrt{2\sqrt{\kappa^2+\rho^2}\left(\sqrt{\kappa^2+\rho^2} + \kappa\right)}$ だから, 与えられた行列はユニタリー行列 $\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\kappa^2+\rho^2}} \begin{pmatrix} \xi\sqrt{\sqrt{\kappa^2+\rho^2}+\kappa} & \xi\sqrt{\sqrt{\kappa^2+\rho^2}-\kappa} \\ -\zeta\sqrt{\sqrt{\kappa^2+\rho^2}-\kappa} & \zeta\sqrt{\sqrt{\kappa^2+\rho^2}+\kappa} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} \lambda + \xi\zeta\left(\kappa + \sqrt{\kappa^2+\rho^2}\right) & 0 \\ 0 & \lambda + \xi\zeta\left(\kappa - \sqrt{\kappa^2+\rho^2}\right) \end{pmatrix}$ に対角化される.

5. (1) 仮定から $\alpha$, $\beta$ は $f$ の固有値で, $V$, $V^\perp$ がそれぞれ $\alpha$, $\beta$ の固有空間である. 第 18 回の問題 3 の (1) より, $(a,b) \neq (0,0)$ の場合,

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{-ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{-bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}$$

とおけば, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ は $\boldsymbol{v}_1 \in V$, $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V^\perp$ を満たす $f$ の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底である. 従って $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ に関する $f$ の表現行列を $D$ とし, $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ から $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ への基底の変換行列を $P$ とすれば $D$ は対角行列 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ であり,

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 & \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}$$

で, $P$ は $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ に関する $f$ の表現行列を対角化する行列である. また, $P$ は正規直交基底を列ベクトルにもつため, 直交行列である. 故に $(a,b) \neq (0,0)$ の場合は上記の $P$ が求める行列である. $a = b = 0$ の場合は, $\boldsymbol{e}_1$ は $V$ の正規直交基底で, $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は $V^\perp$ の正規直交基底だから, $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ は $f$ の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{R}^3$ の基底である. 従って $a = b = 0$ の場合は 3 次単位行列 $E_n$ が求める行列である.

(2) 仮定から $\alpha, \beta$ は $g$ の固有値で, $W, W^{\perp}$ がそれぞれ $\alpha, \beta$ の固有空間である. 第 18 回の問題 3 の (3) より, $\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_1\|}\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\left\|\boldsymbol{w}_2 - \frac{(\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1\right\|}\left(\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1\right)$, $\boldsymbol{v}_3 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_1\times\boldsymbol{w}_2\|}\boldsymbol{w}_1\times\boldsymbol{w}_2$ とおけば, $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$ は $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2 \in W$, $\boldsymbol{v}_3 \in W^{\perp}$ を満たす $f$ の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底である. 従って $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$ に関する $g$ の表現行列を $D$ とし, $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ から $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$ への基底の変換行列を $P$ とすれば $D$ は対角行列 $\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}$ であり,

$$P = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{c(cp-ar)-b(aq-bp)}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)((br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2)}} & \frac{br-cq}{\sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}}\\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a(aq-bp)-c(br-cq)}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)((br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2)}} & \frac{cp-ar}{\sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}}\\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a(aq-bp)-c(br-cq)}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)((br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2)}} & \frac{aq-bp}{\sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}}\end{pmatrix}$$

で, $P$ は $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ に関する $g$ の表現行列を対角化する行列である. また, $P$ は正規直交基底を列ベクトルにもつため, 直交行列である. 故に上記の $P$ が求める行列である.

6. (1) $A = \lambda E_n + \varepsilon\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^*$ とおくと, $A\boldsymbol{a} = (\lambda E_n + \varepsilon\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^*)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2\boldsymbol{a} = (\lambda+\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2)\boldsymbol{a}$ だから, $\lambda+\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2$ は $A$ の固有値で, $\boldsymbol{a}$ はこの固有値に対する固有ベクトルである. $\boldsymbol{x} \in \langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}$ ならば $\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) = 0$ だから $A\boldsymbol{x} = (\lambda E_n + \varepsilon\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^*)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が得られる. 従って, $\lambda$ は $A$ の固有値で, $\langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}$ はこの固有値に対する固有空間に含まれる. $\lambda+\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2, \lambda$ に対する $A$ の固有空間をそれぞれ $V, W$ とすれば, $\langle\boldsymbol{a}\rangle \subset V$, $\langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp} \subset W$ である. $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{w} \in W$ とすれば, $\boldsymbol{C}^n = \langle\boldsymbol{a}\rangle \oplus \langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}$ より $\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{w} = q\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ を満たす $p,q \in \boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}$ が存在する. このとき $p(\lambda+\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2)\boldsymbol{a} + (\lambda+\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2)\boldsymbol{b} = (\lambda+\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2)\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v} = A(p\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = pA\boldsymbol{a}+A\boldsymbol{b} = p(\lambda+\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2)\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ と $q\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{w} = A\boldsymbol{w} = A(q\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}) = qA\boldsymbol{a}+A\boldsymbol{c} = q(\lambda+\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2)\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{c}$ が成り立つ. 前者から $\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, 後者から $q\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ が得られ, $\varepsilon = \pm 1$ かつ $\|\boldsymbol{a}\| \neq 0$ だから $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, $q = 0$ であることがわかる. 故に $\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{a} \in \langle\boldsymbol{a}\rangle$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{c} \in \langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}$ となるため, $V \subset\in \langle\boldsymbol{a}\rangle$, $W \subset\in \langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}$ が成り立つ. 以上から $V = \langle\boldsymbol{a}\rangle$, $W = \langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}$ である.

(2) $j = 1,2,\dots,n-1$ に対して $\boldsymbol{v}_j = -\bar{a}_{j+1}\boldsymbol{e}_1 + \bar{a}_1\boldsymbol{e}_{j+1}$ とおけば $a_1 \neq 0$ だから, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_{n-1}$ は 1 次独立であり, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}_j) = 0$ だから $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_{n-1} \in \langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}$ である. 従って, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_{n-1}$ は $\langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}$ の基底であり, これらを直交化して得られる $\langle\boldsymbol{a}\rangle^{\perp}$ の正規直交基底を $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_{n-1}$ として $P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \cdots & \boldsymbol{w}_{n-1}\end{pmatrix}$ とおけば $P$ は $A$ を対角化するユニタリー行列である. このとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda+\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2 & {}^t\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \lambda E_{n-1}\end{pmatrix}$ である.

$n = 2$ の場合: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}-\bar{a}_2\\ \bar{a}_1\end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}\frac{-\bar{a}_2}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}}\\ \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}}\end{pmatrix}$ である. 従って $P = \begin{pmatrix}\frac{a_1}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}} & \frac{-\bar{a}_2}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}}\\ \frac{a_2}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}} & \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}}\end{pmatrix}$ は $A$ を対角化するユニタリー行列であり, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda+\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2 & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ である.

$n = 3$ の場合: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}-\bar{a}_2\\ \bar{a}_1\\ 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}-\bar{a}_3\\ 0\\ \bar{a}_1\end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}\frac{-\bar{a}_2}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}}\\ \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}}\\ 0\end{pmatrix}$ であり, $\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1)}{(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1)}\boldsymbol{v}_1$ とおけば $\boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix}\frac{-|a_1|^2\bar{a}_3}{|a_1|^2+|a_2|^2}\\ \frac{-\bar{a}_1a_2\bar{a}_3}{|a_1|^2+|a_2|^2}\\ \bar{a}_1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{z}_2\| = \dfrac{|a_1|\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}}$ である. 従って

$$P = \begin{pmatrix}\frac{a_1}{\|\boldsymbol{a}\|} & \frac{-\bar{a}_2}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}} & \frac{-|a_1|\bar{a}_3}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}}\\ \frac{a_2}{\|\boldsymbol{a}\|} & \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}} & \frac{-\bar{a}_1a_2\bar{a}_3}{|a_1|\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}}\\ \frac{a_3}{\|\boldsymbol{a}\|} & 0 & \frac{\bar{a}_1\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}}{|a_1|\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}}\end{pmatrix}$$

は $A$ を対角化するユニタリー行列であり, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda+\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ である.

$n=4$ の場合: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -\bar{a}_2 \\ \bar{a}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -\bar{a}_3 \\ 0 \\ \bar{a}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-\bar{a}_2}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}} \\ \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり, $\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1)}\boldsymbol{v}_1$ とおけば $\boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-|a_1|^2\bar{a}_3}{|a_1|^2+|a_2|^2} \\ \frac{-\bar{a}_1 a_2 \bar{a}_3}{|a_1|^2+|a_2|^2} \\ \bar{a}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{z}_2\| = \dfrac{|a_1|\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}}$ である. $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -\bar{a}_4 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{a}_1 \end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{z}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1)}{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1)}\boldsymbol{v}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{z}_2)}{(\boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_2)}\boldsymbol{z}_2$ とおけば $\boldsymbol{z}_3 = \begin{pmatrix} \frac{-|a_1|^2\bar{a}_4}{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2} \\ \frac{-\bar{a}_1 a_2 \bar{a}_4}{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2} \\ \frac{-\bar{a}_1 a_3 \bar{a}_4}{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2} \\ \bar{a}_1 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{z}_3\| = \dfrac{|a_1|\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+|a_4|^2}}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}}$ である. 従って

$$P = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\|\boldsymbol{a}\|} & \frac{-\bar{a}_2}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}} & \frac{-|a_1|\bar{a}_3}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}} & \frac{-|a_1|\bar{a}_4}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+|a_4|^2}} \\ \frac{a_2}{\|\boldsymbol{a}\|} & \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}} & \frac{-\bar{a}_1 a_2 \bar{a}_3}{|a_1|\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}} & \frac{-\bar{a}_1 a_2 \bar{a}_4}{|a_1|\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+|a_4|^2}} \\ \frac{a_3}{\|\boldsymbol{a}\|} & 0 & \frac{\bar{a}_1\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}}{|a_1|\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}} & \frac{-\bar{a}_1 a_3 \bar{a}_4}{|a_1|\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+|a_4|^2}} \\ \frac{a_4}{\|\boldsymbol{a}\|} & 0 & 0 & \frac{\bar{a}_1\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}}{|a_1|\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+|a_4|^2}} \end{pmatrix}$$

は $A$ を対角化するユニタリー行列であり, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda+\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ である.

7. (1) $\begin{vmatrix} t-3 & -i & 1 \\ i & t-5 & -i \\ 1 & i & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -i & 1 \\ 0 & t-5 & -i \\ t-2 & i & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -i & 1 \\ 0 & t-5 & -i \\ 0 & 2i & t-4 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t-5 & -i \\ 2i & t-4 \end{vmatrix} =$ $(t-2)\begin{vmatrix} t-5 & -i \\ 2i & t-4 \end{vmatrix} = (t-2)(t^2-9t+18) = (t-2)(t-3)(t-6)$ より, 与えられた行列の固有値は 2, 3, 6 である. $\begin{pmatrix} -1 & -i & 1 \\ i & -3 & -i \\ 1 & i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -i & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 2 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & -2 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 3 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 3 & -i & 1 \\ i & 1 & -i \\ 1 & i & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 3 & -i & 1 \\ 4i & 2 & 0 \\ -8 & 4i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 6 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えら

れる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(2) $\begin{vmatrix} t-2+i & 0 & -i \\ 0 & t-1-i & 0 \\ -i & 0 & t-2+i \end{vmatrix} = (t-1-i)\begin{vmatrix} t-2+i & -i \\ -i & t-2+i \end{vmatrix} = (t-1-i)((t-2+i)^2+1) =$

$(t-1-i)(t-2+2i)(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $2, 1+i, 2-2i$ である. $\begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ 0 & 1-i & 0 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 2 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1+2i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -1+2i \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1+2i & 0 & -4+2i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -1+2i \end{pmatrix}$ だから, $1+i$ に対する固有空間の正規直交基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -i & 0 & -i \\ 0 & 1-3i & 0 \\ -i & 0 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -i & 0 & -i \\ 0 & 1-3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, $2-2i$ に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-2i \end{pmatrix}$ に対角化される.

(3) $\begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ -1 & t & 2 \\ -2 & -2 & t \end{vmatrix} = t^3+4-4+4t+t+4t = t(t^2+9)$ より, 与えられた行列の固有値は $3i, -3i, 0$ である. $\begin{pmatrix} 3i & 1 & 2 \\ -1 & 3i & 2 \\ -2 & -2 & 3i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 2+6i \\ -1 & 3i & 2 \\ 0 & -2-6i & -4+3i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 2+6i \\ -1 & 0 & \frac{-1+3i}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, $3i$ に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -1+3i \\ 1+3i \\ 4 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -3i & 1 & 2 \\ -1 & -3i & 2 \\ -2 & -2 & -3i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & -8 & 2-6i \\ -1 & -3i & 2 \\ 0 & -2+6i & -4-3i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 2-6i \\ -1 & 0 & \frac{-1-3i}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, $-3i$ に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -1-3i \\ 1-3i \\ 4 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 0 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{-1+3i}{6} & \frac{-1-3i}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1+3i}{6} & \frac{1-3i}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 3i & 0 & 0 \\ 0 & -3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(4) $\begin{vmatrix} t-2 & -1 & -2 \\ -1 & t-2 & 2 \\ 2 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -2 \\ t-3 & t-2 & 2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -2 \\ 0 & t-1 & 4 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix} t-1 & 4 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} =$

$(t-3)((t-1)^2+8)$ より, 与えられた行列の固有値は $1+2\sqrt{2}i, 1-2\sqrt{2}i, 3$ である. $\begin{pmatrix} -1+2\sqrt{2}i & -1 & -2 \\ -1 & -1+2\sqrt{2}i & 2 \\ 2 & -2 & 2\sqrt{2}i \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -8-4\sqrt{2}i & -4+4\sqrt{2}i \\ -1 & -1+2\sqrt{2}i & 2 \\ 0 & -4+4\sqrt{2}i & 4+2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & -4+4\sqrt{2}i & 4+2\sqrt{2}i \end{pmatrix}$ だから, $1+2\sqrt{2}i$ に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -i \\ i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1-2\sqrt{2}i & -1 & -2 \\ -1 & -1-2\sqrt{2}i & 2 \\ 2 & -2 & -2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & -8+4\sqrt{2}i & -4-4\sqrt{2}i \\ -1 & -1-2\sqrt{2}i & 2 \\ 0 & -4-4\sqrt{2}i & 4-2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & -4-4\sqrt{2}i & 4-2\sqrt{2}i \end{pmatrix}$ だから, $1-2\sqrt{2}i$ に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ -i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ だから, 3 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1+2\sqrt{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対角化される.

8. (1) $B$ の固有多項式は $|tE_3 - B| = t^3 + c^2t = t(t+ci)(t-ci)$ だから固有値は $0$, $ci$, $-ci$.

(2) 複素行列 $A = \bigl(a_{jk}\bigr) \in M_{m,n}(\boldsymbol{C})$ に対し $\overline{A} = \bigl(\bar{a}_{jk}\bigr)$ とすれば, $A, B \in M_{m,n}(\boldsymbol{C})$, $C \in M_{n,l}(\boldsymbol{C})$, $\lambda \in \boldsymbol{C}$ に対して $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $\overline{AC} = \overline{A}\,\overline{C}$, $\overline{\lambda A} = \bar{\lambda}\overline{A}$ が成り立ち, $A \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ であるためには $\overline{A} = A$ であることが必要十分である. $B\boldsymbol{u} = ci\boldsymbol{u}$ の両辺の共役を考えると $B\bar{\boldsymbol{u}} = -ci\bar{\boldsymbol{u}}$ だから $\bar{\boldsymbol{u}}$ は $-ci$ に対する長さ 1 の固有ベクトルである. また, $\bar{\boldsymbol{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\boldsymbol{u}} + \bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) = \boldsymbol{x}$, $\bar{\boldsymbol{y}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}i}(\bar{\boldsymbol{u}} - \bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) = \boldsymbol{y}$ より $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3$ である. $B\boldsymbol{b} = 0$ だから $\boldsymbol{b}$ は $B$ の固有値 0 に対する固有ベクトルである. $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{u}$, $\bar{\boldsymbol{u}}$ は長さが 1 であり, 正規行列 $B$ の相異なる固有値 $0$, $ci$, $-ci$ に対する固有ベクトルであるため互いに直交する. このことから $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) = 0$ は明らかで, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\dfrac{1}{2i}(\boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}) = -\dfrac{1}{2i}((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - (\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{u}})) = 0$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{u}}) = \dfrac{1}{2}((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + (\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{u}})) = 1$, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}) = \dfrac{1}{2}((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + (\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{u}})) = 1$. 故に $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底である.

(3) $B\boldsymbol{x} = B\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{u}})\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(B\boldsymbol{u}+B\bar{\boldsymbol{u}}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ci\boldsymbol{u}-ci\bar{\boldsymbol{u}}) = \dfrac{ci}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}) = -c\boldsymbol{y}$, $B\boldsymbol{y} = B\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}i}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}i}(B\boldsymbol{u}-B\bar{\boldsymbol{u}}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}i}(ci\boldsymbol{u}+ci\bar{\boldsymbol{u}}) = \dfrac{c}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}) = c\boldsymbol{x}$, $\quad B\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$.

(4) (3) の結果から $BP = B\bigl(\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z}\bigr) = \bigl(B\boldsymbol{x}\ B\boldsymbol{y}\ B\boldsymbol{z}\bigr) = \bigl(-c\,\boldsymbol{y}\ c\,\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{0}\bigr) = \bigl(-c\,P\boldsymbol{e}_2\ c\,P\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{0}\bigr) = P\bigl(-c\,\boldsymbol{e}_2\ c\,\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{0}\bigr)$ だから, $P^{-1}BP = \bigl(-c\,\boldsymbol{e}_2\ c\,\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{0}\bigr) = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. (1) 直交行列 $P$ はユニタリー行列だから固有値の絶対値は 1 である. 従って実数の固有値は 1 または $-1$ である.

$P$ の固有多項式の係数は実数だから

$$|tE_n - P| = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_r)(t-\mu_1)(t-\mu_2)\cdots(t-\mu_l)(t-\bar{\mu}_1)(t-\bar{\mu}_2)\cdots(t-\bar{\mu}_l)$$

(ただし $r+2l=n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l \in \boldsymbol{R}$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l \in \boldsymbol{C}-\boldsymbol{R}$) のように因数分解される．このとき, $t=0$ を代入すれば

$$|P| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_l\mu_1\mu_2\ldots\mu_l\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2\cdots\bar{\mu}_l = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_l|\mu_1|^2|\mu_2|^2\cdots|\mu_l|^2$$

が得られる．$P$ の固有方程式は $-1$ を $s$ 重根にもつから, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_s = -1$ とすれば, $\lambda_{s+1} = \lambda_{s+2} = \cdots = \lambda_r = 1$, $|\mu_1| = |\mu_2| = \cdots = |\mu_l| = 1$ だから $|P| = (-1)^s$ である．

(2) 直交行列は正規行列だから, すべての固有値が実数であれば対称行列になるため, 対称行列ではない直交行列は虚数の固有値をもつ．

(3) $P$ を行列式の値が 1 である奇数次の直交行列とすると, $P$ の固有多項式は奇数次の実係数多項式だから, 重複度もこめて奇数個の実数解をもつ．すなわち実数である $P$ の固有値は重複度もこめて奇数個であり $|P|=1$ だから (1) の結果より $-1$ の重複度は偶数である．$P$ の実数の固有値は 1 か $-1$ に限るため $P$ は 1 を固有値にもつ．

10. (1) 問題 8 の結果から, $A$ は 1 を固有値にもち, $A$ の 1 以外の固有値は絶対値が 1 の一組の共役な虚数だから, それらを $\cos\theta + i\sin\theta$, $\cos\theta - i\sin\theta$ $(0<\theta<\pi)$ であるとしてよい．$A$ の固有値 $\cos\theta - i\sin\theta$ に対する長さ 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とすれば $A\boldsymbol{u} = (\cos\theta - i\sin\theta)\boldsymbol{u}$ だから, $A\bar{\boldsymbol{u}} = \bar{A}\bar{\boldsymbol{u}} = \overline{A\boldsymbol{u}} = \overline{(\cos\theta - i\sin\theta)\boldsymbol{u}} = (\cos\theta + i\sin\theta)\bar{\boldsymbol{u}}$ となるため, $\bar{\boldsymbol{u}}$ は $\cos\theta + i\sin\theta$ に対する長さ 1 の固有ベクトルである．$\boldsymbol{u}$ と $\bar{\boldsymbol{u}}$ は正規行列 $A$ の相異なる固有値に対する固有ベクトルだから, 互いに直交することに注意する．$\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{u}})$, $\boldsymbol{y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}i}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})$ とおけば, $\bar{\boldsymbol{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\boldsymbol{u}}+\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) = \boldsymbol{x}$, $\bar{\boldsymbol{y}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}i}(\bar{\boldsymbol{u}}-\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) = \boldsymbol{y}$ だから $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3$ であり, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\dfrac{1}{2i}(\boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}) = -\dfrac{1}{2i}((\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - (\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{u}})) = 0$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{u}}) = \dfrac{1}{2}((\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) + (\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{u}})) = 1$, $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}) = \dfrac{1}{2}((\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) + (\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{u}})) = 1$ となるため, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は正規直交系である．さらに, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ とおくと, $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の両方に垂直な単位ベクトルであり, $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}]$ は $\boldsymbol{R}^3$ の右手系の正規直交基底である．$\boldsymbol{C}^3$ の中で $A$ の固有値 1 に対する固有空間を $Z$ とすると, $\langle\boldsymbol{u}\rangle$, $\langle\bar{\boldsymbol{u}}\rangle$ はそれぞれ 1 と異なる固有値 $\cos\theta + i\sin\theta$, $\cos\theta - i\sin\theta$ に対する固有空間だから, $\langle\boldsymbol{u}\rangle$, $\langle\bar{\boldsymbol{u}}\rangle$, $Z$ は互いに直交する $\boldsymbol{C}^3$ の 1 次元部分空間であり, $\boldsymbol{C}^3$ の 3 つの 2 次元部分空間 $\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$, $\langle\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}\rangle$, $Z^{\perp}$ は一致する．$V = Z \cap \boldsymbol{R}^3$ とおけば, $V$ は $\boldsymbol{R}^3$ における $A$ の固有値 1 に対する固有空間であり, $\boldsymbol{C}^3$ において $\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = Z^{\perp}$ であることから, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ によって生成される $\boldsymbol{R}^3$ の 2 次元部分空間は $V$ の直交補空間である．従って $V$ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の両方に垂直なベクトル全体からなる $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次元部分空間であり, 一方 $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の両方に垂直なベクトルだから, $\boldsymbol{v}$ は $V$ の基底であり, $A$ の固有値 1 に対する固有ベクトルである．

$A\boldsymbol{u} = (\cos\theta - i\sin\theta)\boldsymbol{u}$, $A\bar{\boldsymbol{u}} = (\cos\theta + i\sin\theta)\bar{\boldsymbol{u}}$ から, $A\boldsymbol{x} = \cos\theta\boldsymbol{x} + \sin\theta\boldsymbol{y}$, $A\boldsymbol{y} = -\sin\theta\boldsymbol{x} + \cos\theta\boldsymbol{y}$ が得られる．従って, $P$ を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}$ をそれぞれ第 1 列, 第 2 列, 第 3 列にもつ行列とすれば, $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}]$ は $\boldsymbol{R}^3$ の右手系の正規直交基底だから, $P$ は行列式の値が 1 である直交行列である．

$$\begin{aligned}
AP &= A\big(\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{v}\big) = \big(A\boldsymbol{x}\ A\boldsymbol{y}\ A\boldsymbol{v}\big) = \big(\cos\theta\boldsymbol{x} + \sin\theta\boldsymbol{y}\ \ -\sin\theta\boldsymbol{x} + \cos\theta\boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{v}\big) \\
&= \big(\cos\theta P\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta P\boldsymbol{e}_2\ \ -\sin\theta P\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta P\boldsymbol{e}_2\ \ P\boldsymbol{e}_3\big) \\
&= P\big(\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2\ \ -\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_2\ \ \boldsymbol{e}_3\big) = P\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

だから $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つ．このとき, $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = 2\cos\theta + 1$ から $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}A - 1)$ が得られるため, $\theta$ は $0<\theta<\pi$ の範囲で直交行列 $P$ の選び方によらずに一通りに定まることがわかる．

(2) $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を, 各 $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^3$ を $\ell$ を軸として, $\boldsymbol{v}$ の方向を向いて $\theta$ だけ時計回りに回転したベクトルに対応させる写像とする．$\ell$ に垂直な平面で, 原点を通るものをそれぞれ $H_0$ とすれば, $H_0$ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ で生成される部分空間

である．このとき, $f_0$ は $H_0$ の点を $H_0$ の点に写すため, $f$ の定義域を $H_0$ に制限して得られる写像を $f_0 : H_0 \to H_0$ とすると, $f_0$ は原点を中心とし, $\ell$ を軸として, $\boldsymbol{v}$ の方向を向いて $\theta$ だけ時計回りに回転させる $H_0$ 上の回転移動である．$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}]$ は $\boldsymbol{R}^3$ の右手系である正規直交基底だから, $\boldsymbol{x}$ を, $\ell$ を軸として, $\boldsymbol{v}$ の方向を向いて $\dfrac{\pi}{2}$ だけ時計回りに回転すれば $\boldsymbol{y}$ である．従って, $H_0$ の基底 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ に関する $f_0$ の表現行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となるため, $\boldsymbol{q} \in H_0$ ならば $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{y}$ より, 次の等式が成り立つ．

$$f_0(\boldsymbol{q}) = ((\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})\cos\theta - (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{y})\sin\theta)\boldsymbol{x} + ((\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})\sin\theta + (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{y})\cos\theta)\boldsymbol{y} \ \cdots \ (*)$$

$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}]$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底だから $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^3$ は $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ と表されるため, $\boldsymbol{p}$ を位置ベクトルとする点を P とし, P から $\ell$ に下した垂線の足を C とすれば, C の位置ベクトルは $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ である．$\ell$ に垂直な平面で, C を通るものを $H$ とすれば, $H$ 上を C を中心として P を $\boldsymbol{v}$ の方向を向いて $\theta$ だけ時計回りに回転した点の位置ベクトルが $f(\boldsymbol{p})$ だから, $f(\boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ は $\ell$ に垂直で $H_0$ に含まれ, $H_0$ 内で $\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{y}$ を, 原点を中心として $\boldsymbol{v}$ の方向を向いて $\theta$ だけ時計回りに回転したベクトルである．故に, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{y}) = 0$ であることに注意すれば, $(*)$ より

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v} &= f_0(\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}) \\ &= ((\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})\cos\theta - (\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}, \boldsymbol{y})\sin\theta)\boldsymbol{x} + ((\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})\sin\theta + (\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}, \boldsymbol{y})\cos\theta)\boldsymbol{y} \\ &= ((\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})\cos\theta - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})\sin\theta)\boldsymbol{x} + ((\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})\sin\theta + (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})\cos\theta)\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

だから, $f(\boldsymbol{p}) = ((\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})\cos\theta - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})\sin\theta)\boldsymbol{x} + ((\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})\sin\theta + (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})\cos\theta)\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ が成り立つ．一方 (1) の結果から

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{p} &= (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})A\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})A\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})A\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})(\cos\theta\boldsymbol{x} + \sin\theta\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})(-\sin\theta\boldsymbol{x} + \cos\theta\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = \\ &= ((\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})\cos\theta - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})\sin\theta)\boldsymbol{x} + ((\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})\sin\theta + (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})\cos\theta)\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

が成り立つため, $f(\boldsymbol{p}) = A\boldsymbol{p}$ となり, $A$ が表す $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換は $\ell$ を軸に $\boldsymbol{v}$ の方向を向いて時計回りに $\theta$ だけ回転する回転移動であることがわかる．故に, $\boldsymbol{b} = \sin\theta\boldsymbol{v}$ であることが示されれば, $\boldsymbol{b}$ の長さは $\sin\theta$ で, $\sin\theta > 0$ より, $A$ が表す $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換は $\ell$ を軸に $\boldsymbol{b}$ の方向を向いて時計回りに $\theta$ だけ回転する回転移動であることが示される．

$A^2\boldsymbol{u} = (\cos\theta - i\sin\theta)^2\boldsymbol{u} = (\cos 2\theta - i\sin 2\theta)\boldsymbol{u}$, $A^2\bar{\boldsymbol{u}} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2\bar{\boldsymbol{u}} = (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\bar{\boldsymbol{u}}$, $A^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ より, $A^2$ の固有値は $\cos 2\theta + i\sin 2\theta$, $\cos 2\theta - i\sin 2\theta$, 1 であり, $0 < 2\theta < 2\pi$ だから 1 に対する $A^2$ の固有空間は $\boldsymbol{v}$ で生成される 1 次元部分空間である．一方, $\dfrac{1}{2}(A - {}^t\!A)\boldsymbol{b} = 0$ で, ${}^t\!A = A^{-1}$ だから $A^2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ となるため, $\boldsymbol{b}$ は $A^2$ の固有値 1 に対する固有ベクトルである．従って $\boldsymbol{b} = r\boldsymbol{v}$ となる $r \in \boldsymbol{R}$ が存在する．

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u} \times \bar{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} u_2\bar{u}_3 - \bar{u}_2 u_3 \\ -u_1\bar{u}_3 + \bar{u}_1 u_3 \\ u_1\bar{u}_2 - \bar{u}_1 u_2 \end{pmatrix}$ であり, $A\boldsymbol{u} = (\cos\theta - i\sin\theta)\boldsymbol{u}$, $A\bar{\boldsymbol{u}} = (\cos\theta + i\sin\theta)\bar{\boldsymbol{u}}$ から, $\{j, k, l\} = \{1, 2, 3\}$ を満たす整数 $j, k, l$ に対し

$$a_{jk}u_k = (\cos\theta - i\sin\theta)u_j - a_{jl}u_l - a_{jj}u_j, \quad a_{jk}\bar{u}_k = (\cos\theta + i\sin\theta)\bar{u}_j - a_{jl}\bar{u}_l - a_{jj}\bar{u}_j$$

であるため,

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}\times\bar{\boldsymbol{u}},2\boldsymbol{b}) &= (a_{32}-a_{23})(u_2\bar{u}_3-\bar{u}_2u_3)+(a_{13}-a_{31})(-u_1\bar{u}_3+\bar{u}_1u_3)+(a_{21}-a_{12})(u_1\bar{u}_2-\bar{u}_1u_2)\\
&= (a_{32}u_2)\bar{u}_3-(a_{32}\bar{u}_2)u_3-u_2(a_{23}\bar{u}_3)+\bar{u}_2(a_{23}u_3)-u_1(a_{13}\bar{u}_3)+\bar{u}_1(a_{13}u_3)\\
&\quad +(a_{31}u_1)\bar{u}_3-(a_{31}\bar{u}_1)u_3+(a_{21}u_1)\bar{u}_2-(a_{21}\bar{u}_1)u_2-u_1(a_{12}\bar{u}_2)+\bar{u}_1(a_{12}u_2)\\
&= ((\cos\theta-i\sin\theta)u_3-a_{31}u_1-a_{33}u_3)\bar{u}_3-((\cos\theta+i\sin\theta)\bar{u}_3-a_{31}\bar{u}_1-a_{33}\bar{u}_3)u_3\\
&\quad -u_2((\cos\theta+i\sin\theta)\bar{u}_2-a_{21}\bar{u}_1-a_{22}\bar{u}_2)+\bar{u}_2((\cos\theta-i\sin\theta)u_2-a_{21}u_1-a_{22}u_2)\\
&\quad -u_1((\cos\theta+i\sin\theta)\bar{u}_1-a_{11}\bar{u}_1-a_{12}\bar{u}_2)+\bar{u}_1((\cos\theta-i\sin\theta)u_1-a_{11}u_1-a_{12}u_2)\\
&\quad +((\cos\theta-i\sin\theta)u_3-a_{32}u_2-a_{33}u_3)\bar{u}_3-((\cos\theta+i\sin\theta)\bar{u}_3-a_{32}\bar{u}_2-a_{33}\bar{u}_3)u_3\\
&\quad +((\cos\theta-i\sin\theta)u_2-a_{22}u_2-a_{23}u_3)\bar{u}_2-((\cos\theta+i\sin\theta)\bar{u}_2-a_{22}\bar{u}_2-a_{23}\bar{u}_3)u_2\\
&\quad -u_1((\cos\theta+i\sin\theta)\bar{u}_1-a_{11}\bar{u}_1-a_{13}\bar{u}_3)+\bar{u}_1((\cos\theta-i\sin\theta)u_1-a_{11}u_1-a_{13}u_3)\\
&= -(a_{32}-a_{23})(u_2\bar{u}_3-\bar{u}_2u_3)-(a_{13}-a_{31})(-u_1\bar{u}_3+\bar{u}_1u_3)-(a_{21}-a_{12})(u_1\bar{u}_2-\bar{u}_1u_2)\\
&\quad -4i\sin\theta(|u_1|^2+|u_2|^2+|u_3|^2)\\
&= -(\boldsymbol{u}\times\bar{\boldsymbol{u}},2\boldsymbol{b})-4i\sin\theta
\end{aligned}
$$

が得られる. 従って, $2(\boldsymbol{u}\times\bar{\boldsymbol{u}},2\boldsymbol{b})=-4i\sin\theta$ だから, $(\boldsymbol{u}\times\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{b})=-i\sin\theta$ が成り立つ. 一方,

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{u}})\times\frac{1}{\sqrt{2}i}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})=i(\boldsymbol{u}\times\bar{\boldsymbol{u}})$$

であり, $\boldsymbol{v}$ は単位ベクトルだから $r=r(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v},r\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})=(i(\boldsymbol{u}\times\bar{\boldsymbol{u}},)\boldsymbol{b})=i(\boldsymbol{u}\times\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{b})=\sin\theta$ である.

11. $\boldsymbol{v}$ に直交する単位ベクトルの一つとして $\boldsymbol{v}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ を選び, $\boldsymbol{v}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}_1=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}$ とおくと, $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$ は右手系の $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底である. 求める行列を $A$ とすれば, $T_A$ は $\boldsymbol{v}_3$ を方向ベクトルとする直線を軸として $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ を含む平面を, $\boldsymbol{v}_3$ の方向を向いて $\frac{\pi}{3}$ だけ時計回りに回転する 1 次変換だから, $A\boldsymbol{v}_1=\cos\frac{\pi}{3}\boldsymbol{v}_1+\sin\frac{\pi}{3}\boldsymbol{v}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{v}_2$, $A\boldsymbol{v}_2=-\sin\frac{\pi}{3}\boldsymbol{v}_2+\cos\frac{\pi}{3}\boldsymbol{v}_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{v}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2$, $A\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_3$ である. $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ をこの順に列ベクトルにもつ行列を $P$ とすれば, $P$ は直交行列であり, $AP=\begin{pmatrix}A\boldsymbol{v}_1 & A\boldsymbol{v}_2 & A\boldsymbol{v}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{v}_2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{v}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}P\boldsymbol{e}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}P\boldsymbol{e}_2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}P\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}P\boldsymbol{e}_2 & P\boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ より, $A=P\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}{}^tP=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}10&2-6\sqrt{3}&2+6\sqrt{3}\\2+6\sqrt{3}&13&4-3\sqrt{3}\\2-6\sqrt{3}&4+3\sqrt{3}&13\end{pmatrix}$.

12. $A$ は対称行列だから, $A$ の固有値はすべて実数である. 従って, 問題 8 の結果より, $A$ の固有値は 1 または $-1$ である. もし, $A$ の固有方程式が $\varepsilon$ $(\varepsilon=\pm1)$ を 3 重根にもてば, $A$ は対角化可能だから $P^{-1}AP=\varepsilon E_3$ を満たす正則行列 $P$ が存在するが, このとき $A=P(\varepsilon E_3)P^{-1}=\varepsilon PP^{-1}=\varepsilon E_3$ となって, $A\neq\pm E_3$ であるという仮定に反する. 従って $A$ の固有多項式は $(t-1)(t+1)^2$ か $(t-1)^2(t+1)$ のいずれかで, $A$ の行列式の値は $A$ の固有方程式のすべて解の重複度も込めた積に等しいため, 前者の場合は $|A|=1$ であり, 後者の場合は $|A|=-1$ である.

(1) 上の議論から, $A$ の固有方程式は $-1$ を重根にもち, $A$ の固有値 $-1$ に対する固有空間の次元は 2 次元である. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を $-1$ に対する固有空間の正規直交基底とし, 固有値 1 に対する $A$ の固有ベクトルで単位ベクトルであるものを $\boldsymbol{v}$ とすれば, $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}]$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底である. $A\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{y}$, $A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ だから, $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}]$ に関する $A$ の表現行列は $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ となり, $A$ が表す $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換は, $\boldsymbol{v}$ を方向ベクトルとして, 原点を通る直線を軸

とした角度 $\pi$ の回転移動であることがわかる.

(2) 初めの議論から, $A$ の固有方程式は 1 を重根にもち, $A$ の固有値 1 に対する固有空間の次元は 2 次元である. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を 1 に対する固有空間の正規直交基底とし, 固有値 $-1$ に対する $A$ の固有ベクトルで単位ベクトルであるものを $\boldsymbol{v}$ とすれば, $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}]$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底であり, とくに $\boldsymbol{v}$ は原点を通って $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に平行な平面の法線ベクトルである. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$, $A\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$ だから, $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}]$ に関する $A$ の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となり, $A$ が表す $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換は, $\boldsymbol{v}$ を法線ベクトルとして, 原点を通る平面に関する対称移動であることがわかる.

13. 各問で与えられた行列を $A$ とする.

(1) ${}^tAA = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -3 & 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 & \sqrt{6} \\ 3 & 1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} = E_3$ だから, $A$ は直交行列であり,

$|A| = \dfrac{1}{4^3}\begin{vmatrix} -1 & -3 & \sqrt{6} \\ 3 & 1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{64}\begin{vmatrix} -1 & -3 & \sqrt{6} \\ 0 & -8 & 4\sqrt{6} \\ 0 & 4\sqrt{6} & -4 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{64}\begin{vmatrix} -8 & 4\sqrt{6} \\ 4\sqrt{6} & -4 \end{vmatrix} = 1$ だから, 問題 9 の結果から $A$ は回転を表す. $\dfrac{1}{2}(A - {}^tA) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -3 & \sqrt{6} \\ 3 & 0 & 0 \\ -\sqrt{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり, 回転角を $\theta$ とすれば $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(\operatorname{tr} A - 1) = \dfrac{1}{4}$ だから, 問題 9 の結果により, $A$ は原点を通り, $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ 3 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線を軸として, $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ 36 \end{pmatrix}$ の方向に向かって時計回りに $\cos^{-1}\dfrac{1}{4}$ だけ回転させる回転を表す.

(2) ${}^tAA = \dfrac{1}{81}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \\ 1 & -8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix} = E_3$ だから, $A$ は直交行列であり, $|A| = \dfrac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 36 & -63 & -8 \\ -9 & 36 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1$ だから, 問題 9 の結果から $A$ は回転を表す. $\dfrac{1}{2}(A - {}^tA) = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 6 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ であり, 回転角を $\theta$ とすれば $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(\operatorname{tr} A - 1) = 0$ だから, 問題 9 の結果により, $A$ は原点を通り, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線を軸として, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の方向に向かって時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させる回転を表す.

(3) ${}^tAA = \dfrac{1}{225}\begin{pmatrix} 5 & -14 & -2 \\ 10 & 5 & -10 \\ 10 & 2 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ -14 & 5 & 2 \\ -2 & -10 & 11 \end{pmatrix} = E_3$ だから, $A$ は直交行列であり,

$|A| = \dfrac{1}{15^3}\begin{vmatrix} 5 & 10 & 10 \\ -14 & 5 & 2 \\ -2 & -10 & 11 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{3375}\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -14 & 33 & 30 \\ -2 & -6 & 15 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{675}\begin{vmatrix} 33 & 30 \\ -6 & 15 \end{vmatrix} = 1$ だから, 問題 9 の結果から $A$ は回転を表す. $\dfrac{1}{2}(A - {}^tA) = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 0 & 12 & 6 \\ -12 & 0 & 6 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ であり, 回転角を $\theta$ とすれば $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(\operatorname{tr} A - 1) = \dfrac{1}{5}$ だから, 問題 9 の結果に

より, $A$ は原点を通り, $\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線を軸として, $\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ の方向に向かって時計回りに $\cos^{-1}\dfrac{1}{5}$ だけ回転させる回転を表す.

(4) ${}^tAA=\dfrac{1}{289}\begin{pmatrix}-9&8&12\\8&-9&12\\12&12&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9&8&12\\8&-9&12\\12&12&1\end{pmatrix}=E_3$, ${}^tA=A$ だから, $A$ は直交行列かつ対称行列であり,

$|A|=\dfrac{1}{17^3}\begin{vmatrix}-9&8&12\\8&-9&12\\12&12&1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{4913}\begin{vmatrix}-153&-136&0\\-136&-153&0\\12&12&1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{4913}\begin{vmatrix}-153&-136\\-136&-153\end{vmatrix}=1$ だから, 問題 11 の結果から $A$ は回転角 $\pi$ の回転を表す. $\begin{pmatrix}-26&8&12\\8&-26&12\\12&12&-16\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-17&17&0\\17&-17&0\\12&12&-16\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0\\17&-17&0\\24&0&-16\end{pmatrix}$ だから, $\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ は 1 に対する固有ベクトルであり, $A$ は原点を通り, このベクトルを方向ベクトルとする直線を軸にした回転角 $\pi$ の回転を表す.

(5) ${}^tAA=\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix}4&1&-2\sqrt{2}\\1&4&2\sqrt{2}\\2\sqrt{2}&-2\sqrt{2}&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&2\sqrt{2}\\1&4&-2\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}&2\sqrt{2}&3\end{pmatrix}=E_3$ だから, $A$ は直交行列であり,

$|A|=\dfrac{1}{125}\begin{vmatrix}4&1&2\sqrt{2}\\1&4&-2\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}&2\sqrt{2}&3\end{vmatrix}=\dfrac{1}{125}\begin{vmatrix}0&-15&10\sqrt{2}\\1&4&-2\sqrt{2}\\0&10\sqrt{2}&-5\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{125}\begin{vmatrix}-15&10\sqrt{2}\\10\sqrt{2}&-5\end{vmatrix}=1$ だから, 問題 9 の結果から $A$ は回転を表す. $\dfrac{1}{2}(A-{}^tA)=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0&0&2\sqrt{2}\\0&0&-2\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}&2\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$ であり, 回転角を $\theta$ とすれば $\cos\theta=\dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}\,A-1)=\dfrac{3}{5}$ だから, 問題 9 の結果により, $A$ は原点を通り, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線を軸として, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ の方向に向かって時計回りに $\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$ だけ回転させる回転を表す.

(6) ${}^tAA=\dfrac{1}{49}\begin{pmatrix}2&6&3\\6&-3&2\\3&2&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6&3\\6&-3&2\\3&2&-6\end{pmatrix}=E_3$, ${}^tA=A$ だから, $A$ は直交行列かつ対称行列であり,

$|A|=\dfrac{1}{7^3}\begin{vmatrix}2&6&3\\6&-3&2\\3&2&-6\end{vmatrix}=\dfrac{1}{343}\begin{vmatrix}2&6&3\\0&-21&-7\\0&-7&-\frac{21}{2}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{343}\begin{vmatrix}-21&-7\\-14&-21\end{vmatrix}=1$ だから, 問題 11 の結果から $A$ は回転角 $\pi$ の回転を表す. $\begin{pmatrix}-5&6&3\\6&-10&2\\3&2&-13\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-14&0&42\\21&0&-63\\3&2&-13\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-14&0&42\\0&0&0\\0&2&-4\end{pmatrix}$ だから, $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ は 1 に対する固有ベクトルであり, $A$ は原点を通り, このベクトルを方向ベクトルとする直線を軸にした回転角 $\pi$ の回転を表す.

(7) ${}^tAA = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = E_3$ だから, $A$ は直交行列であり, $|A| = \dfrac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{27}\begin{vmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{27}\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 1$ だから, 問題 9 の結果から $A$ は回転を表す.

$\dfrac{1}{2}(A - {}^tA) = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 問題 9 の結果により, 回転軸は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線であり, 回転角を $\theta$ とすれば $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}\, A - 1) = \dfrac{1}{2}$ だから, $A$ は原点を通り, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線を軸として, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の方向に向かって時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させる回転を表す.

(8) ${}^tAA = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = E_3$ だから, $A$ は直交行列であり, $|A| = \dfrac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1$ だから, 問題 9 の結果から $A$ は回転を表す. $\dfrac{1}{2}(A - {}^tA) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ であり, 回転角を $\theta$ とすれば $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}\, A - 1) = -\dfrac{1}{2}$ だから, 問題 9 の結果により, $A$ は原点を通り, $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線を軸として, $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ の方向に向かって時計回りに $\dfrac{2\pi}{3}$ だけ回転させる回転を表す.

(9) ${}^tAA = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{3} & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{6} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = E_3$ だから, $A$ は直交行列であり,

$|A| = \dfrac{1}{64}\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{64}\begin{vmatrix} 4\sqrt{2} & 0 & 4\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{32}\begin{vmatrix} 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1$ だから, 問題 9 の結果から $A$ は回転を表す. $\dfrac{1}{2}(A - {}^tA) = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} - \sqrt{6} & 3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} + \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} \\ -3\sqrt{2} & -\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$ であり, 回転角を $\theta$ とすれば $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}\, A - 1) = \dfrac{3\sqrt{2} - 2}{8}$ だから, 問題 9 の結果により, $A$ は原点を通り, $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線を軸として, $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}$ の方向に向かって時計回りに $\cos^{-1}\dfrac{3\sqrt{2} - 2}{8}$ だけ回転させる回転を表す.

14. (1) 仮定から $\boldsymbol{v}_{j-1} = (A - \lambda E_{2n})\boldsymbol{v}_j$ が $j = 2, 3, \ldots, n$ について成り立ち, $(A - \lambda E_{2n})\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ である. 従って

$$(A - \lambda E_{2n})^k \boldsymbol{v}_j = \begin{cases} \boldsymbol{v}_{j-k} & k = 0, 1, \ldots, j-1 \\ \boldsymbol{0} & k \geqq j \end{cases} \quad \cdots (i)$$

が成り立つ．$a_1, a_2, \dots, a_n \in \boldsymbol{C}$ に対して $\sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}$ が成り立つとき, この両辺に $(A - \lambda E_{2n})^{n-1}$ をかけると, 上式から $a_n \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ が得られ, $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$ だから $a_n = 0$ である．帰納的に $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k+1} = 0$ が示されたと仮定すると $\sum_{j=1}^{n-k} a_j \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}$ だから, この両辺に $(A - \lambda E_{2n})^{n-k-1}$ をかければ $a_{n-k} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ が得られ, $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$ だから $a_{n-k} = 0$ である．故に, 帰納法によって $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ であることがわかるため, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である．

(2) $(i)$ より $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n \in \operatorname{Ker} T_{(A-\lambda E_{2n})^n}$ であり, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立だから $\dim \operatorname{Ker} T_{(A-\lambda E_{2n})^n} \geqq n$ である．従って, 次元公式から $\operatorname{rank}(A - \lambda E_{2n})^n \leqq n$ である．

$\tau : \boldsymbol{C}^{2n} \to \boldsymbol{C}^{2n}$ を $\tau(\boldsymbol{x}) = \bar{\boldsymbol{x}}$ で定めれば, $\boldsymbol{C}^{2n}$ を $\boldsymbol{R}$ 上の $4n$ 次元ベクトル空間とみなしたとき, $\tau$ は同型写像である $\boldsymbol{C}^{2n}$ の 1 次変換である．従って (1) の結果から $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \bar{\boldsymbol{v}}_n$ は 1 次独立である．$A$ の成分はすべて実数だから, 仮定から

$$A\bar{\boldsymbol{v}}_j = \begin{cases} \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}_1 & j = 1 \\ \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}_j + \bar{\boldsymbol{v}}_{j-1} & j = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

が成り立つ．従って

$$(A - \bar{\lambda}E_{2n})^k \bar{\boldsymbol{v}}_j = \begin{cases} \bar{\boldsymbol{v}}_{j-k} & k = 0, 1, \dots, j-1 \\ \boldsymbol{0} & k \geqq j \end{cases}$$

となるため, $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \bar{\boldsymbol{v}}_n \in \operatorname{Ker} T_{(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n}$ である．故に $\dim \operatorname{Ker} T_{(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n} \geqq n$ となるため, 次元公式から $\operatorname{rank}(A - \bar{\lambda}E_{2n})^n \leqq n$ である．

$\lambda \neq \bar{\lambda}$ より, $(x-\lambda)^n$ と $(x-\bar{\lambda})^n$ は互いに素な多項式だから $(x-\lambda)^n F(x) + (x-\bar{\lambda})^n G(x) = 1$ を満たす $x$ の多項式 $F(x)$ と $G(x)$ が存在する．従って $(A-\lambda E_{2n})^n F(A) + (A-\bar{\lambda}E_{2n})^n G(A) = E_{2n}$ が成り立つため, 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^{2n}$ に対して

$$\boldsymbol{x} = (A-\lambda E_{2n})^n F(A)\boldsymbol{x} + (A-\bar{\lambda}E_{2n})^n G(A)\boldsymbol{x} \ \cdots (ii)$$

である． ここで, $(A-\lambda E_{2n})^n F(A) \in \operatorname{Im} T_{(A-\lambda E_{2n})^n}$, $(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n F(A) \in \operatorname{Im} T_{(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n}$ だから, 上式から $\boldsymbol{C}^{2n} = \operatorname{Im} T_{(A-\lambda E_{2n})^n} + \operatorname{Im} T_{(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n}$ であることがわかる． また, $(A-\lambda E_{2n})^n F(A) = F(A)(A-\lambda E_{2n})^n$, $(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n G(A) = G(A)(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n$ だから $(ii)$ より $j = 1, 2, \dots, n$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_j &= (A-\lambda E_{2n})^n F(A)\boldsymbol{v}_j + (A-\bar{\lambda}E_{2n})^n G(A)\boldsymbol{v}_j = F(A)(A-\lambda E_{2n})^n \boldsymbol{v}_j + (A-\bar{\lambda}E_{2n})^n G(A)\boldsymbol{v}_j \\ &= (A-\bar{\lambda}E_{2n})^n G(A)\boldsymbol{v}_j \in \operatorname{Im} T_{(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n} \\ \bar{\boldsymbol{v}}_j &= (A-\lambda E_{2n})^n F(A)\bar{\boldsymbol{v}}_j + (A-\bar{\lambda}E_{2n})^n G(A)\bar{\boldsymbol{v}}_j = (A-\lambda E_{2n})^n F(A)\bar{\boldsymbol{v}}_j + G(A)(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n \bar{\boldsymbol{v}}_j \\ &= (A-\lambda E_{2n})^n F(A)\bar{\boldsymbol{v}}_j \in \operatorname{Im} T_{(A-\lambda E_{2n})^n} \end{aligned}$$

$\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \bar{\boldsymbol{v}}_n$ は 1 次独立だから, $\operatorname{rank}(A-\lambda E_{2n})^n = \dim \operatorname{Im} T_{(A-\lambda E_{2n})^n} \geqq n$ であり, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立だから, $\operatorname{rank}(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n = \dim \operatorname{Im} T_{(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n} \geqq n$ が得られるため, $\dim \operatorname{Im} T_{(A-\lambda E_{2n})^n} = \dim \operatorname{Im} T_{(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n} = n$ であり, $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \bar{\boldsymbol{v}}_n$ は $\operatorname{Im} T_{(A-\lambda E_{2n})^n}$ の基底, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は $\operatorname{Im} T_{(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n}$ の基底である．

$\boldsymbol{C}^{2n} = \operatorname{Im} T_{(A-\lambda E_{2n})^n} + \operatorname{Im} T_{(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n}$ は $2n$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n, \bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \bar{\boldsymbol{v}}_n$ で生成されるため, これらは $\boldsymbol{C}^{2n}$ の基底である

(3) $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{w}_{2k-1} + i\boldsymbol{w}_{2k}$, $\bar{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{w}_{2k-1} - i\boldsymbol{w}_{2k}$ だから $\lambda = a + bi$ $(a, b \in \boldsymbol{R})$ とおけば

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{w}_j &= \begin{cases} \frac{1}{2}(A\boldsymbol{v}_k + A\bar{\boldsymbol{v}}_k) & j = 2k-1\ (k = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{1}{2i}(A\boldsymbol{v}_k - A\bar{\boldsymbol{v}}_k) & j = 2k\ (k = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda\boldsymbol{v}_1 + \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}_1) & j = 1 \\ \frac{1}{2i}(\lambda\boldsymbol{v}_1 - \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}_1) & j = 2 \\ \frac{1}{2}(\lambda\boldsymbol{v}_k + \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}_k + \boldsymbol{v}_{k-1} + \bar{\boldsymbol{v}}_{k-1}) & j = 2k-1\ (k = 2, 3, \dots, n) \\ \frac{1}{2i}(\lambda\boldsymbol{v}_k - \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}_k + \boldsymbol{v}_{k-1} - \bar{\boldsymbol{v}}_{k-1}) & j = 2k\ (k = 2, 3, \dots, n) \end{cases} \\
&= \begin{cases} a\boldsymbol{w}_1 - b\boldsymbol{w}_2 & j = 1 \\ b\boldsymbol{w}_1 + a\boldsymbol{w}_2 & j = 2 \\ a\boldsymbol{w}_{2k-1} - b\boldsymbol{w}_{2k} + \boldsymbol{w}_{2k-3} & j = 2k-1\ (k = 2, 3, \dots, n) \\ b\boldsymbol{w}_{2k-1} + a\boldsymbol{w}_{2k} + \boldsymbol{w}_{2k-2} & j = 2k\ (k = 2, 3, \dots, n) \end{cases}
\end{aligned}
$$

が得られる. 従って $\lambda = a + bi \in \boldsymbol{C}$ $(a, b \in \boldsymbol{R})$ に対して $M(\lambda) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ とおけば, 上式から $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_{2n}]$ に関する $f$ の表現行列は次のような $2n$ 次正方行列になる.

$$
\begin{pmatrix} M(\lambda) & E_2 & & & \text{\huge 0} \\ & M(\lambda) & E_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & E_2 \\ & & & & M(\lambda) \end{pmatrix}
$$