数理科学 I　問題・解説集　　　理科一類 37 組

～はじめに～

数理科学 I(微積続論,ベクトル解析)の問題及び解説集です.各章の始めに必要な定理・事実等を羅列し,その後に問題を配置してあります.

少しずつ更新していく予定です.現在 15 ページ.

第 1 章　多変数の微分法

(この範囲に関しては,一学期に小澤登高先生の数学 IA で既に習っています.「数学 IA 講義ノート No.3」参照)

§1.1 陰関数定理

__定理 1.1.1(陰関数定理,その 1)__ $f(x,y)$はC^1-級,点$(a,b)\in\mathbb{R}^2$において$f(a,b)=0$, $f_y(a,b)\neq 0$とする.このとき,$x=a$の周りで定義されたC^1-級関数$y=\varphi(x)$がただ 1 つ存在して

(i)　$f\left(x,\varphi(x)\right)\equiv 0$

(ii)　$\varphi(a)=b$　　　を満たす.更に

(iii)　$\varphi'(x)=-\dfrac{f_x\left(x,\varphi(x)\right)}{f_y\left(x,\varphi(x)\right)}$　　と書ける.

★$f_y(a,b)=0$となるのは,$f(x,y)=0$のグラフにおいて,接線がy軸と平行になる点,または曲線が自己交差している点です.この定理で特に重要なのは(iii)で,このことは直感的には次のように説明できます:

$f(x,y)=0(y=\varphi(x))$の両辺をxで微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=f_x+f_y\varphi'(x)=0\quad\therefore\varphi'(x)=-\frac{f_x}{f_y}.$$

__定理$1.1.1'$(陰関数定理,その 2)__ $f(x,y)$はC^1-級,点$(a,b)\in\mathbb{R}^2$において$f(a,b)=0$, $f_x(a,b)\neq 0$とする.このとき,$y=b$の周りで定義されたC^1-級関数$x=\psi(y)$がただ 1 つ存在して

(i)　$f(\psi(y),y)\equiv 0$

(ii)　$\psi(b)=a$　　　を満たす.更に

(iii)　$\psi'(y)=-\dfrac{f_y(\psi(y),y)}{f_x(\psi(y),y)}$　　と書ける.

★$f_x(a,b)=0$となるのは,接線がx軸と平行になる点,または曲線が自己交差している点です.

__定理 1.1.2(陰関数定理,その 3)__ $f(x,y)$はC^1-級,$C=\{(x,y)|f(x,y)=0\}$は曲線であるとする.点$(a,b)\in C$において,$f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$の少なくとも一方が 0 でないならば,(a,b)での接線の方程式は次で与えられる:

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=0.$$

★$f_x(a,b), f_y(a,b)$が共に 0 となるのは,曲線が自己交差している点です.また,接線の方程式が上の式で与えられることは,法線ベクトルが

$$\begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix}$$

となることと同値です.

<u>**定理 1.1.3(陰関数定理,一般多変数)**</u> $(x,y)=(x_1,\cdots,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1}$,$f(x,y)$を$C^1$-級関数とする.点$(a,b)\in\mathbb{R}^{n+1}$において$f(a,b)=0$, $f_y(a,b)\neq 0$とする.このとき,$x=a\in\mathbb{R}^n$の周りで定義されたC^1-級関数$y=\varphi(x)$がただ 1 つ存在して

(i) $f\big(x,\varphi(x)\big)\equiv 0$

(ii) $\varphi(a)=b$ を満たす.更に

(iii) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}=-\dfrac{f_{x_i}\big(x,\varphi(x)\big)}{f_y\big(x,\varphi(x)\big)}$ と書ける.

Ex1.1.1 曲線$f(x,y)=3x^3+2x^2-y^2=0$上の点(2,6)における接線の方程式を求めよ.

Ex1.1.2 曲面$f(x,y,z)=2x^2z+xyz+2yz^2-y^3=0$上の点$(1,2,-2)$における接平面の方程式を求めよ.

Ex1.1.3 $x^2+y^2+z^2=1$, $5x+y-2z=3$のとき,$z\neq-2y$を満たす点(x,y,z)において$\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$を求めよ.

§1.2 逆関数定理

<u>**定理 1.2.1 (逆関数定理)**</u> $y=f(x)$はC^1-級とする.$f'(a)\neq 0$ならば,$y=f(a)$の周りで定義されたC^1-級関数$x=g(y)$がただ 1 つ存在して,$y=f\big(g(y)\big)$であって,$y=f(a)$の周りで次が成り立つ:

$$g'(y)=\frac{1}{f'\big(g(y)\big)}.$$

Ex1.2.1 2 変数関数$F(x,y)=f(x)-y$に対して陰関数定理を適用することにより,逆関数定理(定理 1.2.1)を示せ.

Ex1.2.2 $x=u^2-v^2$, $y=uv$, $z=u^2+v^2\big((u,v)\neq(0,0)\big)$のとき,$\frac{dz}{dx},\frac{dz}{dy}$を求めよ.

§1.3 条件付き最大・最小問題

<u>定理 1.3.1(Lagrange の未定乗数法)</u> $D \subset \mathbb{R}^2$を有界閉領域,$f(x,y), \varphi(x,y)$をD上のC^1-級関数,$\lambda \subset \mathbb{R}$をパラメータとして,$F(x,y,\lambda) = xy + \lambda\varphi(x,y)$とおく.条件$\varphi(x,y)=0$の下で,$f(x,y)$の最大値・最小値を与える点は,次の(i)~(iii)のいずれかである:

$C = \{(x,y) \in D | \varphi(x,y) = 0\}$とおく.

(i) Dの境界とCとの共有点

(ii) Cの特異点,つまり$\varphi_x(x,y) = \varphi_y(x,y) = 0$となる点$(x,y) \in C$

(iii) x, y, λを未知数とする連立方程式

$$F_x(x,y,\lambda) = 0 \,, F_y(x,y,\lambda) = 0 \,, \varphi(x,y) = 0$$

の解を与える点.

いくつか重要な注意です.

(1) 上記(i)~(iii)は必要条件であって,十分条件とは限らない.従って,得られた候補を比較して最大・最小を与える点を最終的に決定する.

(2) 定理の証明の中で,有界閉領域$D \subset \mathbb{R}^2$の存在がfの最大値・最小値の存在を保証する役割を果たしているため,問題で特に設定されていない場合には自分で有界閉領域を準備する必要がある.

(3) 定理の証明の中で,$\varphi(x,y)$に対して陰関数定理(定理 1.1.1 ないし1.1.1$'$)を用いる都合上,上記(i)あるいは(ii)の条件は別途扱う必要がある.

Ex1.3.1 $\varphi = 0$の下で,fの最大値・最小値をそれぞれ求めよ.

(1) $f(x,y) = xy,$　　$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

(2) $f(x,y) = x^3 + y^3,$　　$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

(3) $f(x,y) = xy,$　　$\varphi(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

(4) $f(x,y) = x^3 + 2y^3,$　　$\varphi(x,y) = x^4 + y^4 - 1$

(5) $f(x,y,z) = xy + \frac{z}{2},$　　$\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

(6) $f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 2zx,$　　$\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

Ex1.3.2 体積が一定の直方体の内,表面積が最小となるものは何か.

Ex1.3.3 2 つの曲面$x + 2y + z = 10 \,, z = x^2 + y^2$の交わり上の点の内,原点と最も距離の近いものを求めよ.

付録 問題の解説

(Ex1.1.1)

$$f_x(x,y) = 9x^2 + 4x \quad , \quad f_y(x,y) = -2y.$$

従って,$f(x,y) = 0$上の点$(2,6)$における接線の方程式は

$$44(x-2) - 12(y-6) = 0$$
$$\therefore 11x - 3y - 4 = 0.$$

(Ex1.1.2) (接平面の方程式も,接線と同様に計算できます)

$$f_x(x,y,z) = 4xz + yz \quad , \quad f_y(x,y,z) = xz + 2z^2 - 3y^2 \quad , \quad f_z(x,y,z) = 2x^2 + xy + 4yz.$$

従って,$f(x,y,z) = 0$上の点$(1,2,-2)$における接平面の方程式は

$$-12(x-1) - 6(y-2) - 12(z+2) = 0$$
$$\therefore 2x + y + 2z = 0.$$

(Ex1.1.3)

y,zをxの関数とみなせると仮定し,$x^2+y^2+z^2 = 1$,$5x + y - 2z = 3$をそれぞれxで微分すると

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2z\frac{dz}{dx} = 0 \quad , \quad 5 + \frac{dy}{dx} - 2\frac{dz}{dx} = 0.$$

これらを$\frac{dy}{dx}$,$\frac{dz}{dx}$に関する連立方程式として解けば

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+5z}{2y+z} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = \frac{-x+5y}{2y+z}$$

を得る(問題の条件$z \neq -2y$より,これらは確かに意味を持つ).

(Ex1.2.1)

$F(x,y) = f(x) - y$はC^1-級であって,

$$F_x(x,y) = f'(x) \quad , \quad F_y(x,y) = -1.$$

陰関数定理より,$y = f(a)$の周りで定義されたC^1-級関数$x = g(y)$がただ 1 つ存在して

$$F(g(y),y) = f\big(g(y)\big) - y \equiv 0$$

が成り立ち,更に

$$g'(y) = -\frac{F_y(g(y),y)}{F_x(g(y),y)} = \frac{1}{f'\big(g(y)\big)}.$$

(Ex1.2.2) (試験範囲外かも…)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{bmatrix}.$$

ここで

$$\det \begin{bmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{bmatrix} = 2(u^2+v^2) \neq 0 \ (\because (u,v) \neq (0,0))$$

であるから,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{bmatrix}^{-1} = [2u \quad 2v] \left(\frac{1}{2(u^2+v^2)} \begin{bmatrix} u & 2v \\ -v & 2u \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} & \frac{4uv}{u^2+v^2} \end{bmatrix}.$$

(Ex1.3.1) (計算をバカ丁寧にやっています)

(1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -2 \leq x, y \leq 2\}$とする.このとき$D$の境界と曲線$\varphi(x,y) = 0$は共有点を持たない.また,

$$\varphi_x(x,y) = 2x \quad , \quad \varphi_y(x,y) = 2y$$

$\varphi_x = \varphi_y = 0$とすると$(x,y) = (0,0)$となるが,これは$\varphi = 0$上の点ではない.

であって,曲線$\varphi(x,y) = 0$上には特異点は存在しない.従って

$$F(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2+y^2-1)$$

とおくと,Lagrange の未定乗数法より,$f(x,y)$の最大・最小を与える点は,x, y, λを未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} F_x = y + 2\lambda x = 0 & \text{(A.1)} \\ F_y = x + 2\lambda y = 0 & \text{(A.2)} \\ \varphi = x^2 + y^2 - 1 = 0 & \text{(A.3)} \end{cases}$$

の解を与える点である. $\lambda = 0$とすると,(A.1),(A.2)式より$(x,y) = (0,0)$となるが,これは(A.3)式に反する.従って$\lambda \neq 0$であるから,(A.1),(A.2)式より

$$y \cdot 2y = x \cdot 2x \iff y^2 = x^2 \iff y = \pm x.$$

(A1) $\iff y = -2\lambda x$

(A2) $\iff -2\lambda y = x$

$\therefore y(-2\lambda y) = x(-2\lambda x)$

この等式の両辺を$-\lambda \neq 0$で割る.

これを(A.3)式に代入して

$$2x^2 - 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

以上より,次の 4 組の解が得られた:

$$(x,y,\lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right).$$

各点での$f(x,y)$の値は,順に

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$$

従って

　最大値:　$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$

　最小値:　$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}.$

(2) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\leq x,y\leq 2\}$とする.このとき$D$の境界と曲線$\varphi(x,y)=0$は共有点を持たない.また,

$$\varphi_x(x,y)=2x \quad , \quad \varphi_y(x,y)=2y$$

であって,曲線$\varphi(x,y)=0$上には特異点は存在しない.従って

$$F(x,y,\lambda)=x^3+y^3+\lambda(x^2+y^2-1)$$

とおくと,Lagrange の未定乗数法より,$f(x,y)$の最大・最小を与える点は,x,y,λを未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} F_x = 3x^2+2\lambda x=0 & \text{(A.4)} \\ F_y = 3y^2+2\lambda y=0 & \text{(A.5)} \\ \varphi = x^2+y^2-1=0 & \text{(A.6)} \end{cases}$$

の解を与える点である.$\lambda=0$とすると,(A.4),(A.5)式より$(x,y)=(0,0)$となるが,これは(A.3)式に反する.従って$\lambda\neq 0$であるから,(A.4),(A.5)式より

$$3x^2\cdot 2y=3y^2\cdot 2x \iff x^2y=y^2x \iff xy(x-y)$$

$$\therefore x=0 \text{ または } y=0 \text{ または } x=y.$$

$x=0$とすると,(A.6)式より

$$y^2-1=0$$

$$\therefore y=\pm 1.$$

同様に$y=0$のとき$x=\pm 1$.$y=x$のとき,(A.6)式より

$$2y^2-1=0$$

$$\therefore y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

以上より,次の 6 組の解が得られた:

$$(x,y,\lambda)=\left(0,1,-\frac{3}{2}\right),\left(0,-1,\frac{3}{2}\right),\left(1,0,-\frac{3}{2}\right),\left(-1,0,\frac{3}{2}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}}\right).$$

各点での$f(x,y)$の値は,順に

$$1,-1,1,-1,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

従って

　最大値:　$f(0,1)=f(1,0)=1$

　最小値:　$f(0,-1)=f(-1,0)=-1.$

(3) Rを十分大きくとって$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | -R\le x,y\le R\}$とする.このとき

$$\varphi_x(x,y)=3x^2-3y \quad , \quad \varphi_y(x,y)=3y^2-3x.$$

$\varphi_x(x,y)=\varphi_y(x,y)=0$を解くと

$$(x,y)=(0,0),(1,1).$$

$y=x^2, y^2-x=0$ より

$y^2-x=x^4-x=x(x^3-1)=0$

よって,曲線$\varphi(x,y)=0$上には特異点(0,0)が存在する.さて,

$$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^3+y^3-3xy)$$

とおき,x,y,λを未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} F_x=y+3\lambda(x^2-y)=0 & \text{(A.7)} \\ F_y=x+3\lambda(y^2-x)=0 & \text{(A.8)} \\ \varphi=x^3+y^3-3xy=0 & \text{(A.9)} \end{cases}$$

を考える.$\lambda=0$のとき,(A.7),(A.8)式より$(x,y)=(0,0)$が得られ,これは(A.9)式を満たす.
$\lambda\ne0$のとき,(A.7),(A.8)式より

$$y(y^2-x)=x(x^2-y) \Leftrightarrow y^3=x^3 \Leftrightarrow y=x.$$

(A.9)式に代入して

$$2x^3-3x^2=x^2(2x-3)=0$$

$$\therefore x=0,\frac{3}{2}.$$

以上より,次の 2 組の解が得られた:

$$(x,y,\lambda)=(0,0,\text{任意}),\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{2}{3}\right).$$

各点での$f(x,y)$の値は,順に

$$0,\frac{9}{4}.$$

また,特異点(0,0)において$f(x,y)=0$であり,Dの境界と曲線$\varphi(x,y)=0$との共有点については$R\to\infty$とすると,$x\to\pm\infty, y\to\mp\infty$であるから$f(x,y)\to-\infty$.
従って

最大値: $f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$

最小値: なし.

(4) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | -2\le x,y\le 2\}$とする.このとき$D$の境界と曲線$\varphi(x,y)=0$は共有点を持たない.また,

$$\varphi_x(x,y)=4x^3 \quad , \quad \varphi_y(x,y)=4y^3$$

であって,曲線$\varphi(x,y)=0$上には特異点は存在しない.従って

$$F(x,y,\lambda)=x^3+2y^3+\lambda(x^4+y^4-1)$$

とおくと,Lagrange の未定乗数法より,$f(x,y)$の最大・最小を与える点は,x,y,λを未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} F_x = 3x^2 + 4\lambda x^3 = 0 & \text{(A.10)} \\ F_y = 6y^2 + 4\lambda y^3 = 0 & \text{(A.11)} \\ \varphi = x^4 + y^4 - 1 = 0 & \text{(A.12)} \end{cases}$$

の解を与える点である.$\lambda = 0$とすると,(A.10),(A.11)式より$(x,y) = (0,0)$となるが,これは(A.12)式に反する.従って$\lambda \neq 0$であるから,(A.10),(A.11)式より

$$3x^2 \cdot 4y^3 = 6y^2 \cdot 4x^3 \iff x^2y^3 = 2y^2x^3 \iff x^2y^2(y-2x) = 0.$$

$$\therefore x = 0 \text{ または} y = 0 \text{ または } y = 2x$$

$x = 0$とすると,(A.12)式より

$$y^4 - 1 = 0$$

$$\therefore y = \pm 1.$$

同様に$y = 0$のとき$x = \pm 1$.次に$y = 2x$のとき,(A.12)式に代入して

$$17x^4 - 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{17}}.$$

以上より,次の 6 組の解が得られた:

(x,y,λ)

$$= \left(0,1,-\frac{3}{2}\right), \left(0,-1,\frac{3}{2}\right), \left(1,0,-\frac{3}{4}\right), \left(-1,0,\frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{17}},\frac{2}{\sqrt[4]{17}},-\frac{3}{4}\sqrt[4]{17}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{17}},-\frac{2}{\sqrt[4]{17}},\frac{3}{4}\sqrt[4]{17}\right).$$

各点での$f(x,y)$の値は,順に

$$2, -2, 1, -1, \sqrt[4]{17}, -\sqrt[4]{17}.$$

従って

最大値: $f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{17}},\frac{2}{\sqrt[4]{17}}\right) = \sqrt[4]{17}$

最小値: $f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{17}},-\frac{2}{\sqrt[4]{17}}\right) = -\sqrt[4]{17}.$

(5) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -2 \leq x,y,z \leq 2\}$とする.このとき$D$の境界と曲線$\varphi(x,y,z) = 0$は共有点を持たない.また,

$$\varphi_x(x,y,z) = 2x \quad , \quad \varphi_y(x,y,z) = 2y \quad , \quad \varphi_z(x,y,z) = 2z$$

であって,曲線$\varphi(x,y,z) = 0$上には特異点は存在しない.従って

$$F(x,y,\lambda) = xy + \frac{z}{2} + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

とおくと,Lagrange の未定乗数法より,$f(x,y,z)$の最大・最小を与える点は,x,y,z,λを未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} F_x = y + 2\lambda x = 0 & \text{(A.13)} \\ F_y = x + 2\lambda y = 0 & \text{(A.14)} \\ F_y = \dfrac{1}{2} + 2\lambda z = 0 & \text{(A.15)} \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & \text{(A.16)} \end{cases}$$

の解を与える点である.$\lambda = 0$は(A.15)式に反するから$\lambda \neq 0$.よって,(A.13),(A.14)式より

$$y \cdot 2y = x \cdot 2x \iff y^2 = x^2 \iff y = \pm x.$$

(A.13),(A.15)式より,$y = \pm x$に対して$\lambda = \mp\frac{1}{2}, z = \pm\frac{1}{2}$.これらを(A.16)に代入して

$$2x^2 - \frac{3}{4} = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

以上より,次の 4 組の解が得られた:

$$(x, y, z, \lambda)$$

$$= \left(\sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\sqrt{\frac{3}{8}}, -\sqrt{\frac{3}{8}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\sqrt{\frac{3}{8}}, -\sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{3}{8}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

各点での$f(x, y, z)$の値は,順に

$$\frac{5}{8}, -\frac{5}{8}, \frac{5}{8}, -\frac{5}{8}.$$

従って

最大値: $f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}, \pm\sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

最小値: $f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}, \mp\sqrt{\frac{3}{8}}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$

(6) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -2 \leq x, y, z \leq 2\}$とする.このとき$D$の境界と曲線$\varphi(x, y, z) = 0$は共有点を持たない.また,

$$\varphi_x(x, y, z) = 2x \quad , \quad \varphi_y(x, y, z) = 2y \quad , \quad \varphi_z(x, y, z) = 2z$$

であって,曲線$\varphi(x, y, z) = 0$上には特異点は存在しない.従って

$$F(x, y, \lambda) = x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 2zx + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

とおくと,Lagrange の未定乗数法より,$f(x, y, z)$の最大・最小を与える点は,x, y, z, λを未知数とする連立方程式

$$
\begin{cases}
F_x = 2x + 4y - 2z + 2\lambda x = 0 & \text{(A.17)} \\
F_y = 4x - 4y + 4z + 2\lambda y = 0 & \text{(A.18)} \\
F_z = -2x + 4y + 2z + 2\lambda z = 0 & \text{(A.19)} \\
\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & \text{(A.20)}
\end{cases}
$$

の解を与える点である.(A.17)~(A.19)式より

$$
\begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-2 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

となるが,(A.20)式より$(x,y,z) \neq (0,0,0)$であるから,

$$
\det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-2 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda+1 \end{bmatrix} = 0
$$

が必要である.ここで

$$
\det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-2 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda+1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-2 & 2 \\ -\lambda-2 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} = (\lambda+2) \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= (\lambda+2) \det \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 4 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\lambda+2)(\lambda(\lambda-2)-8) = (\lambda+2)^2(\lambda-4)
$$

$$
\therefore \lambda = -2,4.
$$

$\lambda = -2$について

$$
\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{r}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{s}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ (r^2 + s^2 = 1) \quad \left(\because \text{(A.20)式}\right).
$$

$\lambda = 4$について

$$
\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \left(\because \text{(A.20)式}\right).
$$

以上より,次の 2 組の解が得られた:

$$
(x,y,z,\lambda) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{3}}, -2\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 4\right).
$$

ここで

$$
f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \left(-\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = -\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = -\lambda
$$

であるから,各点での$f(x,y,z)$の値は,順に

$$
2, -4.
$$

従って

最大値: $f\left(\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{3}}\right) = 2 \ (r^2 + s^2 = 1)$

最小値: $f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -4.$

★とりあえず「Lagrange の未定乗数法」を使った解法を書いてみましたが,媒介変数表示を用いて処理することもできます.2 つの例を示します:

(1) $x^2+y^2=1$より,$\theta\in[0,2\pi)$を用いて

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$$

とおける.このとき

$$f(x,y)=xy=\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

∴最大値: $\frac{1}{2}\left(\theta=\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi,\text{つまり}(x,y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

最小値: $-\frac{1}{2}\left(\theta=\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi,\text{つまり}(x,y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$.

(3) $x^3+y^3-3xy=0$より,$t(\neq -1)$を用いて

$$\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

とおける(cf.Descartes の葉形).このとき

$$f(x,y)=xy=\frac{9t^3}{(1+t^3)^2}$$

右辺を$g(t)$とおくと,$g(t)\to-\infty\ (t\to-1)$であるから,最小値は存在しない.次に最大値だが,$t>0\iff g(t)>0$より$t>0$の範囲のみ考える.相加相乗不等式より

$$g(t)=\frac{9}{\left(t^{\frac{3}{2}}+t^{-\frac{3}{2}}\right)^2}\leq\frac{9}{\left(2\sqrt{t^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{3}{2}}}\right)^2}=\frac{9}{4}\left(\text{等号成立条件}:t^{\frac{3}{2}}=t^{-\frac{3}{2}}\iff t=1\right)$$

∴最大値: $\frac{9}{4}\left(t=1,\text{つまり}(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\right)$

最小値: なし.

(Ex1.3.2)

直方体の各辺の長さを$x,y,z(>0)$とし,体積は$V(>0)$で一定とする.ここで

$$S(x,y,z)=2(xy+yz+zx)\quad,\quad f(x,y,z)=xyz-V$$

とおくと,$f(x,y,z)=0$の条件下で$S(x,y,z)$を最小にするx,y,zを求めればよい.

さて,Rを十分大きくとって$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|0\leq x,y,z\leq R\}$とする.このとき

$$f_x(x,y,z)=yz\quad,\quad f_y(x,y,z)=zx\quad,\quad f_z(x,y,z)=xy.$$

$f_x = f_y = f_z = 0$のとき$f(x,y,z) = -V < 0$であるから,曲線$f(x,y,z) = 0$上に特異点は存在しない.
次にDの境界と曲線$f = 0$との共有点を考える.$xyz = 0$となる場合は$f(x,y,z) = -V < 0$となり不適だから,$x,y,z \neq 0$とする.たとえば$x = R$となる点では

$$S(x,y,z) = 2(Ry + yz + zR) \to \infty \ (R \to \infty).$$

同様に$y = R$あるいは$z = R$となる点でも$S(x,y,z) \to \infty$となる.
従って

$$F(x,y,\lambda) = 2(xy + yz + zx) + \lambda(xyz - V)$$

とおくと,Lagrange の未定乗数法より,$S(x,y,z)$の最小を与える点は,x,y,z,λを未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} F_x = 2y + 2z + \lambda yz = 0 & \text{(A.21)} \\ F_y = 2z + 2x + \lambda zx = 0 & \text{(A.22)} \\ F_z = 2x + 2y + \lambda xy = 0 & \text{(A.23)} \\ f = xyz - V = 0 & \text{(A.24)} \end{cases}$$

の解を与える点である.(A.24)式より

$$yz = \frac{V}{x}$$

であるから,(A.21)式は

$$\frac{\lambda V}{2} = x(y + z).$$

同様に(A.22),(A.23)式からもそれぞれ

$$\frac{\lambda V}{2} = y(z + x) \quad , \quad \frac{\lambda V}{2} = z(x + y)$$

が得られるから

$$x(y + z) = y(z + x) = z(x + y)$$
$$\therefore x = y = z.$$

よって表面積Sが最小となるのは,立方体の場合である.

★3 変数の相加相乗不等式を用いて解くこともできます:
$xy, yz, zx > 0$より

$$S(x,y,z) = 2(xy + yz + zx) \geq 6\sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot zx} = 6(xyz)^{\frac{2}{3}} = 6V^{\frac{2}{3}}.$$

等号成立条件は

$$xy = yz = zx \iff x = y = z.$$

念のため,n変数相加相乗不等式の証明を載せておきます(この他にも,たとえば「対数関数の凸性」を利用したものがあります):

定理 A.1(相加相乗不等式) $n \geq 2$とする.$a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$に対し,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \tag{A25}$$

が成り立つ.ただし,等号成立条件は,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

である.

[証明] nに関する数学的帰納法で示す.

(i) $n = 2$のとき

$$a_1 + a_2 \geqq 2\sqrt{a_1 a_2}$$

を示せばよい.

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = \left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geqq 0$$

よって(A.25)式は成り立ち,等号成立条件は,

$$a_1 = a_2$$

である.

(ii) (A.25)式において,両辺を$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}(> 0)$で割ることにより,始めから$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 1$と仮定してよい.

すなわち, $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$の下で

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq n \tag{A.26}$$

を示せばよい.また,

$$0 < a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \tag{A.27}$$

としておく.

$n = k(\geqq 2)$のとき(A.26)式の成立を仮定して, $n = k + 1$のときを示す.

$$a_2 a_3 \cdots a_k (a_1 a_{k+1}) = 1$$

であるから,仮定より,

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_1 a_{k+1} \geqq k. \tag{A.28}$$

(A.27)式より$\mathrm{a}_1 \leqq 1, \mathrm{a}_{\mathrm{k}+1} \geqq 1$だから,

$$(a_1 - 1)(a_{k+1} - 1) \leqq 0$$

つまり

$$a_1 + a_{k+1} - a_1 a_{k+1} \geqq 1. \tag{A.29}$$

(A.28),(A.29)式を辺々足し合わせて,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} \geqq k + 1.$$

よって(A.26)式は成り立ち,等号成立条件は$a_1 = a_{k+1} = 1$,すなわち

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1} = 1$$

である.

(i),(ii)より,$\forall_{n \geqq 2}$で(A.25)式が成り立つ.　(Q.E.D.)

(Ex1.3.3) (制約が 2 つある場合の Lagrange 未定乗数法です.試験範囲外?)

$$d^2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2\ ,f(x,y,z) = x+2y+z-10\ ,g(x,y,z) = x^2+y^2-z$$

とおき,$f=g=0$の条件下でd^2を最小にする点(x,y,z)を求めればよい.

$g=0$から得られる$z=x^2+y^2$を$f=0$に代入して

$$x+2y+x^2+y^2-10=0 \iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{45}{4}.$$

よって,たとえば$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid |x|\le 4, |y|\le 5, 0\le z\le 41\}$とすれば,$D$の境界と曲線$f=g=0$は共有点を持たない.また,写像

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & D\subset\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & \big(f(x,y,z), g(x,y,z)\big) \end{array}$$

のヤコビ行列

これまでの「特異点」の議論に相当

$$d\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2x & 2y & -1 \end{bmatrix}$$

の階数が 2 より小さくなるのは$x=-\frac{1}{2}, y=-1$のときであるが,これは$f=g=0$に反する.

従って

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x+2y+z-10)+\mu(x^2+y^2-z)$$

とおくと,Lagrange の未定乗数法より,$d^2(x,y,z)$の最小を与える点は,x,y,z,λ,μを未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} F_x = 2x+\lambda+2\mu x=0 & \text{(A.30)} \\ F_y = 2y+2\lambda+2\mu y=0 & \text{(A.31)} \\ F_z = 2z+\lambda-\mu=0 & \text{(A.32)} \\ f = x+2y+z-10=0 & \text{(A.33)} \\ g = x^2+y^2-z=0 & \text{(A.34)} \end{cases}$$

の解を与える点である.$(\mathrm{A.30})\times 2-(\mathrm{A.31})$より

$$(4x-2y)(1+\mu)=0$$

$$\therefore y=2x \text{ または } \mu=-1.$$

$y=2x$のとき,(A.33),(A.34)式より

$$z=-5x+10\quad,\quad z=5x^2$$

$$\therefore x=1,-2.$$

次に$\mu=-1$とすると,(A.30)式より$\lambda=0$であるから,(A.32)式によって$z=-\frac{1}{2}$を得る.しかし,これは$z=x^2+y^2>0$に反する.

以上より,次の 2 組の解が得られた:

$$(x,y,z,\lambda,\mu) = \left(1,2,5,-\frac{22}{3},\frac{8}{3}\right), \left(-2,-4,20,-\frac{164}{3},-\frac{44}{3}\right).$$

各点での$d^2(x, y, z)$の値は,順に

$$30\,,420.$$

従って,求める点は(1,2,5)である.