

電磁気学基礎

2019 年 2 月 6 日 版

高橋 和孝

東京工業大学

電磁気学基礎

高橋 和孝

(C) Kazutaka Takahashi 2019

はじめに

本講義ノートは電磁気学についての入門書である。理工系の全ての1年次生を対象としている。

講義の目的や方針については第1章に記述してある。そこでも述べたが、本講義ノートは世の中にたくさんある電磁気学の教科書のように読みやすさ、簡単さを目指すことはせず、電磁気学、物理学の考え方がどういうものであるかを議論しながら進む。物理学が何を指しているという記述の仕方をするべきかというのは決して自明ではないが、そこどころの説明をとばしていることが初学者にとって物理は難しいと思われる原因ではないかと思う。そこをクリアすればややこしい計算など大した問題ではない。公式を羅列するだけのよう記述を避けて、じっくりと読み込んで考えてもらえるようなものを目指した。

当初考えたような意図が達成されているとは決して思わないので、今後機会があれば改訂していきたい。

要求される基本的な知識は、力学および微分・積分である。といっても必要な知識はできるだけ解説しているのでもまずは読んでみて理解できないところは必要に応じて自身で補足すればよい。

電磁気学以外に本書を読むことで身につく知識はベクトル解析である。勾配や発散・回転といった概念を理解するのに電磁気学は格好の例である。筆者自身もそうであるが、物理を専攻する多くのひとは電磁気学を通してこれらの概念を身につけている。

本講義ノートは東工大理学部1年生(2015年度後期)、同理工系1年生(2017年度後期、2018年度後期)に向けて行った講義を元に作成されている。それぞれの講義で講義ノートを配布したが、講義後に実際に講義で行った内容を反映させたのがこの版である。

これまでにいろいろな質問、コメントや批評をもらった。また、レポートや試験の採点をするところいろいろ思うところがあった。本改訂版ではそれらをかなり反映させている。ありがとうございます。

2019年2月

高橋 和孝

目次

第 1 章 概論	1
1.1 何を理解するべきか？	1
1.2 どのように理解するべきか？	3
1.3 電磁気学の法則	4
1.4 参考書	7
1.5 構成	8
第 I 部 静電場	11
第 2 章 Coulomb 力と電場	13
2.1 万有引力の法則	13
2.2 Coulomb 力	17
2.3 電場	21
2.3.1 定義	21
2.3.2 例	22
2.4 [補遺] 座標系の表現	28
2.5 まとめと考察	31
2.6 問題	33
第 3 章 Gauss の法則	36
3.1 流束	36
3.1.1 電気力線	36
3.1.2 電気力束	36
3.2 Gauss の法則の積分形	38
3.2.1 Gauss の法則	38
3.2.2 立体角	38
3.2.3 領域の変形	39
3.3 Gauss の法則の応用	40
3.4 Gauss の法則の微分形	43
3.5 Gauss の定理	46
3.6 [補遺] 内積と外積	46
3.7 まとめと考察	48
3.8 問題	50
第 4 章 電場と電位	53
4.1 仕事と電位	53
4.2 電場と電位	55

4.3	電位の性質	56
4.4	まとめと考察	58
4.5	問題	59
第 5 章	静電場の法則	61
5.1	渦なしの法則	61
5.1.1	積分形	61
5.1.2	微分形	61
5.2	Stokes の定理	62
5.3	静電場の基本法則	63
5.4	Poisson 方程式*	64
5.5	[補遺] Poisson 方程式の一意性**	65
5.6	[補遺] 点電荷の表現**	65
5.7	まとめと考察	67
5.8	問題	67
第 6 章	静電場の応用	69
6.1	導体	69
6.1.1	静電誘導	69
6.1.2	静電遮蔽	71
6.2	鏡像法	72
6.3	コンデンサー	73
6.4	電気双極子	75
6.5	Cavendish の実験**	77
6.6	まとめと考察	79
6.7	問題	81
第 II 部	電流と静磁場	83
第 7 章	電流	85
7.1	電流	85
7.1.1	電流と連続の方程式	85
7.1.2	定常電流	87
7.2	Ohm の法則	88
7.2.1	Ohm の法則の微分形	88
7.2.2	Ohm の法則と静電場の法則	89
7.3	まとめと考察	90
7.4	問題	93
第 8 章	磁場	95
8.1	Ampère 力	95
8.1.1	電気と磁気	95
8.1.2	Ampère 力	95
8.1.3	電荷と電流の単位	96

8.2	静磁場	97
8.3	Biot-Savart の法則	98
8.4	例	98
8.5	Lorentz 力	99
8.5.1	Lorentz 力	99
8.5.2	電荷の運動	100
8.6	まとめと考察	102
8.7	問題	104
第 9 章	静磁場の法則	106
9.1	静磁場の基本法則	106
9.1.1	Gauss の法則	106
9.1.2	Ampère の法則	107
9.2	ベクトルポテンシャル*	108
9.2.1	ベクトルポテンシャルの導入*	108
9.2.2	ゲージ不変性**	110
9.3	まとめと考察	111
9.4	問題	112
第 10 章	磁気モーメント	114
10.1	磁気双極子	114
10.2	磁気に関する Coulomb の法則	115
10.3	磁石とソレノイド	117
10.4	まとめと考察	117
10.5	問題	118
第 III 部	電磁場	121
第 11 章	電磁誘導	123
11.1	磁場と起電力	123
11.1.1	動く導線に生じる起電力	123
11.1.2	磁束と起電力	124
11.2	電磁誘導の法則	125
11.2.1	電磁誘導	125
11.2.2	電磁誘導の法則の一般化	125
11.3	まとめと考察	126
11.4	問題	127
第 12 章	Maxwell 方程式	129
12.1	変位電流	129
12.1.1	静電磁場の法則の拡張	129
12.1.2	変位電流の役割	130
12.2	Maxwell 方程式	131
12.3	電磁場のエネルギー	135

12.4 電磁ポテンシャルとゲージ変換**	137
12.5 まとめと考察	139
12.6 問題	141
第 13 章 電磁波	143
13.1 波動方程式	143
13.1.1 平面波	143
13.1.2 一般的性質	145
13.2 電磁場の伝搬**	147
13.2.1 遅延ポテンシャル	147
13.2.2 直線電流	148
13.3 まとめと考察	151
13.4 問題	152
第 14 章 おわりに	153
14.1 やったこと・やり残したこと	153
14.2 電磁気学の応用	154
14.3 電磁気学の理論の発展	155
14.3.1 相対性理論	155
14.3.2 波と粒子の二重性	155
14.3.3 場の理論	156
付録 A 試験問題 (1)	157
付録 B 試験問題 (2)	158
付録 C 試験問題 (3)	159
付録 D 試験問題 (4)	160
付録 E 試験問題 (5)	161
付録 F 試験問題 (6)	162

第1章 概論

本章では、電磁気学にとらわれない物理学の見方や考え方について議論し、物理学の全体像を概観する。本講義で扱う電磁気学はいわゆる「古典物理学」に属する体系の一つであるが、これを理解することで物理学特有の考え方をかなりの部分身につけることができる。そして、何をどのようにとらえるか、理解するとはどういうことかという視点をもつことの重要性を述べる。電磁気学を履修する動機づけになることを期待している。

1.1 何を理解すべきか？

高校では「力学」・「熱」・「波」・「電磁気」・「原子」という分類で物理学の各論を学ぶ。そして理工系の大学教養課程では、高校時の科目から「原子」を除いた「力学」、「電磁気学」、「波動・光・熱」という3本立てで学ぶことが多い¹。これらはしばしば「古典物理学」とよばれている。古典に対比されるのは「現代物理学」であり、主に20世紀以降に発展してきた相対論や量子力学などを表している。高校と大学の教養課程では古典物理学が主要な課題となる。受講者の多くは高校物理を履修していると思われるが²、それで物理学を理解したと言ってよいだろうか？本講義では電磁気学をはじめからやり直すが、その必要性はどれだけあるだろうか？本章ではそれらについて少し述べたい。

古典としての電磁気学

古典・現代という分類にはいくつかの意義があるが、基本的には、文字通り昔のものと近年のものという意味である。物理学を学ぶにはまず古典物理学をよく理解することが求められる。それから現代物理学に進んでいくが、これには主に以下の三つの理由がある。

まず、古典物理学は身近な現象を対象としていてわかりやすいという理由である。物理学専攻者で力学、電磁気を扱っているときにいきいきとしていた学生が量子力学に入った途端、元気がなくなることがある。これはある程度無理もないことで、量子力学の体系は直観的に理解できるようなものではないからである³。そのため（だけではないが）、物理学科では古典物理学を抽象的にとらえる訓練をする。力学には解析力学とよばれる力学を抽象的に分析する分野があるし、本講義で扱う電磁気の理論も身近な現象を離れて抽象的な方程式を得ることを目指す。

二つめの理由は、古典物理学が現代物理学の確立後も引き続き有効な理論として生き残っていることである。20世紀はじめにEinsteinの相対性理論が発表されたとき、たいへんな反響をよび、Newtonは間違っていたという論調の記事も出たが、それは正しくない。Newton力学は今でも現象を高い精度で記述する体系として用いられている。電磁気学にしても同様である。現代の多くの技術が電磁気学によっていること

¹本来は三つめを「熱力学」としたいところだが、波動という概念を欠かすこともできないのであわせて学ぶことが多い。熱力学は独立して学ぶべきたいへん重要な概念であるのだが。

²履修していない方もいると思うが、以下で述べるようにそれは問題ではない。

³知らないもの・馴染みのないものに拒否反応を示すひとは多い（というか、それが普通である）。量子力学の理論は抽象的であるし、極微スケールの世界を対象とするから現象を想像しにくい。そういったものを乗り越えられるかどうか大学でのびるために必要な条件である。

は言うまでもない。GPSの技術に相対性理論の効果がとりいれられていることは有名であるが⁴、ほとんどの現象や技術は通常の古典電磁気学の枠内で説明できる⁵。要するに、適用範囲を間違えなければよいのである。

そして、最後に地味だが最も重要と思われる理由として、現代物理学といえども問題をどのように捉えるかという基本的なアプローチは古典物理学と全く変わらないという点を挙げたい。16世紀から17世紀にかけての科学革命は、科学をどのように記述するかについて決定的な手段を確立させた。Galilei、Newtonらの用いた手法は現代にも引き継がれているのである。現代物理学では、古典物理学で当然のものとして扱われていた概念がひっくりかえされ、はじめから考え直さねばならなくなったのであるが、現象を分析して法則化するという過程は同じである⁶。科学の手法については以下で引き続き議論したい。

量子電磁力学の理論について重要な貢献をしたR. P. Feynmanは、次のように述べている⁷。「人類の歴史という長い眼から、たとえば今から1万年後の世界から眺めたら、19世紀の一番顕著な事件がマクスウェルによる電磁気法則の発見であったと判断されることはほとんど間違いない」⁸。Feynmanは物理学者であるからひいき目に言っていると思うかもしれない。それは本講義を履修し終えてから判断してほしい。少なくとも、科学に興味のあるものであれば電磁気学がとりくむ価値のある体系であることは間違いない。

基礎としての電磁気学

本講義は教養科目の一つであり、物理学を専攻するとは限らない理系の学生を対象としている。電磁気学は理学部と工学部では興味の方向が異なっている。おおまかにいって、前者は抽象的、基礎的な理論、後者は応用的な現象に興味がある⁹。理学では原理を知りたいと思うし、工学では使えないと意味がない。電磁気学を必要としない分野もある。

本講義の目的は、電磁気のさまざまな現象についての知識を身につけることではないし、電磁気に関わるノウハウを学ぶことでもない。それらを基礎づける電磁気学の法則の意味を理解することが目的である。そもそも、2年次で各分野の課程に進めばそれぞれの分野の内容に対応した電磁気学の講義がある。物理学専攻では電磁気学はさらに三つの講義があるし、工学系では電気回路などさまざまな各論がある。それぞれの専攻にみあった内容はそこで扱う。ここでは電磁気学の体系の全体像をつかむことに集中する。遠回りに見えるかもしれないが、根本的な法則を理解しておくことと各論を理解しやすくなるだろう。

基礎を強調するが、決して応用を軽視しているのではない。上で述べたように応用は必要に応じて他の機会に扱うことになるし、基礎を理解しないで現象のみを学んでも体系化されていない知識の集積のみになってしまって身につかない¹⁰。言うまでもなく基礎を学ぶのは応用がきくからである。これはできそうだとかありえないとか判断することができるようになる¹¹。

具体的に何を理解すべきかは以下で述べる。本講義ノートではなるべく余計なものを排除して本質をつかむことに配慮する。もちろん何も無いところから何かを作ることはできないから、いくつかの実験事実は必要となる。実験事実や基本原理を元にしてその現象がどのように抽象化され法則としてまとまっていく

⁴ 全地球測位システム (Global Positioning System)。人工衛星を利用して現在位置を測定するシステム。カーナビなどに使われている。相対論の効果により微妙にずれるので補正している。

⁵ 実のところ、電磁気学は相対性理論と矛盾するものではなくむしろそれにあうようにつくられているのだが、それを理解するのは先のはなしである。

⁶ 今後も不変であるかどうかはわからない。人類の歴史全体からすれば400年程度の長さは短いとも言える。

⁷ 量子電磁力学は電磁気学と量子力学を融合した理論である。Feynmanは、1965年にこの業績でNobel物理学賞をJ. S. Schwinger、朝永振一郎とともに受賞している。

⁸ ファインマン物理学 III 岩波書店 1986年 宮島龍興訳。

⁹ と言うと語弊があるかもしれない。例外はいくらでもある。

¹⁰ そもそも基礎と応用という区分自体がはっきりとあるわけではない。現代の科学はあまりにも複雑に各論が入り乱れているので何がどこでどう役に立つかわからない。

¹¹ これは主観的なコメントかもしれないが、物理学を学ぶとそのような視点を徹底的に養成してくれる。個人的に高校物理はまったく面白いと思わなかったのだが、それは各論ばかりで体系化された世界をほとんど感じられなかったからである。

かを詳しく見ていきたい。そのようなところに物理学の面白さがあると思うからである。試行錯誤しながら法則をつくっていく過程を見ることも面白いが、講義ではそこまでする余裕はない。何の迷いも無く最小限の知識で法則をつくりあげることができるように見えるが、それは答えを知っているからであり、実際にはそのようにうまくいくわけではない¹²。また、物理学の法則がどのように応用されてどのように役に立つかという視点も別種の面白さがあると思うが、本講義ではそのようなことを議論するつもりはあまりない。講義終了後に、電磁気の法則とはどういうものか説明できるようになっていることが目標である。必ずしも式を用いなくてもよい。今後二度と電磁気学にふれる機会がないかもしれないが、そういうひとこそ、ここで電磁気の理論に触れてほしい。

物理学の法則がどのように形作られていくかを体験してほしい。法則が意味することを徹底的に考えてほしい。そのような過程では電磁気の現象に関連した「常識」や高校で身につけた知識は邪魔でさえある。

1.2 どのように理解するべきか？

近代科学の成立

近代科学としての物理学が確立したのは J. Kepler、G. Galilei、R. Descartes、I. Newton らが活躍した 16 世紀から 17 世紀にかけてのことである。Kepler は T. Brahe の残した膨大なデータから規則をよみとり、Galilei は自然現象を数学的に分析する手法を用い、Descartes はそのような方法論を明文化した。そして Newton が基本法則の提唱と同時に法則を記述するための強力な方法である微積分法を開発した。そういったアプローチは Aristotélès などのギリシア時代の学者が用いてきたものと決定的に異なっている。

力学の理論の成功は M. Faraday、J. C. Maxwell らによる電磁気学、N. L. S. Carnot、W. Thomson、R. J. E. Clausius らによる熱力学などへ受け継がれ、19 世紀の終わり頃までには身近な現象の多くが理解できるようになっていた。そこまでの物理学を古典物理学とよんでいる。

古典物理学の発展においてもたらされたのは、自然をどのようにとらえるか、現象をどのように記述するかについての方法である。これが現代でも用いられる標準的なものとなっている。

理解するということ

そもそも理解するということは何を意味するのだろうか。Newton が力学の三法則を発表したとき、地球と太陽など、どんなに遠く離れてても天体間に力が働くのはなぜか、物体間に引力が働くのはなぜか、といった批判を受けた。法則によって惑星の運動を記述する有効な方法を与えたが、なぜそうなるのかという根本的な解決にはなっていないというのである。Newton 本人もそういった問題を認識していたであろうが、実のところそういった批判は的外れを外している¹³。

科学の目的は現象を記述するための方法を提供することであって、理由を説明することではない。極論すれば、世の中の現象を「どのように」記述するかが問題なのであって、「なぜ」というのは問題ではない。何かの理論に基づいた方法を用いて何かの現象を説明することによって、われわれはなぜかを理解した気になることもあるが、つきつめて考えてみると根本的な理由は解決されていないのである。たとえば、空が青いのはなぜかというのは定番の質問であるが、それは電磁気学の法則と深い関わりがある¹⁴。なぜかを理解した気になるのは、その現象がある理論体系の枠組みで説明できるからである。そのようなとき、われわれは「わかった」と思う。ほとんどのひとは惑星の運動を実際に計算したり観測しているわけでもないのにわかった気がする。

¹²そういう過程は今後専門課程に進んでから行う研究で体験してほしい。

¹³ただし、一つめの批判は深い意味を含んでおり、電磁気学の理論でその重大さが認識されるようになった。

¹⁴本講義を受講しただけでは説明できるようにはならないが、説明の基礎となる概念は扱う。

Newton の三法則 (1687 年) の前には Kepler の三法則 (1609、1618 年) があったのだが、現在では前者が基本的であるとみなされている。それは後者が前者から導かれるとともにさまざまな問題に応用しやすい形で記述されているからである¹⁵。多少なりとも運動方程式をいじったことのあるひとは、物体の運動を理解したという感覚をもつだろう。

A. Einstein の一般相対性理論は重力を空間の歪みとして説明することに成功した。それはもちろん革命的な出来事であるし、上で述べた「なぜ」の説明にもある程度なっている。それでも、相対性理論の出発点となる「相対性原理」を要請するのはなぜかという質問に答えるのは容易ではない。その原理がなぜ要請されるのかを説明する理論が存在するかもしれない。疑問をもつときりがないのである。

こういった科学の見方は量子力学のような現代の高度な物理学にすすむにつれて重要になる。もはや現象がなぜそのようなかたちで起こるかを理解することが不可能になるので、あとはどうやってその現象を捉えるかという問題にして理解するしかない。たとえば量子力学では事象が確率的に起こる。それを記述するために、状態を Hilbert 空間のベクトルとして表現し、物理量はエルミート演算子で表される。はじめで聞くと何のことか全くわからない。もちろん、物理学者はそれに満足しているわけではないので、今でもより基本的な原理・法則を追い求めているのだが、それは永遠に続かざるをえない。このような科学の進展がどこまで続くのかは誰にもわかっていない。

物理をはじめて学ぶときに多くの学生は壁にあたる。わけのわからない理論や方程式を見せられてなぜそうなるのかと悩みがちである。もちろんそういった疑問も大事であるがそれにとらわれすぎないようにする必要もある。よく「***がわからない」と質問されるが、その理論がなぜあるかを理解しようとしているからであって、その理論でどのような現象をどのように説明できるのかというように捉えてもらえれば質問の仕方も変わってくるだろう。

1.3 電磁気学の法則

本講義ノートは電磁気学の基礎を理解するためのものである。基礎方程式にたどりつく過程を、論理的に、そして歴史的な流れにある程度沿いながら見ていく。主な目的は、電磁気学のさまざまな法則を体系化することにある。

力学の法則

力学では「力」というものを中心に考える。二つの物体を考えたととき、両者の間には引力が働き、物体の運動を引き起こす。これをどのように分析したかあらためて考えてみよう。その考え方を電磁気学の理解にも応用するためである。

物体それぞれには質量とよばれる固有の量が決まっており、その大きさに応じて力が働く。手に何か物をもって離すとその物体は落下する。これは地球による引力が働いているからだと説明される。また、地球自体も太陽による引力を受けて太陽のまわりを回転している。

これをどのように「理解」すればよいだろうか。そもそも、力とは何だろうか。それぞれの運動を観察して特徴を捉えることはできる。たとえば、物体を落とせば落下距離は時間の 2 乗に比例するし、投げれば放物線を描く。Kepler は観測結果の解析により、地球が太陽を焦点とする楕円軌道を描いていることを発見した。落下運動と楕円運動は全く違う運動に見えるから、これだけでは関係を見出すことができない。実験や観測だけでは個々の運動を調べるだけで終わってしまうのである。実際、Newton 以前の時代には天体の運動は身近な物体の運動とは全く異なる法則に従うと考えられていた。

¹⁵ Kepler の法則から Newton の法則を一意的に導けるだろうか？つまり、楕円軌道から力は逆 2 乗則しかありえないことを示すなど。考えてみると面白い。

Newton の功績は、全ての運動が一つの方程式で記述できることを示したことである。

$$ma = F \quad (1.1)$$

m は物体のもつ質量、 a は物体の加速度、 F は物体に働く力を表す。すでに力学で扱っているし次章以降でも議論するので、ここではくわしい説明を省略する。重力（万有引力）の場合は、右辺の力 F が物体間の距離の 2 乗に反比例している。それによって、Kepler の法則が説明される。

Newton 方程式 (1.1) の汎用性は非常に高い。Kepler の法則は天体の運動に限られるが、Newton の法則は力学的な運動全てに適用される。地球上の物体でも天体でも世の中にある運動全てを（原理的には）記述できる。

自由落下や楕円運動などさまざまな運動をたった一つの方程式で記述できるというのは驚くべきことである。働く力は系によってさまざまであるが、それが決まっても実際に得られる運動はさまざまである。多様性は物体への力のかかりぐあいや物体のもつ初期条件で決まる。たとえば、手に持った物体を静かに離すと真下に落下するし、投げれば放物線を描く。つまり、具体的な運動は、普遍的に適用される運動方程式 (1.1) と個々の条件によって決まるという構造がある¹⁶。理解したというのは前者であって、後者については具体的な例をひとつひとつ調べることはしない。必要に応じて考えればよい。多くの場合、前者は単純であり、後者は複雑である。演習問題で扱うような単純な系を除いて運動方程式を解くことは一般に難しい。ただ、原理さえわかれば計算機を用いるなどすれば答えを得ることができる¹⁷。

Newton の法則は、力とは何かという質問への答えにもなっている。すなわち、力とは (1.1) 式左辺の加速度を生み出すものである¹⁸。力は物体の運動を引き起こす。このような考え方は、物理が「どのように」を理解する体系であることの一例である。

電荷と力

さて、本題の電磁気学に移ろう。電気や磁気による力というものは古来から知られており、それらは重力よりも複雑な性質を示す。ある種の物質は、反発したり引きつけあったりする。

物体の運動が起こる以上、力が働いているはずだし、運動は Newton 方程式で記述できる。高校の電磁気学でも扱う Coulomb の法則による力は万有引力とよく似た性質をもっている。どちらも物体間の距離の 2 乗に反比例している。

力の法則を書き下してしまえば後は力学の問題となる。与えられた力の下で運動方程式を解けばよい。では電磁気学の法則とは何だろう？電磁気学は力学に従属する体系なのだろうか？

電磁気による力は物体の質量とは関係なく働く。力を測る別の尺度がある。昔のひとは物体をこすったりして力が働くことを発見した。こするにしても物質によって力の働き方が変わる。物質が何か固有の量をもっていてそれがかかる力が決まる。それがなんだかわからないが、とりあえずそれを電荷 (electric charge) と名付けよう。Coulomb 力は物体のもつ電荷量に比例する。電荷の大きさが大きければ力が大きくなる。しかもこの場合、引力と斥力の 2 種類あるから正負の値をもつ電荷量を定義するのが自然である。負にすれば力の向きが変わるので引力だけでなく斥力も記述できる¹⁹。

とりあえずなんだかわからないが名前をつけて、働く力というわれわれが理解できて定量的に評価できるものでそれを捉える。物理法則をつくるための第一歩である。Newton 力学というよいお手本があるのだから、それに習うのは自然なことである。うまくいかなかったらまた考え直せばよい。

¹⁶微分方程式である運動方程式は全ての系に適用できるが、具体的な解は個々の系に強く依存するものとなる。微分方程式の解は積分定数を含み、そこに系の個性が取り込まれる。

¹⁷うまくいかないときもある。計算機の能力を越えるような問題、たとえば構成要素の数が莫大な系を解くのは難しい。

¹⁸数学的な等式に因果関係は込められていないので、そういう見方もできるというくらいにとどめておいた方がよいかもしれない。

¹⁹くわしくは次章で扱う。

重力とは異なる起源をもつ力をどのように力学の法則から切り離せばよいだろう。それについては次章から少しずつ見ていくことにして、以下ではさしあたって別の視点から考えてみる。

物理学の法則

高校物理でやったことを思い出してみよう。高校物理では電磁気学の法則としてさまざまなものを扱う²⁰。教科書に法則として書かれているものを挙げると、電荷保存則・クーロンの法則・ガウスの法則・オームの法則・ジュールの法則・キルヒホッフの法則・磁気に関するクーロンの法則・右ねじの法則・フレミングの法則・エネルギー保存則である。力学がニュートンの三法則（慣性、運動、作用・反作用）とケプラーの三法則、運動量保存則、（力学的）エネルギー保存則、フックの法則くらいであったのと比べると数も多い多様さがある。これは電磁気学の法則の複雑さを物語っていると同時に電磁気学が身近な現象と深く関わりあっていることも示している。たとえばオームの法則は電気回路を扱うときに用いられる。

物理学の法則として、こんなに多くのものが必要とされるのだろうか？力学の場合を考えてみる。前節でも述べたように、ケプラーの法則はニュートンの法則から導かれるものであるから、なくてもよいということもできる。エネルギー保存則はどうだろう。これもニュートン方程式から導くことができるからなくてもよいように思えるが、そう言うと多くのひとは疑問に思うだろう。エネルギーというのは日常でもよく用いられる語であるが、目には見えない概念で何かもっと深いレベルにあるもののように思える。フックの法則は、ばねの運動を記述するときに用いられる便利な法則である。その力の起源は何だろうか。ばねの強さは重さにはよらず決まるので重力ではなさそうである。というように考えていくと、法則と言ってもいろいろなものがあり、一つの範疇におさめるものではないことがわかる。

このようにして法則の分類を試みようというのが講義目的の背後にある問題意識である。そのためには、最低限必要な法則、つまり、電磁気学の基本法則が何であるか知る必要がある。

Maxwell 方程式

先に結論から述べると、電磁気学の法則は次の 4 つの式に集約される。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (1.5)$$

これらの式の組が Maxwell 方程式である。記号の意味も含めて式の意味を理解することが本講義の目標である²¹。ここにはクーロンの法則もオームの法則も入っていないように見える。そもそもこんな式は高校物理では出てこない²²。これを基本法則というからには、上で述べたような法則の全てが導かれるものでなければならないはずである²³。Maxwell 方程式を基本法則として用いる理由を探ることももつべき問題意識である。

²⁰履修していないか忘れていても、いくつかは中学理科でも扱うものなので聞いたことくらいはあるだろう。

²¹これをとても美しいと思えるようになれば電磁気学を理解したも同然である。

²²東京図書「物理」(2012年検定)を見ると、欄外のコラムで言及されているが式は書かれていない。

²³実のところ、それは正しくない。理由も含めて以降の章で議論する。

「虚構」と「現実」

実際に電磁気の法則を担うのは電子や光といったものである。また、導体というものを考えるが、これは固体金属中に電子が流れているような系をモデル化したものである。第5章や、6章の電流、9章の磁石などで用いられる。これらは古典物理学の範囲では理解できるものではない。原子・分子の構造や量子力学の知識を用いる必要がある。ところが、そのような知識は本講義では用いないし、電子がどうといったこともほとんど出てこない。

面白いことに、そのような知識を一切用いなくとも電磁気学の法則を理解することができる。ただし、机上の空論をつくりあげてもそれが現実の世界を説明できなければ意味がない。現実問題として、電磁気学をつくりあげるには多くの実験や観測事実が必要とされた。重要な点は、そういった事実を積み上げて法則をつくりあげてから現実と切り離しても、法則は法則として閉じた形で記述できるということである。たとえば、Maxwell が電磁気の法則をはじめて説明する際にエーテル中の弾性体模型というものが用いられた。このような見方は間違っていたが、実体を切り離して背後にある法則を見ると完全に正しいものであり、現在にも残る電磁気法則となっている。抽象的な法則体系をつくりあげれば、適用対象を変えて他に転用したりすることもできるし、新しい法則を構成するときに参考になる。

フィクション、虚構としての物理理論が現実の世界を記述できるのは非常に興味深い。力学を扱うときに、大きさのない質点であるとか摩擦のない世界を考えるのも虚構であるが、それでも多くの現象を説明できてしまう。自然を注意深く観察し、深い洞察にもとづいて現実を要素に分解し、重要な部分を取り出し、法則をつくりあげ、そして現象を予測するということが400年もの間大きな成功をおさめてきたのは紛れもない事実である。

また、実際に起こったことであるが、抽象的な電磁気学の理論をつくりあげた結果、それが現実とつながっていることがわかる奇跡的な瞬間があった。これは電磁気学の理論のハイライトの一つである。それについて述べることは以下での楽しみとしてとっておきたい。

1.4 参考書

教科書はよいものがたくさんあるが、やや天下りになっているものも多い。これはこうである、これはこうである、というのが延々と続いてうんざりすることが多い。本講義ノートではなるべくそのような視点で書かないようにしている。その分、文章が多くなってしまい読みこなすのが面倒かもしれない。そのようなひとは通常の教科書を読んでくれればよい。好みに応じて両者をうまく使い分けてほしい。

電磁気学に関する教科書は非常にたくさんある。ここでは本講義ノートを作成する際に参考にしたものを挙げる。網羅的ではないが、ここに挙げたものはそれぞれのレベルにおいて標準的で信頼できる教科書である。

- [1] 田中 秀数 「電磁気学」(基礎物理学過程入門コース) 培風館 2000 年
入門者向けの標準的教科書。本講義の標準的参考書とする。書いてることを全て理解できれば講義の目的は達成される。本講義ノートが読みづらいひとはこちらを読んでほしい。
- [2] 砂川 重信 「電磁気学」(物理テキストシリーズ4) 岩波書店 1987 年
物理学専攻者向けの標準的教科書。物理学科では電磁気学の講義がさらに三つあって、電磁気学 I では電磁気学の体系を最初から学び直すが、そこで用いられることが多い。定番中の定番である。本講義でここに書いてあることを全て理解する必要はない。同シリーズ5に演習本もある。

- [3] 中村 哲 須藤 彰三 「電磁気学」(現代物理学 [基礎シリーズ]3) 朝倉書店 2010 年
物理学専攻者向けの標準的教科書。[2]と同じレベルの内容だが、近年書かれたため記述がより現代的。
- [4] 太田 浩一 「電磁気学の基礎 I、II」 東京大学出版会 2012 年
書名に基礎という語を含むが、高度な内容も含む教科書。扱っている問題も多彩で歴史的な記述も多いので楽しめる²⁴。上級者向け。最初に読むには難しいだろう。
- [5] 田崎 晴明 「数学：物理を学び楽しむために」 (出版予定)
www.gakushuin.ac.jp/~881791/mathbook/
「高校数学の知識を前提にして、大学生が学ぶべき数学」を解説している。とても詳しいし、わかりやすい。初学者向けの教科書にありがちな天下りでごまかすようなところがないのでおすすめ。上記ページで pdf ファイルを半永久的に公開している。

英語を原著とする教科書では、Feynman や Jackson の教科書が有名で評価が高い。訳書もある。

また、本章で述べたような記述や歴史的な流れに興味があれば次の読み物をおすすめする。ただし、これは筆者が最近実際に読んだもののいくつかというだけであってかなり主観的で不完全なリストである。電磁気学と関係ないものもある。

- エミリオ・セグレ 「古典物理学を創った人々-ガリレオからマクスウェルまで」 みすず書房 1992 年
- 米沢 富美子 「人物で語る物理入門」(上)(下) 岩波新書 2005 年
- 藤宗 寛治 「電気にかけた生涯」 ちくま学芸文庫 2014 年 (東海大学出版会 1977 年)
- ナンシー・フォーブス ベイジル・メイホン 「物理学を変えた二人の男-ファラデー、マクスウェル、場の発見」 岩波書店 2016 年
- 山本 義隆 「熱学思想の史的展開 1~3 熱とエントロピー」 ちくま学芸文庫 2008 年 (現代数学社 1987 年)
- 蔵本 由紀 「新しい自然学: 非線形科学の可能性」 ちくま学芸文庫 2016 年

はじめの四つは人物を中心にすえた歴史、五つめは熱力学の歴史、六つめは科学についての考察である。

1.5 構成

内容は 3 部構成とする。この分類は上記 [1] の構成に基づくものであるが、章の対応はない。構成および内容は以下の表に示す通りである。

節のタイトルに「*」がついたものは、やや高度な内容である。最低限の知識のみでよいというひととはとばしてもよい²⁵。「**」は標準的な内容を完全に超えたものである。補足や発展的な議論などであるので、よほどの意欲があるひとを除いてとばしてよい。

[補遺] の節では必要な予備的知識もしくは補足をまとめてある。他の科目で扱っているはずのものが、発展的な内容のどちらかである。

また、各章最後には「まとめと考察」、「問題」という節を入れている。まとめと考察ではその章で扱った内容の簡単なまとめや注意点、考察を書いている。読まなくても先に進めるが、考え方の手助けとなる

²⁴何しろ前書きが「江戸川乱歩」、本文が「三浦半島」で始まる。

²⁵ただし、そこの内容の知識を以降の議論で用いることもある。ざっと目を通すくらいしておくともよいだろう。

章	題名	内容
1	概論	講義の目的や概要、方針
第 I 部	静電場	
2	Coulomb 力と電場	Coulomb の法則と静電場の導入
3	Gauss の法則	静電場の満たす法則
4	電場と電位	電位の導入
5	静電場の法則	静電場の基本法則のまとめ
6	静電場の応用	導体などへの応用
第 II 部	電流と静磁場	
7	電流	電流と Ohm の法則
8	磁場	Ampère 力と静磁場の導入、Biot-Savart の法則、Lorentz 力
9	静磁場の法則	静磁場の基本法則のまとめ、ベクトルポテンシャルの導入
10	磁気モーメント	磁石とは何か
第 III 部	電磁場	
11	電磁誘導	Faraday の電磁誘導則
12	Maxwell 方程式	電磁場の基本法則のまとめ
13	電磁波	電磁場の法則から得られる性質
14	おわりに	補足、発展的課題

ヒントが書かれているので何かの役に立つかもしれない。問題の節はいくつかの解くべき問題が載せてある。典型的な問題か、本文の議論を補足する問題のどちらかである。数は決して多くはないので、参考文献等にある問題も解いてほしい。

第I部

静電場

第2章 Coulomb力と電場

本章では Coulomb 力について議論する。Coulomb 力は万有引力とよく似たものであり、二つの電荷間に働く力である。Coulomb 力を表す式から電場とよばれる量が導入される。さまざまな電荷分布がつくる電場を計算し、その性質を調べる。

2.1 万有引力の法則

静電気力は、重力と対比してみるとわかりやすい。電氣的な力を表す法則である Coulomb の法則は、Newton 力学で学ぶ万有引力の法則と非常によく似ているからである。そこでここでは Newton 力学における万有引力の法則をふりかえり、その意味するところを考察してみよう。

二つの物体があるとそれらの間には万有引力 (universal gravitation) が働く。2 物体の位置座標をそれぞれ r_1 、 r_2 とすると、2 体間に働く力は

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (2.1)$$

と書ける。おなじみの式であると思われるが、記号の意味を含めて以下で説明および考察を行う。

質量

働く力の大きさは 2 点にある物体がそれぞれもつ質量 (mass) によって決められる。質量は物体がもつ固有の量で、非負の値をとる。万有引力の式 (2.1) は、力の大きさがそれぞれの物体の質量に比例していることを示している。 m_1 、 m_2 はそれぞれ物体 1、2 を特徴づける質量であり、 G は物体に関係ない比例定数で重力定数 (gravitational constant) とよばれる。

G は (力)・(長さ)²・(重さ)⁻² の次元をもつ量である。質点にもたらされる加速度は力に比例するという関係 $ma = F$ より、力は (重さ)・(長さ)・(時間)⁻² の次元をもつことがわかる。よって G は (長さ)³・(重さ)⁻¹・(時間)⁻² の次元となる。

万有引力にあらわれる質量は重力質量 (gravitational mass)、 $ma = F$ の左辺にあらわれる質量は慣性質量 (inertial mass) とよばれる。前者は万有引力から定義されるのに対して、後者は物体の動かしにくさとして定義される。両者が等価であるとみなすことによって重力定数の値が決まる¹。1kg の質量をもつ物体に 1m/s^2 の加速度を与える力を 1N (ニュートン) と定義している。このとき、重力定数は $G \approx 6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ と測定されている。

このように、質量は物体を特徴づける量であり、それによってどれくらいの重力が働くかが決まる。Newton 力学において、質量とは物体に固有の量でありその大きさに比例した力が働くものである。

¹重力質量と慣性質量が等しいことを等価原理とよぶ。一般相対性理論の基本的な要請となる。Newton 力学の範囲では違いを気にする必要はあまりない。

次元と単位

次元は量の次元 (base unit) ともいう。重さ、長さ、時間など、量の属性を意味する。上の例にあるように、(長さ)・(時間)⁻¹ などいくつかの属性を組み合わせたものとなる場合もある。単位は次元と似た概念であるが、グラムやメートルなどの具体的な尺度を表すものである。単位は測定者の都合で選ぶ取り決めであるが、次元はそのようなものとは関係なく決まっていることに注意されたい。本講義のように形式的な議論を行うときは単位のことを考える必要がほとんどないが、物理量を扱う限り次元のことは意識しておかなければならない。次元という語は、dimension、つまり空間が3次元(座標が (x, y, z) と三つの組で表される)であるというような意味でも用いられる。

l などの変数を書いたとき、それは次元込みのものとして定義されている。例えば、 $l = 1.0 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$ である。 $l \text{ cm}$ と書くことは決してない。無次元の量もあるが、その場合単位はつかず中身はただの数字である。

当然であるが、式を書いたとき両辺の量の次元は同じものでなければならない。(長さ) = (速さ) × (時間) はよいが、(長さ) = (重さ) という式はありえない。計算のチェックにもなるので常に注意する癖をつけてほしい。

逆2乗則

力の大きさは2点の距離 $|r_1 - r_2|$ の2乗に反比例する。 r_1, r_2 はそれぞれ3次元空間上の1点を表すベクトルであり、物体1、2の位置を表す²。力の大きさは物体を離すと小さくなっていく。

この“逆2乗”則は幾何学的観点から非常に絶妙な力であると見ることもできる³。このことはCoulomb力も同様であるので、そこで詳しく議論しよう。

引力

万有引力は文字通り常に引力である。つまり、互いに引きあう方向に力が働く。万有引力は日常手にするような物体ではあまりにも小さくてほとんど確かめることができない。そのため、重力の研究は天体のような巨大な物体を対象にして行われてきた。

質量がいくら小さいと言えども二つの物体を接近させていくと力は次第に大きくなっていき、距離が0で無限大となってしまふ。とするとくっついてしまった物体にどんな力を加えようとも引き離せなくなってしまう。この問題を避けるには他の力が働いてくっつくのを防ぐか、そもそも短距離では万有引力の法則が成り立たないと考えるくらいであろう。いずれにしても万有引力の法則のみでは重大な欠陥があるように思える。

作用・反作用の法則

式(2.1)はベクトル量であり、物体1が物体2からうける力の大きさと向きを表している。式の最後についている因子 $\frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}$ は大きさ1のベクトルであり、向きは点2から1に向かう方向にある。負符号があるので物体1は物体2に引きつけられる。これは物体1の立場であるが、物体2からすると物体1に引きつけられると見なせる(図2.1)。その場合、物体2がうける力は

$$F_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|r_2 - r_1|^2} \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|} \quad (2.2)$$

²ベクトルについては以下の囲み参照。

³物理学をさらに学ぶと逆2乗則がいかに特異的で厄介なものかもわかってくる。



図 2.1: 質量 m_1 の質点には F_{12} の力、 m_2 の質点には $F_{21} = -F_{12}$ の力が働く。

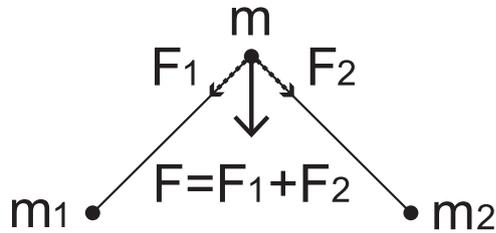


図 2.2: 重ねあわせの原理。質量 m の質点にかかる力 F は m_1 からの力 F_1 と m_2 からの力 F_2 の和になる。

と書ける。次の関係が成り立つことを、作用・反作用の法則 (action-reaction law) という。

$$F_{12} = -F_{21} \quad (2.3)$$

力の影響を受けるものが他にも影響を及ぼす。

質点

物体の位置を点で表したが、それは物体に大きさが無い質点 (point mass) とみなしているからである。そのため、理論的にはゼロ距離で力が無限大になるようなことも考えられてしまうのだが、もちろんこれは虚構である。原子レベルのスケールでは量子力学が関わってきて物の大きさという概念自体がよくわからなくなってくる。

実際には小さな有限の範囲にどれくらいの質量があるかがわかればそれで事足りる。その範囲が考えているスケールに比較して十分小さければ点とみなそうが有限の大きさをもった領域であろうが区別できないからである⁴。有限領域に質量が分布している場合は、密度、つまり単位体積あたりの質量を用いた表現ができる。後で電荷の場合を扱う。

重ねあわせの原理

式 (2.1) そのものではなく一般化ということになるが、三つ以上の物体があるときの法則は重ねあわせの原理 (superposition principle) に基づいて決められる。つまり、ある質点に働く力は他の質点それぞれとの間に働く力の和で書ける (図 2.2)。

$$F(\mathbf{r}) = - \sum_i Gmm_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (2.4)$$

m 、 \mathbf{r} は注目している質点の質量と位置座標ベクトル、 m_i 、 \mathbf{r}_i は他の質点の質量と位置座標をそれぞれ表す。二つの質点間に働く力は他の質点によって影響を受けない。

重ねあわせの原理が成り立つとすると力のベクトルは和に分解できるので非常に都合がよい。ひとつひとつの力を足しあわせていけば全体の力が計算できる。三つあってはじめてあらわれる 3 体力は存在しな

⁴ある程度の大きさをもつと剛体として扱われる。

いということである。このような力が存在すると手に負えなくなりそうだが、幸い自然はそのような複雑な相互作用を選ぶことはしなかったようである。したがって 2 体問題を考えればたいいの現象を理解することができる⁵。

スカラーとベクトル

本講義ノートでは三つの実変数の組をベクトル (vector) として扱う。例えば、座標ベクトルは

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad (2.5)$$

と書かれる。高校ではベクトルの表し方は矢印を上につけるものであったが、大学の物理では太字を用いて表すことの方が多い。座標の他に力、電場、磁場、電流密度などの量がベクトルとして扱われる。ベクトル \mathbf{E} に対して三つの成分を次のように書くことが多い。

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) \quad (2.6)$$

E_x は \mathbf{E} の x 成分を表す。他も同様である。 E_x を \mathbf{E}_x と書くこともあるが、ベクトルかその 1 成分かわかりにくいので避けた方がよいだろう。 $(\mathbf{E})_x$ であればその紛らわしさを避けることができるのでよい。

ベクトルは大きさ (長さ) と向きの情報をもっている。それは 3 次元座標系で原点とベクトルの表す点を結ぶ線分によって表される。

ベクトルの演算についてとりあえず用いる規則をまとめる。ベクトルは次の線形性をもつ。

$$a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2 = a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2) = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2, az_1 + bz_2) \quad (2.7)$$

a, b は定数を表す。ベクトルを定数倍しても足しあわせてもベクトルとなる。ベクトルの和と幾何学的な意味は図 2.2 を参照。線形性があるので、力をベクトルで表すことで重ねあわせの原理を適用することができる。

二つのベクトルの積は内積と外積があるが、本章では内積を用いている。

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \quad (2.8)$$

二つのベクトルの間に \cdot をつけて表す。二つのベクトルの内積は 1 成分のスカラー (scalar) となる。以降の章では外積を用いることもある。ベクトルの外積はベクトルになる。内積と外積について詳しくは 3.6 節 (46 ページ) にまとめる。

ベクトルの大きさは点 \mathbf{r} の原点からの距離であり、

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{r^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.9)$$

と表される。 $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ である。ベクトルの大きさはスカラーである。初学者が誤りがちな点であるが、 $1/r$ や r^3 のような演算は定義されていないので注意されたい。くれぐれも前者を $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$ などとしないほしい。後者は $r^2\mathbf{r}$ ならありえる。

座標変換に対する変換性から (狭い意味での) スカラーやベクトルを定義することもあるが、本講義ではさしあたって上記の性質だけ理解しておけば十分である。

⁵重力の起源を議論する一般相対性理論では重ねあわせの原理が成り立たない。原子核物理では 3 体力が必要となることもある。

運動方程式

力は物体に加速度を生じさせる。それを表したのが運動方程式 (equation of motion) である。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \quad (2.10)$$

左辺は物体の質量に加速度をかけたものを表す。粒子の位置座標 \mathbf{r} は時々刻々変化しているから、時間の関数となる。加速度は座標を時間で2階微分したものである。右辺の力は粒子の座標によるから、こちらも時間の関数となる。

運動方程式を解くことによって、 $\mathbf{r}(t)$ を求めることができる。微分方程式は不定性があるので、初期条件などによってその不定性を決めれば一意的に解が求まる。よくある設定では適当な時刻 t_0 での座標 $\mathbf{r}(t_0)$ と速度 $\left. \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|_{t=t_0}$ を指定する。

力学において重要なのは、力と初期条件を与えれば未来の粒子の運動は完全に決定できることである。物理学の存在意義のひとつは、力とは何かという問いに答えることではなく、現象や未来の状態を予測することである。それは運動方程式を具体的に解くことによって実現される。

Newton 力学は、作用・反作用の法則と運動の法則に慣性の法則を加えることによって成立する。慣性の法則は、力が働かない系 (慣性系) では、止まっているものは止まり続け、動いているものは動き続けるという法則である。なぜ法則が三つも必要とされるのかは面白い問題である。

2.2 Coulomb 力

ある種の物質同士を近づけると引き寄せられたり反発しあう性質があることは古来より知られていた。どこまでさかのぼることができるかは定かではないが、電気・磁気の系統的な研究は W. Gilbert (1544–1603) あたりからはじまる。Gilbert は電気 (electricity) という語をつくったとされている。

重力についての研究がさかんになったのは17世紀であるから、電磁気力についての研究の方がむしろ先に行われていたことになる。重力は天体のような巨大な物体を相手にせざるをえないことに対して、電磁気力は身近な物体で実験できる。そのため、電磁気学の研究が先に行われるようになったのは不思議ではない。

ただし、その法則は重力よりも複雑であり、普遍的な法則の確立は重力の法則の確立よりおくれることとなった。Newton による重力の法則は1665年に発表されたが、Coulomb 力が確立したのは18世紀後半である。100年くらいの間がある。

Newton の法則が確立することによって、電気による力も同様に定式化できると期待するのは自然なことであろう。実際、電気による力、Coulomb 力 (Coulomb force) は次のように書ける。

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (2.11)$$

これが Coulomb の法則 (Coulomb's law) である。以下でこの力の性質を詳しく見ていこう。

電荷

万有引力はその物体のもつ質量によって決まる。物体を変えて働く力が2倍になったとき、その物体のもつ質量は2倍になったと考える。二つあるどちらの物体を変えてもそのような性質が成り立つことから、(2.1) 式の表現にあらわれる係数を Gm_1m_2 と書くことができる。 G は質量によらない定数である。電氣的な力に対しても同様に考えると、物体がもつ性質によってその物体に働く力が決まる。前章で述べたように、それを電荷と名付けよう。電荷量を q と表すことにする。

くりかえすが、電荷とは何かという疑問はさしあたっておいておこう。それがあるとそれに比例した力が働くものと捉えておけばとりあえず十分である。電荷自体をどうやって測るかわからなくても、それをよく知っている力におきかえられるというのが Coulomb 力の公式 (2.11) なので、その性質を捉えることができる⁶。そのためには電荷量を力に換算するために比例係数 k を導入する必要がある⁷。そうすると比例係数 k は (力) · (長さ)² · (電荷)⁻² = (質量) · (長さ)³ · (電荷)⁻² · (時間)⁻² の次元をもつ量となる。力と加速度を $ma = F$ によって変換する慣性質量 m は重力のときと同じように定義される。右辺には m があらわれないから、重力の場合と違って両辺の m を相殺させることができない。そのため、比例係数 k の次元はやや複雑なものとなる。

電気の力が重力とは異なる力であるとしたら電荷の単位も新しいものを導入しなければならない。そこで発見者のひとりである C.-A. de Coulomb にちなんでクーロン [C] の単位を導入しよう。クーロンは電気素量 (elementary charge) の値が

$$e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (2.12)$$

であると定義される⁸。電気素量とは電荷の最小単位であり、電子のもつ電荷量の大きさに等しい⁹¹⁰。比例定数 k は次のように測定されている。

$$k \approx 8.9876 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \quad (2.13)$$

重力との違いについてまず気づくのはその大きさである。1C、1kg の物体間に働く力は 10^{20} 倍もの違いがある。Coulomb 力の方が圧倒的に大きい。もちろん、1C と 1kg を比較するのは公正ではあるとはいえない。現実的な物質として電子を例にとると、電荷量の大きさは上に書いた値、質量は $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ である。これで比較してみても驚くほどの違いがある¹¹。こんなに桁の違う力が自然に存在するのはとても面白い。

電気力が重力と決定的に違うことは、引力だけではなく斥力も存在することである。これは、電荷が負の値もとるとすれば自然に表現できる。同じ電荷量をもつ電荷同士間には斥力が働き、異なる場合は引力となる。重力の場合は同じ符号で引力となるので違いに注意してほしい¹²。電荷間の力は同じ符号であるかどうかで引力か斥力かが決まるので、電荷の符号は相対的にしか決まらない¹³。

異なる符号の電荷が存在してそれらが引きあうということは、電荷という量が一つの領域にたまりにくいことを示唆している。同じ符号で集まるよりは異なる符号で集まった方がよい。実際、後で議論するが、引力の働く二つの物体を接触させるとやがて引力が働かなくなる。これは電荷が移動して中性化してしまったことによると考えられる。万有引力の場合と異なり、引きよせあう電荷はくっつくとなりが負の無限大になるが同時に電荷量が 0 になってしまう。完全に電荷が混ざり合って 0 になるのか正負の電荷が同じ点に存在しているかを見るべきかは今のところ何とも言えない。

⁶力は物体に性質のよくわかっているばねをつなぐなどして測定される。実際にばねをつなぐことができなくても、何か性質のよくわかっている形態に変換することができればよい。物理学のあらゆる測定に共通したことである。

⁷ $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ と書くことも多い。 ϵ_0 は (真空中の) 誘電率を表す。第 12 章でふれる。

⁸2018 年 11 月に決定され、2019 年 5 月から施行される定義。これまでの定義については 8.1.3 節で述べる。

⁹電子の電荷は負の値 $-e$ をもつ。

¹⁰もちろん、電荷に最小の単位があることは自明ではない。さしあたってその事実を知らなくても電磁気学の法則は理解できる。

¹¹各自で計算してみよ。

¹²式 (2.1) には負符号がついているが、(2.11) 式にはない。

¹³物理の測定は何であれ基本的に何かを基準にして測るから、相対的なものである。現在の取り決めでは、電子の電荷を負としている。

重ねあわせの原理

Coulomb 力の場合も重ねあわせの原理が成り立つと仮定するのが自然だろう¹⁴。点 r_i ($i = 1, 2, \dots$) に電荷 q_i があるとき、点 r にある電荷 q に働く力は次のように書ける。

$$F(\mathbf{r}) = kq \sum_i q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (2.14)$$

これと電荷量が正負両方の値をとるという性質を用いると、重力にはないさまざまな現象を導くことができる。

q と $-q$ の電荷量をもつ電荷が空間のある点にそれぞれ固定されているとする。それらの点から遠く離れたところにある電荷に働く力を考えてみると、両者の力が打ち消し合って 0 になる。自明と思えるが式で書くと

$$F(\mathbf{r}) = kQq \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right) \sim kQq \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) = 0 \quad (2.15)$$

である¹⁵。電荷 q の位置を r_1 、 $-q$ の位置を r_2 とし、点 r の位置に電荷量 Q の電荷をおいた。 $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}_1|$ 、 $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}_2|$ という近似を用いている。これによって、後で詳しく議論するが静電遮蔽のような現象を説明することができる。ある電荷に働く力を計算するには宇宙全ての電荷の位置がわからなければならないという、「ラプラスの悪魔」¹⁶のような事態を回避することができる¹⁷。

このように、正負等量の電荷があることと電荷が全くないことは遠くからでは見分けがつかない。 q と $-q$ の電荷がひきつけあい、重なるかほぼ 1 点に集まると外に新たな電荷をおいても力は働かない。そのような相殺が起きるために、電気力によって起こる現象は非常に複雑で多彩である。

量の比較

量 x が (非常に) 小さいまたは大きいというときは、比較対象がなければならない。たとえば 1km が小さいか大きいかは考えている問題や系による。日常生活スケールでは大きいし、宇宙のスケールからすれば非常に小さい。適当なスケール y が存在すれば、それと比較して $x \gg y$ や $x \ll y$ と書くことができる。適当なスケールとは考えている系の特徴的な量である。たとえば電荷が円上に分布している系では円の半径 (直径でも円周の長さでもよい。大した違いはない) が特徴的な長さのスケールを表す。複雑な系でなければそのスケールを見つけることは難しくない。無次元の量の場合には 1 と比較して小さいか大きいかということになる。たとえば 0.001 は (非常に) 小さいし、10000 は (非常に) 大きい。

物理学の法則を考えると、問題に応じて適当なスケールを見つけることは重要である。たとえば、万有引力の法則は日常のスケールではほとんど問題とならない。

電荷密度を用いた表現

式 (2.11) は電荷がある一点に存在するときに成り立つ表現である。そのような電荷を点電荷 (point charge) というが、質点と同様に大きさのない点に電荷を定義できるかという問題は非常に根が深い。

¹⁴ とりあえずそれで考えてみてだめだったら他の可能性を考えればよい。といっても、重ねあわせが成り立たないとどうしていいかわからないだろう。とても自然な原理だが、かなりのことがこの原理に依存している。

¹⁵ 第 0 近似では 0 になるが、近似の精度を上げると有限の答えを得る。詳しくは第 6 章で電気双極子として扱う。

¹⁶ P.-S. Laplace は、「確率についての哲学的試論」(1814 年) に次のように書いた。「与えられた時点において自然を動かしているすべての力と、自然を構成するすべての実在のそれぞれの状況を知っている英知が、なおその上にこれらの資料を解析するだけ広大な力をもつならば、同じ式の中に宇宙で最も大きな天体の運動も、また最も軽い原子の運動をも包括せしめるであろう。この英知にとっては不確かなものは何一つないし、未来も過去と同じように見とおせるであろう」(世界の名著 65 現代の科学 I 中央公論社 1973 年 樋口順四郎訳)

¹⁷ このことは重力の場合もあてはまる。ある質点から見て逆方向等距離の位置に同じ質量があれば、それらによって働く力は打ち消しあう。それでも、引力しかないことから遠方の重力の影響を消し去ることは Coulomb 力の場合より難しい。

ところが、重ねあわせの原理の考え方をを用いると非常に便利な表現をすることができる。実際には電荷は1点ではなく有限の領域に分布しているとも考えることもできる。現実的にも電荷をひとつひとつ数えるのは難しいし、1点にどれだけの電荷があるかというよりはこの領域にある電荷はどれくらいという言い方をするのが現実的である。このようなときの電荷分布および Coulomb 力の表現を考えてみよう。

空間のある1点 r を含む3次元の体積領域を考える。形はどのようなものでもよい。この体積を $\Delta V(r)$ 、含まれる電荷量を $q(r)$ とする。電荷がある程度一様に分布していれば体積が小さいほど含まれる電荷量は小さくなるから、比例係数 $\rho(r)$ を用いて $q(r) = \rho(r)\Delta V(r)$ と書けるだろう。領域の大きさが無限に小さい極限をとると、体積は1点 r につぶれていき、電荷密度 (charge density) が次のように定義できる¹⁸。

$$\rho(r) = \lim_{\Delta V(r) \rightarrow 0} \frac{q(r)}{\Delta V(r)} \quad (2.16)$$

極限をとると分母は0になるのだが、同時に分子も0になる。領域の形や極限の取り方はどのようなものでもよい。球を1点に縮めるとしてもよいし立方体を考えてもよい。極限が存在する場合、どのようにしても両者の比は同じ有限の値に収束する¹⁹。この定義は点電荷の場合にはあてはまらないが、Dirac のデルタ関数というものをを用いれば統一的に扱うことができる²⁰。点電荷の場合に積分表示を和に直すことはいつでも可能なので、以下では主に電荷密度を用いた表現を行う。

電荷密度のもつ次元は電荷を体積で割ったものとなることに注意してほしい。よって、点 r にある電荷 q に働く力は、他の電荷がつくる電荷密度分布関数 $\rho(r)$ を用いて次のように書ける。

$$\mathbf{F}(r) = kq \lim_{\{\Delta V(r_i)\} \rightarrow 0} \sum_i \rho(r_i) \Delta V(r_i) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (2.17a)$$

$$= kq \int d^3r' \rho(r') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.17b)$$

一つめの式は空間を小さな領域に分割し、その領域を r_i で表している。その領域内にある電荷量は $\rho(r_i)\Delta V(r_i)$ である。全空間を覆うように和をとり、領域の大きさを0にする極限で二つめの式が得られる。2行目の積分は、全空間での体積積分 (volume integral) を表している²¹。

式 (2.17) にあらわれる2種類の座標変数 r 、 r' の役割の違いに注意してほしい。 r は電荷 q のある場所を指定しており、その電荷に働く力を表したのが $\mathbf{F}(r)$ である。一方、 r' は電荷 q に影響を及ぼす他の電荷の座標を表したものであり、ありとあらゆる全ての場所を考える。つまり、それは積分変数を表す。左辺は r' によらない r のみの関数となる。計算上両者の変数を混同しやすい。積分変数と積分の結果残る変数の区別を意識してほしい。また、次のように書くことも多い。

$$\mathbf{F}(r) = kq \int dV(r') \rho(r') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = kq \int dV \rho(r') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.18)$$

積分を $\int d^3r' \dots$ ではなく $\int dV(r') \dots$ または $\int dV \dots$ と書いているが、どれも同じ意味である。 dV と書く場合、積分変数が r ではなくて r' であることは左辺が r の関数であることから察するしかない。

適当な電荷分布の下で上の式の積分がどのように行われるかは、2.3.2 節で具体例を用いて考える。

¹⁸理解できない場合、まず例 2-2 の線密度の定義を見てみてほしい。1次元で密度が定数になるので、少しわかりやすいかもしれない。

¹⁹そのようなときにのみ極限が定義できるとも言える。

²⁰5.6 節 (65 ページ) で簡単に議論するが、本講義では用いない。

²¹体積積分は3重積分である。以下の囲み参照。

和と積分

3次元の体積積分は3重積分を表す。

$$\int d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}) = \int dV f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz f(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$

左辺および中辺の積分記号 \int は本来三つ並べて \iiint と書くべきであるが、煩わしいので一つで表す。積分範囲は指定されていないときは全空間（全ての空間領域）であるとする。 dx 等の記号を前に配置しているが、後ろ（ \int と dx の間に被積分関数をはさむ）でもよい。意味は同じである。

和を用いた表式 (2.14) は電荷のある場所について離散的に足しあげている。一方、積分を用いた表式 (2.17) では、電荷の有無に関わらずあらゆる点について連続的に和をとる。電荷があるかどうかは電荷密度が0かそうでないかで判断している。そのために電荷密度が電荷のない点にまで拡張されて全空間で定義されていることに注意されたい。ある点に電荷がなければその点での電荷密度（被積分関数）は0なので和（積分）に入れても問題がない。

2.3 電場

2.3.1 定義

ある電荷に注目したとき、それに働く Coulomb 力はその電荷のもつ電荷量に比例している。2倍の電荷量をもつ電荷には2倍の力が働き、逆符号の場合は大きさが同じで逆方向の力が働く。したがって単位電荷あたりの力という概念が自然と生じる。電荷量を q とすると Coulomb 力は

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (2.20)$$

と書くことができ、ベクトル \mathbf{E} を電場または電界 (electric field) とよぶ²²。電荷密度が座標の関数として与えられているとき、点 \mathbf{r} の電場は次のように表現される。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.21)$$

これからの解析において出発点となる重要な表現である。

場の量

一般に座標の関数として表現できる物理量は場 (field) の量とよばれる。電場を導入する意義は最後のまとめの節や以降の章で議論する。さしあたって注意してほしいのは、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は入力された任意のベクトル \mathbf{r} に対してベクトル \mathbf{E} を出力する関数ということである。二つのベクトルが絡んでいるので初学者は混乱するようである。 \mathbf{r} は実空間での向きを表しているが、 \mathbf{E} は抽象的な空間での向きを表す。もちろん、電荷をかけて力に直せば実空間で電荷に働く力の向きを表すが、これからは電場を力から切り離して考える。

以下では電場がどのようなものか感覚的に理解するために典型的な具体例の計算を行う。

²²高校教科書には電界と書いてあるし、大学でも工学の分野では電界とよぶことが多いが、物理学では電場とよぶ。本講義ノートでは電場とする。物理学者は場という言葉を好んで使う。英語ではそのような使い分けはない。

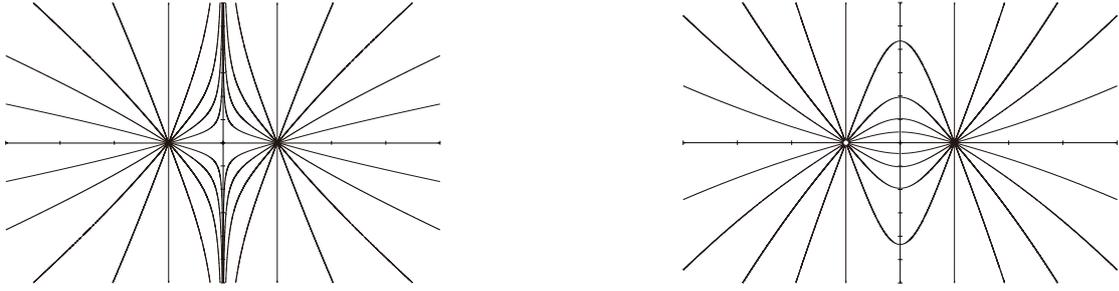


図 2.3: 電場の様子の例。 $z = 0$ の面を考え、図の中心を原点にとっている。横軸は x 軸、縦軸は y を表す。左は同符号の電荷、右は異符号の電荷が、曲線が集まっている点におかれている。電場の向きは電荷の符号に応じて決まる。

2.3.2 例

電荷が離散的または連続的に分布しているとしたときどのような電場分布が得られるかを調べる²³。

例題 2-1: 二つの電荷がつくる電場

$r_+ = (a, 0, 0)$ と $r_- = (-a, 0, 0)$ にそれぞれ電荷 q が置かれている。このとき、点 $r = (x, y, z)$ での電場を求めよう。電場はベクトルなので 3 つの関数を並べて書く必要がある。次のようになる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = kq \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_+}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|^3} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_-}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|^3} \right) \quad (2.22a)$$

$$= \frac{kq}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{kq}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x+a \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.22b)$$

xy 平面内、つまり $z = 0$ での電場ベクトルの向きを描いたのが図 2.3 左である。曲線の各点での接線がその点での電場ベクトルの向きを表している。電荷間の領域において、一方の電荷がつくる電場の向きはもう一方の電荷を避けるようになっており、反発が生じている。電荷から離れた領域では、電場は放射状に無限遠点に向かっていく。線がないところにも電場があることに注意してほしい。電場の大きさは線の密集具合で表される。線が密集しているほど電場の大きさは大きくなる²⁴。

特別な場合として、 $x = 0$ 、 $z = 0$ とおくと

$$\mathbf{E}(0, y, 0) = \frac{kq}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

$y = 0$ 、 $z = 0$ とおくと

$$\mathbf{E}(x, 0, 0) = \frac{kq}{|x-a|^3} \begin{pmatrix} x-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{kq}{|x+a|^3} \begin{pmatrix} x+a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

である。

²³なぜそのような電荷分布があるかはここでは問わない。

²⁴このことは次章で Gauss の法則によって正確に表現される。

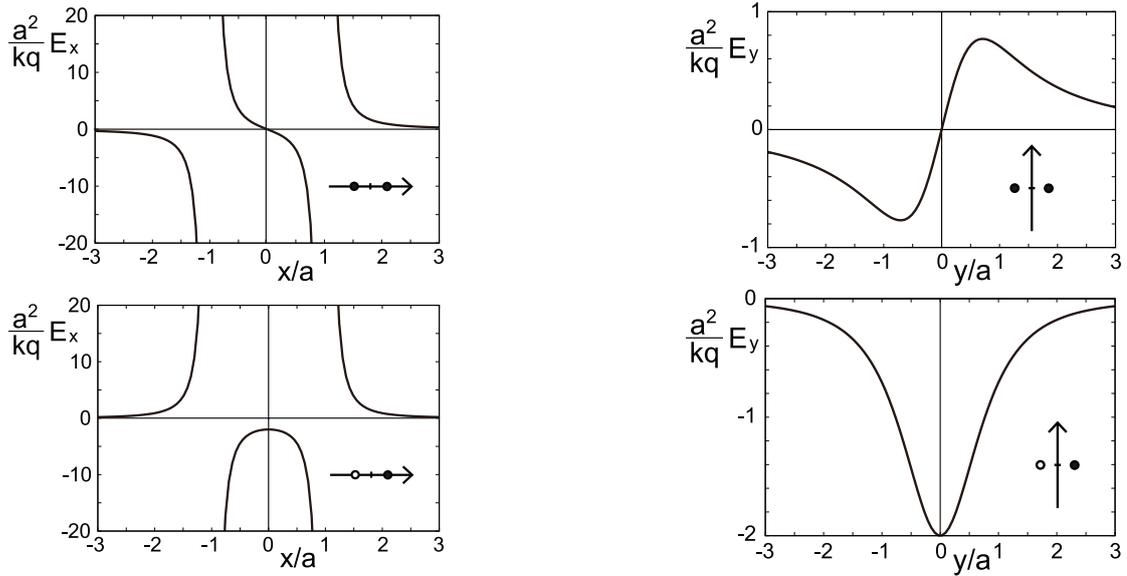


図 2.4: 二つの電荷があるときの電場。上は同符号の電荷、下は異符号の電荷のとき。左は x 軸上 ($y = 0$ 、 $z = 0$) の電場、右は y 軸上 ($x = 0$ 、 $z = 0$) の電場を表す。

今度は $\mathbf{r}_+ = (a, 0, 0)$ に電荷 q 、 $\mathbf{r}_- = (-a, 0, 0)$ に電荷 $-q$ をおいてみよう。このとき、点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の電場は上の計算で \mathbf{r}_- の電荷の符号を変えるだけでよいから

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = kq \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_+}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_-}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|^3} \right) \quad (2.25a)$$

$$= \frac{kq}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{kq}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x+a \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.25b)$$

となる。 $x = 0$ 、 $z = 0$ のとき

$$\mathbf{E}(0, y, 0) = -\frac{kq}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$y = 0$ 、 $z = 0$ のとき

$$\mathbf{E}(x, 0, 0) = \frac{kq}{|x-a|^3} \begin{pmatrix} x-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{kq}{|x+a|^3} \begin{pmatrix} x+a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

である。 xy 平面内での電場ベクトルの向きを図 2.3 右に示す。電荷間の領域で電荷 q から出た曲線は電荷 $-q$ に吸い込まれる。 $|x| > a$ の外側では向き以外は前の例と似たものとなる。また、 x 軸上、 y 軸上の電場の大きさを図 2.4 にそれぞれ示す。

例題 2-2: 直線上に分布した電荷がつくる電場

今度は電荷をたくさん置くことを考える。図 2.5 のように、 x 軸上、 $x = na$ (n は整数) それぞれの点に電荷 q が置かれている。このとき、 x 軸から y 方向に r だけ離れた点 $\mathbf{r} = (0, r, 0)$ での電場を求めよう²⁵。

²⁵任意の点での電場は問題 [2-3] で図を描くことによって考える。



図 2.5: 例題 2-2 の系。x 軸の直線上に等間隔に電荷をおく。

重ねあわせの原理により例題 2-1 の結果を用いることができる。

$$E(0, r, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{kq}{(r^2 + n^2 a^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -na \\ r \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{kqr}{(r^2 + n^2 a^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

この和をとることはやっかいなので、連続極限をとることを考える。つまり、 $\lambda = q/a$ を一定の値に保ちながら $a \rightarrow 0$ 、 $q \rightarrow 0$ の極限をとる。そのようにすると、電荷は直線上に連続的に分布する。 λ は次元から考えると、単位長さあたりの電荷量を表しており、線密度 (linear density) とよばれる。この量を一定にとることで連続極限が存在するようにしている。これは (2.16) 式のような極限の例であるが、単位体積あたりではなく単位長さあたりとしているので、極限の定義が異なる (3 乗を 1 乗にする)²⁶。このような極限をとると和は x についての積分に直すことができる。つまり、次の関係を用いる。

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a f(na) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \quad (2.29)$$

$f(x)$ は任意の関数を表す。左辺の f の前についている a は (2.17) 式の $\Delta V(r_i)$ に対応するものである²⁷。このとき、点 $r = (0, r, 0)$ での電場は

$$E(0, r, 0) = k\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2k\lambda}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

と計算される (問題 [2-3])。

得られた電場は距離の 2 乗ではなく 1 乗に反比例している。Coulomb の法則から出発しているはずなのに、異なる関数形が得られるという結果は興味深い。

例題 2-3: 円周上に分布した電荷がつくる電場

半径 a の円周上に一様に電荷が分布した系を考える。このとき、円の中心を通り、円が属する平面に直交する直線上の任意の点での電場を求める (図 2.6 参照)。

円の中心軸上の電場を求めることは、軸からずれた点で電場を求めるより簡単である。軸上では電場の向きは軸方向となる。これは対称性の観点から容易に説明することができる。円を $z = 0$ の xy 平面上にとり、原点を円の中心とする。このとき、図 2.7 のように系を z 軸のまわりで回転しても電荷分布は不変である。したがって、電場を同じように回転しても不変となるはずである。 z 軸上の点における電場の向きは z 軸に平行でなければならないことがわかる。

同様の議論は今まで扱ってきた他の例にも適用することができる。電荷が直線上や平面上など幾何学的にわかりやすい分布をとっているときに有効な方法である。何も考えずに素直に計算してもよいが、先に考察を行って関数形を制限すると計算が格段に楽になる。

²⁶この場合、体積密度は定義できない。太さの無い線に電荷が存在しているとしているからである。ただし、デルタ関数を用いれば体積密度を形式的に書き下すことはできる。

²⁷これがないと右辺と次元があわないことから必要であることがわかる。

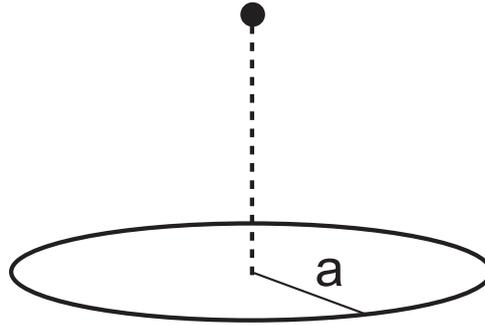


図 2.6: 例題 2-3 の系。半径 a の円周上に電荷が一様に分布しているとき、中心軸上の点での電場を求める。

さて、軸上の点 $r = (0, 0, z)$ で電場の z 成分を計算する。円上に分布する全電荷量を Q とすると、単位長さあたりの電荷量は $\lambda = \frac{Q}{2\pi a}$ で与えられる。 $2\pi a$ は円周の長さを表す。 xy 平面における円上の点は x 軸とのなす角度 θ によって指定される²⁸。微小円弧の長さは $a d\theta$ であるから (図 2.8)、積分を行うと

$$E_z(0, 0, z) = k \int_0^{2\pi} \lambda a d\theta \frac{1}{a^2 + z^2} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \quad (2.31a)$$

$$= k \frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.31b)$$

$$= kQ \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2.31c)$$

が得られる。被積分関数は積分変数によらないから、積分は 2π をかけるだけである。

$z \gg a$ としてみよう。このとき円は観測点から見て非常に小さいものとなりほぼ点とみなせるだろう。上の式は a を無視すると次のように近似できる。

$$E_z(0, 0, z) \sim \frac{kQ}{z^2} \quad (2.32)$$

これは原点に電荷 Q があるときの電場と同じである。この結果からわかるように、点電荷という概念に違和感をもったとしてもさしあたってはあまり気にしなくてもよい。有限の大きさをもった電荷分布だろうが点電荷だろうが、遠くからみればどちらも見分けがつかないのである。

例題 2-4: 面上に分布した電荷がつくる電場

今度は線ではなく 2 次元平面上に電荷が分布した系を考える。 xy 平面上に一様に電荷が分布している。

まず、計算せずどこまでわかるか考察してみよう。 xy 平面に直交する任意の軸まわりの回転に対して電荷分布は不変である。回転対称性から電場は z 軸方向を向き、軸をどこにとっても同じであることから、電場は平面からの距離 z のみの関数となる。平面の両側で向きが異なることから、電場は z の奇関数であるといえる。つまり、点 $r = (x, y, z)$ での電場は

$$\mathbf{E}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z f(|z|) \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

と書ける²⁹。関数 f の具体的な形はこの考察では定まらない。

²⁸角度と円弧の関係は 3.2.2 節 (38 ページ) を参照。

²⁹ $|z| = \sqrt{z^2}$ なので関数 f は z^2 の関数とみなしてもよい。

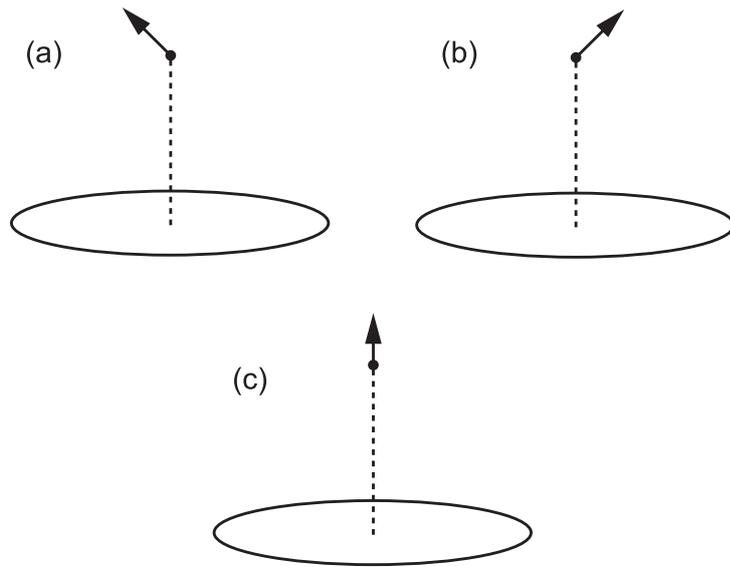


図 2.7: (a) の黒丸の点で矢印のような電場が解であったら点線の軸まわりに回転して (b) の電場も解とならなければならない。とすれば電場は (c) の矢印の向き (逆向きも含む) しかありえない。

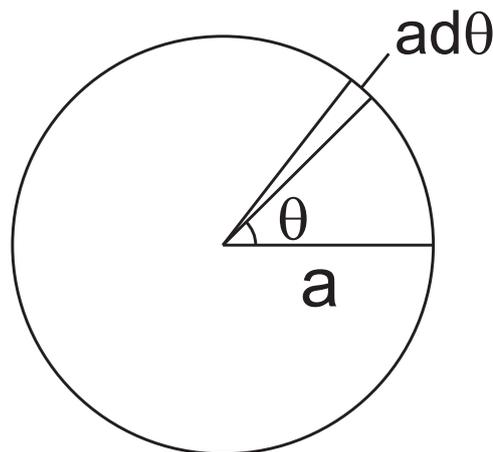


図 2.8: 半径 a の円において θ と $\theta + d\theta$ の角度によって定まる弧の長さは $ad\theta$ となる。 $d\theta$ は微小量を表す。

電荷分布は面密度を用いて表現することができる。無限に広い平面を考えているので全電荷量は無限大となってしまう。そこで前問とは違って全電荷ではなく面密度を用いて答えを表すべきである。単位面積あたりの電荷量を σ としよう。これが面密度を表す。一様であることからこれは xy 平面上どここの点でも一定値をとる。

電場の計算は重ねあわせの原理を活用することにより計算される。図 2.9 のように、平面を半径 a と $a+da$ の円がはさむ領域に分割する。 da を十分小さくすればひとつひとつの寄与は例題 2-3 の結果を用いて計算することができる。この領域にある全電荷量は $Q = 2\pi\sigma a da$ であるから、電場への寄与は

$$dE_z(\mathbf{r}) = 2\pi k\sigma a da \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2.34)$$

である。あとは全ての a について積分を行うことで電場が求められる。

$$E_z(\mathbf{r}) = 2\pi k\sigma \int_0^\infty da \frac{za}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = 2\pi k\sigma \left[-\frac{z}{(z^2 + a^2)^{1/2}} \right]_0^\infty = 2\pi k\sigma \frac{z}{|z|} \quad (2.35)$$

確かに z について奇関数になっていることがわかる。

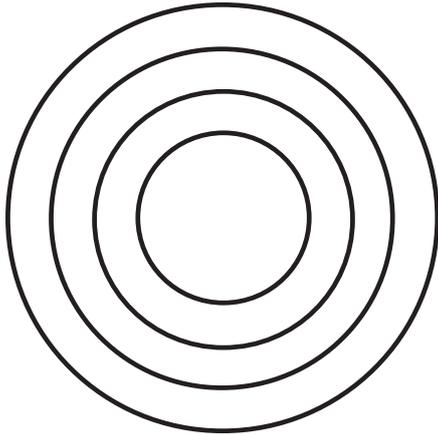


図 2.9: 例題 2-4 の系。紙面上の平面を円で分割する。

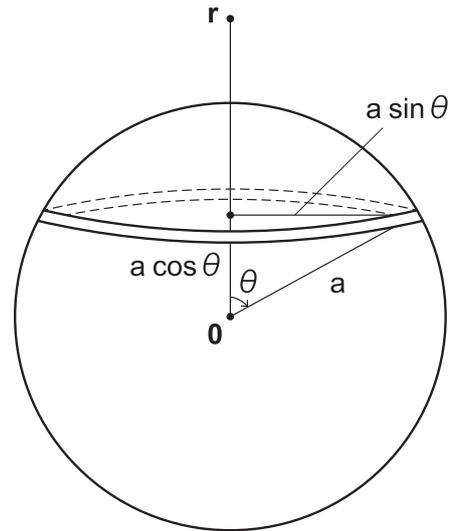


図 2.10: 例題 2-5 の系。球面を分割する。

結果はなかなか面白い。 $z/|z|$ は符号を決めるだけのものであるから、電場は面からの距離に全くよらない。どんなに遠くへ行っても電場は衰えず一定の値をとる。無限の大きさの平面に電荷が分布しているので無限遠点でも電場が有限になるのはおかしなことではないが、非自明な結果ではある。

例題 2-5: 球面上に分布した電荷がつくる電場

最後に、球面上に電荷が一様に分布した系を考えよう。球の中心を原点にとり、球の半径を a とする。

系は球対称であるから、電場の向きは極座標で動径方向となる。つまり、原点から放射状に向いたベクトルとなる。関数も動径座標、原点からの距離のみに依存したものとなる。球面上単位面積あたりの電荷密度は次のように書ける。

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2} \quad (2.36)$$

Q は全電荷量を表す。領域が有限なので全電荷も有限となる。

これまでの計算を活用するために、球を分割してそれぞれの寄与を足し上げる。 $r = (0, 0, r)$ の電場を考えるために、 xy 平面に平行な面で球を輪切りにする (図 2.10)。一つの円は円上の点を表すベクトルと z 軸のなす角 θ によって決まる。わずかな幅をもった領域を考えると、この領域にある電荷量は

$$dQ = \frac{Q}{4\pi a^2} 2\pi a \sin \theta a d\theta = \frac{Q}{2} \sin \theta d\theta \quad (2.37)$$

となる。円の半径が $a \sin \theta$ 、幅が $a d\theta$ であることを用いている。円を含む面と点 $r = (0, 0, r)$ は $r - a \cos \theta$ だけ離れている。これは負にもなる量である。このとき、点 $r = (0, 0, r)$ での電場の z 成分は

$$E_z(0, 0, r) = \frac{kQ}{2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{r - a \cos \theta}{[(r - a \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta]^{3/2}} \quad (2.38)$$

と書くことができる。後はこれを積分すればよい。計算は問題 [2-6] にまわして答えのみを書くことになる。

$$E_z(0, 0, r) = \begin{cases} \frac{kQ}{r^2} & r \geq a \\ 0 & r < a \end{cases} \quad (2.39)$$

$r > 0$ とする。これは点 $r = (0, 0, r)$ の電場の z 成分であるが、計算前の考察を用いると答えを一般化して任意の点 $r = (x, y, z)$ での電場を書き下すことは容易である。すなわち、次のようになる。

$$E(r) = \begin{cases} \frac{kQ}{|r|^2} \frac{r}{|r|} & |r| \geq a \\ \mathbf{0} & |r| < a \end{cases} \quad (2.40)$$

得られた結果は非常に示唆的である。球の外側での電場は原点に電荷 Q をおいたときの電場と見分けがつかない。球から離ればそのようなのは期待されることであるが、 $|r| \geq a$ でありさえすればよいことは自明ではない。一方で球の内側では電場は 0 になる。各点での電荷の寄与はあって有限の電場を与えるのだが、全てを足しあげると相殺して 0 になってしまう。これも非自明な結果である。原点での電場が 0 になることは対称性から明らかであるが、原点以外でも内側の点でさえあれば 0 になるというのは驚きである³⁰。この結果が意味することは次章で議論する。

対称性

対称性 (symmetry) は、ある操作に対する系の不変性である。物理学のさまざまなところであらわれる概念であり、基本法則をつくるための原理となるが、計算上便利な手段となることもよくある。上で行ったように、電荷分布に特別な対称性があると、対応する電場の関数形を計算せずに定めることができる。特に、例題 2-4 では対称性を大いに活用している。

一般には、次の三つを用いることが多い。

- 並進対称性：適当な軸方向へ平行移動することに対する系の不変性（たとえば $z \rightarrow z + z_0$ ）。
- 回転対称性：適当な軸（たとえば z 軸）のまわりに回転することに対する系の不変性。
- 反転対称性：適当な面でひっくりかえすことに対する系の不変性（たとえば $z \rightarrow -z$ ）。

これらは仮想的な操作であって実際に系を動かすわけではないことに注意してほしい。前者二つは連続的に変形できる連続対称性であるが、反転は離散的な対称性である。これら以外にも多種多様な対称性があるが、直観的にわかりやすく計算に応用しやすいのはこれらの三つである。上記の例題の系はそれぞれどのような対称性をもつか考えてみてほしい。

2.4 [補遺] 座標系の表現

デカルト座標 (Cartesian coordinate) は 3 次元空間上の点を表すのに用いられる³¹。3 次元空間上の任意の点は図 2.11 のような互いに直交する三つの軸の値を指すことによって決まり、次のように座標ベクトルを用いて書かれる。

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

3 成分をもつ縦ベクトルとして書かれるが、横ベクトルとして書くことも多い。両者を区別する場合もあるが、本講義ノートではどちらも同じものとする³²。ベクトルは大きさと向きという二つの情報をあわせ

³⁰重力系で同様の計算をしたことがあるかもしれない。球殻上に質量がある系では同様の結果が得られる。

³¹デカルトとは René Descartes のことだが、ラテン語では Renatus Cartesius と書かれる。そのため、英語では Cartesian (カーテシアン、あるいはカルテシアン、カーテシアン) とよばれる。デカルト座標は直交座標とよばれることも多い。

³²行列を扱うようなときは、ベクトルは縦ベクトルとして表す。横ベクトルはベクトルの転置ベクトルとして表記される。

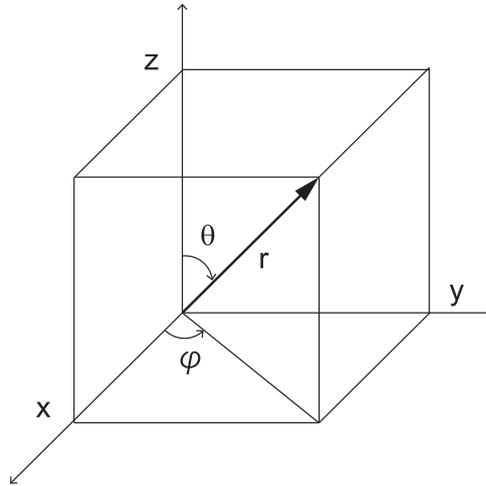


図 2.11: 3次元空間上のベクトル。矢印のベクトル r はデカルト座標 (x, y, z) で指定されるが、極座標 r, θ, φ を用いてもできる。座標系は右手系を用いる。

もつ。それらを指定するには三つの量（ここでは x, y, z ）が必要となる。座標系は右手系（right-handed coordinates）を用いるのが標準である（図 2.11）。右手系とは右手の親指（ x ）・人差し指（ y ）・中指（ z ）で3つの軸をつくったときの位置関係である。左手で同じことをすると位置関係が異なることに注意する。どちらをとるかは好みの問題であるが、ほぼ全ての文献が右手系を用いていることと以降の章で用いる外積は右手系を前提にしていることを考えると、右手系を用いた方がよいだろう。

球対称な系を扱う際には極座標（polar coordinate）を扱うのが便利である。デカルト座標の各成分を次のように書く。

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (2.42)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (2.43)$$

$$z = r \cos \theta \quad (2.44)$$

逆解きして極座標をデカルト座標で表すと

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.45)$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (2.46)$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (2.47)$$

である。 r はベクトルの大きさ、 θ はベクトルと z 軸の間の角度、 φ はベクトルを xy 平面に射影したときにそのベクトルが x 軸となす角を表している。 x, y, z が $-\infty$ から ∞ の任意の値をとることに対して、極座標は次の範囲をとる³³。

$$0 \leq r < \infty \quad (2.48)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad (2.49)$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi \quad (2.50)$$

また、座標ベクトルを次のように書くとベクトルの意味がわかりやすくなる。

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (2.51)$$

³³ θ の上限が 2π でなくて π であることに注意してほしい。図を用いて考えてみるとわかるが、 θ は北極から南極に向かって倒す角度を表す。どちらの方向に倒すかは φ が決める。反対側の点は φ を π だけ変化させることによって到達できる。

三つの基底ベクトルを次のように定義した。

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

これらは互いに直交する向きをもった単位ベクトルである³⁴。

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 \quad (2.53)$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z = 0 \quad (2.54)$$

これらの関係は次のようにまとめて書くことができる。

$$\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = x, y, z) \quad (2.55)$$

μ と ν はそれぞれ x 、 y 、 z のどれか任意のものを表している。右辺は Kronecker のデルタ (Kronecker delta) を表しており、二つの引数が等しいとき 1、等しくないとき 0 をとる。

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (2.56)$$

基底ベクトルは独立 (それぞれ異なる基底ベクトルの線形結合で書くことができない) な大きさ 1 のベクトルである。任意のベクトルはこれらの線形結合を用いて表すことができ、その係数は今の場合 x 、 y 、 z である。任意のベクトルを表せないといけないことと独立であるということから基底ベクトルの数は一意的に決まる。今の場合 3 である。基底ベクトルは互いに独立なものをとってくればよいが、規格化 (大きさ 1) されていて互いに直交するものを用いるのが便利である。

極座標を用いると \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z とは異なる基底ベクトル \mathbf{e}_r 、 \mathbf{e}_θ 、 \mathbf{e}_φ を定義することができる。定義はそれぞれの変数を微小量だけ増やしたときの変化分の方をもつ単位ベクトルとする。 \mathbf{e}_r はベクトルの向きを保ったまま大きさを増やす方向であるから

$$\mathbf{e}_r(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

と書ける。つまり、ベクトル \mathbf{r} は \mathbf{e}_r を用いて

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \quad (2.58)$$

と表される。残り二つの基底ベクトルは次のように書ける (問題 [2-11])、

$$\mathbf{e}_\theta(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

これら三つの単位ベクトルは互いに直交する。

注意してほしいのは、直交座標系で $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と書くのと極座標系で $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ と書くのでは意味が全く異なることである。前者は (2.51) 式を意味しているが、後者は (2.58) 式である。 $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + \theta\mathbf{e}_\theta + \varphi\mathbf{e}_\varphi$ ではない³⁵。なので、 $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ と書くのは推奨しない。

³⁴内積の定義や意味については 3.6 節 (46 ページ) を参照。

³⁵そもそもこの式は各項の次元があていない。まったく意味をなさない式である。

極座標は積分を行うときによく用いられる。関数 $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$ の体積積分は次のように書ける。

$$\int d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz f(\mathbf{r}) = \int_0^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi J(r, \theta, \varphi) f(\mathbf{r}) \quad (2.60)$$

変数変換のヤコビアンは

$$J(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta \quad (2.61)$$

と計算される³⁶。このような極座標への変換は特に関数 $f(\mathbf{r})$ が座標ベクトルの大きさ r のみのときに用いると便利なものとなる。

また、極座標を用いると、球面上での積分は極座標から動径変数 r の部分を除いたものとして書くことができる。

$$\int d\Omega f(\theta, \varphi) = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta f(\theta, \varphi) \quad (2.62)$$

f は θ, φ のみの関数とした。 $d\Omega$ は 2 重積分を表す。 Ω は立体角に他ならない。次章で扱う。

2.5 まとめと考察

本章では、Coulomb の法則から電場を定義し、具体例を用いて性質や計算の仕方を調べた。理解してほしいのは主に以下の点である。

- Coulomb 力の意味と電場の定義
- 連続極限の取り方と電荷密度の定義（和から積分への移行）

再度述べるが、電荷密度のもつ次元は電荷を体積で割ったものになることに注意してほしい。 $\rho(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}$ が点 \mathbf{r} を含む微小領域の電荷量を表す。

身につけてほしいのは次の点である。

- 与えられた電荷分布に対する電場の計算（重ねあわせ、対称性の活用、結果の図示）
- 積分計算（多重積分、ベクトルの扱い方、極座標）

電場は電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ が与えられたとき、(2.21) 式を用いて計算することができる。具体的な計算をいくつか行ってみてわかるのは、電場のふるまいは電荷の配置（電荷分布）に強く依存するということである。こう書くと当然に思えるかもしれない。ただ、いくつかの例で見えてきたように、ひとつひとつの電荷による電場が逆 2 乗則の形をしていても和をとったり積分を行うことで全く異なる関数になってしまう。例えば、線上に分布した電荷から線からの距離に反比例した電場が得られ、面上に分布した電荷から面からの距離によらない電場が得られた。足し上げを行うのは重ねあわせの原理に基づくが、この単純な原理によってさまざまな電場を作り出すことができるようになっている。

電荷分布が規則的であるときの計算は、対称性の知識を活用すると無駄な計算をしなくて済むことが多い。やみくもに (2.21) 式を使うと大変な計算もちょっとした考察で答えが単純な形に制限されてしまうことがある（たとえば (2.33) 式）。対称性は、問題を解くときのみならず法則をつくるときの指針にもなることもある。とても重要な概念である。

以下では、ここまで扱った内容を少し引いた視点から考察してみる。

³⁶ヤコビアンは変数変換によって生じる因子である。くわしくは微分・積分の教科書を参照。

力学と電磁気学

物体が電荷というものをもつと、その大きさに比例した力が働く。それは物体の重さとは異なる要因で起こっているようである。力の大きさも全く違うし、引力どころか斥力まである。とすればそれは重力とは異なる法則になる。新しい法則を作らねばならない。

新しい法則と言えども、運動方程式をたててしまえば力学で（おそらく）さんざん考えたように微分方程式を解けばよい。電荷をもつ物体が Coulomb 力を受けてどのような運動をするか調べることはもちろん面白い問題となりうるし、以降の章でも実際に考えるが、それは電磁気学の目指すところではない。

新しい法則は必然的に力とは異なる概念を扱う。Coulomb の法則は力学と電磁気学をつなぐ概念である。そのような視点をもつと、定数 k が電気という量を力に変換する役割を果たしていることがわかる³⁷。その値自体がどのようにして決まるのかは今のところわからないが、とりあえず外部の要因によって決まるものとしておく。

場の量

導入した電場という概念が便利なのは、注目している物体のもつ電荷量によらず定義できることである。何らかの外的な要因で電場 E というものがもともと存在し、電荷 q をおくと電場に反応した力 $F = qE$ が働くことができる。電場は力学とは関係なく電磁気学の枠内で考察することができる。

物体から切り離された電場の定義は、電場が空間の各点で定義された量 $E(r)$ であることを意味している。物体があるかどうかは関係なく、任意の点を指定するとそこでの量が決まる。このような量を一般に場の量とよぶ。各点にベクトル（大きさと向き）が割り当てられている。

このように定義された電場は物理的実体をもつ量なのだろうか？物理では仮想的な量と物理量を明確に区別する。測定できるものを物理量とすると、今の段階では電場を物理量とよぶべきものなのかどうかはわからない。数学的な記述に便利な仮想的量とも考えられる。

原理と法則

本章で考えた電場の計算では単純で規則的な電荷分布を考えた。どんなに電荷があっても重ねあわせの原理が成り立つとする以上、ひとつひとつを足していけば電場は決まる。重ねあわせの原理はあまり意識せずに用いているが、実のところかなり重要な原理である。このような「原理」というものは、「法則」とはやや異なるものとみなされる。それは何かから導かれるというよりは、はじめに要請として仮定して法則を構築するための頼りとなる。その仮定のもとで結果を得て実験で検証することによってその原理を採用すべきかが決まる。

そしていったんその原理が確立したら、それを陽に述べることはほとんどない。それをもとにして構築された法則は当然ながら自動的にその原理を満たしている。式 (2.21) は電場を計算する便利な公式であるが、重ねあわせの原理をすでに満たしている。これを基本法則としてしまえばわざわざ重ねあわせの原理をもちだす必要がない。

原理は表には出ないところで用いられていることも多い。Newton 力学では Newton 方程式を課してしまえばエネルギー保存則は自動的に満たされている。エネルギー保存則に基づいた定式化をし直すことも可能であるが、どちらかを先にすべきかということは大きな問題ではない³⁸。

³⁷このような観点からすれば、 k を電場を含めない方が自然であるかもしれない。ただ、そうしてしまうと慣習と異なってしまう混乱を招くので、通常の定義に従うことにする。

³⁸解析力学という分野では、ラグランジアンやハミルトニアンといったエネルギーに類した量から運動方程式を得る。その際には最小作用の原理というものが採用される。抽象的だが非常に「美しい」定式化である。

いずれにしろ、このように原理や法則というのはいろいろな形で絡みあっている。それをひとつひとつ解きほぐしていくのが物理学の理解の仕方である。

静電場

上で議論したように、電場は力の法則だけではなく物体からも切り離された独自の存在である。単に力を電荷で割っただけであるが、それでも概念的には非常に大きなステップである。あとはその電場がどのようなものかを考えればよい。

とはいえ、すでに電場は定義されている。電荷分布さえ与えられれば一意的に決まるものであり、これ以上議論する必然性も動機も無いように思える。

電場を実体として見てよいかどうか、これ以上議論すべきことがあるのかどうかまだ判断できないのは、ここまでは特殊な状況のみを考えているのが原因の一端である。ここで考えている電場は、静電場 (electrostatic field) とよばれる。それは、固定された電荷分布に対してつくられる電場を表している。実際には新たに電荷をおくと、作用・反作用の法則にしたがって電荷分布は影響を受ける。それによって電場は変化し、そうするとさらに電荷分布も変化する。このようなことを考えると、Coulomb の法則によって電気の力を説明することは不十分であるように思える。電荷が動いているときも Coulomb の法則は変わらないのだろうか？

本章で考察している電場は時間に依存して変化することは想定していない。電荷を何らかの方法で各点にとどめておくことができた場合につくられる静電場を表している³⁹。動いたとしても動ききってつりあいの状態に達したところでまた新たな静電場が考えられる。もし電場が物理的実体を伴うものであれば、途中経過も記述できて時間に応じて変動するようなものでなければならない。それが、求める電(磁)場の法則である。電場というのが何かはまだよくわからないが、それが「ある」としたらどのように規定されるものなのかというのが問題である。そうすれば、何かという問題に対する手がかりもつかめてくるかもしれない。

今のところ完全な時間発展の法則を記述するにはまだ手がかりが少ない。さしあたってしばらくの間は止まった世界の法則を考えていこう。その静的な系の範囲内で閉じた法則をつくり、それから難しい動的な場合へと拡張していく。電場は抽象的な量であるが、よくわからなくなったら単位電荷に働く力という言葉を出すとよい。

2.6 問題

[2-1] 電荷に働く力

点 $(-a, 0, 0)$ に電荷 q_1 、点 $(0, 0, 0)$ に電荷 q_2 、点 $(2a, 0, 0)$ に電荷 q_3 がおかれている系を考える ($a > 0$)。

(a). 各電荷に働く力を求めよ。

(b). 各電荷に働く力が 0 になるときの電荷間の関係を求めよ。

(c). (b) で静止した電荷は力が働かないからそれぞれ止まったままであるが、きわめて不安定な状態であることを議論せよ。

³⁹何らかの方法とは電気以外の力も必要とするだろう。

[2-2] 二つの電荷がつくる電場

図 2.3 において電場の向きを曲線を用いて表した。各曲線が満たす式を xy 平面で

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2-2.1)$$

と書いたとき、関数 $f(x, y)$ を図の左と右の場合にそれぞれ求めよ。

[2-3] 直線上に分布した電荷がつくる電場

例題 2-2 の系について、(2.30) 式の積分を行え。また、連続極限をとったとき、任意の点での電場を求め、ベクトルの様子（電気力線）や電場の大きさを図で示せ。例題 2-2 では $r = (0, r, 0)$ の点での電場を考えていたことに注意。

[2-4] 面上に分布した電荷がつくる電場

例題 2-4 と同じ系を考える。例題では面を円で分割して重ねあわせの原理を用いて電場を計算した。ここでは面を無数の平行な直線で分割して考え、例題 2-2 の結果を用いて電場を計算せよ。

[2-5] 円内に分布した電荷がつくる電場

xy 平面内、原点を中心とする半径 a の円内に電荷が一様分布した系を考える。全電荷量を Q とする。このとき、 z 軸上の点での電場を求めよ。

[2-6] 球面上に分布した電荷がつくる電場

式 (2.38) の積分を行え。

[2-7] 球内に分布した電荷がつくる電場

半径 a の球内に電荷が一様分布した系を考える。全電荷量を Q とする。このとき、任意の点での電場を求めよ。次章で扱う Gauss の法則に頼らずに (2.21) 式の積分を行う。

[2-8] 電場と電荷分布

電場の様子（電気力線）が図 2.12 のようになる電荷分布は (a)、(b) それぞれどのようなものと考えられるか。図はどちらも $z = 0$ の面とする。

[2-9] 内積

ベクトルの内積を (2.8) 式で定義したが、これは

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2| \cos \theta \quad (2-9.1)$$

と書けることを示せ。 θ は二つのベクトルのなす角度を表す。

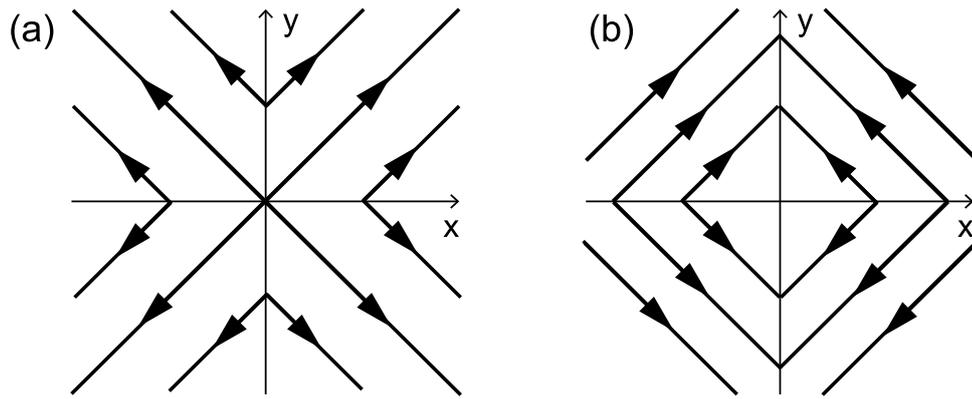


図 2.12: 問題 [2-8] の電場の様子。

[2-10] 極座標の基底ベクトル

極座標 r, θ, φ では基底ベクトル e_r, e_θ, e_φ を定義することができる。これらはそれぞれの変数を微小量だけ増やしたときの変化分の方角をもつ単位ベクトルである。このとき、(2.59) 式を示し、三つの基底ベクトルを図示せよ。

[2-11] 円柱座標

円柱座標 (cylindrical coordinate) では、直交座標 (x, y, z) のうち z をそのまま使い、残りの x, y について 2 次元極座標変換

$$x = \rho \cos \varphi \tag{2-11.1}$$

$$y = \rho \sin \varphi \tag{2-11.2}$$

を行う。円柱座標 ρ, φ, z について、3 次元極座標と同様の公式 (基底ベクトルや変換のヤコビアン等) をまとめよ。

第3章 Gaussの法則

前章で導入した電場が満たす Gauss の法則を導く。Gauss の法則は一種の保存則である。電場が満たすべき簡単な法則であるのだが、それが電場を規定するもの(のひとつ)となる。Gauss の法則を用いると、ある種の系の電場を簡単に求めることができる。

3.1 流束

3.1.1 電気力線

電場 $E(r)$ はベクトルであり、各成分は座標 r の関数である。これは各点にベクトルが配置されているということである。例えば、空間の一点に正の電荷をおいたとき、ベクトルはその点を中心として放射状に外を向いたものとなる。その大きさは電荷から離れると小さくなる。そのような矢印をつないだたくさんの線を描くことができ、それらは電気力線 (line of electric force) とよばれる。具体的には前章で扱った例で見ることができる。図 2.3 (22 ページ) において電気力線の例を示し、問題 [2-2] (34 ページ) で電気力線の軌道を表す式を考えた。電気力線のある空間に電荷をおくと力の働く向きがわかる¹。電場を表すそのような「流れ」をどのように特徴づけるかが本章の問題である。

点電荷 q があるとき、点電荷を中心とする半径 R の球を仮想的に考えてその領域からどれだけの電気力線が出ているかを表そう。球面上の点の電場はその点と点電荷 (球の中心点) を結ぶ直線の向き、つまり点電荷の位置を原点とした極座標の動径方向、をもち、大きさは $E = kq/R^2$ である²。これを

$$4\pi R^2 E = 4\pi kq \quad (3.1)$$

と書く。 $4\pi R^2$ は球の表面積を表す。電場に表面積をかけた量は R によらず中心の電荷のみによって決まる。

面白いことに、この結果を一般化してどんな領域や電荷分布を考えても同様の法則が成り立つ。それが Gauss の法則である。

3.1.2 電気力束

流れを特徴づける量について考察する。前章で、ある点を含む体積領域にどれだけの電荷が含まれるかを表す量として電荷密度を定義した。これは空間座標の各点で定義されたスカラー量であり、流れではない。対して、電場は空間座標の各点で定義されたベクトル量である。つまり、大きさだけでなく向きという情報ももっている。流れの特徴を捉えるには、ある仮想的な領域に対してどれだけの量が外に出ていくか、中に入ってくるかを考えればよい。

式 (3.1) の左辺は、電気力線がどれくらい球面を貫いているかを特徴づける量になっている。式 (3.1) は、その量が球内部にある電荷量によって決まっていることを表している。そこで、(3.1) 式左辺を一般化したものを特徴量として採用する。

¹力の向きと運動の方向は一般に異なる。力学でそのような例を扱ったはずである。

²大きさと書いているが、 q の符号に応じて電場も逆向きになるので負になることもある。正確にいうと、ここでの E は E の動径方向成分を表している。

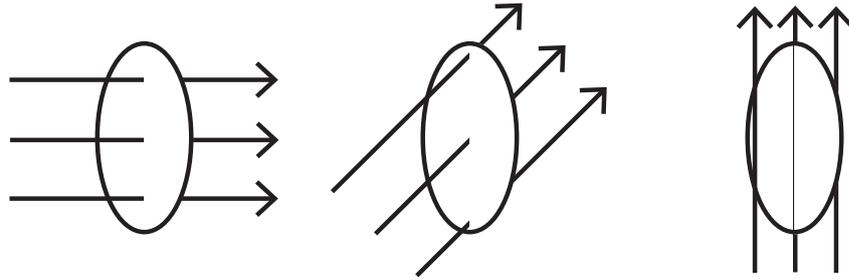


図 3.1: 面を貫く電気力線の例。定ベクトルに対して平らな面を考えると、流束の大きさはベクトルが面を垂直に貫くとき（左）最大、面に沿っているとき（右）最小（0）になる。

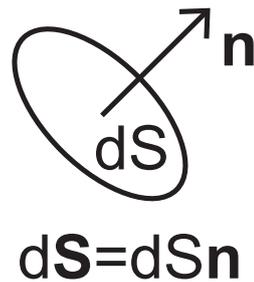


図 3.2: 面要素とそれを表すベクトル。

電場のある空間中で仮想的な面を考える。その面を貫く電気力線の一般的な様子を図 3.1 に示す。一般に、面の各点で電場の大きさ、向きは異なっている。電気力線は面に直交していることも斜めになっていることもある。同じ大きさの電場でも向きによって面の貫き方は異なるので得られる特徴量の値も異なってくる。特徴量は電気力線が面に直交するときに最大になり、平行のときに 0 になるようなものである³。そこで登場するのがベクトルの内積である⁴。

面の各点で電場が異なるという問題は微小面を考えればよい。それを $dS = dSn$ としよう。 dS は面積、 n は面の向きを表す単位ベクトルである（図 3.2）。面に垂直な方向をその面の向きとする⁵⁶。例えば xy 平面にある面であれば z 軸がその向きとなる。面には表と裏があるのでベクトル n は 2 通りの向きが考えられるが、適当な規則を用いて決める。これについては後に述べる。

電場にも大きさと向きがありベクトルで表されているので、それらの内積をとって $E \cdot dS = E \cdot ndS$ というスカラー量を考えよう。これは電場の大きさと面積それぞれに比例する量であり、互いの向きに依存するから、考えたい特徴量をうまく表現できている。実際、電場の方向が面の向きであれば $|E|dS$ となるし、直交すれば 0 となる。これがその点での流れを特徴づける量となる⁷。

微小面で特徴量を定義することができれば、任意の有限領域に拡張することは（原理的には）容易である。面 S 上で積分を行えば、その面を貫く特徴量を計算することができる。積分は次のように表される。

$$\Phi_S = \int_S dS(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.2)$$

³面が存在する平面とそれを貫くベクトルが直交しているとき直交、平行のとき平行としている。当然に思えるが、以下で面の向きを定義すると混乱してくる。ここは直観的な捉え方でよい。

⁴3.6 節の補遺参照。

⁵微小な面を考えているので面は平らとみなしてよい。どんなに曲がった面でも細かく分割すれば各微小面は平らとみなせる。こういった微小量の活用の仕方は物理の常套手段である。

⁶面の向きを表すベクトルが微小面のある平面と直交しているので、やや違和感のある定義かもしれない。とはいえ、そうすれば面の向きを一意的に定めることができる。

⁷この定義が適当でない可能性もあるが、これがもっとも自然であるし、だめだったら修正すればよい（これでうまくいくから扱っているのだが）。

これは面積分 (surface integral) を表す。面積分は、面を微小要素に分割して和をとったものに対して、微小面積が 0 の極限をとることによって定義される。前章の体積積分のときと同様である。面積分は 2 重積分である⁸。面積分の扱いは線積分と同様なので後で述べる⁹。

特に、面が球のように閉じた閉曲面であるとき、次のように書く。

$$\Phi_S = \oint_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.3)$$

右辺の積分記号 \oint は閉じた曲面についての積分を明示するときに用いられる¹⁰。面の向きは領域外側が正の向きになるようにとる。原点に電荷 q がおかれたときの電場に対して、 S を原点を中心とする半径 R の球面にとったものが (3.1) 式左辺である。

Φ_S は指定された面 S をどれだけ電気力線が貫いているかを示す量であり、電気力束 (flux of electric force) あるいは (電場の) 流束 (flux) などとよばれる¹¹。電気力束は (k の次元) · (電荷) の次元をもつ。よって Φ_S/k が電荷に関する量と関係づけられることが示唆される。

3.2 Gauss の法則の積分形

3.2.1 Gauss の法則

Gauss の法則 (Gauss's law) は次のように書かれる。

$$(\text{閉曲面 } S \text{ に対する電気力束}) = 4\pi k \times (\text{閉曲面 } S \text{ によって囲まれる領域に含まれる電荷量}) \quad (3.4)$$

具体的に式を用いて表現すると

$$\oint_{S=\partial V} d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \quad (3.5)$$

である。これが Gauss の法則の積分形である¹²。 S は仮想的な任意の閉曲面、 V は閉曲面 S によって囲まれる体積領域を表す。右辺はその閉じた曲面が囲む領域の体積積分を表している。 S と V は独立ではないので、それらの関係を明示するために $S = \partial V$ と書いている¹³。

面要素ベクトル $d\mathbf{S}(\mathbf{r}) = dS(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})$ の向き $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ であるが、閉曲面の場合、外側を表 (正の向き) とすればよい。これは、もっとも簡単な点電荷を囲む球の例で考えればそうすべきであることがわかる。よって一般の場合にも同様にすればよい。

Gauss の法則は電気力線の保存則を表しており、どのような体積領域 V を考えようとも成り立つ。領域は電荷や導体に関係なくどこに配置してもよいし、穴が空いたドーナツのような形でもよい。非常に強力な公式である。

3.2.2 立体角

Gauss の法則を証明するには立体角 (solid angle) の概念が役に立つ。ここではその定義を行う。

⁸この場合、 dS はベクトルであり、面の向きを考慮する必要がある。例題 2-4 (25 ページ) 2-5 (27 ページ) でも面積分を扱ったが向きは考えていない。

⁹55 ページの囲み参照。

¹⁰通常の積分記号で書いても違いはない。閉じたということを強調したいときに用いる。

¹¹ Φ は ϕ , φ の大文字。ファイと読む。ギリシャ文字の記号をよく用いるので読み方をひと通り覚えておくとよい。

¹²積分形と明記するのは微分を用いた微分形の表現もあるからである。後で扱う。

¹³ ∂ は偏微分記号と同じ記号。たとえば球の体積 $\frac{4\pi}{3}r^3$ を半径 r で微分すると球面の面積 $4\pi r^2$ になるという性質に基づく表現である。

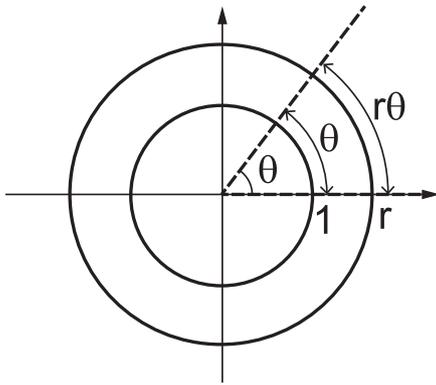


図 3.3: 角度と円弧。長さ 1 の円弧の長さが θ のとき、その弧のもつ角度を θ ラジアンと定義する。同じ角度をもつ半径 r の円弧の長さは $r\theta$ となる。

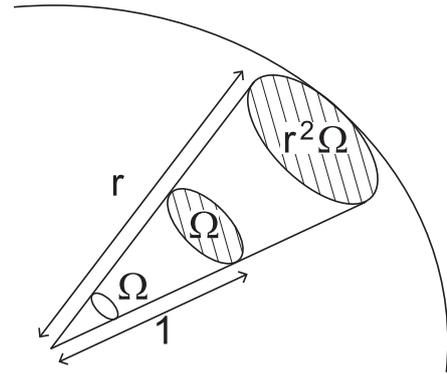


図 3.4: 立体角の定義。 $r^2\Omega$ は半径 r の球面上の曲面積を表す。斜線の面は球表面に沿った形をしており、平らではないことに注意。

遠くのもの小さく見える。10cm 先の 1cm^2 の面と 100m 先の 1cm^2 の面の見え方は全く異なる。同じ面でもそれがどれだけの距離にあるかで見え方は異なるので、それらを面積のみで比較することには無理がある。遠さを考慮した面積の指標を導入する必要がある。

そこで考えられるのが立体角の概念である。立体角は、よく用いられる平面角度ラジアン (radian) の定義の自然な一般化となっているのでまずその定義を復習しよう。

2次元平面において、原点の観測点を中心にもつ円を考える。円の半径は考えている単位で 1 とする。1m でも 1cm でも何でもよい。このとき、図 3.3 のように円弧を切り取るように二つの直線を原点から引く (図の破線)。円弧の長さが θ であるとき、二つの直線がなす角度を θ ラジアンと定義する。このとき、半径が r の円を描くと角度 θ によって切り取られる円弧の長さは $r\theta$ となる。 θ は 0 から 2π の値をとる。 2π となるのは円周の長さが $2\pi r$ であることによる。 r が大きいほど円弧の長さは大きくなるが、どのような半径の円でも弧が同じ角度 θ によって特徴づけられる。長さの単位としてどのようにとってもよいと述べたが、それは角度が長さの比として定義されていて答えは単位の取り方に依存しないからである。

2次元における平面角の考え方を任意の次元に一般化するのは容易である。3次元の場合の角度が立体角である。観測点を原点としてそれを中心点にもつ単位球を考える。このとき、図 3.4 のように原点を頂点とする円錐形状の領域をとると、それは単位球の一部を切り抜く。切り抜かれた球面上の面積が Ω であるとき、その切り口を表す「角度」を立体角 Ω ステラジアン (steradian) とする¹⁴。半径 r の球を考えたととき、立体角 Ω の円錐が切り抜く面の面積は $r^2\Omega$ となる。立体角 Ω は 0 から 4π の値をとる。上限の値は球の表面積が $4\pi r^2$ であることからわかる。

3.2.3 領域の変形

Gauss の法則がどのように証明されるかを議論する。完全な証明ではないが、ここでの議論を拡張すれば一般の場合の証明は容易である。

原点に電荷 q があるとき、領域 V を原点を中心にもつ球にとる。このとき、Gauss の法則 (3.5) 式が成り立つことは本章最初の節で述べた。ここでは任意の領域で成り立つことを示すために V を変形することを考える。たとえば球を立方体に変形する。変形した領域が電荷を含む限り、(3.5) 式右辺の全電荷量は変

¹⁴ステラジアンの記号は sr である。ただし、角度は無次元量であり通常の単位とは異なるのであまり気にすることはない。

わらない。したがって、左辺の電気力束 Φ が変わらないことを示せば任意の領域について成り立つという Gauss の法則が確かめられる。

球を任意の形に変形するには図 3.5 のように球を細かいブロックに分けてそのブロックをとったりつけたりしていけばよい。ブロックの大きさを無限に小さくしていけばどんな形でもつくることができる。そして、電荷を含まない一つのブロックに対して Φ が変化しないことを示せばよい。

一つのブロックは dS の曲面、 dS' の曲面、それらをつなぐ側面によって囲まれている。まず、 dS について面を貫く流束を考える。面の向きを外側にとると電場の向きと一致しているので

$$dS \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = kq \frac{dS}{r^2} \quad (3.6)$$

となる。同様にして、 dS' について

$$dS' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') = -kq \frac{dS'}{r'^2} \quad (3.7)$$

である。面の向きを領域外側にとるので、電場と面の向きは逆となり負符号がつく。最後に側面であるが、側面は電場の向きに沿っているので流束への寄与は 0 となる¹⁵。以上より、このブロックを新たに加えることによる流束の変化は

$$d\Phi = kq \left(\frac{dS}{r^2} - \frac{dS'}{r'^2} \right) \quad (3.8)$$

となる。これは 0 である。なぜなら、立体角の定義より

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{dS'}{r'^2} \quad (3.9)$$

となるからである。

このようにして、わかりやすい球から変形して任意の領域に対しても Gauss の法則が成り立っていることを示すことができる。ここでは電荷が一つしかない場合を考えたと、重ねあわせの原理が成り立つとするとどれだけ電荷を増やしても証明は一つ一つに対して行えばよいから、どんな電荷分布でも成り立っていることは明らかである。電荷が領域外側にあっても証明の仕方は変わらない。

証明のポイントは面要素 dS が r^2 に比例してそれが Coulomb 力の $1/r^2$ と相殺しあうことである。前者は面が 2 次元的なものであるという幾何学的な性質からきており、後者は Coulomb 力の法則によるものである。偶然かもしれないが、幾何学と力学法則が関連しあっているように見えることはたいへん興味深い。

3.3 Gauss の法則の応用

Gauss の法則がわかると何がうれしいのだろうか。前にも述べたように、Coulomb の法則と重ねあわせの原理があれば全ては事足りる。とりあえずここでは、電荷分布が与えられたときに電場を Gauss の法則を用いて計算する。

例題 3-1: 球面上に分布した電荷

例題 2-5 (27 ページ) と同じ例を Gauss の法則を用いて考える。半径 a の球面に電荷が一様に分布している場合である。全電荷量を Q とする。

¹⁵領域を今考えているようにとったのはこれらの性質があるからである。計算しやすいように領域を分割するのがポイントである。これは Gauss の法則を用いた計算を行うときにたびたび用いるテクニックである。以下の例参照。

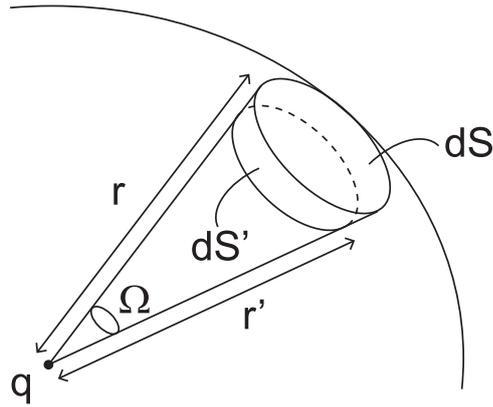


図 3.5: dS は半径 r の球面上の微小面要素、 dS' は r' の球面上の微小面要素をそれぞれ表す。面の大きさや $|r - r'|$ は十分小さいとする。 dS や dS' は球面上の面なので曲がった面であるが、小さくとればほぼ平らな面とみなしても差し支えない。 dS と dS' の間の領域を一つのブロックとする。任意の体積領域はこのようなブロックをとったりつけたりすることで得ることができる。

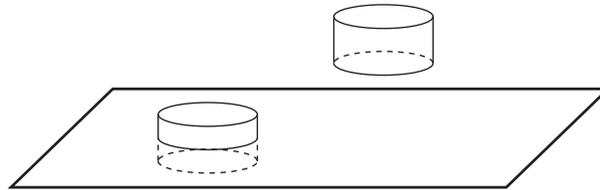


図 3.6: 例題 3-2 の系。平面上に電荷が一様分布している。Gauss の法則に用いる領域として、平面と交わる円柱 (左) と交わらない円柱 (右) を考える。両方とも底面が面に平行になるようにとる。

このとき、例題 2-5 と同様に考えて電場は原点からの距離 r のみに依存して向きは動径方向となる。動径方向成分の電場を $E(r)$ とする。球面と同じ中心点をもつ半径 r の球を考え、その領域に対して Gauss の法則 (3.5) 式を適用する。左辺の面積分は球面上で電場の大きさは一定であることと面要素と電場の向きが同じであることを用いて

$$\oint_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi r^2 E(r) \quad (3.10)$$

と計算できる。 $4\pi r^2$ は球の面積を表す。右辺は、半径 r が a より大きければ全電荷 Q を含むし、小さければ電荷は 0 であるので、

$$4\pi k \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} 4\pi k Q & r \geq a \\ 0 & r < a \end{cases} \quad (3.11)$$

となることがすぐわかる。両者を等値して

$$E(r) = \begin{cases} \frac{kQ}{r^2} & r \geq a \\ 0 & r < a \end{cases} \quad (3.12)$$

となり、例題 2-5 の結果と一致する。

例題 3-2: 平面上に分布した電荷

無限に広い平面上に電荷が一様に分布した系を考える (例題 2-3 (24 ページ))。この場合の電場の向きを考慮して、考える領域を図 3.6 のようにとってみよう。平面に平行な円柱である。このように領域をと

ると、底面で電場は面に垂直になり、側面で面に沿った向きとなる。よって流束の寄与は二つの底面から生じる。円柱が電荷のある平面によって2等分される場合(図左)、円柱の半径を a とすると

$$\pi a^2 E(z) - \pi a^2 E(-z) = 4\pi k \cdot \pi a^2 \sigma \quad (3.13)$$

となる。 z は底面の平面からの距離、 $E(z)$ は平面に垂直な方向の電場を表す。 $E(z)$ が奇関数であることを用いると

$$E(z) = 2\pi k \sigma \frac{z}{|z|} \quad (3.14)$$

が得られる。例題 2-3 の結果と一致している。

円柱が電荷のある平面を含まない場合(図右)、 z_{\pm} を二つの底面の平面からの距離として

$$\pi a^2 E(z_+) - \pi a^2 E(z_-) = 0 \quad (3.15)$$

となり、 $E(z_+) = E(z_-)$ を得る。これは電場が平面からの距離によらないことを示している。上で得た結果と矛盾しない。

以上の例題で考えたような幾何学的に単純な形状の場合、積分を非常に簡単に行えることが Gauss の法則を用いる利点である。これらの例では、面積分の面の向きと電場の向きが一致あるいは直交しているので、簡単に計算できる。前章でも行った対称性の議論が重要な役割を果たしている。したがって、このような議論ができない複雑な電荷分布の系では積分を行うことは難しい。その場合は Coulomb の法則から直接計算するのが適切な方法となる。

また、この方法は領域の取り方にも強く依存する。原理的にはどんな取り方でもよいが、何も新しい結果が出ないときもあるし計算ができないときもある。効果的な取り方を見つけることがポイントになる。

Gauss の法則の積分形を用いた計算の仕方

- [1] 与えられた電荷分布から、対称性の議論を用いて電場の向きや関数形(何の変数によるか)をできるだけ詳しく定める。たとえば例題 3-1 では $E(\mathbf{r}) = E(|\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ 、例題 3-2 では (2.33) 式 (25 ページ) である。それぞれの未定関数部分を以下で決める。
- [2] 前項で得た関数形に応じて領域 V 、 $S = \partial V$ を適当に設定する。「適当」とは次項の計算ができるようなもの。
- [3] 定めた領域に対して、Gauss の法則 (3.5) 式の両辺をそれぞれ計算する。左辺は未定関数を用いて表し、右辺は与えられた電荷分布を用いて計算する。
- [4] 両辺を等置し、未定関数を定める。
- [5] ひとつの V で答えが完全に定まらない場合は、他の領域をさらに考える。

よくある誤りは、[1] を議論しないで [2] からの計算を行おうすることである。電場の関数形を決めずに Gauss の法則を用いても一意的に答えを得ることはできない。Gauss の法則はどんな場合にも成り立つが、具体的な計算ができる例は限られている。答えを得るためには [1] の議論は必須である。自明だと思って省略してはならない。

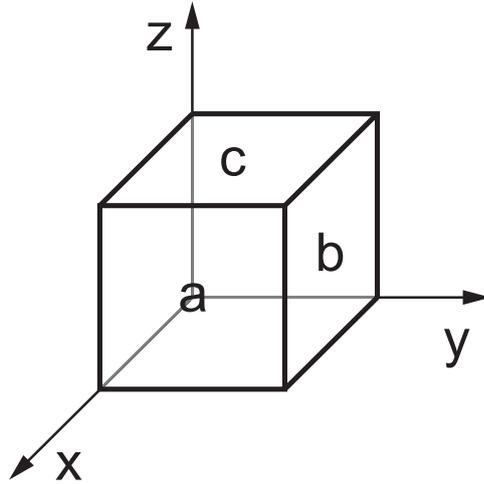


図 3.7: 原点を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とし、 $dx dy dz$ の体積をもつ直方体を考える。

3.4 Gauss の法則の微分形

Gauss の法則 (3.5) 式は、積分を用いて表現されている。有限領域における電場に関する和を表したものであり、各点での電場を求める目的には向かないように思える。前節での応用例では、対称性の高い系を考え電場の関数形を定めることによって欠点を克服していた。もちろん一般にはそのような議論を行うことができない。

どんな領域をとってもよいという利点はまだ十分に活用されていない。電荷分布がどのようなものであろうとも、領域はこちらの都合で自由に選べる。特に、領域を 1 点に縮めることによってその点での電場の性質が抽出できるのではないかと考えられる。それがここで導く Gauss の法則の微分形である。

図 3.7 のように、点 \mathbf{r} 付近の微小直方体を考える。直方体にするのは計算が行いやすいようにである。1 点に縮めれば細かな構造の差異はなくなるはずである。直方体に沿って直交座標軸をとり、それぞれの辺の長さを dx 、 dy 、 dz とする。六つの頂点は (x, y, z) 、 $(x + dx, y, z)$ 、 \dots 、 $(x + dx, y + dy, z + dz)$ である。

まず、図の面 a とその反対側の面 \bar{a} に対して流束を計算する。面が微小であれば、電場の値はその面の中心の値で近似できる¹⁶。それぞれの面の面積は $dy dz$ であって、向きは外向きであることを考慮すると

$$\int_{a, \bar{a}} d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sim dy dz E_x \left(x + dx, y + \frac{dy}{2}, z + \frac{dz}{2} \right) - dy dz E_x \left(x, y + \frac{dy}{2}, z + \frac{dz}{2} \right) \quad (3.16a)$$

$$\sim dx dy dz \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} \quad (3.16b)$$

となる。2 行めでは関数 E を点 (x, y, z) のまわりで微小量の 1 次まで展開している。他の面の寄与も同様に表現できる。全てあわせると

$$\oint d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sim dx dy dz \left(\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} \right) \quad (3.17)$$

となる。一方、電荷の体積積分は単純にその点の電荷密度に微小体積をかければよい。

$$4\pi k \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \sim 4\pi k dx dy dz \rho(\mathbf{r}) \quad (3.18)$$

これらを等値して

¹⁶中心でなくても端でもよい。極限をとれば違いは生じない。確かめてみよう。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k\rho(\mathbf{r}) \quad (3.19)$$

となる。右辺の被積分関数は関数 $E(\mathbf{r})$ の発散 (divergence) というもので、

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (3.20)$$

と定義される。記号 ∇ はナブラ (nabla) とよばれるベクトル微分演算子で

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.21)$$

と書ける。詳しくは下記の囲み参照。

式 (3.19) は Gauss の法則の微分形とよばれる。ある点での電場の変化率 (微分) がその点での電荷密度に等しいことを意味している。電荷がない点では電場の発散は 0 になるはずである。たとえば、例題 3-1 の球面上に電荷が分布した系を考えよう。 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ に注意して、球の半径 a より大きい点 $r > a$ での電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = kQ\mathbf{r}/r^3$ を微分すると

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = kQ \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} \right) \quad (3.22a)$$

$$= kQ \left[\frac{3}{r^3} + \left(x \frac{\partial r}{\partial x} + y \frac{\partial r}{\partial y} + z \frac{\partial r}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^3} \right] \quad (3.22b)$$

$$= kQ \left[\frac{3}{r^3} + \left(\frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r} \right) \frac{-3}{r^4} \right] \quad (3.22c)$$

$$= 0 \quad (3.22d)$$

となって確かに満たされている。 $r < a$ のときも電場は 0 なので成り立つ。

定義式を見るとわかるように、点電荷がある点では電場は発散する。そのような点で微分を行うことはできない¹⁷。ただし、問題 [2-7] (34 ページ) で扱う電場の場合には有限の電荷密度の領域でも微分を行うことが可能である (問題 [3-5])。

¹⁷デルタ関数を導入すれば適切に扱うことができる。5.6 節 (65 ページ) の補遺参照

∇ と grad、div、rot

ナブラは

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.23)$$

と書かれるベクトル微分演算子である。次のように書くこともある。

$$\nabla = \partial_r = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (3.24)$$

微分演算子であるので単独では意味をもたない。r の関数にかかるものと想定されている。

∇ がスカラー関数 φ(r) にかかる場合は勾配 (gradient) とよばれる。

$$\text{grad } \phi(\mathbf{r}) = \nabla \phi(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial x}, \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial y}, \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial z} \right) \quad (3.25)$$

スカラー関数 φ(r) の勾配はベクトルである。勾配は次章で用いる。

∇ とベクトル関数 E(r) の内積は発散を表す。

$$\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\partial E_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial E_y(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial E_z(\mathbf{r})}{\partial z} \quad (3.26)$$

内積なのでベクトル関数の発散はスカラーである。

∇ とベクトル関数 E(r) の外積は回転 (rotation) を表す。

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial E_z(\mathbf{r})}{\partial y} - \frac{\partial E_y(\mathbf{r})}{\partial z}, \frac{\partial E_x(\mathbf{r})}{\partial z} - \frac{\partial E_z(\mathbf{r})}{\partial x}, \frac{\partial E_y(\mathbf{r})}{\partial x} - \frac{\partial E_x(\mathbf{r})}{\partial y} \right) \quad (3.27)$$

ベクトル関数の回転はベクトルである。

内積や外積については 3.6 節の補遺を参照。勾配は 3 次元空間上のスカラー関数 φ(r) の各方向の傾きという意味をもつ。力学におけるポテンシャルや次章の電位を扱うときに用いる。発散はベクトル場の流れの湧き出し・吸い込み度合いを表している。本節の議論をよく理解してほしい。式 (3.16) の計算が発散の直感的な意味を的確にとらえている。回転は流れの回転の度合いを表している。これについては次章で議論する。以下の考察でも述べるが、電磁気学はこれらの演算の直観的な意味を理解するのに理想的な題材を与えてくれる。

初学者にありがちな誤りは極座標の場合の表現である。上の式で (x, y, z) を (r, θ, φ) に変えればよいわけではない。次元の違う量 (長さと角度) を並列しているので 2.4 節で書いたような注意点があるし、基底ベクトル (e_r, e_θ, e_φ) が座標に依存するからでもある。本講義では用いないので導出は省略するが、間違っ書かないように正しい式を書いておく。

$$\nabla \phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (3.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_\varphi \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\varphi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_\theta \right) + \mathbf{e}_\theta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right) \\ &\quad + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} E_r \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_r \mathbf{e}_r + E_\theta \mathbf{e}_\theta + E_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ とした。

3.5 Gauss の定理

Gauss の法則の微分形は、Gauss の定理 (Gauss's theorem) を用いて示すこともできる。前者は物理的な法則であるが、後者は純粋に数学的な公式を表す¹⁸。

Gauss の定理の公式は次のように書かれる。

$$\oint_{S=\partial V} d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.31)$$

これは任意のベクトル関数 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ に対して成り立つ。左辺は閉曲面 S についての面積分、右辺は S を境界にもつ領域 V についての体積積分を表す。Gauss の定理は、発散を用いるので発散定理 (divergence theorem) ともよばれている。

証明は空間を微小領域に分割することでなされる。一つの領域で成り立っていればそれを足し合わせることで Gauss の定理を示すことができる。積分はそのような微小空間による寄与の和の極限として表される。微小空間の大きさを 0 にとることによって離散的な和が連続的な積分におきかわる。微小領域を考えればよいので、結局のところ証明は前節のものと同質的と同じである ([3-7])。

Gauss の定理を Gauss の法則 (3.5) 式の左辺に用いると

$$\int_V d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \quad (3.32)$$

となる。両辺は同じ体積積分を表している。この体積 V は全空間領域ではなく任意のものにとることができる。微小領域をとっても成り立つ関係式である。すなわちそれは積分が等しいどころか積分を行う前の被積分関数が等しいことを意味する。このようにして Gauss の法則の微分形 (3.19) 式が得られる。

3.6 [補遺] 内積と外積

本節では 3 次元ベクトル

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = A_1 \mathbf{e}_x + A_2 \mathbf{e}_y + A_3 \mathbf{e}_z \quad (3.33)$$

について、本章と以降の章で用いるベクトル演算の規則をまとめる。

二つのベクトル \mathbf{A} 、 \mathbf{B} について、内積 (inner product) またはスカラー積 (scalar product) を

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad (3.34)$$

と定義する¹⁹。二つのベクトルの内積をとることによってスカラー量が得られる。幾何学的には内積は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta_{AB} \quad (3.35)$$

という形に書くことができる (問題 [2-9])。 $|\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$ はベクトル \mathbf{A} の大きさ、 θ_{AB} は二つのベクトルのなす角度である。この式から、ベクトルの大きさをそれぞれ固定したとき、二つのベクトルが同じ向きするとき最大値 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ 、逆向きするとき最小値 $-|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ 、直交するとき 0 になることがわかる。

¹⁸J. C. F. Gauss が 1813 年に発見したとされている。一般的な定理として証明したのは M. B. Ostrogradsky である (1831 年)。

¹⁹英語では dot product ともいう。

ベクトルの外積 (outer product) またはベクトル積 (vector product) は

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ A_3 B_1 - A_1 B_3 \\ A_1 B_2 - A_2 B_1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

と定義される²⁰。ベクトルの外積はベクトルになる。大きさは

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \theta_{AB} \quad (3.37)$$

となり、向きは \mathbf{A} と \mathbf{B} のベクトルが属する面に垂直な方向となる。 \mathbf{A} が x 軸、 \mathbf{B} が y 軸を向いているとき、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ は z 軸を向く。向きはいわゆる右ねじの法則で考えればよい²¹。大きさは、二つのベクトルが同じか逆の向きするとき 0、直交するとき $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ になる。ベクトルをいれかえると符号が変わる性質

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (3.38)$$

は特筆すべきである。これはベクトルの並び順を (符号を変えることなく) 勝手に変えてはいけないことを意味している。また、この式で $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ とおくと

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (3.39)$$

を得る。左辺の量はベクトルなのでそれにあわせて右辺のゼロも太字で書く。各成分が 0 のベクトルである²²。

外積を用いるとデカルト座標の基底ベクトル (2.52) 式 (30 ページ) を次のように書くことができる。

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \quad (3.40)$$

$$\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \quad (3.41)$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \quad (3.42)$$

$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow \dots$ という順番を保っていることに注意すれば簡単に覚えられる。

次の公式が便利である。以降の章でも用いる。

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (3.43)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (3.44)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (3.45)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.46)$$

三つめの公式はベクトルとして微分演算子 ∇ を用いたものである。その場合、微分演算子は単独では意味がなく何かに作用して初めて意味をもつ。微分演算子は作用する関数より左側に配置されないといけない。したがって、二つめの式の \mathbf{A} 、 \mathbf{B} にそれぞれ ∇ をそのまま代入すると三つめの式とは異なるものになってしまう。

なお、これらの式で括弧をつけて書いてあるが、ベクトルの演算規則を考慮すれば $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ は $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ であって $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ ではありえないのでつける必要はない。一方、 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ なので外積の三重積の場合には括弧をつける必要がある。前者の場合でも紛らわしいので括弧をつけて書くのも悪くない。

²⁰cross product ともいう。

²¹座標系は右手系を用いていることに注意。

²²太字にしないことも多い。

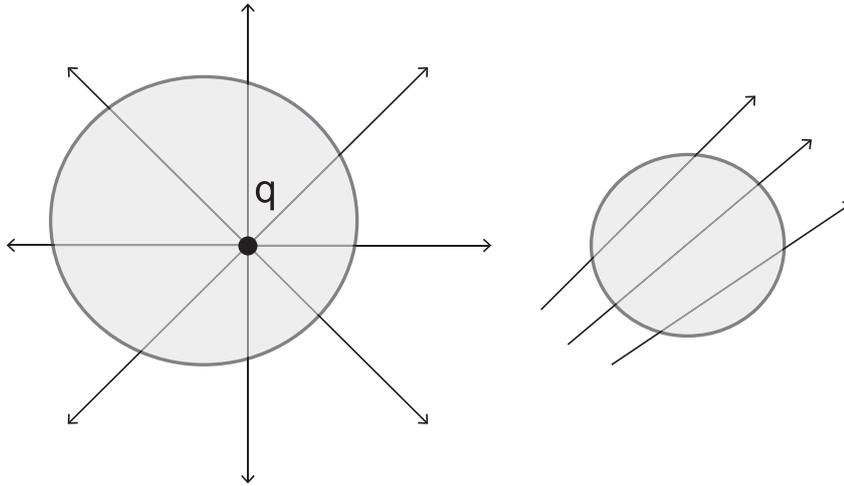


図 3.8: Gauss の法則。任意の閉曲面 $S = \partial V$ を出ていく電気力線の量は流束 $\Phi = \oint_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$ で表され、それは中に含まれている電荷 $q = \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r})$ に比例している。中に含まれている電荷量が 0 のときは、入ってきた電気力線は必ず外に出ていく。

3.7 まとめと考察

本章では Gauss の法則を扱った。次の点を理解することが主な目的である。

- 流束の概念
- Gauss の法則の意味
- 法則の積分形を用いた電場の計算
- 法則の積分形と微分形の関係

Gauss の法則は電場の満たすべき方程式であり、図 3.8 のように表すことができる。任意の仮想的な閉領域に対して計算される流束が領域に含まれる電荷に等しい。この法則を用いると、電荷分布が単純であるときに具体的に電場を求めることができる。電場のとりうる関数形を対称性より判断し、適切な領域をとることによって関数を求めるプロセスは実際に手と頭（の内部）を動かして考えてほしい。

Gauss の法則には積分形と微分形があるが、両者は等価である。法則の微分形はさしあたって本章ではあまり用いなかったが、先に進むにつれ重要になってくる。特に第 III 部では微分形を用いた議論が中心となる。積分形からどのような論理で微分形が導かれるか今のうちに理解しておいてほしい。

流束

Gauss の法則は流束というものをを用いて表現される。これは電磁気学に限らず、任意のベクトル場があれば定義できるものである。ベクトル場とは空間の各点に配置されているベクトルの集合である。たとえば言う、水中の水の流れである²³。ある仮想的な体積領域を考えると、その中にある水の量はほぼ一定であることが多い。ところが水の構成要素はいろいろな運動をしているから、その領域を絶えず出入りしたりしている。そのような出入りの度合いを特徴づけるのが流束である。

ただし、このような説明を行うと誤解を招く。水の例では実際に入出入りする水というものがあるが、ここで考えている電場は今のところ何かが動いているというわけではない。前章でも述べたように時間変化

²³大気中の空気の流れでもよい。

のない静電場を扱っている。ここで考えている流束とは仮想的な電気力線を表している。そこに電荷をおけば電荷は動いて流れをつくるが、それはまた別のはなしである²⁴。今のところ考えているのは静電場の止まった世界である。

その実体が何であれ、ベクトル場が定義されている系では流束は流れを特徴づける一般的な量となる。流体力学など他の分野でも用いることがある。そのときにも流束を用いて表される Gauss の法則（定理）は有用になる。

「発散」の意味

数学的な恒等式である Gauss の定理 (3.31) は Gauss の法則の証明に用いることができる。ベクトルの面積分のイメージは図 3.8 を見ればわかると思うが、それを発散の体積積分におきかえ、さらに積分を外して発散だけの式 (3.19) になると、とたんにわからなくなるというひとは多い。発散というからには図のようにベクトル場が拡散していく様子を特徴づけるものであるはずだが、そのイメージがつかみづらい。等式で結ばれている以上、元の面積分の表現でとらえればよいのであるが、そうは言ってもなぜ「 $\nabla \cdot$ 」なのかをとらえることができると理解の助けになる。

面積分を微分の体積積分に関係づける公式は次の積分とよく似ている。

$$f(x_+) - f(x_-) = \int_{x_-}^{x_+} dx \frac{df(x)}{dx} \quad (3.47)$$

右辺は微分の 1 次元領域についての積分、左辺は領域の端の寄与である。微分の積分が端の寄与になることは、発散の体積積分が面積分になることに対応している。面は体積領域の表面、つまり端である。表面の寄与の差が発散の度合いを与えることが見てとれる。発散の本質は (3.16) 式の変形に集約されている。もしベクトル場が定数であれば微小領域の左から入ってきてそのまま右に出ていくだけである。その場合発散はゼロになる。両端からの出入りが差し引きで有限の値を得るためには差分（微分）が有限にならなければならない。このようにしてベクトルの湧き出し・吸い込みを記述するために微分操作である発散が得られる。

電場の例は発散の意味をつかむ格好の題材となる。流れの湧き出し・吸い込みを数学的に定量的に扱うことができるようになる一方で、数学的な操作の意味を直観的に捉えることができるようになるのである²⁵。

Gauss の法則の意義

Gauss の法則は何のためにあるのだろう。電荷分布によって決まる「流れ」は何らかの規則にしたがっている。もちろんそれは Coulomb の法則によって決まる規則である。ただし、前章の例で見たように、Coulomb の法則から直ちに電場を知ることができるわけでもない。たくさんの電荷が分布している系では質的に異なるふるまいが得られる。そのような場合、Coulomb 力から出発するのは見通しが悪い。Coulomb の法則そのものを書き下すよりは法則を別の表現で規定することでいろいろな問題に応用できるし、抽象的な捉え方ができる。

Gauss の法則は一種の保存則である。電荷が含まれない領域を考えたとき、その領域に入ってくる電気力線の総和は 0 となる。入ってきたら必ず出ていく。電荷があるときは電荷の符号に応じて電気力線の湧き出しまたは吸い込みがある。

電荷を囲む球面上の電場を考えたとき、球の半径を小さくとると電場が大きくなり、大きくとると電場が小さくなる。その増加・減少の度合いがつかっている。これは Coulomb の法則が距離について逆 2 乗に

²⁴第 II 部では電荷の流れが流束を用いて特徴づけられ、電流の定義となる。

²⁵win-win の関係である。

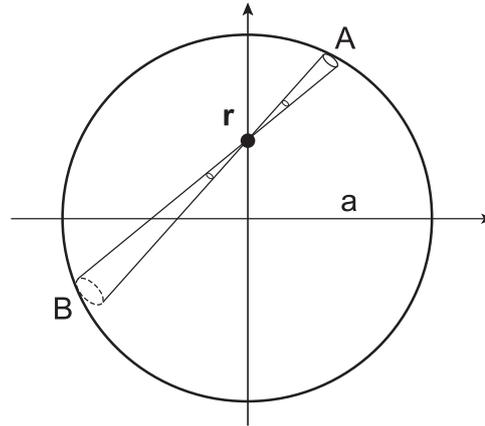


図 3.9: 問題 [3-1] の系。点 r から微小立体角 $d\Omega$ で定義される二つの円錐がそれぞれ球面を切り取る。

比例しているのに対して、球面積が距離の 2 乗に比例している結果である。前者は Coulomb の法則によって生じた寄与で、後者は面積の定義が長さの 2 乗で表されるという幾何学的な理由により生じたものである。これは電磁気の法則が幾何学的に捉えられるということを意味している。それが Gauss の法則である。

Gauss の法則を用いると、電荷分布が与えられたときの電場を得ることができる。ただし、それは電荷が規則的に並んでいるなど計算がしやすいときのみである。具体的にいくつかの例で見たように対称性の議論を併用する必要がある。

電荷分布が複雑なときに Gauss の法則から電場が計算できないのは、解析的な計算が困難であるからなのか、それともそもそも原理的にできないのか、理由を理解することは重要である。法則の微分形によると電場を微分したのが電荷であるから、電荷から電場を得るには積分を行う必要があり不定性が生じるように思える。それでは電場は決定できない。この問題は以降の章で議論したい。

もう一つ、後づけになるが、別の視点で Gauss の法則 (の微分形) の意義を見出すことができる。これまでは電荷分布が与えられれば電場が決まると説明してきた。原理的にはどんな電荷分布でも電場は一意的に決まる。逆はどうだろうか。すなわち、電場を与えたときに電荷分布が一意的に決まるかという問題である。答えは Gauss の法則の微分形を見るとわかる。電場の発散をとると電荷分布が得られる。よって、どちらかが与えられたとき、もう一方を一意的に決定することができる²⁶²⁷。

3.8 問題

[3-1] 球面上に分布した電荷がつくる電場

例題 2-5 (27 ページ) 半径 a の球面上に電荷 Q が一様に分布した系を考える。点 r での電場は次のように書くことができる。

$$E(r) = \frac{kQ}{4\pi a^2} \int_S dS(r') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3-1.1)$$

dS は r' で指定される球面上の微小面積を表している。図 3.9 のように球内の観測点 r を通る直線を引いて、それらの点と球の二つの交点を A、B とする。それらの点を含む微小立体角 $d\Omega$ を考える。微小立体角

²⁶電荷のある点での微分についてはあまり詳しく扱わなかった。デルタ関数を用いる必要がある。5.6 節 (65 ページ) の補遺を参照。

²⁷Gauss の法則のみを用いて電荷密度から電場を一意的に決定することはできない。第 5 章参照。

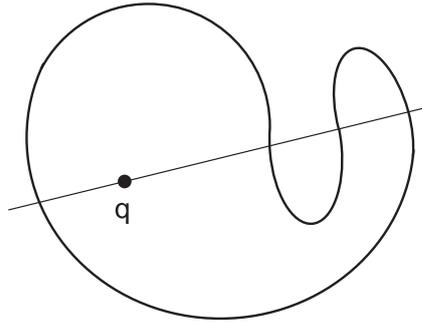


図 3.10: 問題 [3-2] の系。曲線は点電荷 q を囲む閉曲面とする。

が切り抜く球面上の点 A の微小面がつくる電場が反対側の点 B の面がつくる電場と相殺することを示せ。観測点を球の外側にとったときはどうなるか。

[3-2] Gauss の法則

点電荷を含む閉曲面を考える。点電荷を通る直線を引いたときに、直線は閉曲面と図 3.10 のように 4 回交わるとする。このとき、4 点からの寄与が Gauss の法則の式にどのように反映されるか考察せよ。

[3-3] 円筒上に分布した電荷

半径 a の無限に長い円筒上に一様に分布した電荷がつくる電場を、Gauss の法則を用いて求めよ。電荷量の面密度を σ とする。

[3-4] 2 平面上に分布した電荷

$z = a$ の平面に電荷密度 σ 、 $z = -a$ の平面に電荷密度 $-\sigma$ でそれぞれ電荷が一様に分布している系を考える。任意の点での電場を求めよ。

[3-5] 球内に分布した電荷

問題 [2-7] (34 ページ) の系について、Gauss の法則の微分形が成り立っていることを示せ。

[3-6] 球内に非一様に分布した電荷

半径 a の球内に電荷が非一様に分布している。電荷密度の大きさは中心からの距離に比例し、全電荷量は Q とする。球の中心を座標系の原点にとったとき、電荷密度 $\rho(r)$ および電場 $E(r)$ を求めよ。

[3-7] Gauss の定理

Gauss の定理 (3.31) 式を証明する。まず、図 3.7 のような微小直方体に対して証明を行え。そして次に任意の形状の領域に対して微小直方体の結果をどのように用いるか考察せよ。

[3-8] ベクトル解析の公式

(a). 次の式を示せ。

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (3-8.1)$$

(b). 次の式はどのように書けるか。(a) と類似の公式を得よ。

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (3-8.2)$$

第4章 電場と電位

前章では Gauss の法則について議論した。電気力線が電荷がない点では途切れないことを表現した式 (3.5) (38 ページ) (3.19) (44 ページ) は、Coulomb 力の性質の一つを示している。本章では静電場のもう一つの法則を考える。それはポテンシャル関数を導入することによって表される。

4.1 仕事と電位

力学においては仕事 (work) という概念が重要な役割を果たした。ある物体に対して F の大きさの力をかけて物体を s の長さだけ動かしたとき、 $W = Fs$ の仕事をしたという。定義により仕事は (力)・(長さ) = (質量)・(長さ)²・(時間)⁻² の次元をもつ。これはエネルギー (energy) の次元と同じである¹。エネルギーは物体に仕事をするのできる能力のことをいう。エネルギーや仕事は負の量にもなる。力の向きと動かす方向が逆のとき、仕事は負になる²。

Coulomb 力も起源は何であれ物体に力を及ぼすものであるから仕事を定義することができる。そこで、ここでは仕事と電場の関係を考えよう。電場 $E(\mathbf{r})$ が与えられた系において電荷量 q の電荷を動かす。電場にしがたがって動くのではなく、こちらの思い通りに動かしたい。そのためには電場に逆らって外から力を与える必要がある。動かす経路を C としたとき、その力が電荷に対してする仕事は次のように書ける。

$$W = - \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -q \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

これは電場による力を打ち消すために $-\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の外力をかけながら動かすことを意味している³。ここで表されている積分は、線積分 (line integral) とよばれるものである。つまり、経路 C を N 個に分割し、各点での接ベクトルと電場の内積の和をとり、 $N \rightarrow \infty$ の極限をとる。

$$\int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_i) \quad (4.2)$$

具体的な計算の仕方については以下の囲みで述べる。

このような仕事の定義では、電場は考えている電荷 q とは関係なくもともと存在しているものであり、新たにおかれた電荷 q によって電場が乱されないとしている。それには電荷 q が十分小さいものと考えればよい。また、電場は単位電荷に働く力として定義されるから、電荷あたりの仕事という量を導入するのが自然であろう。力から電荷を切り離して電場を定義したように、仕事から電荷を切り離れた量を考えることができる。つまり、単位電荷あたりの仕事量は

$$\phi = - \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (4.3)$$

と書くことができる。

¹たとえば、運動エネルギーは質量と速度の 2 乗をかけたもので表される。

²正確には両者はベクトルなので両者の向きが同じ軸上にあるとは限らない。以下で電場の例を用いて示すように、仕事は内積を用いて定義される。内積が負のとき仕事は負になる。

³元からある電場と外力によって電荷にかかる力は 0 となる。実際にはさらにわずかな力をかけて系を乱さないように無限小の速度で電荷を動かすことを想定している。

問題 [4-1] で仕事量を具体的に計算してみよう。それからわかることは、答えが始点と終点の値にのみよることである。ここではそのことを一般的に示す。問題 [4-1] と同様に原点に点電荷 Q をおいた系を考える。例によって重ねあわせの原理があるので、この場合のみを考えれば十分である。図 4.1 のような経路に対して、積分の定義にしたがって経路を N 個の微小区間に分割する。経路の各点 r_i での接線と r_i のなす角度を θ_i とする。このとき、 r_i での微小接線ベクトルの長さを Δl_i とすると、

$$\phi = - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta l_i \frac{kQ}{r_i^2} \cos \theta_i \quad (4.4a)$$

$$= - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta r_i \frac{kQ}{r_i^2} \quad (4.4b)$$

$$= - \int_{r_A}^{r_B} dr \frac{kQ}{r^2} \quad (4.4c)$$

$$= \frac{kQ}{r_B} - \frac{kQ}{r_A} \quad (4.4d)$$

となる。 Δl_i を r_i 方向に射影したベクトルの長さが $\Delta r_i = \Delta l_i \cos \theta_i$ となることを用いて変形を行っている。また、始点と電荷の距離を r_A 、終点と電荷の距離を r_B とした。このように、答えが始点と終点の値にのみ依存することが一般的に言える。

この結果は、電場の特徴を捉えたものである。経路をどのようにとって積分を行おうとも費やす仕事量は変化しない。これは、仕事が局所的な関数で特徴づけられるということの意味している。つまり、各点 r で $\phi(r)$ というスカラー量が定義されており、点 r_A から r_B への経路を動かしたときにかかる仕事量はその関数を用いて

$$\phi = - \int_{A \rightarrow B} dr \cdot E(r) = \phi(r_B) - \phi(r_A) \quad (4.5)$$

と書ける。関数 $\phi(r)$ を電位 (electric potential) という。静電ポテンシャル (electrostatic potential) または単にポテンシャルとよばれることも多い。

経路によらないことから直ちにわかるが、始点と終点を同一の点にとると仕事量は 0 である。

$$\oint_C dr \cdot E(r) = 0 \quad (4.6)$$

C は任意の閉曲線を表す。左辺の積分記号 \oint は始点と終点と同じ点である線積分に対して用いられる。どんな経路をとろうとも同じ点に戻ってくるために必要な仕事量は 0 となる。途中でどれだけ外力をかけても、戻ってくる過程で損した分をどこかで得して最終的な差し引きは 0 になる。

このように、仕事を定量的に表すためにはスカラー量である電位 $\phi(r)$ を用いればよいことがわかる。当然ながら、このような量は電場自体を特徴づけるものとなる。

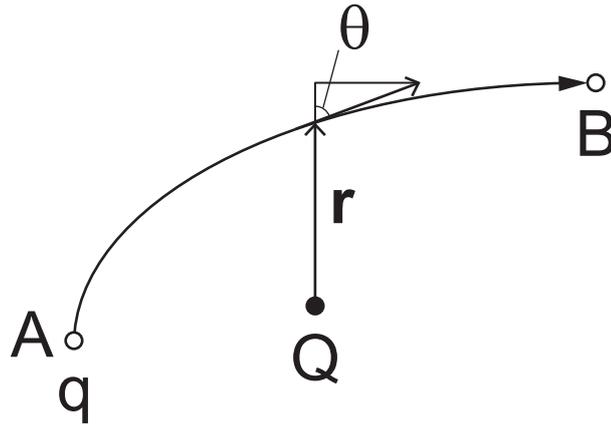


図 4.1: 固定された電荷 Q が作る電場の下で電荷 q を点 A から B まで動かす。

線積分・面積分の計算の仕方

一般に、経路 C についての線積分

$$\int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (4.7)$$

は次のようにして計算される。経路 C を $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ と表す。 s は媒介変数であり、たとえば 0 から 1 まで動かすことによって経路に沿って \mathbf{r} が動くとする。つまり、 $\mathbf{r}(0)$ が始点、 $\mathbf{r}(1)$ が終点を表している。パラメータを動かすことによって始点から終点まで軌道を描くことができるようなものであればどのようなにとってもよい。そのような媒介変数表示を用いれば線積分は s についての積分として表せる。

$$\int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_0^1 ds \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}(s)) \quad (4.8)$$

$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}$ は変数変換のヤコビアンを表す。被積分関数は s の関数であるからこれは通常の積分の知識で行うことができる。同様に考えると (4.7) 式で内積の代わりに外積が用いられる場合（後で出てくる）も容易に行うことができる。

面積分も同様である。面積分の場合には媒介変数は二つ必要となる。面上の点が $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t)$ と、二つの媒介変数を用いて表されるとき、面積分は

$$\int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_0^1 ds \int_0^1 dt \frac{\partial \mathbf{r}(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}(s, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}(s, t)) \quad (4.9)$$

と書くことができる。外積を用いると面の向きを表現できることは適当な例で図を描いて理解してほしい。

4.2 電場と電位

前節では電位を仕事という概念から導入したが、ここでは別の視点から考えてみよう。

原点におかれた電荷 q の与える電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は次のように微分を用いて書かれる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = kq \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = -\nabla \frac{kq}{|\mathbf{r}|} \quad (4.10)$$

微分について次のような計算を行っていることに注意されたい。

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{\partial |\mathbf{r}|}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{r}|} \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \frac{-1}{|\mathbf{r}|^2} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (4.11)$$

微分の連鎖則を用いて r の各成分についての微分を動径変数 $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ についての積分に書き換えることによって計算される。さて、この式と前節の議論を考慮すると、微分される関数は電位に他ならない。電場は電位を用いて次のように書ける。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}) \quad (4.12)$$

右辺の微分は勾配である⁴。電位の具体的な関数形は次のようになる。

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{kq}{r} + \text{const.} \quad (4.13)$$

右辺第2項の定数は不定である。物理的な結果には寄与しないのでどのようにとってもよい。 $r \rightarrow \infty$ のとき電位が0となるように設定することが多く⁵、その場合定数は0となる。一般化することは容易であり、任意の電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ について

$$\phi(\mathbf{r}) = k \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \text{const.} \quad (4.14)$$

と書けることがわかる。

式 (4.12) を用いると、前節のように電位差を電場の線積分で表すことができる。適当な経路で電場を積分すると

$$\int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \int_C d\mathbf{r} \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) \quad (4.15)$$

であるが、前節の囲みのように経路を $0 \leq s \leq 1$ のパラメータ s を用いて $\mathbf{r}(s)$ と表現すると、

$$- \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_0^1 ds \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}(s)) \quad (4.16a)$$

$$= \int_0^1 ds \frac{d}{ds} \phi(\mathbf{r}(s)) \quad (4.16b)$$

$$= \phi(\mathbf{r}(1)) - \phi(\mathbf{r}(0)) \quad (4.16c)$$

である。式 (4.5) と同じ結果である。始点と終点を同じ点にとれば $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(1)$ なので (4.6) 式も示すこともできる。

スカラー関数の勾配を用いて表される力は保存力 (conservation force) とよばれる。保存力は前節で扱った通り仕事が経路によらないという特徴をもつ。

4.3 電位の性質

ここでは具体例を用いて電位を計算することで電位のもつ一般的な性質を調べる。

⁴前章の囲み参照。

⁵電荷が無い極限 $q \rightarrow 0$ で電位が0と考えても同じである。

例題 4-1: 二つの点電荷

例題 2-1 (22 ページ) で扱ったように、二つの電荷を r_+ と r_- におく。二つの電荷が同じ電荷量 q であるとき、電位は次のようになる。

$$\phi(\mathbf{r}) = kq \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|} \right) \quad (4.17)$$

無限遠点で 0 になるように定数値は 0 とした。

同様に、 r_+ に電荷 q 、 r_- に $-q$ があるときは

$$\phi(\mathbf{r}) = kq \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|} \right) \quad (4.18)$$

となる。電位の様子は問題 [4-3] で考える。

例題 4-2: 球面上に分布した電荷

半径 a の球面上に電荷 Q が一様分布している系では電場は次のように計算された。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} kQ \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} & |\mathbf{r}| \geq a \\ \mathbf{0} & |\mathbf{r}| < a \end{cases} \quad (4.19)$$

球対称の系であるから、電位は動径変数 $|r|$ の関数となるはずである。 $|r| \geq a$ のとき、積分を行うと

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{kQ}{|\mathbf{r}|} + C_0 \quad (4.20)$$

となる。任意定数 C_0 の不定性が生じるが、無限遠点で 0 になるように電位を決めると $C_0 = 0$ となる。 $|r| < a$ のとき、電場は 0 であるから

$$\phi(\mathbf{r}) = C_1 \quad (4.21)$$

となる。この定数値 C_1 はどのように決定すべきだろうか。電場は $|r| = a$ で不連続であるが発散はしないので、 δ を微小量として $|r| = a - \delta$ から $|r| = a + \delta$ まで電荷を運ぶのに仕事の不連続に変化するとは考えにくい。つまり、電位は連続関数でなければならない。よって電位は次のようになる。

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{kQ}{|\mathbf{r}|} & |\mathbf{r}| \geq a \\ \frac{kQ}{a} & |\mathbf{r}| < a \end{cases} \quad (4.22)$$

例題 4-3: 平面上に分布した電荷

電荷が xy 平面上に面密度 σ で分布している系を考える。このときの電場の z 成分は次のように計算された。

$$E_z(z) = 2\pi k\sigma \frac{z}{|z|} \quad (4.23)$$

これより、電位も容易に求められて

$$\phi(\mathbf{r}) = -2\pi k\sigma |z| + \text{const.} \quad (4.24)$$

を得る。この場合、無限遠点で電位を 0 にとることができない。電荷分布が無限遠点にまで及んでいることを考えるとおかしな結果ではない。電場は $z = 0$ で不連続に変化するが、電位は連続である。また、等電位面は $|z| = \text{const.}$ で与えられる。これは電場の向きと直交している。

これらの例からわかることは、電場が有限の点では電位が連続であることと、等電位面は電気力線と直交することである。電位が連続であることはそこから決まる仕事量が連続であるべきという性質から得られる。等電位面が電気力線と直交することは次のようにして一般的に示すことができる。ある点 r から等電位面に沿った微小変位 Δr を考える。微小変位であることを用いると

$$-E(r) \cdot \Delta r = \phi(r + \Delta r) - \phi(r) = 0 \quad (4.25)$$

となる。最後の等式は等電位であることによる。 Δr は等電位面の任意のベクトルを表しているから、この関係は電場が等電位面に直交していることを示している⁶。

4.4 まとめと考察

本章で扱ったのは次の内容である。

- 仕事または電場から導かれる電位
- 電位の性質
- 電位によって規定される電場の性質

仕事の定義から電位を導入した。電位が与えられれば電場を表すことができるし逆も可能である。仕事量が経路によらないことと電場が電位の勾配を用いて書けるということが等価であるということを理解してほしい。さらに言えば、仕事量が経路によらないことと元の点に戻ってくる時の仕事が 0 になることも等価である（問題 [4-2]）。その中では (4.6) 式がもっとも単純な表現である。次章ではこの式を元にして議論を進める。

次章で見ると電位は概念的に重要であるが、実用上も役に立つ。電場の代わりに電位の積分計算を行うと簡単になることがある。以下で述べるように、ポテンシャルの概念は力学でも親しんだものであるから、そこでの知識を活用することもできる。

電位のイメージ

電場はベクトル場であったが、電位はスカラー場である。スカラー場は 3 次元空間の各点にスカラー量が割り当てられている。電位は地図の等高線のようなものをイメージすればよい⁷。空間座標 3 次元の「面」に、等電位線が書きこまれているか立体的に山や谷がある⁸。電場は等電位線に直交する方向を向き、大きさはその点の電位の傾きによって決まる⁹。等高線が密であれば急な傾斜になっており電場の絶対値が大きい。疎であれば平らになり電位はほぼ一定、電場の絶対値は小さくなる。

等高線の理解ができれば、仕事が始点と終点の差で決まることも自然と理解できる。それらの点を決めれば途中でどこを通ろうとも全て同じ仕事量を与える。途中でたくさん仕事を費やしすぎるような経路を通っても、損した分は終点にたどりつくためにどこかで得をする（仕事が負になる）。経路によらないことは元の点に戻ってきたときの仕事が 0 になることを導く。そしてそれは電場の重要な性質を示している。次章で議論する。

⁶以前の議論で面の向きを面に直交する方向としたので、そういう意味ではここでの「直交」は「平行」である。紛らわしい。

⁷他のたとえとして天気予報を用いると、各地点での温度はスカラー場であり、風（風速と風向き）はベクトル場である。

⁸イメージでは空間 2 次元 + 電位の 3 次元を考えざるをえない。本来は空間 3 次元 + 電位の 4 次元である。

⁹同じ点でも向きの取り方によって傾きは異なる。電気力線と等電位線が直交するということは、電場はもっとも急な方向の傾きで決まる。

万有引力と Coulomb 力

ここまであまり言及しなかったが、電位によく似た量が力学の系にもあらわれることに気づいているひとも多いだろう。ポテンシャル関数である。一般に力がポテンシャルの勾配を用いて表されるとき、力は保存力となる。たとえば万有引力は Coulomb 力と全く同じ形をしているから距離に反比例したポテンシャルとなる。上で述べた仕事を経路によらない性質は、保存力のある系一般に成立する。

力学の場合、ポテンシャル関数を導入する意義は、(力学的)エネルギー保存則を導くことにある。外から系を操作したりしない限り、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを足した量は時間によらない定数となる。それを用いて運動の軌道を求めたりすることができる。

実のところ、次章で議論する Laplace 方程式や Poisson 方程式はもともと万有引力の場合で考えられたものである。質量分布が与えられたとき、それらのつくる重力ポテンシャルは Poisson 方程式を満たしている。ところがそのような計算は力学の問題ではあまり扱われていない。Laplace 方程式や Poisson 方程式は電磁気学で初めて触れることが多い。

Coulomb 力の場合、電位に粒子の電荷量をかければポテンシャルエネルギーを得る。そして力学のときと同様に考えればエネルギーの保存則を導くこともできる。しかしながら、それは電場中を運動する荷電粒子がもつエネルギーである。ここでは電荷の運動にそれほど興味はないので、エネルギーおよびその保存則はとりあえず今のところ気にしない¹⁰。

ここまで主に考えてきたのは、力学の法則から切り離した電場を導入し電位を用いて表すことである。電位の満たす法則は電場を規定するものとなり、電場がどのようなものであるべきか理解することができる。このような視点の違いに力学と電磁気学の違いが反映されていると言えそうである。次章でくわしく議論する。

4.5 問題

[4-1] 仕事量の計算

原点に電荷 Q をおいた系を考える。このとき、電荷 q を図 4.2 のような経路で動かす。始点と終点を次のようにとる。

$$(a). \quad (r, 0, 0) \rightarrow (r', 0, 0)$$

$$(b). \quad (r, 0, 0) \rightarrow (-r, 0, 0)$$

$$(c). \quad (r, 0, 0) \rightarrow (-r, 0, 0)$$

それぞれの場合の仕事量を、電場の積分を具体的にを行うことにより計算せよ。なお、仕事量は外界が系にするものとして定義されている(符号に注意)。

[4-2] 仕事の経路依存性

本文では、仕事を経路によらないとき (4.6) 式が得られることを示した。逆を示せ。つまり、(4.6) 式から仕事を経路によらないことを示せ。

¹⁰第 III 部で扱う。電(磁)場の法則を一般化してから考えた方がはるかに面白い。また、電(磁)場中で運動する電荷の問題は第 II 部で扱う。

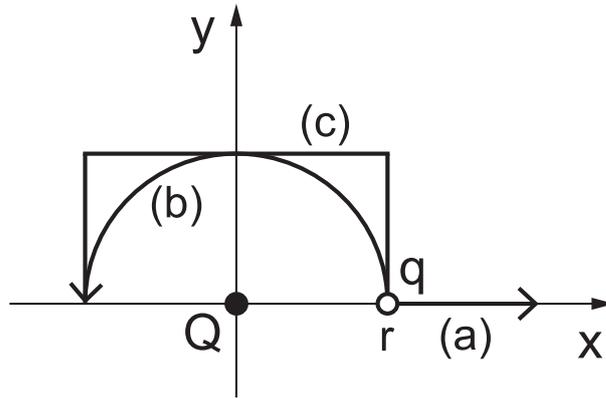


図 4.2: 問題 [4-1] で仕事量の計算に用いる経路。原点に電荷 Q があるとき、 xy 平面上を点 $(r, 0)$ から終点まで辿って電荷 q を運ぶ。(a). x 軸上。(b). 半円上。(c). x 軸または y 軸に平行。終点は (b) と同じ。

[4-3] 等電位曲線

例題 4-1 の系を考える。 $r_+ = (a, 0, 0)$ 、 $r_- = (-a, 0, 0)$ の点それぞれに電荷をおく。 xy 平面内において電位が一定値 ϕ の曲線が満たす方程式を

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y) \quad (4-3.1)$$

と書いたとき、関数 g を求め、電位の様子を図示せよ。また、結果を問題 [2-2] (34 ページ) と比較し関係を考察せよ。

[4-4] 円筒表面に分布した電荷

半径 a の無限に長い円筒に電荷が面密度 σ で一様に分布している。円筒軸を z 軸にとる。このとき、電場 $E(r)$ および電位 $\phi(r)$ を求めよ。

[4-5] 2 直線の系

(a). $x = a$ 、 $y = 0$ の直線に線密度 λ 、 $x = -a$ 、 $y = 0$ の直線に $-\lambda$ の電荷がそれぞれ一様に分布している系を考える。このときの電位を求めよ。電位は無限遠点で 0 になるとする。

(b). 電位 ϕ が一定値をとる等電位面を xy 平面内で求めよ。

第5章 静電場の法則

本章では、ここまでで得られた静電場の法則をあらためてまとめる。問題は、それらの法則が電場をどれだけ規定するものになるかである。

5.1 渦なしの法則

5.1.1 積分形

前章で得た電場の満たすべき性質

$$\oint_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.1)$$

は、電場を任意の閉曲線 C に沿って線積分すると必ず 0 になることを示している。たとえば点電荷のつくる電場は点電荷を中心に電気力線が放射状にのびたものとなるが、 C を点電荷を中心とする円にとると上の積分が 0 になることはすぐわかるし、他にどのように経路を選んでも 0 になることが保証されている。各微小線分からの寄与が 0 でなくても全てを足し上げると 0 にならなければならない。

0 にならないのはどんなときかという、たとえば経路上での微小線分 $d\mathbf{r}$ からの寄与 $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$ が全て正のときである。たとえば、電場と経路の向きが常に一致しているとすればよい。このとき経路を 1 周すると電場の向きも 1 周して渦となる。このような電場はありえない。つまり、(5.1) 式は電場が渦をつくることができないことを表している。これが渦なしの法則である。

5.1.2 微分形

ここで Gauss の法則の積分形 (3.5) 式 (38 ページ) が、領域の任意性を用いると微分形 (3.19) 式 (44 ページ) に変形できたことを思い出してほしい。渦なしの法則もやはりよく似た積分形であるし経路の取り方も任意であるから、同様に考えて局所的な式を導くことができると期待される。3.4 節 (43 ページ) と同様のことを考えればよいが、ここでは、Stokes の定理 (Stokes' theorem) とよばれる公式を用いる¹。次のように表される。

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (5.2)$$

左辺は閉曲線に関する線積分、右辺は閉曲線によって形成される曲面を表している。与えられた閉曲線に対して曲面の取り方は一意的ではない。境界が同じ曲面はいくらでも考えることができるからである。どのようにとろうともこの関係が成り立つのが Stokes の定理の強力な点である。また、右辺の被積分関数はベクトル微分演算子 $\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ とベクトル量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の外積、つまり回転を表している。Stokes の定理は任意のベクトル関数 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 、任意の閉曲線について成り立つ一般的な数学的公式である。Gauss の定理が体積積

¹W. Thomson (Kelvin 卿) が 1850 年に手紙で G. G. Stokes に知らせ、Stokes は 1854 年に試験問題として出題した。論文としては 1861 年 H. Hankel によって発表された。

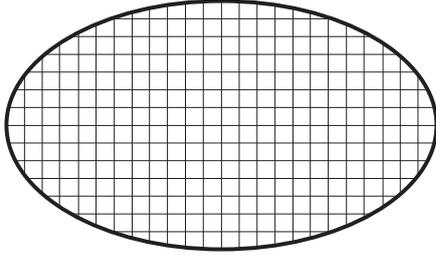


図 5.1: 閉曲線を微小面に分割する。

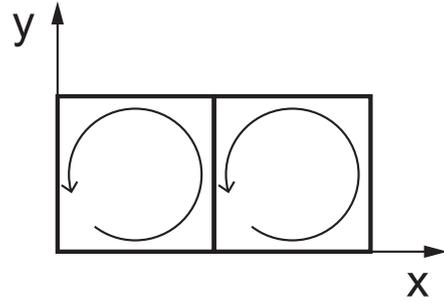


図 5.2: 微小面。

分と面積分を関係づける公式であるのに対して Stokes の定理は面積分と線積分を関係づける。証明は 5.2 節で扱う。

任意の閉曲線で渦なしの法則が成り立つとすると、それを無限小の曲線にまで縮めることができる。そのような場合に Stokes の定理を適用すると、微小面 $\Delta S(\mathbf{r})$ について

$$\Delta S(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.3)$$

という式が成り立つ。微小面の向きはどのようにとることもできるから、

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.4)$$

が成り立つという結論になる。これが渦なしの法則を局所的に表現したものとなる²。

前章で電場が次のように電位を用いて表されることを議論した。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (5.5)$$

このように適当なポテンシャル関数 $\phi(\mathbf{r})$ を用いて定義される電場は (5.4) 式を自動的に満たす。このように書かれること自体が渦なしの法則を表しているからである。式 (5.4) と (5.5) は等価な公式である。数学的には任意の関数 $\phi(\mathbf{r})$ に対して

$$\nabla \times \nabla\phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.6)$$

が成り立つことによって保証されている。この式は各成分を具体的に書き下せば ϕ によらず成り立つことを容易に確認できる。

5.2 Stokes の定理

Stokes の定理 (5.2) 式を示そう。曲面 S とその境界の閉曲線 C を考える。このとき、 C についての線積分と S についての面積分に上の関係が成り立つ。ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は任意の点 \mathbf{r} において定義された 3 成分の関数であり、微分可能な関数であればどのようなものでもよい。また、 S と C の対応は 1 対 1 ではない。同じ境界 C をもつ曲面 S は無数にあるが、どれをとっても Stokes の定理は満たされる³。

²面積分に直さずに線積分のまま閉曲線を 1 点に縮めていけばよいのではないかと考えるかもしれない。その場合、どんなに曲線を縮めても 1 周まわる積分が残ってしまう。面は 1 点に縮めることができる。この場合の面は球面のような閉じた面ではないことに注意されたい。

³2 次元面を 3 次元空間中で考えるからである。Gauss の法則のときの V と $S = \partial V$ は 1 対 1 に決まる。

証明は Gauss の定理と同様に、積分を微小領域に分割して行う。式 (5.2) 左辺の閉曲面を図 5.1 のように細かく区切り、各微小面境界での線積分を考える。図 5.2 にあるようになりあった領域の線積分は線が接している部分では逆向きに積分を行うので相殺しあう。至るところでそのような相殺が起こり、結局残るのは表面部分のみである。それは本来考えていた線積分に他ならない。

このようにして微小領域の線積分を考えて和をとればよい。図 5.2 の一つの正方形について積分を行うと、

$$\begin{aligned} & dx E_x(\mathbf{r}) + dy E_y(\mathbf{r} + dx \mathbf{e}_x) - dx E_x(\mathbf{r} + dy \mathbf{e}_y) - dy E_y(\mathbf{r}) \\ \sim & dx dy \left(\frac{\partial E_y(\mathbf{r})}{\partial x} - \frac{\partial E_x(\mathbf{r})}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.7a)$$

$$= dx dy (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}))_z \quad (5.7b)$$

となる。ここでは面が xy 平面内にあるとして計算を行ったが、任意の向きの面に一般化することは容易である。このようにして Stokes の定理が証明される。

5.3 静電場の基本法則

これまでの考察から、静電場を規定する法則として次の二つの公式が得られた。

$$\oint_{S=\partial V} d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \quad \leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k \rho(\mathbf{r}) \quad (5.8)$$

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

V は任意の体積領域、 C は任意の閉曲線を表す。一つめの式は Gauss の法則を表しており、任意の閉曲面において電場の面積分を考えると曲面内に含まれる全電荷量に比例しているという性質である。二つめは任意の閉曲線について電気力線が渦をつくらないという渦なしの法則を表している。

問題は、これらの法則が電場をどれだけ規定するかである。これらのみを用いて Coulomb 力の式を一意的に導くことができるのであれば静電場の基本法則とよんでもよいことになる。

第 3 章では Gauss の法則を用いて電場を具体的に求めた。ただし、それは電荷分布がわかりやすいときの場合に限られていた。Gauss の法則のみを用いて任意の電荷分布で電場を求めることはできない。実際、微分形の法則を見てみると、三つの 3 変数関数が 1 階の微分方程式を満たすというものなので、これで全ての電場が一意的に求められるわけではないことはすぐにわかる。ではどうしていたかということ、「対称性の議論」である。電場の関数形を適当な議論によって制限してその上で Gauss の法則を適用した。対称性の議論は電場の定義式 (2.21) (21 ページ) を用いて行うものであり Gauss の法則そのものとは関係がない。今の目的は (2.21) 式に頼らずに電場を規定する法則をつくりあげることである。Gauss の法則以外の何かが必要となる。

このことは、次のような議論からもわかる。Gauss の法則は電場を次のように変更しても不変である。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) + C \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

C は定数を表す。第 2 項の発散が 0 となる。このような不定性がまだ残っているので、Gauss の法則のみからでは電場を一意的に決めることができない。もちろん、対称性を考慮すれば第 2 項の存在可能性は排除されるはずであるが、今はそれを用いることができないとしている。

式 (5.10) の右辺第 2 項は、原点を中心とする xy 平面内の円を反時計まわり ($C > 0$ のとき) にまわるベクトルである。したがって、そのような円の一つに沿って 1 周積分を行ったとき

$$\oint \mathbf{dr} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = 2\pi r^2 \quad (5.11)$$

となる (問題 [5-1])。 r は円の半径を表す。このようなベクトルがあると渦なしの法則が満たされなくなってしまう。微分形で考えても同様に、

$$\nabla \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \quad (5.12)$$

ある。よって、渦なしの法則を課すと $C = 0$ でなければならないことが言える。対称性の議論は渦なしの法則によって代替される。

以上より、Gauss の法則と渦なしの法則が電場を規定するものとなりえることがわかる。もちろん、厳密な議論とは程遠いのもう少し詳しい議論が必要になる。やや専門的な話題となってしまうので、本講義でその内容は扱わない。以下で概要を簡単に述べる。直観的な議論は上のもので十分であるので、具体的に電気力線を描いてこういうものは許される等考えてみてほしい。

5.4 Poisson 方程式*

式 (5.5) を Gauss の法則の微分形 (5.8) 式右に代入したものが Poisson 方程式 (Poisson equation) である⁴。

$$-\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 4\pi k \rho(\mathbf{r}) \quad (5.13)$$

$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ はラプラシアン (Laplacian) とよばれる演算子を表す。 ∇^2 は Δ と書かれることもある。式 (5.5) は渦なしの法則を自動的に満たしているし、Gauss の法則から Poisson 方程式が導かれている。したがって、二つの法則が基本法則であるならば Poisson 方程式は電場を決めるもっとも基本的な方程式となる。電荷分布が 0 のときの方程式

$$-\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.14)$$

は Laplace 方程式 (Laplace equation) とよばれる。こちらの方が先に考えられ、後に Poisson が修正を加えた。

Poisson 方程式は 2 階の微分方程式であるから方程式の一般解は不定性をもつ。それらは適当な境界条件を定めることによって決まるものである。重要な性質は、適当な境界条件を定めれば Poisson 方程式の解は一意的に決まることである。この性質は 5.5 節で簡単に述べる。Poisson 方程式の解の系統的な解析は本講義ノートでは行わない。適当な教科書を参照してほしい。

点電荷があるときのポテンシャル (4.13) 式 (56 ページ) が Poisson 方程式を満たすかどうかについては 5.6 節の補遺で議論する。

⁴Poisson とはフランス人の S. D. Poisson のことであり、「ぼあそん」と読む。

5.5 [補遺] Poisson 方程式の一意性**

ϕ_1 と ϕ_2 が同じ Poisson 方程式を満たすとする。

$$-\nabla^2\phi_1(\mathbf{r}) = 4\pi k\rho(\mathbf{r}) \quad (5.15)$$

$$-\nabla^2\phi_2(\mathbf{r}) = 4\pi k\rho(\mathbf{r}) \quad (5.16)$$

このとき、両者より

$$\nabla^2(\phi_1 - \phi_2) = 0 \quad (5.17)$$

が成り立つ。電位差の関数 $\phi_1 - \phi_2$ は Laplace 方程式を満たす。

適当な境界条件を用いると、この解は 0 しかないことが示される。つまり、 $\phi_1 = \phi_2$ となって Poisson 方程式の解の一意性が言える。以下では適当な境界条件とは何かを含めてこのことを考える。

まず、Gauss の定理の式 (3.31) (46 ページ) に $\mathbf{E} = \phi\nabla\phi$ を代入する⁵。

$$\int_{S=\partial V} d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \phi(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3\mathbf{r} (\nabla\phi(\mathbf{r}))^2 + \int_V d^3\mathbf{r} \phi(\mathbf{r})\nabla^2\phi(\mathbf{r}) \quad (5.18)$$

この関係を一般化したものは Green の定理 (Green's theorem) として知られている⁶。 $\phi = \phi_1 - \phi_2$ とおくと、右辺第 2 項は 0 となる。つまり、

$$\int_V d^3\mathbf{r} (\nabla\phi(\mathbf{r}))^2 = \int_{S=\partial V} d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \phi(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (5.19)$$

が成り立つ。

右辺は表面積分であるがこれが 0 であるとするると左辺も 0 でなければならない。左辺は非負の量の和であるから、

$$\nabla\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (5.20)$$

となる。どの変数で微分しても 0 になるということは $\phi(\mathbf{r})$ が定数であることを意味している。その値が 0 であればよい。

解が一意的であるための条件は、領域表面で $\phi_1(\mathbf{r}) = \phi_2(\mathbf{r})$ または $\nabla\phi_1(\mathbf{r}) = \nabla\phi_2(\mathbf{r})$ が成り立つことおよび、どこかの点で電位が 0 であることである。領域をどのようにとるかであるが、もっとも単純なものは無限遠点を表面にとることである。また、次章で扱う導体がある系では導体を含まない領域をとればよい。そのようにすると、導体表面で上の条件が成り立つし、無限遠点で電位を 0 にすることができる。

5.6 [補遺] 点電荷の表現**

点電荷 q が $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ にあるときの電荷密度は

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (5.21)$$

によって与えられる。これは点電荷のつくる電位の結果 (4.13) 式 (56 ページ) と Poisson 方程式 (5.13) を組み合わせた表現である。電荷密度を体積積分すると電荷になるはずであるから、次の式が満たされなければならない。

$$-\int d^3\mathbf{r} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = 4\pi \quad (5.22)$$

⁵この \mathbf{E} は電場ではないし ϕ も今のところは任意の関数である。なのでこの置き方に物理的な意味は無い。こうすると Green の定理が導けるというだけである。

⁶二つのスカラー関数 ϕ, ψ を用いて $\mathbf{E} = \phi\nabla\psi$ とする。ここでは $\phi = \psi$ としている。 ψ はプサイと読む。

本節ではこの式について議論する。

微分の部分を具体的に書くと

$$-\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \quad (5.23)$$

である。これを素直に計算すると0になる。したがって電荷密度は0になってしまいそうに思えるが、それは $r = r_0$ での特異性を考慮していないからである。そこで次のように微分を正則化 (regularization) して考える。

$$-\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + \epsilon^2}} \quad (5.24)$$

ϵ という微小量を入れて発散しないようにしておいて微分して最後に極限をとると考えるのである。そのようにすると微分が $r = r_0$ で発散することがよく見てとれる。

$$-\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{3\epsilon^2}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + \epsilon^2]^{5/2}} \quad (5.25a)$$

$$= \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{3}{\epsilon^3} & \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \end{cases} \quad (5.25b)$$

正則化したらからといって発散の問題が解決したわけではない。そもそも電荷があるとそこで電場は発散している。電荷密度の定義も大きさ0の領域に無限大の電荷があるとしている。現実に意味があるのはそれを有限領域で積分したものである。積分を行うと

$$-\int d^3\mathbf{r} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^3\mathbf{r} \frac{3\epsilon^2}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 + \epsilon^2]^{5/2}} \quad (5.26a)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dr 4\pi r^2 \frac{3\epsilon^2}{(r^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \quad (5.26b)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi \quad (5.26c)$$

$$= 4\pi \quad (5.26d)$$

となる⁷。確かに (5.22) 式が得られる。

以上の性質を用いると

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (5.27)$$

であることが言える。 $r \neq r_0$ で0だが、 $r = r_0$ で発散する。ただし、積分すると q を与えるようなものである。

これで発散の問題がなくなったわけではないことに注意してほしい。上の計算では極限を微分の後回しにすることによって有限の値が得られている。つまり、極限操作と微分操作を交換している。このため、発散がなくなったように見えたのである。

このようなふるまいは Dirac のデルタ関数を用いると要領よく表現できる。

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (5.28)$$

これは引数が0になると発散し他では0、 r の体積積分を行うと1になるという超関数を表す⁸。超関数は通常の関数の概念を拡張したものである。デルタ関数は物理学の法則を書き下すために欠かせない。そこでは、あまり数学的な問題を気にせず頻りに用いられている⁹。デルタ関数を用いると電荷は $\rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ と表される。

⁷最後の積分は変数変換 $r = \epsilon \tan \theta$ を用いて計算できる。

⁸デルタ関数は Kronecker のデルタとは異なる。大きな違いはデルタ関数は引数によって次元をもっていることである。

⁹デルタ関数は工学出身の物理学者である P. A. M. Dirac によって「発明」され、数学的な基礎づけは後になされた。

5.7 まとめと考察

本章で扱ったのは次の内容である。

- 渦なしの法則
- 静電場の基本法則

前々章の Gauss の法則に加えて前章の渦なしの法則が静電場の基本法則となる。前者が Gauss の定理を用いていたのに対して後者は Stokes の定理を用いている¹⁰。

$\nabla \times$ という演算は「回転」を表す。そのイメージは (5.7) 式によるものである。この式の意味をよく理解してほしい。

Gauss の法則と渦なしの法則が電場の性質を完全に規定するものになる。「完全に」という点を完全に理解するにはもう少しだけ数学的な議論が必要になる。本講義ではそこまでの理解は求めていない。電気力線を描いてこういう電場はありえないなど議論できるようになれば十分である。

Poisson 方程式は、電場を求めるための系統的な手法として大変有用である。Gauss の法則を用いる手法は簡単であるが、答えを得ることができる例は限られている。Poisson 方程式を用いる手法は、より専門的・技術的であるが、汎用性がある。微分方程式の扱い方に習熟する必要があるので、本講義ノート（および通常の教養科目の課程）では扱わない。

静電場の法則

前章でやや唐突に仕事という量を持ち出し、電位を導入したのは、それによって静電場の法則を確立させることができるからである。ベクトルである電場はスカラーの電位によって表されている。ベクトルであると各点で三つの量（大きさと向き）を考えないといけませんが、スカラーの場合一つ（大きさ）ですむ。電場は必ずスカラー関数の勾配を用いて表されるものでなければならず、電場のとりえる形を大きく制限している。そして前章で述べたように、等高線のたとえば電位や電場をイメージしやすくする。

これまでの議論で二つの式を得たが、これらをもって電場の法則と言うからにはこれらで電場の性質全てが規定されなければならない。つまり、二つの式を基本原理としたときに、Coulomb の法則も導かれなければならない。これは、本講義では詳しく議論しなかったが、Poisson 方程式の解析によりわかることである。

ただし、第 2 章のまとめで述べたように、第 I 部で扱っているのは静電場である。電荷分布が静止している世界での話であり、電荷が動いている系の記述は適用範囲外にある。それでも、ここまでで求めた法則は限定された状況の中では完全なものである。物理の法則をつくるときはまず限定された範囲で閉じた法則をつくりあげ、それを一般化するというのが常套手段である。その過程を少しずつ追っていくのが電磁気学の面白さでもある。

電荷が動いても同じように電場を Coulomb 力から定義すればよいと考えるかもしれない。ところがこれには深刻な問題がある。場合によってはそれでも上手くいくこともあるが理論的に納得のできない箇所が出てきてしまう。そこをどう解決するかは第 II 部以降で議論していく。

5.8 問題

[5-1] 線積分の計算

式 (5.11) を示せ。

¹⁰渦なしの法則は Stokes の法則とはよばないようである。Stokes の法則は流体力学の別の法則を指している。

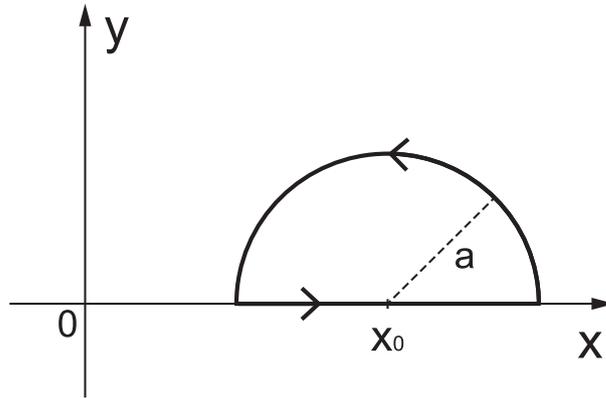


図 5.3: 問題 [5-4] の経路 C 。半円にわたって積分する。 $x_0 > a$ とする。

[5-2] 発散と回転

発散が 0 だが回転が 0 にならないベクトル関数の例 ((5.10) 式のもの以外) を挙げ、ベクトル場の様子を図示せよ。

[5-3] 渦なしの法則の微分形

渦なしの法則の積分形

$$\oint_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5-3.1)$$

から、閉曲線 C の任意性を用いて直接渦なしの法則の微分形

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (5-3.2)$$

を導け。Gauss の法則のときの証明 (43 ページ) を参考にせよ。Stokes の定理は用いないこと。

[5-4] 電場の線積分

原点に点電荷 q がある系について考える。経路 C を図 5.3 のようにとったとき、電場を経路に沿って積分したものの $\oint_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$ が 0 となることを具体的に電場の積分を行って示せ (電位を用いない)。

第6章 静電場の応用

本章では静電場のさまざまな応用を扱う。特に、導体についてその性質を議論する。導体というものがあることによって電気の世界は非常に豊かなものとなりさまざまな応用を行うことができる。その中でも静電遮蔽の原理は実用的にもたいへん便利な性質である。他にも鏡像法、コンデンサー、電気双極子について扱う。

6.1 導体

ここまで扱ってきた系は電荷分布が与えられているものであった。そのような系に電荷をおくとどのような力が働くかを表したのが電場である。実際に電荷の運動自体を問題にするのではなく、静電場がどのようなものかを考えてきた。

電荷は物体の中を移動できる量であることは古くから知られていた。二つの引き寄せられる物体を接触させると力が働かなくなってしまうことは日常的にも見ることができる現象である。これは電荷が物体の間で移動して中性化してしまったものと考えられる。物質によって電荷をもちやすいものとそうでないものがあることもよく知られている。そこでここでは内部で電荷が自由に移動できる理想的な物体を考えよう。電荷はその物体の内部では自由に動き回れるものとする。そのような物体を導体 (conductor) とよぶ。本章では導体のもつ静的な性質を議論する。電場の存在する空間に導体をおくと、内部の電荷はそれによって運動を行うはずであるが、やがて安定な場所に落ち着く。そのような運動の記述は、第 II 部でも少し扱うがなかなか難しい¹。具体的な無数にある電荷の運動論を考えなければならない。ここではそのような問題を扱うことは放棄して、最終的にどのような状態に落ち着くかという問題を考える。

6.1.1 静電誘導

導体があっても内部に電荷がなければ何も起こらないはずである。注意してほしいのは、電荷が 0 ということは正負等量の電荷が存在することと遠くからでは見分けがつかないということである。導体を構成する要素が正負の電荷をもって自由に動きまわることができるのであれば外部からかけた電場に対して反応するはずである。ここでは導体内部に無数の正負電荷が存在したときにどのような現象が得られるかを調べる。

至るところで電荷密度 0 の導体があるとする。実際には正負の電荷が存在するのだが、重なりあって巨視的なスケールではほとんど見えないという状況である。そのような導体を電場が存在するところにおくと、内部の電荷は Coulomb 力を受け、正電荷と負電荷は逆方向に引かれ移動する。それによって電荷分布が 0 でなくなってしまう。電場が存在すれば電荷は動き続ける。そのような過程を経た後、系は定常的な状態に落ち着くとする。その定常的な状態では、導体内部の電場は 0、電荷密度は 0 でなければならない。なぜなら電荷密度や電場が 0 でないと電荷に力が働いて動いてしまうからである。どのようなメカニズムであるはわからないが、最終的に落ち着いた状態では電荷はつりあいの状態にあるはずである。何

¹運動している物体を止めるには力が必要である。電荷間の力や電荷が導体を飛び出さないようにする力など多数の要素が絡み合う。力学の法則も必要となる。

も計算していないのに導体内部では電場も電荷も0となることが言えてしまう²。これは状態がつりあいの位置にあるという条件のみを考えているからである。

電荷が0であるからといってと元の状態と何も変わっていないというわけではない。なぜなら導体内部では電場が0となっているからである。外部電場を打ち消すだけの電場が導体内の電荷によってもたらされなくてはならない。図 6.1 のように直方形の導体を考える。ある電荷に着目するとそれは外部の電場に引かれて導体の表面に達する。導体の外に出ることはできないとすると、そこにとどまるしかない³。逆符号の電荷は逆側の表面に達する。そのような電荷の配置を考えるとそれらの電荷は外部電場とは逆向きの電場を作り出す。それによって導体内部の電場が0となると考えればつじつまは合う。電荷密度は導体表面において有限となる。電荷が誘起されるこの現象を静電誘導 (electrostatic induction) という。

例題 6-1: 導体表面の電荷密度

図 6.1 のような直方形の導体を考える。外部電場 E_0 は直方体の一つの面に垂直であるとする。このとき、表面に誘起される電荷面密度を求める。簡単のため、導体は図の縦方向に無限にひろがっているとする。

図の点線の矢印のように元からある電場 E_0 を打ち消す電場を作り出せばよい。そのために左右両側の面上に一様に電荷を分布させる。例題 2-4 (25 ページ)、3-2 (41 ページ) で示したように面上に一様分布した電荷は面の両側に大きさが一定で向きが逆の電場を作り出すからである。導体右表面に面密度 σ 、左表面に $-\sigma$ の電荷があるとするとそれぞれは電場を作り出す。重ねあわせの原理があるので、それぞれの電場を別に考えて足しあわせればよい。

導体内部での電場の大きさは0となれなければならない。右方向を正の向きとして各寄与を考えると

$$0 = E_0 - 2\pi k\sigma - 2\pi k\sigma \quad (6.1)$$

である。よって

$$\sigma = \frac{E_0}{4\pi k} \quad (6.2)$$

を得る。導体左側では

$$E_0 + 2\pi k\sigma - 2\pi k\sigma = E_0 \quad (6.3)$$

となる。右側も同様である。つまり、この系の場合、表面に誘起された電荷が外側に影響を及ぼすことはない。

上の例では考えやすいように直方形の導体を扱ったが、同様の議論は任意の形の導体に対して成立する。導体内の電場を打ち消すように電荷が分布するという原理は同じである。表面における電荷分布が複雑なものとなるが、内部の電場と電荷密度は0となる。

一般の場合が例題 6-1 のものと異なるのは、外部の電場が表面電荷によって影響を受けることである。導体内部で電場が0であるということは、導体内部の電位が一定であることを意味する。等電位の面に対して電気力線の方向は直交していることを前章で示した。したがって、導体表面の電場は表面に垂直とな

²以下で議論するが導体表面の電荷密度は有限となる。

³外部電場が十分強ければ、電荷を導体内部にとどめる力に勝って電荷は外に飛び出す。そのような現象を放電 (electric discharge) というが、ここではそのような場合は考えない。

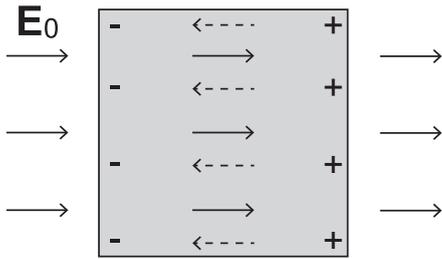


図 6.1: 外部電場 E_0 中の導体。内部電荷は表面に移動して外部電場を打ち消す電場を作り出す。

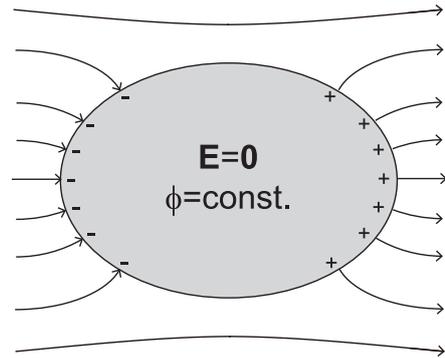


図 6.2: 任意の形状の導体。

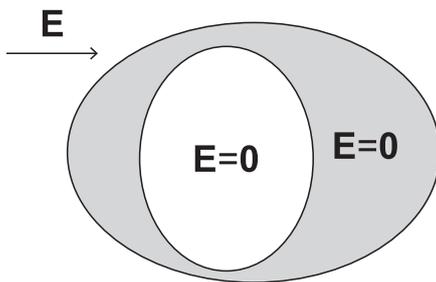


図 6.3: 導体内に空洞があり、電荷が無い場合。図は断面図を表している。

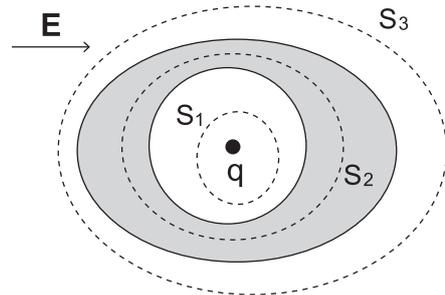


図 6.4: 導体内に空洞があり、電荷を固定した場合。

る。もともとあった電場は表面で垂直になっているとは限らないので、表面付近で電場は表面電荷によって影響を受けることになる。図 6.2 のように、電気力線は導体付近で曲げられて表面に垂直となる。

任意の形状の導体に対して、表面での電荷密度と電場を関係づけることができる。例題 3-2 (41 ページ) で扱ったように、表面に重なる微小円柱領域をとる (図 3.6 (41 ページ) 左)。Gauss の法則を適用すると、電場は外側では表面に垂直、内側では 0、側面からの寄与は 0 なので容易に計算を行うことができる。次の関係を得る⁴。

$$E_{\perp}(\boldsymbol{r}) = 4\pi k\sigma(\boldsymbol{r}) \quad (6.4)$$

$E_{\perp}(\boldsymbol{r})$ は導体表面の点 \boldsymbol{r} において表面に垂直な方向の電場を表す。導体外向きを正とする。これは表面外側の電場の大きさと表面電荷密度の関係を示しており、Coulomb の法則とよばれる⁵。どちらかがわかればもう一方もわかるという式である。

6.1.2 静電遮蔽

これまで具体例として球面上に電荷が一様分布した場合を何度も扱ってきた。その場合、電場は球の外側では球の中心に点電荷がある場合と同じで、内側では 0 となっていた。似たような例として、導体内部に空洞がある系を考えよう。

⁴Gauss の法則を用いると両辺に円柱底面の面積 S がつくが、両辺共通なのでおとした。

⁵Coulomb 力と同じ言い方をするが異なる法則である。

例題 6-2: 空洞内の電場

電荷密度が 0 の空洞のある導体を考えて空洞内の一点に電荷 q を固定する。その系に電場をかけたとき、導体内外での電場を調べる (図 6.3、6.4)。

導体内部の電場は 0 とならなければならない。そうなるように導体内部の電荷が移動して表面上に分布する。図 6.4 のように空洞内の領域にとった閉曲面 S_1 、導体内部の閉曲面 S_2 、外部の閉曲面 S_3 を考え、それぞれに Gauss の法則を適用すると次のようになる。

$$\oint_{S_1} d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi kq \quad (6.5)$$

$$\oint_{S_2} d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.6)$$

$$\oint_{S_3} d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi kq \quad (6.7)$$

閉曲面を S_1 と S_3 としたときは空洞内の電荷量が含まれる。導体内部の曲面 S_2 で積分を行ったとき、導体内部の電場は 0 であるので内部にある電荷の総和は 0 である。つまり、導体内側の表面に電荷 $-q$ が誘起される。導体内部の電荷量がもともと 0 であったとすると、導体外側の表面には電荷 q が分布する。

空洞内部では電荷によって電場が存在しなければならない。電荷 q から出た電気力線は導体内側表面まで伸びてそこで止まる。導体内部に電気力線は入り込めないからである。導体外側の電気力線も導体表面に達したところで途切れることとなり、外部と内部が遮断される。内部に置かれた電荷は外部の電場による影響を受けない。これを静電遮蔽 (electric shielding) という。導体で囲ってしまえば外部の電場が遮断されるという実用的にたいへん便利な性質である。外部電場の影響を受けたくないときに用いることができる。

空洞内に電荷がなければ空洞内の電場も 0 となる (図 6.3)。その際、導体内側表面には電荷は誘起されない。

6.2 鏡像法

電荷 0 であった導体の付近に電荷をおくと、それによって静電誘導が生じて表面に電荷が分布する。その電荷分布は導体の形状に依存するものであり一般には複雑なものとなる。簡単な形状のときにどのようなかを考えてみよう。

まず、3次元空間で $x < 0$ が導体である系を考えてみる。導体内部では電位は一定であることがわかっており、その値を 0 とする。無限に広いという理想的な状況を考えているが、有限の大きさの場合は接地 (earth) を行っていると考えればよい。接地とは基準となる外部導体とつなぐことによって電位を 0 にすることを意味する。地面 (地球) を外部導体として考えるため、そのような名前がついている。

導体平面から距離 a だけ離れた位置 $\mathbf{r} = (a, 0, 0)$ に電荷 q をおく。このとき $x = 0$ の面に誘起される電荷はどのようになるだろうか。電荷分布は一様ではありえない。そうだとすると電位を 0 にすることができない。電荷 q の点に近いほど大きさの大きい電荷が誘起されるだろう。Gauss の法則を用いると誘起される総電荷量は $-q$ であることがわかるが、各点で面密度を求めるのは困難であるように思える。

ここで例題 2-1 (22 ページ)、4-1 (57 ページ) の系を思い出してほしい。この系は $\mathbf{r}_+ = (a, 0, 0)$ と $\mathbf{r}_- = (-a, 0, 0)$ に電荷をおいた系である。 \mathbf{r}_+ に q 、 \mathbf{r}_- に $-q$ をおいた場合の電気力線がどのようになるかを考えたが、電気力線は $x = 0$ の面の至るところで直交している。つまり、今考えている境界条件を満たしている。電荷のない点で Laplace 方程式を満たすことと解の一意性から導体外部での電位は今考えてい

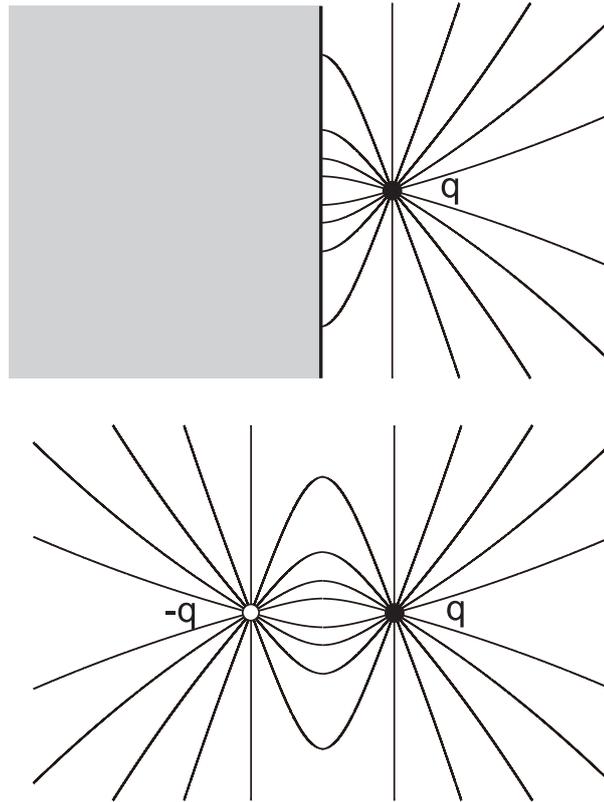


図 6.5: 鏡像法。上と下の図で導体外の電場は全く同じものとなる。

る系の解と全く変わらないことが結論される。つまり、 $x \geq 0$ で

$$\phi(\mathbf{r}) = kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right) \quad (6.8)$$

となる。 $x < 0$ では $\phi(\mathbf{r}) = 0$ である。導体の代わりに仮想電荷 $-q$ を $(-a, 0, 0)$ の位置におくことによって導体があるときの電位と同じものを作り出すことができる (図 6.5)。この方法は鏡像法 (method of images) とよばれている。

電位が決まれば電場も求めることができるし、導体の表面密度も具体的に計算することができる。面密度は次のようになる。

$$\sigma(y, z) = -\frac{1}{4\pi k} \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{qa}{2\pi} \frac{1}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (6.9)$$

電荷に近い点で大きさがもっとも大きい電荷が誘起されその点から離れるにつれ小さくなっていくことがわかる。

構成法からわかるように、鏡像法は導体の形が平面や球など対称性のよい場合のみに有用な方法である。表面の形状が複雑であるときに仮想電荷をどのようにおくかは自明ではない。

6.3 コンデンサー

導体の性質を用いると導体に電荷を蓄えることができる。図 6.6 のように 2 枚の平面導体を考えそれを平行におく。簡単のため二つの導体は無限に広いと、同じ大きさだが符号の異なる電荷量をそれぞれに与える。電荷は導体内部に一様に分布するはずである。そのときの電荷面密度をそれぞれ σ 、 $-\sigma$ とする。それ

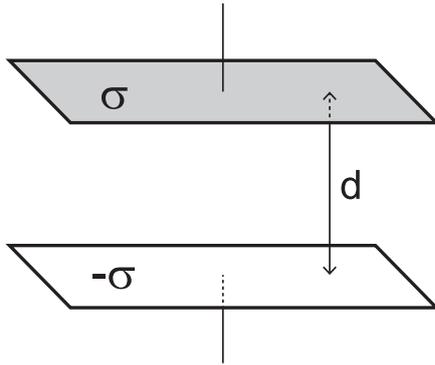


図 6.6: 平板コンデンサー。平面は十分広いとする。

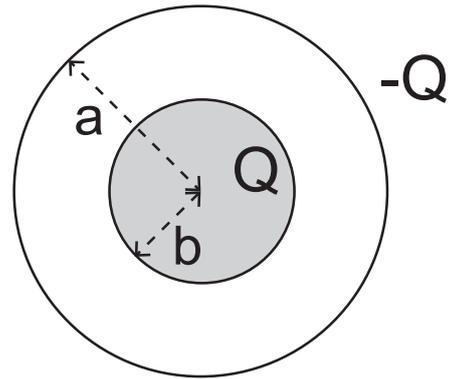


図 6.7: 球状コンデンサー。

それぞれの導体中の電荷は一定の電場をつくる。平面に一樣に分布した電荷がつくる電場は例題 2-4 において計算を行った。導体が二つあるときはそれぞれがつくる電場を足しあわせればよい。2 枚の平面が $z = \pm d/2$ にあるとすると、電場は z 方向を向きその成分は

$$E_z(\mathbf{r}) = 2\pi k\sigma \left(\frac{z - d/2}{|z - d/2|} - \frac{z + d/2}{|z + d/2|} \right) = \begin{cases} 0 & z > \frac{d}{2} \\ -4\pi k\sigma & -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2} \\ 0 & z < -\frac{d}{2} \end{cases} \quad (6.10)$$

と計算される。2 枚の導体間では電気力線が同じ方向に向かっているので足されて 2 倍の大きさとなり、外側では打ち消されて電場は 0 になる。このようにすると電荷は外部の影響を受けることなくその状態を保つことができる。このような導体の対をコンデンサー (condenser, capacitor) とよぶ⁶。

上の結果を電位を用いて表すと、導体間 $|z| < \frac{d}{2}$ の空間では

$$\phi(\mathbf{r}) = 4\pi k\sigma z + \text{const.} \quad (6.11)$$

となる。定数値は決めることができない。二つの導体はある一定の電位をもつ。それらの導体の電位を ϕ_{\pm} とすると次のように書くこともできる。

$$\phi_+ - \phi_- = 4\pi k\sigma d \quad (6.12)$$

もう少しコンデンサーの特徴を調べるために、図 6.7 のように球導体を球殻で覆った系を考えよう⁷。球の半径を b 、球殻の半径を a とする。したがって $a > b$ である。球に電荷 Q 、球殻に電荷 $-Q$ を与える。このときも電場は導体間にもみ存在し、外側に電気力線が漏れることはない。Gauss の法則を用いると、導体間の空間における電場は動径成分のみをもちその大きさは

$$E_r = \frac{kQ}{r^2} \quad (6.13)$$

となる。球の中心からの距離を r とした。電位は

$$\phi = \frac{kQ}{r} + \text{const.} \quad (6.14)$$

⁶英語では capacitor とよばれることの方が多い。1745 年に E. G. von Kleist、1746 年 P. van Musschenbroek によって発明されたライデン瓶 (Leiden jar) がそのルーツである。van Musschenbroek がオランダのライデン大学に所属していたのでそうよばれた。これはガラス瓶の内側と外側を導体とみなしたコンデンサーである。

⁷内部の導体は球の代わりに球殻としてもよい。どちらで考えても同じである。

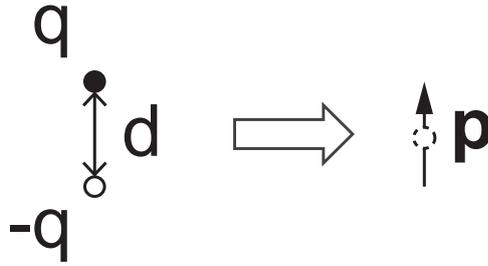


図 6.8: 電気双極子。二つの接近した電荷は電気双極子モーメント p をもつ。

2 導体間の電位差は

$$\phi_b - \phi_a = kQ \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \quad (6.15)$$

となる。

どのような場合を考えてもそうだが、電荷 $\pm Q$ を $\pm Q'$ に変えると電場や電位も Q'/Q の分だけ変化する。この性質は静電場の法則が線形性をもつことによるものである。結果として、電位差と電荷の比はどのような電荷を与えようとも一定の値をとる。その比

$$C = \frac{Q}{|\phi_+ - \phi_-|} \quad (6.16)$$

のことを電気容量 (capacitance) とよぶ。電気容量は導体の幾何学的な形状や位置関係に依存するものであり、コンデンサーを特徴づける量となる。同じ電位差をもった 2 種類のコンデンサーを比較すると、電気容量が大きい方がたくさんの電荷量を蓄えることができる。

たとえば、上で挙げた球と球殻からなるコンデンサーの電気容量は

$$C = \frac{1}{k} \frac{ab}{a-b} \quad (6.17)$$

である。 a を大きくするより b に近づけた方が電気容量が増えることがわかる。2 平面のコンデンサーでは、平面の面積 S を有限とすると面密度は $\sigma = Q/S$ であり電気容量は

$$C = \frac{1}{4\pi k} \frac{S}{d} \quad (6.18)$$

と計算される。有限の大きさのとき、厳密には上で行った計算は成り立たないのであるが、平面間の距離を十分小さくすれば端を除いて導体間の電場はほぼ一定となりこのような見方も可能となる。この場合も導体を近づけた方が電気容量を上げることができる。

6.4 電気双極子

コンデンサーのような系では二つの導体に異なる符号で大きさが同じ電荷を考える。それらを近づけて置くことにより電気容量の大きいコンデンサーをつくることができる。ここでは視点を変えてそのような系がつくる外側での電場を求めてみよう。電荷量があわせて 0 になるので電場は遠方で急速に 0 になるはずである。どの程度で減衰するのかを調べてみよう。

すでに考えた例であるが、 $r_+ = (0, 0, d/2)$ に電荷 q が、 $r_- = (0, 0, -d/2)$ に電荷 $-q$ がおかれた系を扱う。点 r における電場は次のように計算される。

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kq}{\left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - \frac{d}{2} \end{pmatrix} - \frac{kq}{\left[x^2 + y^2 + \left(z + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z + \frac{d}{2} \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

得られた式の特徴を捉えるために、十分遠方での電場のふるまいを調べよう。遠方では電場は小さくなり 0 に収束していくが、どのようにその極限值に近づいていくかの漸近形 (asymptotic form) を調べることで電場の特徴を捉えることができる。十分遠方というのは、座標点の $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ が d と比較して十分大きいことを意味する⁸。電荷分布に対して観測点を離していくか、観測点は固定して二つの電荷を近づけるかすればよい。

さて、そのような極限を考えると電場の表式は d/r について展開を行うことができる。つまり d についての Taylor 展開である。ここで重要なのは $d \rightarrow 0$ の極限をとってしまうと電場は 0 となってしまうため、有限の答えが得られる項まで展開を行うことである。 d について 0 次の項は 0 であり、1 次の項が有限に残る。結果は次のようなものである。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \sim kq \left(-\frac{d}{r^3} \mathbf{e}_z + \frac{3dz}{r^5} \mathbf{r} \right) \quad (6.20)$$

これが電場の漸近形を表している。電場は向きによって異なる値をもち、遠方では r の -3 乗かそれ以上の度合いで減衰する関数となる。

ここでは電荷を z 軸方向に揃えておいたが、一般化することは用意である。点 r_+ に電荷 q 、点 r_- に電荷 $-q$ をおいた系では電場の漸近形は次のようなものとなる⁹。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \sim k \left(-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} \right) \quad (6.21)$$

ここで次のベクトル量を導入した。

$$\mathbf{p} = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) \quad (6.22)$$

$\pm q$ の電荷の組は電気双極子 (electric dipole) とよばれる。電気双極子を特徴づけるのは電気双極子モーメント (electric dipole moment) \mathbf{p} である。モーメントとよぶのはこのような電場がつくりだす力のモーメント $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ が 0 でなくなるからである。

電気双極子は後に電磁気学の基本原理に関わる部分で思わぬ形で利用されることになる。第 10 章で扱う。

関数の漸近形

たとえば、次の関数はどれも $x \rightarrow \infty$ で発散する。

$$f(x) = x + e^x \quad (6.23)$$

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2} \quad (6.24)$$

$$h(x) = 1 + \ln x + \frac{1}{x} \quad (6.25)$$

ただ、無限大になる様子はそれぞれかなり異なる。 f は x について指数関数的に急速に発散し、 g はべき的に発散し、 h は対数的にゆっくりと発散する。それぞれの $x \gg 1$ での漸近形は次のようなものとなる。

$$f(x) \sim e^x \quad (6.26)$$

$$g(x) \sim x \quad (6.27)$$

$$h(x) \sim \ln x \quad (6.28)$$

$x \gg 1$ で主要にきく項のみを残して表現している。

本講義ではあまりわからないかもしれないが、漸近形は本質的な情報を含んでいることが多い。

⁸次元をもつ量が大きい (小さい) というときは、何と比較して大きい (小さい) のかをいう必要がある。19 ページの囲み参照。

⁹詳しい計算は以降の章で似た計算を行うのでここでは省略する。各自で確認してほしい。

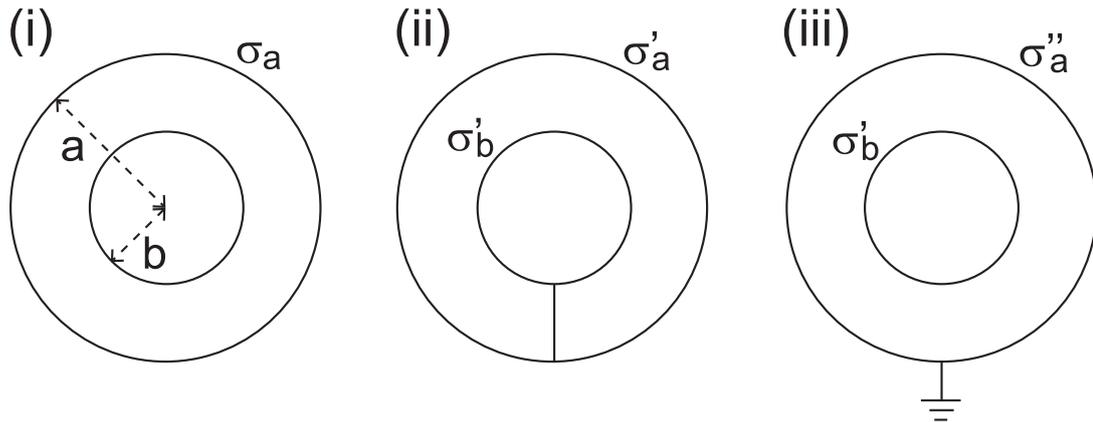


図 6.9: Cavendish の実験。中心が同じ半径 a と b の球殻導体をおく。 $a > b$ とする。(i). 外側球殻に電荷を与える。(ii). 外側と内側の球殻を導線でつなぐ。(iii). (ii) の導線を外して外側の球殻を接地する。

6.5 Cavendish の実験**

最後に応用として Coulomb の法則をどのように確かめたかについて議論する。逆 2 乗則が成り立つことを示した実験としては 1785 年に Coulomb がねじり秤を用いて行ったものがあるが、この精度はあまりよくなかったらしい。そこで、静電遮蔽の現象から逆 2 乗則を導く。これを行ったのは J. Priestley だが、定量的により正確な測定を行ったのは H. Cavendish である¹⁰。これは 1772 年に行われたが、Maxwell より 1879 年に公表されるまで認知されることはなかった¹¹。

本節の目的は Cavendish の用いた設定にしたがって、静電遮蔽と逆 2 乗則の直接の関係を見ることである。-2 というべき指数が実験的に測定できる量とどのように関係しているかを調べる。数学的な理論と現実の実験がどのように結びつけられるかを見るのにとてもよい例である。

まず、問題 [6-7] を解いてほしい。そこで具体的に与えられた関数 u 、 f は Coulomb の法則を反映したものとなるが、ここではそれを任意関数であるとして計算をすすめよう。それで Coulomb の法則が成り立つとすると何が言えるかがわかる。

図 6.9(i) のように二つの球殻導体を考える。外側の球殻の半径を a 、内側のものを b とする。 $a > b$ である。二つの球の中心を同じ点にとる。この系に対して外側に電荷 Q を与えると、電荷は球面に一様に分布して $\sigma_a = \frac{Q}{4\pi a^2}$ の面密度をもつ¹²。これが最初の設定である。

次に、二つの球殻を導線でつなぐ(図 6.9(ii))。導線をつなぐということは二つの球殻導体の電位を同じものにするを意味する。電位が同じになるように電荷の移動が起こるのだろうか。

前節までの議論を理解していれば、それはありえないと言える。外側球殻内の電場は 0 であるから、電位は一定である。したがって、導線をつないでも何も起こらない。ここでは Coulomb の法則が成り立つための条件を調べることが目的であるから、電荷の移動が起こるといことも想定して議論を進める。

球殻をつなぐことによって外側球殻の面密度が σ'_a 、内側のものが σ'_b になったとする。このときの任意の位置での電位を考える。問題 [6-7] の結果を用いることができる。電位の寄与は二つの球殻に分布する電荷からくるので、次のように書ける。

$$\phi(r) = \frac{2\pi\sigma'_a}{ar} \left(f(r+a) - f(|r-a|) \right) + \frac{2\pi\sigma'_b}{br} \left(f(r+b) - f(|r-b|) \right) \quad (6.29)$$

¹⁰Priestley は 1776 年、そのような結論を元に逆 2 乗則を推測している。Coulomb の実験より前のことである。

¹¹Cavendish は人間嫌いで引きこもりながら研究に打ち込んでいたらしい。莫大な遺産を相続しお金には不自由しなかったそうである。死後に、未発表の価値ある研究が多数発見された。その中にここで議論する Coulomb の法則の他、Ohm の法則(と後によばれるもの)などもあった。イギリスには Cavendish の名を冠した有名な研究所がある。

¹²電荷は互いに反発しあうので 1 箇所に固まらず導体にひろがる。対称性を考えると一様に分布するのが自然な配置となる。

球の中心からの距離を r とした。二つの球殻の電位は同じであるのだから、 $\phi(a) = \phi(b)$ が成り立つ。それらの値を ϕ_0 とおくと

$$\phi_0 = \frac{2\pi\sigma'_a}{a^2} (f(2a) - f(0)) + \frac{2\pi\sigma'_b}{ab} (f(a+b) - f(a-b)) \quad (6.30)$$

$$\phi_0 = \frac{2\pi\sigma'_a}{ab} (f(a+b) - f(a-b)) + \frac{2\pi\sigma'_b}{b^2} (f(a+b) - f(0)) \quad (6.31)$$

となる。これらの関係から二つの電荷密度が ϕ_0 を用いて表される。 σ'_a と σ'_b についての線形な連立方程式なので解くことは簡単にできる。次のように行列とベクトルを用いて表すと見やすい。

$$\begin{pmatrix} p_a & p_{ab} \\ p_{ab} & p_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma'_a \\ \sigma'_b \end{pmatrix} = \frac{\phi_0}{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

ここで、行列の各成分を

$$p_a = \frac{f(2a) - f(0)}{a^2}, \quad p_b = \frac{f(2b) - f(0)}{b^2}, \quad p_{ab} = \frac{f(a+b) - f(a-b)}{ab} \quad (6.33)$$

とおいた。式 (6.32) は行列の逆行列を両辺の左からかけることで解くことができる。次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \sigma'_a \\ \sigma'_b \end{pmatrix} = \frac{\phi_0}{2\pi} \begin{pmatrix} p_a & p_{ab} \\ p_{ab} & p_b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.34a)$$

$$= \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{p_a p_b - p_{ab}^2} \begin{pmatrix} p_b & -p_{ab} \\ -p_{ab} & p_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.34b)$$

$$= \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{p_a p_b - p_{ab}^2} \begin{pmatrix} p_b - p_{ab} \\ p_a - p_{ab} \end{pmatrix} \quad (6.34c)$$

これらは球殻の面密度が ϕ_0 を測定することで得られることを示している。もちろん関数 f も知らないといけないが、まだしばらく未定のものとして扱おう。

三つめの設定として、二つの球殻をつなぐ導線を外し外側の球殻を接地する (図 6.9(iii))。それによって、外側球殻の電荷密度は変化する。電位を 0 にするように電荷の移動が起こるわけである。内側の電荷は逃げられないからそのままであるが、電位は変化する。式 (6.29) を用いると次の式が成り立つ。

$$0 = 2\pi\sigma''_a p_a + 2\pi\sigma'_b p_{ab} \quad (6.35)$$

$$\phi(b) = 2\pi\sigma''_a p_{ab} + 2\pi\sigma'_b p_b \quad (6.36)$$

外側の電荷面密度を σ''_a とした。それは一つめの式より σ'_b を用いて表すことができる。

$$\sigma''_a = -\frac{p_{ab}}{p_a} \sigma'_b \quad (6.37)$$

二つめの式に代入して σ''_a を消去する。すでに求められている σ'_b の表現も用いると

$$\phi(b) = 2\pi \left(p_a - \frac{p_{ab}^2}{p_a} \right) \sigma'_b \quad (6.38a)$$

$$= \left(1 - \frac{p_{ab}}{p_a} \right) \phi_0 \quad (6.38b)$$

$$= \left(1 - \frac{a}{b} \frac{f(a+b) - f(a-b)}{f(2a) - f(0)} \right) \phi_0 \quad (6.38c)$$

を得る。これが最終的な結果である。(iii) のときの内側球殻の電位を測定して、それを (ii) のときの球殻の電位 ϕ_0 と比較することによって関数 f についての知見が得られる。

関数 f は Coulomb の法則を反映したものである。問題 [6-7] で得られたように、Coulomb 力の場合関数形は次のようなものである。

$$u(R) = \frac{C}{R} \quad (6.39)$$

これは (4.13) 式 (56 ページ) の関数形と同じであり、Coulomb ポテンシャルそのものであるといえる。この式を (6.38) 式に代入すると、 $\phi(b) = 0$ が得られる。これは静電遮蔽として理解できる結果である。それでは、Coulomb 力が逆 2 乗でなかったらどうなるだろうか。力が -2 乗であるとポテンシャルは -1 乗になるから、次のような関数形を考えてみる。

$$u(R) = \frac{C}{R^{1+\delta}} \quad (6.40)$$

$\delta = 0$ が Coulomb 力に対応する。 δ のあるときの式を (6.38) 式に代入してみると、

$$\frac{\phi(b)}{\phi_0} = 1 - \frac{a}{b} \left[\left(\frac{a+b}{2a} \right)^{1-\delta} - \left(\frac{a-b}{2a} \right)^{1-\delta} \right] \quad (6.41)$$

が得られる。 $\delta \neq 0$ で有限の値をとる。 a と b はわかっている値であるから、もし Coulomb 力がべき的な関数であるとしたらべき指数を電位の測定より決定できる。このようにして Coulomb 力の測定を行うことができる。この式には k や電荷密度など測定しづらい量は入っていない。電位さえ測れることができればべき指数がわかるという、実験と理論を直接結びつける重要な関係である¹³。

Cavendish の実験では、 $|\delta| < \frac{1}{50}$ という結果が得られている。Cavendish の研究を公表した Maxwell も再実験を行っていて、より精度の高い結果 $|\delta| < \frac{1}{21600}$ を得ている。

6.6 まとめと考察

静電場の応用をいくつか扱った。

- 導体の電荷分布と静電遮蔽
- 鏡像法による電位計算
- コンデンサー
- 電気双極子

どれも典型的な応用である。特に、静電遮蔽とコンデンサーは実用的な面で非常に有用である。コンデンサーの例は高校物理でもある程度詳しく扱っており、大きな違いはないように見えるが、基礎から理解することで任意形状のコンデンサーの電気容量を（原理的には）計算できるようになっている（たとえば問題 [6-3]、[6-4]）¹⁴。電気双極子の知識は第 10 章で用いる。

導体と電荷の性質

本章では導体というものを扱った。導体は電荷が自由に動きまわられる領域である。そして、暗黙の仮定として、導体内に電荷が無尽蔵にあること、電荷が保存することを用いていた。

¹³ただし、この式を導くためにいろいろな仮定を用いている。全ての仮定が正しいという保証があるわけではないので、さまざまな実験を行って矛盾が無いことを確かめていくしかない。

¹⁴これは次章で扱う抵抗も同じである。直線導線だけでなく抵抗を計算できるようになる。

電荷が保存するというのは、電荷が突然なくなったり発生したりすることがないことを意味している。電荷は正負の値をとりうるので $+q$ と $-q$ の電荷がくっついてなくなることはあるが、その反応の前後で総電荷量は変わっていない。これもまた前章で述べたような原理に属する法則である。積極的には主張しないが、暗に理論にとりいれられている。次章で詳しく扱う。

導体内において全電荷量が 0 であるということは、電荷そのものが全く存在しないか、正負の電荷対が存在しているかのどちらかである。そして導体では後者を仮定している。電荷は無尽蔵にあり、導体内を自由に動くことができる。自由に動くことができるので導体の内部の電場がなくなるまで電荷は動きそこでつりあってとまる。

ここで電子や原子などの存在を述べるのが正統的な教科書の記述であるが、本章ではそのような先入観にとらわれないで現象を調べたいし、導体というものが現実にどうあるべきかというのは多くの法則が絡みあってかなり複雑なので、表だっては議論せず現実と切り離している。

何らかの原因で電荷が自由に動くことができないような物体を考えることもできる。その場合、物体内で電荷は電場を 0 にするほど動けないので、この系は導体とは異なる性質を示す。これは誘電体とよばれている。誘電体の性質は本講義では扱わない。

「つりあい」の状態

導体の問題は運動方程式を解くのとはいぶ趣が異なる。それは結局のところつりあいの条件を調べているだけだからである。電荷が完全に静止した世界のみを考えているので運動の様子などを調べる必要がない。なのでほとんど計算を行うことなく系の性質を得ることができる。導体内部の電場が 0 になることを用いてつりあいの状態を得ることができる。

一般に、つりあいの状態は平衡状態ともいう。平衡状態はさまざまな系においてあらわれる¹⁵。物理学では熱力学においてよく用いられる概念である。熱力学は「熱」という概念を扱う体系であり、系の状態をつりあいの条件によって決める。そのため、熱力学では運動法則のようなものは出てこないし、つりあっていない状態（熱が移動している状態）を記述することはできない。熱的非平衡状態の記述は非常に難しい問題でいまだ満足いく体系はできていない。

余談であるが、「熱」というものも当初はものの属性であると考えられていた。物体内には熱素（カリック）とよばれるものが存在し、それをやりとりすることで熱の移動が記述される。現代ではそのような描像は否定されているが、どのように否定されるかはとても難しく面白い問題である。電荷は実体のあるものかという問いも同様である。

いずれにしても、つりあい条件だけで状態を記述する平衡系の理論は物理の理論としては単純で閉じた法則をつくりあげることができるように見えるが、現実的ではない世界であり、理論としては不完全である。それでもつりあい状態を詳しく議論するという事は次のことを示唆している。

- つりあいの状態に達するまでの時間が短いこと
- つりあいの状態が安定であること

日常的な感覚で電気に関わる現象はあっという間に起こるものが多い。もしも、つりあい状態に達する時間が非常に長いものであれば静電場をくわしく解析してもあまり役に立たないだろう。安定性についてもそうである。たとえば力学の問題で、振り子が支点の真上に静止した状態は運動方程式の解であるが、わずかな力で左か右に動き出すきわめて不安定な状態である。一方、真下に静止した状態であればちょっとゆすってみてもわずかに振動するだけである。平衡系が現実的に意味のある状態であるかどうかは平衡状

¹⁵Wikipedia 日本語版で「平衡」を調べると 11 種類出てくる。

態から一步でも外れた世界を考えてみて系がどんどん平衡からずれていくかそうでないかを調べてみなければならない¹⁶。そしてずれてしまってもあつという間に元の平衡状態に戻るのであれば実質的には平衡状態の解析で十分である。

もちろん、多くの現象がそうであるからといって非平衡状態を考える必要がないわけではない。どんなに特殊な状況でも記述しなければならない¹⁷。電磁気学において平衡からずれた世界とは、電荷が動きまわり電(磁)場が変化する世界である。動いている世界を記述したい。それが第 II 部からのテーマである。

6.7 問題

[6-1] 面電荷の総量

$x = 0$ の表面をもつ導体において表面の面密度が (6.9) 式で与えられている。表面の総電荷量を計算せよ。

[6-2] 球導体のときの鏡像法

半径 r の導体球が原点を中心としてあるとき、 $\mathbf{r} = (a, 0, 0)$ の球外部に電荷 q をおく。 $a > r$ である。

(a). 導体の電位を 0 としたとき、球外部の電位を鏡像法を用いて求める。対称性から $\mathbf{r} = (a', 0, 0)$ の位置に q' の仮想電荷をおけばよいと考えられる。 a' と q' を求めよ。

(b). 球表面に誘起される総電荷量を求めよ。

[6-3] 球形コンデンサー

半径 a の導体球とこれを囲む半径 b の球殻導体を中心が一致するように配置したコンデンサーを考える。中心を原点とする座標系をとる。

(a). 電場 $E(\mathbf{r})$ と電位 $\phi(\mathbf{r})$ を求めよ。蓄えられる電荷を Q とする。また、電場と電位の大きさを図示せよ。

(b). コンデンサーの電気容量 C を求めよ。

[6-4] 円筒形コンデンサー

二つの円筒導体を中心軸をそろえて置く。外側の円筒の半径を a 、内側のものを b とする。円筒の長さは十分大きいとする。このときの単位長さあたりの電気容量を求めよ。

[6-5] 電気双極子と定電場

(a). 式 (6.21) の電場に対応する電位を求めよ。

(b). (a) の電場に加えて p と同じ方向に一定の大きさの電場 E_0 をかける。このとき、対応する電位を求めよ。

(c). (b) で $|r|$ がある値をとるとき電位が一定値になることを示せ。

¹⁶その点、熱力学はよくできた理論であり、安定性も保証する理論となっている。

¹⁷といっても、非平衡状態がそこまで特殊なわけではない。

[6-6] 電気双極子の電気力線

- (a). 式 (6.21) の電場の電気力線の様子を図示せよ。
(b). [6-5](b) のときの電場の電気力線を図示せよ。

[6-7] 球面に分布した電荷がつくる電位

原点を中心とする半径 a の球面に電荷が面密度 σ_a で一様に分布している。

- (a). 点 r での電位は $r = |r|$ のみに依存して

$$\phi(r) = \sigma_a \int_{S_a} d\Omega(\mathbf{r}_a) u(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|) \quad (6-7.1)$$

と書ける。積分は球面上の面積分（立体角）を表し、 \mathbf{r}_a は球面上の点を表す。このときの関数 $u(R)$ を求めよ。

- (b). $u(R)$ の具体形を用いないで次の式を示せ。

$$\phi(r) = \frac{2\pi\sigma_a}{ar} \left(f(r+a) - f(|r-a|) \right) \quad (6-7.2)$$

$$f(R) = \int dR R u(R) \quad (6-7.3)$$

$f(R)$ は $Ru(R)$ の不定積分を表す。

第II部

電流と静磁場

第7章 電流

本章では電荷の流れを表す電流の概念を導入する。電流の定義、電流が満たす法則、そして Ohm の法則の意義について議論する。電流は磁場の源になるものであり、その性質を理解することは磁場の満たす法則を理解する第一歩となる。

7.1 電流

7.1.1 電流と連続の方程式

運動する電荷は電気の流れ、つまり電流 (electric current) として表される。電流は、単位時間に面を通過する電荷量として定義される。面を通過するといっても場所や時間によって電荷はいろいろな流れ方をしている。電場のときと同様に、面を微小要素に分割して考えるのが便利である。時間 t で点 r の微小面 $dS(r)$ を単位時間に通過する電荷量を $\mathbf{J}(r, t) \cdot d\mathbf{S}(r)$ と定義する。 $\mathbf{J}(r, t)$ は電流密度 (current density) とよばれる。電荷の流れは向きをもっているから電流密度はベクトルである。図 7.1 のようにある面 S を単位時間に通り過ぎる電荷量、つまり電流 $I_S(t)$ は

$$I_S(t) = \int_S d\mathbf{S}(r) \cdot \mathbf{J}(r, t) \quad (7.1)$$

と書かれる。この式を見てわかるように、電流密度についての流束が電流である。電流はベクトルではないことに注意。ベクトルで局所的な量である電流密度の方が基本的な量となる。電流の次元は (電荷) \cdot (時間) $^{-1}$ 、電流密度の次元は (電荷) \cdot (長さ) $^{-2} \cdot$ (時間) $^{-1}$ である¹。

このような電流が満たすべき法則を考えよう。電場の場合、電気力線が満たす方程式を Gauss の法則として表現した。電気力線は電荷のあるところから生じ、互いに交わることはなく、電荷のあるところで途切れるか無限遠点にまで達する。電流の場合も同様である。何も無いところから電流は生じない。電流の源が電荷である以上、電流は電荷密度と密接に関係しているはずである。一般に、電流密度 $\mathbf{J}(r, t)$ が場所と時間に依存しているように、電荷密度 $\rho(r, t)$ も場所と時間に依存する。ある領域 V を囲む閉曲面 S についての流束 (電流) を考えよう。

$$I_S(t) = \oint_{S=\partial V} d\mathbf{S}(r) \cdot \mathbf{J}(r, t) \quad (7.2)$$

このとき、 $I_S(t)$ は領域を単位時間に出ていく電荷量を表している。一方、領域内部の電荷量は

$$Q_V(t) = \int_V d^3r \rho(r, t) \quad (7.3)$$

で与えられる。この電荷量は外に出ていった分だけ減るので電荷の変化率が流束に等しい。このようにして次の関係が成り立つ²。

$$I_S(t) = -\frac{d}{dt} Q_V(t) \quad (7.4)$$

¹電流の単位 (アンペア) については 8.1.3 節で述べる。

²この関係を Gauss の法則と対比してみると面白い。Gauss の法則は「流束」が電荷量に比例していた。ここでも「流束」を扱っているが異なる関係式を得る。

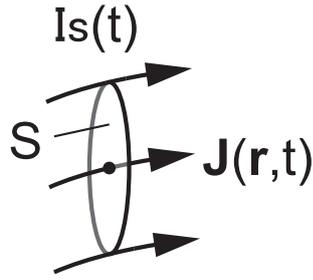


図 7.1: 電流と電流密度。局所的な点で定義される電流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ に対して計算される流束 $I_s(t)$ が電流となる。

減った分が電流なることを考慮して右辺にマイナスがついている。積分表示を用いて表現すると

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) + \oint_{S=\partial V} d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (7.5)$$

となる。さらに、Gauss の定理 (3.31) 式 (46 ページ) を用いると変形を行うことができる³。面積分は体積積分を用いて表され

$$\int_V d^3\mathbf{r} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \right) = 0 \quad (7.6)$$

となる。Gauss の法則のときのように、この領域のとりかたは任意である。導体の形とは一切関係なく好きなように領域をとることができる。とすればその領域を 1 点に縮めてもよいから、積分したものが 0 となるのではなく、被積分関数が 0 になるという結論が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (7.7)$$

これを連続の方程式 (continuity equation) とよぶ。式 (7.5) が積分形、(7.7) 式が微分形で表した連続の方程式である。いずれも電荷が保存することを表している。

保存則

保存則 (conservation law) とは、動的な系において何かの量が時間によらないことを言う。運動の間、その量は常に一定の値に保たれるから、その運動を特徴づける量となる。力学では、エネルギー保存則、運動量保存則、角運動量保存則といった例を扱った。そういった例では保存する量 E が運動する粒子の位置 $\mathbf{r}(t)$ を用いて表されるにも関わらず時間に依存しない ($E(\mathbf{r}(t)) = E(\mathbf{r}(0))$)。

ここでは電荷の保存則として連続の方程式を用いて表した。保存するべき量は電荷 $Q_V(t)$ であるが、この場合には領域を出入りする寄与も考慮しているので、 $Q_V(t)$ は定数になるとは限らない。もちろん領域を全空間にとれば定数になる。このような記述の仕方の違いは、ここで考えている保存量が局所的な時空点の関数、つまり場の量、として表されていることによる。

なお、電磁場の系のエネルギー保存則は第 III 部で扱う。

³第 3 章で行ったように、領域を小さくすることで直接 (7.7) 式を導いてもよい。以下でも Gauss の定理または Stokes の定理を用いるところがあるが同様である。

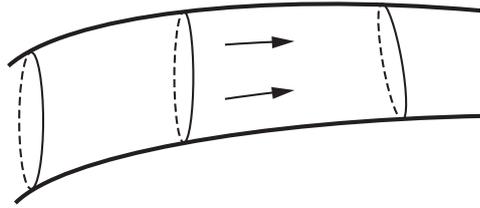


図 7.2: 導線内を流れる定常電流。どの断面 S をとっても電流 $I = \int_S dS \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})$ は同じ値となる。

7.1.2 定常電流

電荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ や電流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ は一般に複雑な関数であるが、第 II 部では簡単な場合として定常状態 (steady state) の系を扱う。微視的には電荷が運動しているのだが、巨視的には時間変化が見られない状態である。導体内を一定の速さ、一定の密度で流れる電荷は定常状態の 1 例である。ある点での電荷が別の点に移動してもすぐに他の電荷が供給されれば電荷密度は時間によらず一定となる。川の流れのようなものを想像すればよいだろう。そのためには電荷が無尽蔵に供給される必要があるが、ここではそのような現実的な問題は置いておき、定常電流 (steady current) が存在する系では何がいえるかを考えよう。

電荷密度が時間に依存しないのであるから、連続の方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0 \quad (7.8)$$

となる。電流密度も時間によらず座標のみに依存する関数 $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r})$ としている。このようにして、動的な系ではあるが時間依存性のない問題を考えることができる。

式 (7.8) は静電場で用いた Gauss の法則の電荷密度がないときの式と全く同じものである。したがって、そこで用いた性質を電流密度にそのまま適用することができる。電気力線は電流そのものに対応している。それは途中で途切れたり湧き出したりすることもなく続いている。微分形の法則を積分形に直すと

$$\oint_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0 \quad (7.9)$$

となる。 S は任意の閉曲面を表す。閉曲面を出入りする電荷量は差し引き 0 である。また、電流が途中で交差したりしないことは電気力線と同様である。

有限の断面積をもつ導線内を流れる定常電流を考えよう。電流は導線に沿っていて途切れたり交差することはない。よって導線を仮想的に切ってみたとき、その断面を単位時間に通過する電荷量は一定である。しかも、どの断面で見ても電荷量は同じである (図 7.2)。次の流束、つまり電流がどの断面に対しても同じ値をもつ (問題 [7-2])。

$$I = \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (7.10)$$

S は任意の導線の断面を表す。導線が無限に長い直線であるとする、 \mathbf{J} は導線内で導線方向の定ベクトルとなる。このとき、導線の断面積を S とすると電流は

$$I = JS \quad (7.11)$$

と書ける。これはいちばん単純な場合である。定常電流の法則は、導線の形状がいかに複雑であろうとも電流が (7.10) 式のように書けることを意味している。

電場との類似性をさらに追求すると、ある曲線に沿った電流の線積分を考えることもできる。特に、閉曲線についての線積分は渦を特徴づける量となる。電場の場合、線積分は仕事量を表しており、保存力で

あることから電場は渦をつくることはない。つまり、線積分は0である。電流の場合には仕事に対応する量が何を表すか不明であるが、ぐるぐるまわる電流を考えれば渦をつくることはできそうである。この問題についてはもう少し後で考えてみよう。

7.2 Ohmの法則

7.2.1 Ohmの法則の微分形

Ohmの法則 (Ohm's law) は中学理科でも習う非常になじみのある法則である。1826年 G. S. Ohm によって発見され、後に G. R. Kirchhoff によって定式化された⁴。導体にかかる電圧 (voltage) V に応じて導体に生じる電流 I が

$$V = RI \quad (7.12)$$

と決まる。比例係数 R は電気抵抗 (electrical resistance) とよばれるもので、電圧に関係なく導体のもつ固有の量となる。

この法則がどれだけ便利で広く使われているかは説明するまでもないだろう。ここでは、電磁気学の基本法則から見たとき Ohm の法則がどのような位置づけになるのかを明らかにしたい。

Ohm の法則は有限の断面積をもった導線に沿って定常電流 I が流れることを想定している。電圧 V は導線両端の電位差を表している。まず、これまでに何度か行ってきたように、法則を局所的な方程式として表現する。基本法則化への第一歩である。

抵抗は電流の生じやすさ・持続しやすさを特徴づける。ある電圧に対して抵抗が大きければ電流は小さくなるし、小さければ電流は大きくなる。その大きさは導線の性質や形状に依存したものとなる。導体が直線の場合、導線が長いとそれだけ抵抗は増え、断面積が大きいと流れやすくなると予想できる⁵。そこで、抵抗を次のように表す。

$$R = \rho \frac{\ell}{S} \quad (7.13)$$

ℓ は導線の長さ、 S は断面積を表す。 ρ は電気抵抗率 (electrical resistivity) とよばれる⁶。電気抵抗率は、導体の形状によらず導体の特徴づける量になるからこちらを基本量として用いるのが自然であろう⁷。電流と電流密度は (7.11) 式の関係があるから、Ohm の法則は

$$V = \rho \ell J \quad (7.14)$$

と書ける。

電圧 V は導線両端の電位差を表す。電位が与えられればそれに対応する電場が存在する。電位の勾配 (のマイナス) が電場を与えることを考慮すると、

$$V = E\ell \quad (7.15)$$

という関係が成り立つ⁸。 E は導線内部の電場の大きさを表す。導線内では電場は一定であるとしている。よって Ohm の法則は電場が電流密度に比例しているという形に書くことができる。電流が生じる方向は電

⁴前章でもふれたが、Cavendish も 1781 年に発見している。

⁵これは電荷が導体内部の何かと衝突していることを示唆している。章末の考察を参照。

⁶電荷密度と同じ記号を用いるので混同しないように注意。

⁷やや恣意的な定義にも思えるが、電圧と電流をそれぞれ電場と電流密度を用いて表す以下の議論を用いると抵抗率が自然と導入される。

⁸大きさのみの関係。符号は考慮していない。

位が大きいところから小さいところになるので、ベクトル量に戻して Ohm の法則は

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J} \quad (7.16)$$

と書ける。

ここまでの変形では直線の導体を考えていたが、導体を微小に分割して考えればどのような形状の導線でも法則を書き下すことができるはずである。これまでに何度も用いてきた考え方である。つまり、Ohm の法則を

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (7.17)$$

と一般化する。定常電流があるときその点での電場は電流密度に比例しており、その比例係数は導体の性質に依存する。あるいは逆に

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (7.18)$$

と書くことも多い。電流はその点での電場に比例しているという関係である。 $\sigma = 1/\rho$ は電気伝導率 (electrical conductivity) とよばれる。電気抵抗が大きいほど電気伝導率は小さい。式 (7.17) や (7.18) を Ohm の法則の微分形ということがある⁹。

7.2.2 Ohm の法則と静電場の法則

Ohm の法則と静電場の法則をあわせると次のようなことが言える¹⁰。まず、電流密度の発散をとると定常電流では 0 になること ((7.8) 式) より、

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (7.19)$$

となる。最右辺は Gauss の法則より電荷密度に比例しているので導体内での電荷密度は 0 でなければならない。電荷は導線の中を流れているが、各点で見たときに正負等量の電荷量が存在していると考えれば矛盾はない。したがって、導線を通る電荷によって電場が作りだされることはないと言える。

回転をとると電場は渦なしなので

$$\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (7.20)$$

を得る。電流も渦なしでなければならないことになる。例えば、輪状の導線を考えてその 1 周にわたって電流を線積分すると 0 になる。電流はぐるぐる回り続けることができない¹¹。源もないのに電荷を流し続けることはできないことを考えれば、自然な結果である。逆に言うと、電流を持続させるためには起電力 (electromotive force) を導入すればよい。

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma (\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{emf}}(\mathbf{r})) \quad (7.21)$$

右辺第 2 項の $\mathbf{E}_{\text{emf}}(\mathbf{r})$ を閉回路に沿って積分した量

$$V_{\text{emf}} = \oint_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E}_{\text{emf}}(\mathbf{r}) \quad (7.22)$$

が起電力を表す¹²。この起電力は電位の微分を用いて書くことができないものである。つまり、起電力は保存力ではない。経験的にわかるように、起電力は電池によってもたらされる。基本法則の観点からも起電力は意味がある。第 III 部で扱う。

⁹局所的な Ohm の法則の方が自然な呼び方かもしれない。

¹⁰以下では法則の微分形を用いた議論を行うが、積分形でもできる。実際に考えてみよう。

¹¹超伝導体であればありえるが、そのような系ではそもそも Ohm の法則が成り立たない。

¹²起電「力」といわれているが、定義を見てわかるように力を表す量ではないので注意されたい。

7.3 まとめと考察

電流の性質について考察した。次の点を理解してほしい。

- 電流と電流密度の定義と関係
- 連続の方程式の意味
- Ohm の法則の微分形（局所的表現）
- Ohm の法則 + 静電場の法則が意味すること

電流と電流密度

第 I 部では全てが静止した系を扱った。電荷を置いたらどういう力が働くか、そのような力はどのような法則に従うかという問題である。電気的な性質は全て電場によって記述される。電場中におかれた電荷は電場によって力を受けて運動するのだが、その電荷が動くことによって生じる効果は一切無視されてきた。

時間に依存しない系を考えているだけでは電磁気学を理解することにはならない。電荷の運動に伴い生じる効果を理解する必要がある。ここでは電流があるときどのような法則に従うかを調べた。

流れを特徴づけることはすでに電場の例で考えている。したがって類似の考察を行えばよい。

局所量による記述

その際に重要なのは、電流密度という局所的なベクトル場を導入することである。任意の点で定義されている局所量が微視的な法則を扱うのに都合がいいことは静電場の解析で見えてきたとおりである。われわれになじみのある電流は、適当な面についての流束として電流密度から副次的に定義されるものとなる。

Ohm の法則も昔からなじみのある表現でなくて局所的な表現に書き換えている。そしてそれは任意の形状の導線に適用できるものとなっている。抵抗は断面積や長さなど系に依存する部分を取り除いて、抵抗率という、より基本的な量におきかわっている。

電場の法則を Coulomb の法則とは異なる表現で書いたことによってその形式を他の問題にも応用しやすくなっているという点も強調しておきたい。数学的な抽象表現を用いることによって対応する量が何であろうが本質を直ちに捉えることができるようになっている。これは電磁気学に限らず物理学一般にいえる教訓である。

連続の方程式

連続の方程式は、電荷が出ていった分だけ減り、入ってきた分だけ増えるという至極当然の性質を表している。つまり、電荷が保存する量であることを表した方程式でもある。何も無いところで電荷が湧き出すことはないし消滅することもない。ただし、電荷は正負の量をもつので正負等量の電荷が湧き出したり消滅することもある。第 6 章でも議論したように、導体内部の電荷の総量が 0 でも正負等量の電荷が存在しているとき、電場をかけるとそれらは分裂して運動する。

連続の方程式は「密度」と「流れ」の関係を規定するものである。電荷がどう動くかなどの運動法則は規定されていない。したがって、これだけでは用をなさない。ただ、電磁気学の法則がどのようなものであれ、連続の方程式は必ず満たされなければならない。非常に基本的な方程式であり、この先電磁気の法則を少しずつ拡張していくが、最後まで残る法則となる。連続の方程式は流体力学や量子力学等他の分野でも用いられており、電磁気特有のものではない¹³。したがって、電磁気の法則は別にあり、それは連続の

¹³それらの場合、対象となる量は電荷でなく質量や確率 (!?) となる。

方程式を満たすものであるべきという使い方をするのが望ましい。力学における運動法則とエネルギー保存則のようなものである。通常は、前者のような具体的な運動法則から後者のような抽象的な法則を見つけることが多いが、未知の理論をつくる時は、後者から出発して少しずつ法則を探ることもある¹⁴。

Ohm の法則の意義

Ohm の法則の意味するところをもう少し考えてみよう。

電流は荷電粒子が運動することによって生み出されるものである。簡単のため、直線導体を考えると定常電流は荷電粒子が等速直線運動することによって生み出される。そのときの電流密度は伝導粒子の電荷密度を ρ 、速度を v とすると

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (7.23)$$

となる。ひとつひとつの荷電粒子の運動が電流そのものに他ならないことを表す式である¹⁵。

Ohm の法則は電流密度が電場に比例していることを示している。ところが、電場があると電荷には力がかかる。一定の電場は一定の加速度がかかることを意味するので、電荷は等加速度運動を行うはずである。これは等速直線運動とした上の描像と矛盾してしまう。どこかに誤りがあるはずである。電場のあるときの荷電粒子の運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} \quad (7.24)$$

となる。これでは粒子の速度は時間に比例していくらでも大きくなってしまふ。定常状態というものがあるとすれば、各荷電粒子は最初は初期状態に応じてさまざまな運動をするであろうが最終的に一定の速度に達する。このとき、電場による力が他の力とつりあって働く力が 0 になると考えると¹⁶、運動方程式は次のように修正されるべきである。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \left(\mathbf{E} - \frac{nq}{\sigma} \mathbf{v} \right) \quad (7.25)$$

追加した項の係数 nq^2/σ は、答えが Ohm の法則の表式と一致するように調節している。 n は荷電粒子の密度を表す。右辺が 0 になる速度で Ohm の法則が成り立ち加速度が 0 になる。

速度に逆向きに速さに比例するという力の源とは何であろうか。重力場中の運動を解いたひとは似たような問題を解いたことがあるかもしれない。一定の重力中での粒子の落下運動を考える¹⁷。重力に加えて速度に比例した力があるとすると、十分時間がたったとき速度一定の定常状態に落ち着く。これは「摩擦」による力と解釈される。どのような機構であるか詳しくは議論されないが、落下する粒子が空気中で抵抗をうけることをモデル化した方程式と解釈される。

微視的にこのような力を導出することは全く容易ではない。抵抗率の定義のところでも述べたが、抵抗を決めるには電荷が導線の中でどのように動いているか知る必要がある。抵抗は導線の断面を増やせば減り、長さを増やせば増える。これは、電荷が内部で空気抵抗のモデルのように何かと衝突しながら摩擦を受ける運動を示唆している。それは電磁気の法則だけではなく他の法則を必要とする。さまざまな要素がからみあって第一原理から導出することは困難である。

このように考えると、Ohm の法則は現象論的な経験式と解釈するのが自然である。微視的な機構を理解して厳密に導かれる法則であるかもしれないが、運動が力学の法則に支配されている以上、少なくともそれは電磁気の法則からだけでは決めることができないだろう。荷電粒子が大きさも質量をもたないもので

¹⁴もちろん、後者だけで理論をつくることはできない。何らかの実験事実や発想の飛躍が必要となる。

¹⁵この関係は一般的に成り立つものではないことに注意。ここでは速度や密度が一定であるとしている。問題 [7-1] も参照。

¹⁶慣性の法則によると、働く力が 0 のとき物体は等速直線運動（速度 0 で止まることも含む）を行う。

¹⁷力が距離によらない定数となる。

重力相互作用が働かない粒子であれば電磁気の法則で記述できるかもしれないが今のところそれを知る手がかりはない¹⁸。Ohm の法則を電磁気の基本方程式としてよいかどうかは今のところ疑わしい。

Ohm の法則が基本法則でなさそうなのは次のことからわかる。時間反転の操作を考えてみる。つまり、過去から未来への時間発展を逆にした世界を考える。静電場は時間には全く関係なく、時間を反転しても電場は変わらない。一方、電流は電荷の流れであるから時間反転の元で電流の符号が変化する。Ohm の法則は両者が比例関係にあることを示している。比例係数は物質によって決まる定数であり時間とは関係ないと考えられるから、Ohm の法則は時間反転に対して不変ではない。Coulomb 力を表す運動方程式や静電場の基本法則は時間反転操作のもとで不変であるから、それらの法則から Ohm の法則を導くことはできない。時間依存する系に電磁気の法則を拡張したときに基本法則が時間反転対称性をもつべきかどうかは現段階ではわからないが、破るのであれば相応の議論が必要となる。このような観点から言えば Ohm の法則はとても非自明な関係式である。静電場はこれまでも扱ってきたように完全に止まった平衡状態のものである。電流は定常であるとはいえ、非平衡のものである。つまり、Ohm の法則は平衡と非平衡を結びつける関係式となっている¹⁹。

実際、Ohm の法則は厳密に成り立つ関係式ではない。電位差が小さいか大きい領域ではずれが見られるし、系の温度にも依存する。先にも書いたように、超伝導の系では成り立たない。われわれが追い求めている電磁気の法則は、どんな時、場所、状況でも成り立つものである。このようなことから、Ohm の法則はたいへん便利でわかりやすい法則ではあるのだが、純然たる電磁気の法則であるとは言えないと考えられる。

Ohm の法則が成り立っていることは別の重要なことも意味している。第 2 章で電荷は物体がもつ属性であることを述べ、上で電流は荷電粒子が運動することによって生み出されるものであると述べた。それは、少なくともここで考えている系では、物体が電荷という属性をもち未来永劫変わらないものであるということである。もし、電荷というものが熱のように物質の間を自由に行き来できるようなものであったとすれば、粒子とは別の扱い方をしなくてはならない。Ohm の法則は、電荷をもつ粒子が導体中の何かと衝突しながら運動することによって定常電流を生み出すことを示唆している。そのような描像では抵抗などを導入するのも自然であり、電荷が粒子によって運ばれるものであることの根拠の一つとなる。

一方、連続の方程式はそのような描像とは無縁である。電荷密度や電流密度は物体とは切り離しても定義できる。電荷がどのようなものであろうとも保存則さえ満たせば常に成り立つ。上でも述べたが、連続の方程式はより基本的な法則なのである。

定常状態

上でも少し触れたが、定常電流の系では定常状態を扱っている²⁰。ひとつひとつの荷電粒子は動いているのだが、巨視的に見ると物理量に何の時間変化もなく止まっているように見える状態である。第 I 部では止まっている系を扱ったが²¹、ここでは動いているが止まって見える系を扱っている。

熱力学にもそのような定常状態が存在する。高温の物体と低温の物体を用意しそれらの温度を一定に保ちながら配置すると、熱は高温から低温の物体に向けて流れる。しばらく待ってから系の状態を測定してみると、物体間の領域に一定の熱の流れが生じていることがわかる。これも定常状態（定常流状態）である。

次章から扱う静磁場はそのような定常状態に対して定義されるものである。したがって、静磁場の法則は止まった系の法則のものなのかそうでないのかよくわからないところがあるが、実はそれには深い意味

¹⁸ しかも相対性理論を学ぶと質量 0 の粒子は光速で運動するしかないということもわかってしまうので、Ohm の法則が電磁気の法則のみから導かれるということはなさそうである。

¹⁹ Brown 運動に関する Einstein の関係式も類似の法則を表している。

²⁰ ここでは定常状態を steady state という意味で用いているが、stationary state という語も存在する。どちらも日本語では定常状態という。steady は定まった・安定した・むらのないといった意味をもち、stationary は静止したという意味である。steady state は定常流状態といった方がよいのかもしれない。

²¹ 電場の実体が何であるかわからないので本当に止まっているかどうかは不明である。

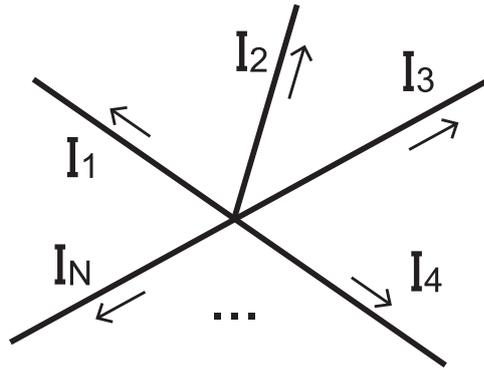


図 7.3: 問題 [7-3] の系。導線が N 本つながった系に電流が生じている。

があったことが後でわかる²²。そのようなことを気にせずとも法則を作れるが、ちょっとした疑問点を追求すると新たな世界がひろがることもある。

いずれにしろ、定常状態の解析は時間変化する系の法則の確立への第一歩となる。第 II 部の残りでは静磁場の問題を扱う。

7.4 問題

[7-1] 電荷密度と電流密度

電荷密度が次のように書けるとき、電流密度はどのように書けるか。

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \quad (7-1.1)$$

\mathbf{v} は定ベクトル、 $\rho_0(\mathbf{r})$ は適当な関数とする。式 (7.23) を用いてはならない。

[7-2] 電流の保存則

導線を通る定常電流の系について、導線を分断する面 S をどのようにとっても (7.10) 式の電流が等しくなることを定常電流の性質 (7.9) を用いて示せ。

[7-3] Kirchhoff の法則

図 7.3 のようにある点で導線が N 本つながっている系を考える。この系に定常電流があるとき、各導線における電流の和が 0 となること (Kirchhoff の法則 (Kirchhoff's current law))

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0 \quad (7-3.1)$$

を、(7.9) 式から示せ。電流 I_i は導線から導線がつながっている点から外に向かう方向を正とする。

²²本講義ではわからない。

[7-4] 円筒間の電流

半径 a と半径 b ($b > a$) の無限に長い二つの円筒を中心軸をそろえて置く。円筒が完全導体であるとし、これらの間を放射状に流れる定常電流を考える（電流は軸方向ではないことに注意）。円筒の間の空間は電気伝導率 σ の導体であり、Ohm の法則 $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$ が成り立つ。この系の単位長さあたりのコンダクタンスを求めよ。コンダクタンスは電気抵抗 R の逆数である。

[7-5] 電荷の運動方程式

運動方程式 (7.25) を解いて荷電粒子の速度 $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ および位置 $\mathbf{r}(t)$ を時間の関数として求めよ。また、 $t \rightarrow \infty$ でのふるまいを調べよ。方程式にあらわれる電場 E などのパラメータは時間によらないとする。

第8章 磁場

本章では磁場とよばれる概念を導入する。定常電流のある系において見出された Ampère 力から得られるものである。定常電流のときに生じる静磁場は静電場のときと同様に法則化され、ベクトル積を用いて表される。また、静電場と静磁場のあるときの電荷の運動についても議論する。

8.1 Ampère 力

8.1.1 電気と磁気

直線導体に電流を通すと近くにおいた方位磁針が動くことは H. C. Ørsted により 1820 年に発見された。この時代は静電場の基本法則が整備されつつある時期である¹。磁気に関する理解は電気のものよりもむしろ前であった。これは磁石というものが自然に安定して存在することによる。電気は摩擦をすることによって生じ不安定なものであったため、磁気の研究の方がむしろ先にすすんでいた²。地磁気の研究も行われており、方位磁石もその時代にすでに用いられていた。ただし、電気と磁気がどのような関係にあるかについてはほとんど理解されていなかったようである。

Ørsted の発見は電気と磁気が互いに関連する現象であることを示した初めての実験であった。この発見に基づく F. Arago による講演を聞いた A.-M. Ampère は直ちに電流間に働く力を測定し、1 週間後に論文を発表している³。本章ではその結果を基本法則を導くための実験事実として採用する。磁場というものがどのようにして定義され、どのような法則に従うかを議論する。

8.1.2 Ampère 力

2 本の平行な直線導体にそれぞれ定常電流 I_1 、 I_2 を流すと導体間に力が働く。その単位長さに働く力の大きさはそれぞれの電流の大きさに比例して、導体間の距離 r に反比例する。式で書くと次のようなものである。

$$f = 2k_m \frac{I_1 I_2}{r} \quad (8.1)$$

$2k_m$ は比例係数を表す⁴。向きは電流の向きが同じとき引力、逆方向のときは斥力となる（図 8.1）。これは Ampère 力（Ampère force）とよばれている。

Coulomb の法則と比べて扱いづらい理由は点電荷の代わりに直線電流という非局所的な物体が力の源とされていることである。よってそれを微小要素に分割して扱うべきではないかと考えるのは、これまでの経験に基づく自然な発想である。電流を微小要素に分解してそれぞれの電流要素が及ぼす力を考えればよ

¹Cavendish の実験が 1772 年（公表は 1879 年）、Coulomb の法則は 1785 年、Poisson 方程式は 1812 年、Ohm の法則は 1826 年。もちろんこの時代には今ほど情報の伝達も早くなく、Ohm の法則のように最初は無視されていた研究も多いので、発表の年をもってそれらの法則が直ちに確立したわけではないだろう。

²たとえば、磁極間に働く逆 2 乗則は、これも Coulomb の法則とよばれているが、電気の Coulomb の法則よりも前から知られていた。1750 年 J. Michell、1760 年 T. Mayer によって発見されている。磁気に関する Coulomb の法則は第 10 章を参照。

³後述するが J.-B. Biot と F. Savart も同時期に実験を行っている。

⁴2 をつけたのは (8.2) 式でよけいな係数を出さないためである。

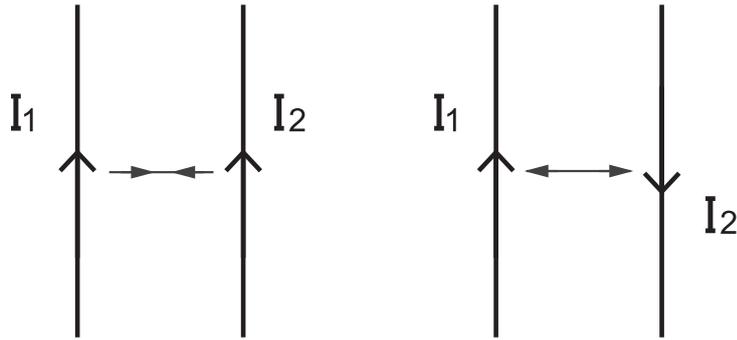


図 8.1: Ampère 力。平行電流間には引力、反平行電流間には斥力が働く。反平行という語は一般的でないかもしれないが、図のように向きが逆のときに用いる。

いだろう。もちろん、直線導体を実際に切り離したら電流はなくなってしまうから仮想的な分割である。ここで例題 2-2 (23 ページ) において直線上に一様分布した電荷が距離に反比例する電場を作り出していたことを思い出してほしい。電流の向きがそろえば引力、逆になれば斥力であるとすると、それらを一般化して次のように書けるだろう⁵。

$$d^2 F_{12} = -k_m I_1 I_2 dr_1 \cdot dr_2 \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|^3} \quad (8.2)$$

これは電流 2 の微小要素 dr_2 が 1 の要素 dr_1 におよぼす力を表している。二つの変数 r_1 、 r_2 について積分し導線の長さで割ると (8.1) 式を与える (問題 [8-1])。二つの電流の向きによって力が変化することは内積 $dr_1 \cdot dr_2$ によって表現されている。

ただし、注意してほしいのはこれが考えられる唯一の形ではないし分割も仮想的であるので物理的に意味があるかどうか不明である。積分して (8.1) 式が得られるものであれば何でもよいことになる。どれがよいかは何か他のもので判断するしかない。次節では同じ結果を与える別の表現に基づいて議論をすすめることにしよう。

8.1.3 電荷と電流の単位

ここで単位の定義について少し述べたい。電流 I は単位時間あたりに変化する電荷量としている。第 2 章で電荷の単位であるクーロンを定義したが、電流の単位であるアンペア [A] は、それを用いて $1A = 1C \cdot s^{-1}$ と定義される。

第 2 章の脚注で述べたが、われわれが標準的に用いる国際単位系 (SI) では、電荷の定義式 (2.12) (18 ページ) は 2018 年 11 月に決定され、2019 年 5 月から施行されることになっている。それまでは、アンペアを先に定義してそこから電荷の単位を $1C = 1A \cdot s$ としていた。m、kg、s、A を基本的な単位として採用する MKSA 単位系が用いられてきた。

これまでの定義では、アンペアは Ampère の法則 (8.1) 式に基づいて決める。1m 離れた導線に同じ大きさの電流を生じさせる。1m の導線あたりに働く力が $2 \times 10^{-7}N$ であるとき、電流を 1A とする。その結果、比例定数は $k_m = 1 \times 10^{-7}N \cdot A^{-2} = 1 \times 10^{-7}N \cdot s^2 \cdot C^{-2}$ と決まる。

電場を Coulomb 力に変換する係数 k の単位は $N \cdot m^2 \cdot C^{-2}$ であったことを思い出してほしい。 k/k_m の次元が速度の 2 乗であることがわかる。今のところこれらの係数には何の関係もないが、速度の次元分だけ違うという性質は後で重要な意味をもつことになる。

⁵ 右辺に微小要素が二つかけてあるので $d^2 F$ は 2 次の微小量である。あまり標準的な書き方ではない。2 重積分して実際の力になるものと考えればよい。

クーロンの代わりにアンペアを基本単位として用いていたのは不思議に思えるが、電荷より電流の方が測定しやすいことや歴史的な経緯があるのだろう⁶。定義の変遷は科学技術の発展と深い関わりがある。精度のよい測定が可能になればなるほど必然的にミクロの現象を利用した定義を用いることになり、身近な現象とは離れていく⁷。いずれにしても単位系の取り方はこちらの都合であり、自然現象の本質とは何の関わりもない。

8.2 静磁場

3.6 節 (46 ページ) で次のような公式を挙げた。

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (8.3)$$

これを用いると (8.2) 式は次のように書き直すことができる。

$$d^2 \mathbf{F}_{12} = k_m I_1 I_2 \left[d\mathbf{r}_1 \times \left(d\mathbf{r}_2 \times \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \right) - d\mathbf{r}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} d\mathbf{r}_2 \right] \quad (8.4)$$

二つに分かれてややこしくなったただけに見えるが、第 2 項は r_1 について積分を行うと、次のようにして 0 となる⁸。

$$\int_C d\mathbf{r}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = - \int_C d\mathbf{r}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = 0 \quad (8.5)$$

十分遠方で 0 になるかあるいは閉曲線であれば積分は 0 になる。したがって、Ampère の力は次のように書いても問題は全く生じない。

$$d^2 \mathbf{F}_{12} = k_m I_1 I_2 d\mathbf{r}_1 \times \left(d\mathbf{r}_2 \times \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \right) \quad (8.6)$$

Ampère はこの表現を各ベクトルの成分を書き下すことによって導いた。外積を用いて表したのは H. G. Grassmann である (1845 年)。

ここで静電場の法則を導出したときのことを思い出してほしい。電場は単位電荷に働く力として定義された。力はベクトル量であるから電場もベクトルで表される。それは電荷をおいたときに働く加速度に比例している。Ampère 力の場合やっかいなのが、微小電流要素は向きをもっているということである。なので、微小長さあたりの大きさといっても向きによって大きさは変わってしまう。式 (8.6) のように書いておけば次の形で磁場 (magnetic field) を定義することができる。

$$d^2 \mathbf{F}_{12} = I_1 d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{B} \quad (8.7)$$

\mathbf{B} が磁場を表す。今の場合、磁場は時間に依存しない静磁場 (static magnetic field) である⁹。これはベクトル量であり、次のように書ける。

$$d\mathbf{B} = k_m I_2 d\mathbf{r}_2 \times \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (8.8)$$

r_2 の位置にある微小電流要素が点 r_1 につくる微小磁場を表している。電場のときと同様に、点 r_1 に電流があるなしに関わらず意味をもつ式である。向きについてはややこしいが、磁場が物理的実在要素なのか数学的に導入された道具にすぎないのかわからない以上こういうものであるとするしかない¹⁰。

⁶ 止まっている電荷より変化量である電流を測定の方が簡単である。実験は基本的に変化量を測定する。

⁷ 重さの単位の定義が Newton 力学にはない量 (Planck 定数) を用いてなされることになったのはその象徴とも言える。これまでは、キログラム原器を用いて重さを定義していた。なんと原始的なことか。

⁸ $\nabla_{\mathbf{r}_1}$ は r_1 についての微分演算子 $\frac{\partial}{\partial r_1}$ を表す。 r_2 にはかからない。

⁹ 静電場は electrostatic field であったが、静磁場の場合 magnetostatic field よりは上記の方が用いられているようである。Magnetostatics (静磁気学) という語は存在する。

¹⁰ Ampère はこの量をディレクトリースとよんでいた。

磁場は $\text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ という単位をもつが、これをテスラ [T] (Tesla) という単位を用いて表すことがある。 $1 \text{ T} = 1 \text{ N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ である。電場の単位は定義されていないにもかかわらず磁場の方だけ定義されているのは実用的な都合からであろう。

文献によっては磁場のことを磁束密度ということもある。磁束密度とよぶのは後で定義する磁束との関係からであるが¹¹、ここでは電場との対応を考えて磁場とよぶことにする¹²。

8.3 Biot–Savart の法則

定常電流 I が任意の場所 r につくる磁場 B は、前節で得た表式を積分することによって得られる。

$$B(r) = k_m I \int_C d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (8.9)$$

線積分は電流の経路に沿って行われる。

一般に電流は場所によって異なり、電流密度 $J(r)$ を用いて表される。上の表式では電流は太さのない線上に沿って流れるものとしているが、実際には太さをもっている。そのような場合にも法則を適用できるように表式を書き換えることができる。単位面積あたりの電流が電流密度であることを考慮すると次のようになると考えられる。

$$B(r) = k_m \int d^3r' J(r') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (8.10)$$

導線の太さを面積分としてとりいれることによって $I d\mathbf{r}'$ が $J(r') d^3r'$ におきかわっている。線積分のときの微小要素のベクトルとしての役割は電流密度ベクトルに受け継がれている。体積積分の積分範囲は全ての空間とする。電流が存在しないところでは電流密度が 0 になるのであるから積分範囲を拡張することができる。このように、(8.10) 式は定常電流であればどんな系にでも適用できる式である。これは Biot–Savart の法則 (Biot–Savart law) とよばれる。Biot と Savart は Ørsted の観測に触発され、Ampère と同様にこの法則を発見している¹³。

式 (8.10) は電流があればそれは磁場をつくりだすという関係を明確に表した式であり非常に便利である。電場は電荷密度を含む関数の積分を用いて (2.21) 式 (21 ページ) のように表されたが、磁場も電流密度を用いて同様に表されるという類似点はとても重要である。次章でその類似性を利用して磁場の基本法則を導く。

8.4 例

例題 8-1: 直線電流がつくる磁場

z 軸を正の方向に流れる電流 I を考え、 z 軸から距離 r だけ離れた点における磁場を計算する。その点を x 軸上にとると、

$$B(r, 0, 0) = k_m I \int_{-\infty}^{\infty} dz e_z \times \frac{r e_x - z e_z}{|r e_x - z e_z|^3} = k_m I \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} e_y = \frac{2k_m I}{r} e_y \quad (8.11)$$

¹¹ B を磁束密度とよぶとき、 $B = \mu_0 H = 4\pi k_m H$ と書いて H を磁場の強さまたは磁界の強さとよぶ。本講義ノートでは H は用いない。

¹² 電磁気の体系の記述方法にはいくつか流儀がある。単位系との関わりもありややこしいものがある。これらは歴史的な経緯による。他書を読んだときに混乱しないように注意されたい。

¹³ ただし、かれらは磁場ではなく電流に働く力という形で法則を発見している。

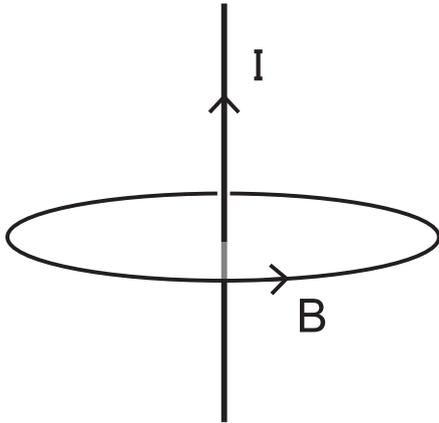


図 8.2: 例題 8-1 の系。直線電流 I がつくる磁場 B 。

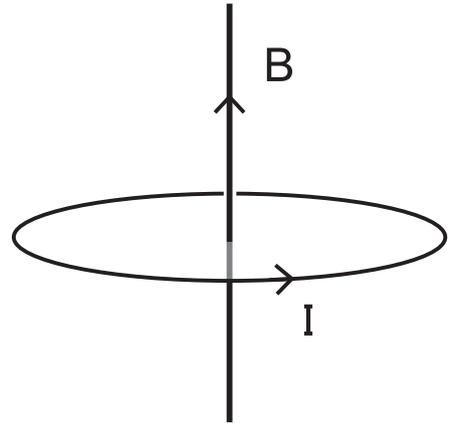


図 8.3: 例題 8-2 の系。円電流 I が中心軸上につくる磁場 B 。中心軸上以外にも磁場があることに注意。

と計算される。得られた結果は、当然ながら Ampère 力を表したものである。例題 2-2 (23 ページ) とよく似た結果であるが、そもそもその直線上に分布した電荷の例を参考にして磁場の公式を導いたのであった。

点 $(r, 0, 0)$ の位置では磁場の方向は y 軸である。一般化を行うと、磁場は図 8.2 のように電流を中心軸にしてまわるものとなる。つまり、磁場の各点での向きは円柱座標の基底ベクトルの一つである $e_\varphi(r)$ となる。電場が放射状であったのとは対照的である。

例題 8-2: 円電流がつくる磁場

今度は半径 a の円電流 I がつくる磁場を考える。円を原点を中心にして xy 平面上におく。任意の点での磁場の計算は難しいので、 z 軸上の磁場を計算してみよう。このとき、円柱座標 $(x, y, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$ を用いるのが便利であり次のように書ける。

$$B(0, 0, z) = k_m I \int_0^{2\pi} a d\varphi e_\varphi \times \frac{z e_z - a e_\rho}{|z e_z - a e_\rho|^3} = k_m I \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} (z e_\rho + a e_z) \quad (8.12)$$

円電流の向きを $e_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ とした。 $e_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ であることを用いて積分を行うと、

$$B(0, 0, z) = 2\pi k_m I \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} e_z \quad (8.13)$$

となる。磁場は z 軸上では軸に沿ったものとなる (図 8.3)。

ここでは中心軸上のみで計算を行ったが、磁場は他の点にも存在している。それらの点では磁場は z 軸方向を向かず、磁場は曲がったものとなる。具体的には問題 [8-4] を考えて図示してほしい。

8.5 Lorentz 力

8.5.1 Lorentz 力

前節では電流同士に働く Ampère 力について議論し、そこから磁場を定義した。磁場は電流素片にかかる力を与えるものである。電流素片とは電流を仮想的に切り取ったものとしているが、荷電粒子そのものと見ることもできる。つまり、電場と同様に、運動する荷電粒子は磁場をつくるとともに磁場によって力を受ける。

電場の法則は荷電粒子の運動法則から引き出されていた。本節では静電磁場中での荷電粒子の運動について調べよう。静電磁場があるときに荷電粒子が受ける力についてはこれまでの議論からわかる。電場の場合は(2.20)式(21ページ)、磁場の場合は(8.7)式である。電流は電流密度 \mathbf{J} を用いて表すことができ、電流密度は(7.23)式(91ページ)のように書けるから、これらを用いると単位電荷あたりに働く力を得ることができる。電流素片 $I d\mathbf{r}$ に磁場が及ぼす力は $I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$ であるが、これは $\rho v dV \times \mathbf{B} = \rho dV \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ と書ける¹⁴。 ρdV が微小領域内の電荷を表すことを考えると、電荷 q に働く力は $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ である。よって荷電粒子の運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}(t)) + q \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t)) \quad (8.14)$$

と書ける¹⁵。この右辺は Lorentz 力 (Lorentz force) とよばれる¹⁶。

磁場が荷電粒子に及ぼす力は非常に奇妙である。速度によってかかる力が変わる。そしてその力の方向は速度と直交する向きにかかるから粒子はまっすぐ進むことができず軌道は複雑なものとなる。ポテンシャルを用いて書くこともできないので保存力でもない¹⁷。

8.5.2 電荷の運動

電磁場が与えられたときの荷電粒子の運動を詳しく調べてみよう。

例題 8-3: 定電場中の運動

定電場中における質量 m 、電荷 q の荷電粒子の運動は次の方程式を解くことで求められる。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = q\mathbf{E} \quad (8.15)$$

電場 \mathbf{E} は一定の値をもつ。場所によらない電場であるから、たとえば平面に電荷が一様分布したもの(例題 2-4 (25 ページ))を用意すれば実現することができる。

この場合の運動方程式を解くのはとても簡単である。一定の力がかかった系であるから荷電粒子は等加速度運動を行う。

$$\mathbf{r}(t) = \frac{q\mathbf{E}}{2m} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \quad (8.16)$$

\mathbf{r}_0 は $t = 0$ での座標、 \mathbf{v}_0 は $t = 0$ での速度を表している。

例題 8-4: 定磁場中の運動

今度は定磁場中の運動である。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = q \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \times \mathbf{B} \quad (8.17)$$

両辺は時間微分で表されているので積分することができる¹⁸。

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{B} + \mathbf{v}_0 \quad (8.18)$$

¹⁴式(7.23)(91ページ)を参照

¹⁵以上の式にあらわれる \times は外積であるので省略してはいけない。

¹⁶H. Lorentz の名前が冠されているが、Lorentz 以前にもいろいろな形で議論されている。

¹⁷ベクトルポテンシャルというものをを用いて表すことはできる。次章で扱う。

¹⁸ベクトル表記で複雑に見えるかもしれないが、成分に分けて考えればよい。

r_0 、 v はそれぞれ定ベクトルを表す。磁場の方向は任意であるが、 z 方向であるとする。このようにしてもあとで回転するか座標系をとり直して考えればよいので一般性を失うことはない。外積の定義に注意して各成分を書き下すと

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{q}{m}(y(t) - y_0)B + v_{0x} \quad (8.19)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{q}{m}(x(t) - x_0)B + v_{0y} \quad (8.20)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = v_{0z} \quad (8.21)$$

を得る。

三つの式を見てまずわかることは、磁場の方向の運動が単純であることである。変数 z は三つめの式にしか現れず、しかもその式は等速直線運動を示している。したがって

$$z(t) = v_{0z}t + z_0 \quad (8.22)$$

を得る。これは磁場方向に力が働かないことを意味している。元の式に戻って考えてみるとこれはもっともなことで、磁場と速度ベクトルがなす平面に直交する方向に力がかかっている。速度ベクトルは時間によって変化しうが、磁場は今の場合一定値をとる。よって磁場方向には常に力が働かないことが言える。

次に、残りの方向の運動を調べよう。 x と y については二つの式が混ざったものとなっているため、別々に解くことができない。二つの式を用いて変数 y を消去することを考える。一つめの式を時間微分して二つめの式を用いる。そうすると x のみで書かれた微分方程式を得る。

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{qB}{m} \left[-\frac{q}{m}(x(t) - x_0)B + v_{0y} \right] = -\frac{q^2B^2}{m^2} \left(x(t) - x_0 - \frac{m}{qB}v_{0y} \right) \quad (8.23)$$

積分定数があるため複雑に見えるが、この方程式は振動を表す方程式の標準形をもっている。つまり、解は三角関数を用いて表される。

$$x(t) - x_0 - \frac{m}{qB}v_{0y} = C_1 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \quad (8.24)$$

積分定数 C_1 、 C_2 を決定するために、初期条件 $r(t) = r_0$ 、 $\left.\frac{dr(t)}{dt}\right|_{t=0} = v_0$ を用いる。上式でそのまま $t = 0$ とおいたものと 1 回微分してから $t = 0$ とおいたものを考えると

$$-\frac{m}{qB}v_{0y} = C_2 \quad (8.25)$$

$$v_{0x} = \frac{qB}{m}C_1 \quad (8.26)$$

となる。よって積分定数は次のように表される。

$$C_1 = \frac{v_{0x}}{\omega} \quad (8.27)$$

$$C_2 = -\frac{v_{0y}}{\omega} \quad (8.28)$$

ここで次のような記号を導入した。

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad (8.29)$$

得られた積分定数を代入すると

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} (1 - \cos \omega t) + x_0 \quad (8.30)$$

を得る。さらに、(8.19) 式から $y(t)$ を得ることができる。

$$y(t) = \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t - \frac{v_{0x}}{\omega} (1 - \cos \omega t) + y_0 \quad (8.31)$$

荷電粒子の運動を xy 平面に射影してみると、周期的に回転運動する様子が見られる。これは元の式から理解できる。常に速度に直交する方向に力が働くから軌道は曲げられる。角速度は式の ω で与えられる。これは Larmor 周波数 (Larmor frequency) とよばれている。 z 軸方向は等速直線運動をするから、あわせると電荷はらせん運動を行うという結論になる。

磁場中の運動の特徴として、荷電粒子の速度の大きさは不変となる。

$$\left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right)^2 = v_0^2 \quad (8.32)$$

つまり、磁場は仕事をしない (問題 [8-6])。

8.6 まとめと考察

本章では静磁場を導入した。

- Ampère 力とそれに基づく静磁場の導入
- Biot-Savart の法則に基づく静磁場の計算
- Lorentz 力とその下での電荷の運動

静電場と比べると力の働き方や導入の仕方がやや変則的であり、磁場を直観的にとらえることは決して容易ではない¹⁹。以下でも述べるが、静磁場の導入の仕方は議論の余地がある。単純な電流分布の例で Biot-Savart の法則から静磁場を計算できるようになること、電荷が電磁場の下でどのような運動をするかを理解することがさしあたっての目標である。

電流による磁場

静電場の場合、Coulomb 力から電場を導入する過程は自然なものでありあまり疑問をもたなかったが、静磁場の場合はあまりにも複雑である。いくつかの不定性が生じるし、数学的な知識が必要となる。現象を要素に分解して調べるという物理学の精神に則って微小電流要素という概念をもちだしたが、それはもちろん仮想的なものであり、それだけ取り出しても全く意味はない。そのような概念を用いるのが果たして物理の理論としてまともなのかという疑問は残る。

不定性の問題は、それが結局のところ実際に見られる現象と関係なければよい。たとえばポテンシャルや電位の基準をどうとるかなどという不定性は実験では測定しようがないので気にしない。そのようなものは物理の理論として決して不自然ではない。ただ、測れるものとそうでないものを明確に区別しておく必要がある。他の例として、量子力学は複素数の波動関数を用いる理論であるが、波動関数自体は測定できない。それでも、それがないとたいへん困る。このように、物理学の理論は現実の現象とは少しずれたところにあるのが普通である。現象のみを捉えた現象論というものもあり、それで済めばよいのだが、背後にある抽象性、虚構を用いると思わぬところで異なる現象同士がつながることがある。

¹⁹磁場と電流と力の向きとの関係は、フレミング左手の法則として高校で覚えたものである。法則という名前がついているが、あくまでも覚え方の規則なので忘れてよい (あるいは頭の中でこっそりと使う)。実際、学生がなかなか覚えてくれないために J. A. Fleming が考案したものらしい。類似の覚え方の規則として、右ねじの法則がある。これは図 8.2 の直線電流と磁場の向きを表している。日本のみでの呼称である。

高校物理を履修したひとであれば、「磁気に関するクーロンの法則」というものを扱ったことを覚えているかもしれない。そこでは、磁気による力の出発点としてその法則を採用し、電荷の場合とほとんど同じような形で働く力が定義された。ところが、本講義ノートではそのような道は辿らず Ampère の法則から出発している。そもそも前者では磁石を用いて磁場を導入しているが、後者では電流を用いている。関係がよくわからない。これについては第 10 章で議論する。

外積と磁場

Grassmann が 1845 年に導いた (8.6) 式ははじめ注目されず、1876 年に Clausius が同じ式を導いている。Grassmann はそれを受けて自分の先取権を主張する論文を書いたそうである。Grassmann の磁場の研究は、物理の法則に外積が用いられた初めての例であり²⁰、Grassmann の死後、高く評価されるようになった²¹。

外積を用いた磁場の導入はとても美しいとも思える一方で、とても奇妙にも思える。図 8.2 を見るとわかるように、磁場は直線電流に対して右ねじのまわる向きとなる。これは右回りと左回りの対称性を破っているように見える。電場の場合には球対称な磁場をつくり、向きに関して選り好みはしていなかったが、磁場の場合は全く違う。どちらの向きをとるべきかというのは先験的にはわからないし、わからないからこそどちらも優先してとってはいけないように思える。

電荷の運動

外積を用いた奇妙な力は、電荷にも奇妙な運動をもたらす。力が磁場の向きに直交する方向に働くことと、速度に依存することである。このような力は中心力でもないし仕事もしない。

向きの問題は磁場自体がよくわからないのでとりあえずそういうものと捉えるしかないが、速く動けば動くほど大きくなる力というのはとても興味深い。電場による力や万有引力は位置座標にのみよっていた。

速度による力が無いわけではない。第 7 章において速度に依存する力について触れた。その起源は決して明確ではない。摩擦などさまざまな要因によって起こる力であって決して万有引力のような基本的な力ではない²²。ここで扱っている磁場による力はずっと基本的な法則のように思える。ただ、係数 k_m がわからないのでそうとも言えないのでないかという疑問は正しい。複合的な要素が絡み合って決まっているのかもしれない。

結局のところ、われわれは基本法則を知っている現在の立場から磁場が基本的な要素であると言えるだけである。他の可能性があったかもしれないが、以降の章の議論を経てこのような記述に至っているのがある。そのような試行錯誤を体験できるのが電磁気学の楽しいところであるが、難しいところでもある。

磁場による力は実用上非常に便利なことがある。電場は基本的には電荷を直線運動させるが、磁場は電荷の回転運動をもたらす。後者の場合には電荷を有限の領域に閉じ込めておくことが可能になる。また、非自明な現象は電場よりも磁場によってもたらされることが多い²³。

²⁰1845 年ということは、Stokes の定理よりも前のことである。61 ページの脚注参照。

²¹Grassmann は色彩論および言語学においても業績があり、それぞれに Grassmann の法則とよばれるものがある。

²²その証拠に、速度にかかる係数は場合によってさまざまで、質量など単純な値のみからは決まらない。

²³「研究に困ったら磁場をかける」という言葉がある。

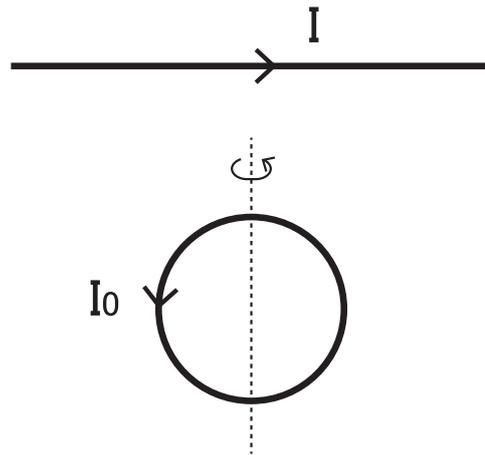


図 8.4: 問題 [8-3] の系。

8.7 問題

[8-1] Ampère 力

電流の向きが平行または反平行のとき、式 (8.2) を積分し、長さで割ることで (8.1) 式を得ることを示せ。

[8-2] Ampère 力の表現

式 (8.2) ・ (8.6) について、微小線分 dr_1 、 dr_2 の適当な配置に対してそれぞれの力の向きを調べよ。

[8-3] 円導線にかかる力

直線導線上の定常電流 I 、円形導線上の定常電流 I_0 を図 8.4 のように配置する。図では円と導線が同じ平面にあるが、円導線は点線を軸にして自由に回転することができる。このとき、円導線はどちらの方向を向くと考えられるか。 I_0 は十分小さく、直線電流に影響を与えないとする。

[8-4] 円電流がつくる磁場

例題 8-2 の系について、中心軸以外の点につくる磁場の積分形を書き下せ。また、それを用いて向きや漸近形などだいたいの方角を議論し、ベクトルの様子を図示せよ。

[8-5] 定磁場

適当な定常電流分布を用いて場所によらない磁場をつくることができるかどうか考察せよ。電場についての類似の例は例題 2-4 (25 ページ) を参照。

[8-6] 磁場による仕事

磁場中の電荷の運動について、電荷の運動エネルギーが時間によらないことを一般に示せ。

[8-7] 軌道の方程式

式 (8.30)、(8.31) から軌道の方程式 $f(x, y) = 0$ を導き、図示せよ。 z 方向の運動は無視してよい。

[8-8] 定電磁場中の運動

定電磁場の下での運動を考える。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = q \mathbf{E} + q \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \times \mathbf{B} \quad (8-8.1)$$

次のそれぞれの設定のもとで運動方程式を解け。

$$(a). \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left. \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$(b). \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left. \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E 、 B 、 v_0 は定数を表す。

[8-9] 速度に比例する抵抗力があるときの運動

2次元の xy 平面内を質量 m 、電荷 q の荷電粒子が運動する系を考える。荷電粒子には速度 v に比例する抵抗力 $\mathbf{F} = -\frac{m}{\tau} \mathbf{v}$ がかかるとする。 τ は正定数を表す。

(a). 平面内に定電場 \mathbf{E} 、平面に直交する方向に定磁場 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ をかける。このとき、電荷が x 軸方向に運動したとする。電磁場の満たす関係を求めよ。また、 x 軸方向の運動はどのようなものになるか。

(b). $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ のときの運動方程式を解いて一般解を求めよ。解けない場合は定性的な運動の様子を考察せよ。

第9章 静磁場の法則

静磁場の定義および基本的な性質を理解したところで静磁場の法則を導く。静電場の場合には Coulomb の法則を元にして静電場が満たすべき Gauss の法則および渦なしの法則を導いた。さらに言えば、電位を導入して Poisson 方程式の形にまとめた。本章では同様の考察を静磁場について行う。

9.1 静磁場の基本法則

静電場の法則と同じような静磁場の法則をつくりたいければ、静電場の法則のときの考え方にならばよい。すでに規定される静磁場はあるし、必要な数学的道具もそろっている。規定される静磁場とは Biot-Savart の式

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = k_m \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (9.1)$$

である。

9.1.1 Gauss の法則

まず、Gauss の法則である。それは、ある領域を貫く電気力線の数（流束）は領域内部の電荷量に比例しているというものであった。電気力線は電荷から出て他の電荷に入っていくか無限遠点に向かう。磁場もベクトル場であるから磁力線（line of magnetic force）を考えることができる。また、指定された曲面 S を貫く磁力線の数を表す磁束（magnetic flux）も次のように定義できる。

$$\Phi_S = \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (9.2)$$

磁束の単位としてウェーバー [Wb] (Weber) というものが用いられている。1Wb = 1T · m² である。

前章で求めたが、磁力線は電流を囲むようにまわり、始点や終点がない。もしくは無限遠点に向かう。電気力線の場合とかなり異なるふるまいである。始点と終点がないということは適当な閉曲面 S を考えたときに入出量が差し引き 0 となることを示唆している。

$$\oint_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (9.3)$$

これが任意の閉曲面について成り立つとすると、Gauss の定理より

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (9.4)$$

となる。磁場についての Gauss の法則である。

実際にこの法則が成り立っているかどうかは (9.1) 式を微分してみればよい。

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = k_m \nabla \cdot \int d^3 r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (9.5)$$

微分と積分、内積と外積が絡んでいてやっかいな表現であるが、(3-8.1) 式 (52 ページ) の公式を用いることで計算できる。

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = k_m \int d^3 r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \left(\nabla_r \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \quad (9.6)$$

と書けるが、

$$\nabla_r \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla_r \times \nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{0} \quad (9.7)$$

となる¹。したがって確かに Gauss の法則が成り立っている。

Gauss の法則の右辺が 0 であることは、電荷に代わる磁荷というべきものが存在しないことを意味している。磁荷が存在するとすれば右辺には磁荷密度に比例した量があらわれるはずである。詳しくは章末や次章で議論する。

9.1.2 Ampère の法則

次に、静電場の渦なしの法則に対応する法則である。渦なしの法則がどのように導かれたかをふりかえってみると、仕事が経路によらないことから示されたのであった。経路によらないということはどこかを經由して元の状態に戻ってくる仕事が 0 であることを意味する。仕事は電場の線積分を用いて書けるため、元に戻る仕事が 0 ということは電場が渦を作らないことを意味する。

磁場の場合には、仕事と渦を表す量には直接の関係はない。仕事は無限小の速さで仮想的に粒子を動かすことを想定していたが磁場の場合は力が速度によるので、そのような定義を用いることができない。そもそも磁場は仕事をしない。ここで知りたいことは、粒子に働く力についてではなく磁場そのものがどのような性質を満たすかである。仕事のことは忘れて磁場が渦をつくるかを考えればよい。

渦は閉曲線 C についての線積分を考えることによって特徴づけることができる。

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (9.8)$$

電場の場合、線積分が 0 であることは渦が存在しないことを意味していた。磁場の場合、磁力線は渦を形成することがあるので、この積分値は 0 にはならないはずである。たとえばもっとも簡単な場合として図 8.2 (99 ページ) のような直線電流を考え、その直線を中心軸とする半径 a の円を考える。その場合、磁場は円周に沿った向きをもち、大きさは Ampère 力からわかる。すなわち、次のようになる。

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 2\pi a \frac{2k_m I}{a} = 4\pi k_m I \quad (9.9)$$

経路の向きはの磁場の向きを正とする。どれだけの渦ができるかはその円を貫く電流に比例している。

さらに電流を $I = \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})$ と表すと

$$\oint_{C=\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 4\pi k_m \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (9.10)$$

と書くことができる²。右辺の領域はもともと電流の断面積部分についてのものであるがそれを拡張しても

¹ $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ の点では注意が必要だが、適当な正則化を行うと微分は 0 になることが示される。たとえば、この点で発散しないように微小量をいれて計算しておいて計算後に微小量を 0 にする。5.6 節 (65 ページ) を参照。

² 円がつくる面は上が正方向となり電流の向きと一致する。

被積分関数が 0 になるのであるからいくらでも拡張できる。したがって閉曲線 C を縁にもつ曲面 S をとることができる。これを一般化してどのような静磁場、定常電流でも満たされるとする。Ampère の法則 (Ampère's law) の積分形とよばれるものである。

ここまでくれば次行くべきこともわかるだろう。Stokes の定理を用いると左辺の線積分は面積分に直すことができる。

$$\int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 4\pi k_m \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (9.11)$$

面 S をどのようにとっても成り立つとすると積分をはずすことができ

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 4\pi k_m \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (9.12)$$

となる。これが Ampère の法則の微分形である。式 (9.1) がこの法則を満たしているかどうかは問題とする ([9-3])。

静磁場の法則をまとめると次のようになる。

$$\oint_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (9.13)$$

$$\oint_{C=\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 4\pi k_m \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad \leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 4\pi k_m \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (9.14)$$

一つめの式の S は任意の閉曲面、二つめの式の S は任意の (閉じていない) 曲面を表す。電場の場合と対比してみると面白い。

$$\int_{S=\partial V} d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \quad \leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k \rho(\mathbf{r}) \quad (9.15)$$

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (9.16)$$

0 になるものと電場/磁場の源となるもの (電荷/電流) が逆になっている。電場は渦をつくることができないが、電荷密度によって湧き出しや吸い込みが生じる。一方、磁場の場合は湧き出しや吸い込みは無いが、電流によって渦が生じる。すでに述べたが、磁場についての Gauss の法則は磁荷とよぶべきものが存在しないことを示している。

9.2 ベクトルポテンシャル*

9.2.1 ベクトルポテンシャルの導入*

静電場の法則は、電場をポテンシャルを用いて表すことが渦なしの法則を表すことになっていた。ポテンシャルを用いると Gauss の法則は Poisson 方程式として表現できて静電場の法則を一つにまとめることができた。とすれば同様のことが磁場の場合にも考えられるのではないかと期待される。ただし、ポテン

シャルを定義することができないのは磁場が保存力を与えないことから明らかである。では何ができるだろう。

電場の回転が0であることは、電場がスカラー関数の勾配で書けることを意味していた。そうすると任意のスカラー関数 $\phi(\mathbf{r})$ について成り立つ数学的な恒等式 $\nabla \times \nabla\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ を用いることができる。そこで、磁場の発散が0であることから何か言えるかを考える。磁場についての Gauss の法則をもう一度見なおしてみよう。Biot-Savart の法則による磁場は次のように書き直すことができる³。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -k_m \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla \times \left(k_m \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (9.17)$$

つまり、磁場がある関数の回転で表されている。微分演算子 ∇ は座標 \mathbf{r} についてのものであって積分変数である \mathbf{r}' についてのものでないことに注意してほしい。式 (3.45) (47 ページ) を用いると Gauss の法則が導かれる。つまり、磁場が

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (9.18)$$

と書ければ Gauss の法則が満たされている⁴。このように定義されるベクトル関数 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ はベクトルポテンシャル (vector potential) とよばれる⁵。磁場についてのベクトルポテンシャルは電場についての静電ポテンシャルに代わるものとなる。

Biot-Savart の法則にしたがって定義されるベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = k_m \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.19)$$

である。磁場そのものよりは簡単な表現であり、こちらをまず計算してから磁場を計算すればよいので計算が楽になる。3成分のベクトル場が3成分のベクトル場で表されるので変数の自由度は減ってないが、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ であることは直ちにいえるので便利な表現となる。

ベクトルポテンシャルがどのような法則に従うべきかは、静磁場のもう一つの法則にこの表現を代入すればよい。磁場の回転をとると、(3.46) 式 (47 ページ) の公式を用いて

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (9.20)$$

となる。よって、(9.14) 式より磁場の法則として次の式を得る。

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 4\pi k_m \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (9.21)$$

これはこれで正しい式なのだが Poisson 方程式と比べると複雑である。左辺第1項がなければよいのと思うだろう。

ベクトルポテンシャルの具体的な表現 (9.19) 式を用いて (9.21) 式左辺第1項にあらわれるベクトルポテンシャルの発散を計算してみよう。

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = k_m \nabla \cdot \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.22a)$$

$$= k_m \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.22b)$$

$$= -k_m \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.22c)$$

$$= k_m \int d^3\mathbf{r}' (\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - k_m \int d^3\mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.22d)$$

³ $-\mathbf{A} \times \nabla\phi(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}\phi(\mathbf{r})$ を用いる。 \mathbf{A} は定ベクトルを表す。

⁴ 今の場合、 \mathbf{A} の具体形がすぐわかるので一般論を考えなくてもよいのだが、(9.18) 式のように書けることが $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の必要十分条件かどうかという数学的な問題を考えることは興味深い。Helmholtz の定理とよばれるものを用いると示すことができる。

⁵ この名前に対応させて、静電場のときに導入された電位 $\phi(\mathbf{r})$ はスカラーポテンシャル (scalar potential) とよばれる。

と変形できる。 r についての微分を r' についてのものに変えて、最後の等式では部分積分を用いている。最後の式の第 1 項は連続の方程式 (7.8) (87 ページ) より 0 となる。第 2 項を Gauss の定理 (3.31) 式 (46 ページ) を用いて変形すると

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -k_m \int_{S'} dS(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.23)$$

と書ける。 S' は無限遠点の表面項であるが電流が有限領域におさまっているか無限遠点で距離に比例するほど大きくなるとすると 0 になる。したがって、今のベクトルポテンシャルの場合

$$-\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 4\pi k_m \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (9.24)$$

となる。3 成分がそれぞれ Poisson 方程式と同じ形の方程式を満たしている。もう少し詳しくは次節で議論する。

以上より、静磁場の法則は次のように書くことができる。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (9.25)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 4\pi k_m \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (9.26)$$

9.2.2 ゲージ不変性**

ベクトルポテンシャルを用いた静磁場の表現は静電場の表現との対応もよくできていることがわかる。ところが、(9.26) 式の導出には一つ疑問点がある。これを導くときに具体的なベクトルポテンシャルの表式 (9.19) を用いて $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ の性質を得ていた。あまりきれいな証明ではないし、完全に一般的かどうかとも疑わしい。

磁場はベクトルポテンシャルの微分を用いて表されている。物理的な量は磁場であってベクトルポテンシャルそれ自体の物理的な意味は不明である。その回転をとったものが物理量である磁場を表す。磁場自体も物理量であるかどうかは不明であるが、磁場がそのままの形で力を与えることを考えると全く意味不明の量であるとは言えないだろう。静電場を与えるスカラーポテンシャルは定数項の付加に対する不変性をもっていた。そのような定数シフトに物理的な意味はない⁶。同様に考えるとベクトルポテンシャルにも不定性が存在する。つまり、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_0(\mathbf{r}), \quad \nabla \times \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (9.27)$$

という変換によって磁場は不変である。回転をとると 0 になる関数はいろいろ考えられるのでベクトルポテンシャルの不定性は自明なものではない。スカラーポテンシャルの場合、

$$\phi(\mathbf{r}) \rightarrow \phi'(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) + \phi_0(\mathbf{r}), \quad \nabla \phi_0(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (9.28)$$

としても電場は不変である。これを満たす関数 $\phi_0(\mathbf{r})$ は定数くらいなので、電場の場合にはそれほど問題とはならなかった。

ベクトルポテンシャルについて同様の不定性があるかは、回転をとって 0 になる関数 \mathbf{A}_0 があるかどうかを考えればよい。回転の性質を思い出すと次のようにすればよいことに思い当たるはずである。

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \nabla \chi(\mathbf{r}) \quad (9.29)$$

$\chi(\mathbf{r})$ は任意のスカラー関数である。つまり、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \chi(\mathbf{r}) \quad (9.30)$$

⁶絶対的な値に意味はなく、物理量は全て電位差で与えられる。

という変換で磁場は全く変化しない。電磁場を変えないスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルの変換をゲージ変換 (gauge transformation) とよぶ。 $\phi(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の代わりに $\phi'(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ を用いても物理は変わらない。これをゲージ不変性 (gauge invariance) という。

この任意性を利用して $\nabla \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = 0$ となるように $\chi(\mathbf{r})$ を選ぶ。つまり、

$$\nabla^2 \chi(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (9.31)$$

を満たす $\chi(\mathbf{r})$ を考える⁷。この方程式は Poisson 方程式と同形であり、そこで得られた知識を用いて解を求めることができる⁸。このとき、新しいベクトルポテンシャル $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ は (9.26) 式を満たすものとなる。

結論として、一般のベクトルポテンシャルは $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ および (9.26) 式を満たさないが、ゲージ変換を用いて満たすようにすることができる。したがって、 $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ を法則として述べる必要はないし、(9.26) 式を考えても一般性を失うことはない。式 (9.19) の表現は偶然 $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ を満たすものであったわけである。ゲージの自由度を考慮すると、一般のベクトルポテンシャルは (9.19) 式のようには書けない。

9.3 まとめと考察

静磁場の基本法則を導いた。静電場のときと同じように 2 種類の式がある。

- 静磁場の法則: Gauss の法則
- 静磁場の法則: Ampère の法則

また、後半ではベクトルポテンシャルを導入した。さしあたってその意味を知る必要はないが、(9.18)、(9.19) 式の表現を知っておくと計算上たいへん便利である。

静電場と静磁場

静電場の法則と静磁場の法則の対比をしてみると面白い。湧き出し・吸い込みの法則は電場では電荷がそれらの源となるが、磁場ではそのようなものが存在しない。一方、渦のない電場に対して磁場の方は電流が渦を作り出す。数学的に見ても、電荷密度はスカラーであるから電場の発散の方の式に入るのが自然であるし、電流密度はベクトルであるから磁場の回転の方の式に入る。実によくできているのである。

磁場が湧き出し・吸い込みを持たないということは磁荷とよぶべきものが存在しないことを意味している。本当にそうだろうか？前章では磁場が磁荷ではなく電流によって生じるという立場をとっているため磁荷は存在しなかったが、単にそういう現象を見つけていないだけでよく探せばあるかもしれない。その場合は、静磁場の法則を書き換えなければならなくなるし、電流と磁荷の関係を調べなければならなくなる。次章でその詳しい考察を行う。

磁荷が無いのかという疑問は、電場の法則と磁場の法則を比較することができたからこそ出てきたものであることに注意してほしい。今のところ電場と磁場には何の関係も無いが、両者の法則を同じ形式に書くことによって類似点や相違点について議論しやすくなっている。

ゲージ場

電磁場を記述するのにスカラー・ベクトルポテンシャルを導入することができる。電磁場自体が物理的実体を伴うものなのかはまだわからないが、スカラー・ベクトルポテンシャルになるとよけいにわからな

⁷一般にこのような操作を、ゲージ固定 (gauge fixing) という。

⁸Poisson 方程式の解き方は本講義ノートではほとんど扱っていないので適当な教科書を参照してほしい。

くなる。電磁場は直接力の法則にあらわれるが、スカラー・ベクトルポテンシャルは微分して電磁場になるものである。ゲージ不変性ということも考えると決して直接観測できるものではないだろう。スカラーポテンシャルは仕事やエネルギーに直結していたが、エネルギーという量は直接見えるわけではなく現象の背後にある定量化された指標である。

ゲージポテンシャルはゲージ場ともよばれている。そして、現代の物理学では、ゲージ不変性はゲージ原理という原理にもつながるとも重要な概念となっている。原理ということは理論を構成する指針になる基礎概念である。この原理を頼りにして電磁気学とは異なる法則体系（「強い力」を記述する量子色力学）の構築がなされている。抽象的な理論がきわめて大きな役割を果たした例の一つである。

止まった世界の完全な法則

ここまで静電場・静磁場の法則を調べてきた。電荷に働く力から電場と磁場という概念を抽出して、それらをどうやって規定するかということを考えてきた。その範囲では電磁場の法則は完全である。

前章の最初で電気と磁気が互いに関連する現象であると述べた。確かに電場をつくる電荷が流れることによって磁場がつくられているわけだが、電荷を通した関係であり、電場と磁場の直接の関係は得られていない。静電場の法則と静磁場の法則は与えられた電荷・電流分布のもとでそれぞれ別の方程式にまとめられている。もちろん、それはそれで問題があるわけではないが、よく似ているのはただの偶然なのか背後に何か深い原理が隠されているのか気になるところではある。

これで電磁気の法則が完成するわけではないことは何度も述べてきた通りである。静電場と静磁場の法則は動きのない世界での法則であるから、厳密に言うと検証のしようがない。世の中は刻一刻と動いている。静磁場は、電流、つまり電荷の流れによって作りだされるから完全に止まった世界ではないが、定常状態であるから一般的な系ではない。限定された状況から抜けだした世界の性質を調べようとするのは自然なことであるし、止まった世界から一步踏み出した世界の法則を知ることによって限定的な世界の法則を検証できることにもなる。

ということで、動的な系の性質を考えることが次の目標である。そのためにはそのような系において電磁場に関わる現象をみつけて分析する必要がある。詳しくは第 III 部で行うが、その前に残っていた課題、磁荷の問題を次章で考える。

9.4 問題

[9-1] 直線電流のつくる磁場

対称性の議論と静磁場の法則の積分形（(9.13)、(9.14) 式の左）のみを用いて直線電流が作る磁場が求まるか調べよ。Biot-Savart の法則 (9.1) 式を用いてはならない。

[9-2] 二つの電流が作る磁場

半径 a の円柱と内半径 b 、外半径 c の円筒を中心軸を z 軸にそろえて置く。 $a < b < c$ である。円柱に電流 I が、円筒に電流 $-I$ がそれぞれ一様な電流密度で（逆向きに）流れているとき、磁場 $B(r)$ を求めよ。また、磁場の大きさを図示せよ。

[9-3] 磁場の回転

式 (9.1) の磁場について、回転 ($\nabla \times$) をとることで直接 (9.12) 式が成り立つことを示せ。式 (5.26) (66 ページ) を用いる必要がある。

[9-4] ベクトルポテンシャルの計算

例題 8-2 (99 ページ) の円電流の系について、ベクトルポテンシャルの一般的な積分形を書き下せ。また、それを用いて向きや漸近形などだいたいのおもむきを議論し、ベクトルの様子を図示せよ。

[9-5] 電流密度と磁場・ベクトルポテンシャル

磁場やベクトルポテンシャルは電流密度を用いて表されるが、定常電流の法則 (7.19) 式 (89 ページ) と矛盾がないか調べよ。

第10章 磁気モーメント

静電場と静磁場の法則をひとつお見してきた。静電場の場合には電荷という量をいったん認めてしまえばよいのだが、静磁場の場合には電流を源としておりややわかりづらい。電流は向きをもった流れという非局所的な概念であるからである。本章ではそういった事情について、電場と磁場を対比しながら磁気力の源をどう考えるべきかについて議論する。われわれの身近にある磁石 (magnet) に関連した問題である¹。

10.1 磁気双極子

ふたたび円電流の系を考える。半径 a の円上を流れる電流 I によってつくられる磁場は例題 8-2 (99 ページ) で計算を行った。そこでは円電流を貫く軸上のみを考えたと、一般には

$$B(\mathbf{r}) = k_m I \oint_C d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (10.1)$$

と書ける。 C は電流の経路を表す。

ここで、円が非常に小さい場合を考えよう。あるいは非常に遠いところの観測点を考えるといってもよい。 $|\mathbf{r}| \gg a$ という条件式で表される状況である。極限をとると磁場は減衰して 0 に近づく。その漸近形を調べてみる。

磁場を得るためにベクトルポテンシャルを用いた計算を行う。ベクトルポテンシャルの方が積分表式が簡単だからである。磁場 $B(\mathbf{r})$ とベクトルポテンシャル $A(\mathbf{r})$ は $B(\mathbf{r}) = \nabla \times A(\mathbf{r})$ の関係にあり、 $A(\mathbf{r})$ は

$$A(\mathbf{r}) = k_m I \oint_C \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (10.2)$$

と書ける。この表式を次の近似を用いて計算する。 $r = |\mathbf{r}|$ 、 $r' = |\mathbf{r}'|$ として、

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}} \quad (10.3a)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2}} \quad (10.3b)$$

$$= \frac{1}{r \sqrt{1 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}} \quad (10.3c)$$

$$\sim \frac{1}{r \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right)} \quad (10.3d)$$

$$\sim \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right) \quad (10.3e)$$

と近似する。 r'^2 の項は高次の寄与として無視している。ベクトルポテンシャルの近似表現は

$$A(\mathbf{r}) \sim \frac{k_m I}{r} \oint_C d\mathbf{r}' \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right) \quad (10.4)$$

¹本章ではベクトルポテンシャルおよび電気双極子の知識を用いる。ベクトルポテンシャルについては磁場が $B(\mathbf{r}) = \nabla \times A(\mathbf{r})$ と書いて $A(\mathbf{r})$ が (10.2) 式で与えられることだけ理解できればよい。電気双極子はよく理解しておく必要がある

と書ける。円を xy 平面におき中心を原点にとると、積分座標は

$$\mathbf{r}' = a \begin{pmatrix} \cos \theta' \\ \sin \theta' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d\mathbf{r}' = a d\theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta' \\ \cos \theta' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

と書くことができる。具体的に積分を行うと

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \sim \frac{k_m I a}{r} \int_0^{2\pi} d\theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta' \\ \cos \theta' \\ 0 \end{pmatrix} \left[1 + \frac{a}{r^2} (x \cos \theta' + y \sin \theta') \right] \quad (10.6a)$$

$$= \frac{k_m I a}{r} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\pi a}{r^2} \quad (10.6b)$$

$$= k_m I S \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (10.6c)$$

である。 $S = \pi a^2$ は円の面積を表す。この表式は、円電流が次の量によって特徴づけられることを示している。

$$\mathbf{m} = I S \mathbf{e}_z = I S \quad (10.7)$$

S は向きをもった微小面要素を表す²。磁場は (10.6) 式の回転をとって次のように計算される。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(k_m \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (10.8a)$$

$$= k_m \mathbf{m} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} - k_m \mathbf{m} \cdot \nabla \frac{r}{r^3} \quad (10.8b)$$

$$= k_m \left(-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} \right) \quad (10.8c)$$

二つめの等式では公式 (3-8.2) (52 ページ) を用いている。

結果は、円電流の遠くで磁場は逆 3 乗程度の大きさで減衰する。また円が向きをもっていることを反映して磁場も向きによってふるまいが異なる。

ここで気づいてほしいのは、この式が電気双極子があるときの電場の式 (6.21) (76 ページ) と全く同じ形をもっていることである。電場の代わりに磁場、電気双極子モーメントの代わりに磁気双極子モーメント (magnetic dipole moment) \mathbf{m} が用いられている。つまり、小さな円電流は磁気双極子 (magnetic dipole) とみなすことができる。ここでは円電流を考えたが、一般の閉じた電流経路の場合にも容易に拡張できる。磁気双極子モーメントは一般に次のように表される。

$$\mathbf{m} = I \int_S d\mathbf{S} \quad (10.9)$$

S は閉じた電流経路がなす面を表す。

10.2 磁気に関する Coulomb の法則

微小円電流がつくる磁場は電気双極子がつくる電場と同じ形で表されることがわかった。この類似性をさらに追求してみよう。

²向きは電流のまわり方と面の向きが右ねじの法則を満たすようにとる。

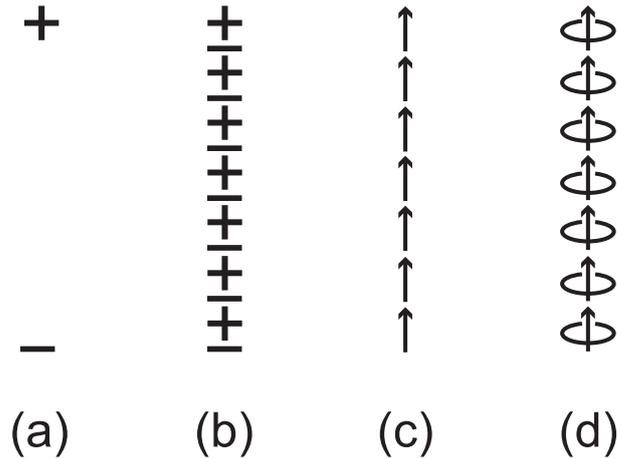


図 10.1: 同じ大きさで符号が逆の電荷対がある系 (a) は電荷対が連続的につながった系 (b) あるいは電気双極子モーメントがつながった系 (c) とみなすことができる。磁気双極子の場合には円電流がつながった系 (d) として表される。

電気双極子は異符号で大きさが同じ電荷量をもつ二つの電荷からつくられている。それぞれの電荷は Coulomb の法則によって電場をつくっている。双極子がつくる電場はそれらの重ねあわせで決まるものである。双極子は $p = qd$ を一定に保ったまま $d \rightarrow 0$ の極限をとることによって、1 点で定義された粒子とみなすことができる。

そのような複合粒子を基本粒子であると考えてみよう。離れた点に q と $-q$ の電荷がある系は、図 10.1 のように双極子がそれらの点をつなぐようにならんだ系と考えることができる。このときの電位を双極子を用いて考える。点 r_0 にある双極子が点 r につくる電位は (6.21) 式 (76 ページ) より

$$d\phi(\mathbf{r}) = k \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (10.10)$$

である。 $\mathbf{p} = qd\mathbf{r}_0$ であるから全ての r_0 について和をとると

$$\phi(\mathbf{r}) = kq \int_C d\mathbf{r}_0 \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = kq \int_C d\mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = kq \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|} \right) \quad (10.11)$$

となって、二つの電荷があるときの表式を得ることができる³。このように、双極子が基本的な粒子で電場をつくりそこから Coulomb の法則が導かれると見るのである。この考え方では電荷は必ず対になって現れ、全電荷は 0 でなければならない。単独の電荷は存在できない。

磁気双極子の場合も考え方は全く同じである。磁気の場合、磁気双極子モーメントの正体は円電流であるが、それは電気双極子のように二つの符号の異なる磁荷 (magnetic charge) とよぶべきものが並んだ系とみなすこともできる。それらの磁荷は Coulomb 力と同じ形の力をもたらす単位磁荷あたりの力から磁場が定義される。そして電位に代わる磁位 (magnetic potential) とよぶべきものも定義できる。点 r_0 にある磁気双極子モーメントは $\mathbf{m} = q_m d\mathbf{r}_0$ で与えられ、磁位および磁場は

$$\phi_m(\mathbf{r}) = k_m q_m \int_C d\mathbf{r}_0 \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = k_m q_m \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|} \right) \quad (10.12)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi_m(\mathbf{r}) = k_m q_m \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_+}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_-}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|^3} \right) \quad (10.13)$$

となる。これが磁気に関する Coulomb の法則である。 q_m が磁荷を表す。

³ C は双極子が連なっている経路を表すが、期待されるように積分は始点と終点のみによる。

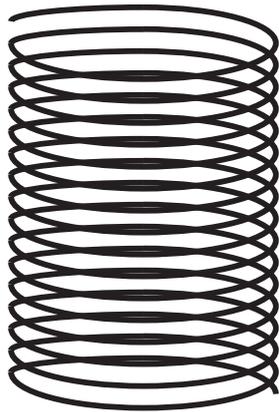


図 10.2: ソレノイド。円筒に導線が巻きつけられており、電流は導線に沿って流れる。

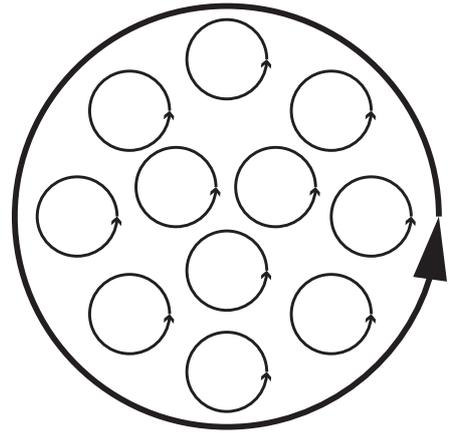


図 10.3: 円電流は微小の円電流に分割できる。内側の電流は互いに打ち消しあう。

電場の場合、あくまでも実体は電荷であって双極子はそこからつくられるものであった。ところが、磁場は電流から構成されてきた。ここでは磁荷というものは副次的に定義されるものである。磁気双極子の方を本質的な量であるとみなしている。

10.3 磁石とソレノイド

方位磁石のそばにおいた導線に電流を生じさせると、磁針は反応して磁場と同じ方向を指し示す。これは磁石が磁荷をもつ物質であると考えられる。N 極と S 極に異符号の磁荷量をもつ物質である。磁石を折って磁荷を切り離してもそれらの両端はふたたび N 極と S 極となることからわかるように、単磁荷を取り出すことはできない。これはまさに前節で述べた状況を示している。

磁石は小さな円電流の集まりとみなすことができる⁴。磁荷と双極子の対応関係を考えると、磁石はソレノイド (solenoid) の系とみなしても何の差支えもない。ソレノイドは円電流が積み重なってできた系である (図 10.2)。ソレノイドがつくる磁場と磁石がつくる磁場は全く同じである。通常ソレノイドや磁石は有限の大きさ (太さ) をもっているが、図 10.3 のように小さい円電流が詰められている系と考えることができる。つまり、ソレノイドや磁石は磁気モーメント (magnetic moment) をもつ粒子が積み重なった系と等価である^{5,6}。

10.4 まとめと考察

本章では磁気モーメントについて扱った。

- 磁気双極子モーメント
- 磁気モーメントと磁荷対の等価性
- 磁石の構造

双極子モーメントがどのように出てくるかは外積を用いるのでやや複雑であるが、そこを理解すればあとは簡単である。ただし、仕組みを理解してもそれが信じられるかどうかはまた別である。以下で議論する。

⁴問題 [8-3] (104 ページ) 参照。

⁵磁気モーメントは磁気双極子モーメントとほぼ同義であるが、より一般的に抽象化された概念としてそうよばれている。

⁶内部構造は異なる可能性がある。少なくとも十分離れた領域ではそれらがつくる磁場は同じに見える。

磁気双極子と磁荷

磁気双極子がどのような磁荷分布でも作り出せるかという、それは不可能である。磁気双極子は異符号で同じ大きさの磁荷が対であられる。総磁荷量が0となるような分布しかつくり出ることができない。もし単磁荷 (magnetic monopole) が存在したとしたら磁場に関する Gauss の法則 (9.4) 式の右辺は0ではない。したがって、磁荷と磁気双極子どちらを本質的な量とみなすべきかは単磁荷の存在を調べることによって決定できる。単磁荷が存在すれば磁荷を基本的な量とすべきであり電場のときと全く同じ定式化ができる。存在しなければどちらを用いてもよいが、存在しない以上磁荷という概念を積極的に使うべきではないだろう⁷。

理由はわからないが、現在のところ単磁荷というものはいまだみつからない。したがって、現代の物理学では磁荷という概念を基本要素としては扱っていない。

磁気モーメント

単磁荷が存在しないのなら磁気モーメントというものが基本要素として存在するのかと疑問をもつのはもっともなことである。世の中に安定して存在する磁石とは永久電流が生じ続ける系なのだろうか。これまでの知識からでは理解できない。

くりかえすが、電磁気学は電荷や磁荷といったものが何であるかについては一切答えていない。中心的な役割を果たす物理量であるにも関わらずその正体が何であるかはわからない。電磁気学の法則が明らかにすることができるのは、電荷および磁気モーメントがあったときにそれらはどのような力をもたらすかということである。

19世紀後半から20世紀前半にかけて原子物理学が理解されるにつれ次第にわかってきたことは、物質を構成するものは電荷をもった粒子であり、同時にそれらは磁気モーメントを内在しているということである⁸。電荷をもっているということはまだよいが、磁気モーメントを固有の量としてもつという性質は直観的には理解しがたい。

このように、現象を理解するためにはさまざまな法則が関わってきて簡単ではない。電磁気学は閉じた完全な理論ではあるが、現実の世界は都合よく閉じているわけではない。そういう意味では、閉じた理論をつくることを主眼とした本講義は物理学としては不十分である。大局的な視点をもつ必要がある。ただ、そうやって少しずつ理解の範囲をひろげていくことがこれまでの科学の理解の仕方であるし、これからも続いていくはずである。

10.5 問題

[10-1] 磁気双極子モーメント

磁気双極子モーメント (10.9) 式が次のように書けることを示せ。

$$m = \frac{I}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \quad (10-1.1)$$

C は面 S の境界の閉曲線を表す。簡単のため S は円形であるとしてよいが、一般に成り立つ関係であるので任意の領域 S を考えてもよい。

⁷他に磁荷を用いるべき理由があればはなしは別である。

⁸そのような粒子がもつ磁気モーメントはスピン (spin) とよばれる。

[10-2] 正方形電流

円電流を正方形電流にかえたとき、(10.8) 式などがどのように変更されるか調べよ。

[10-3] ソレノイド

単位長さあたりの巻き数 n のソレノイドを考える。ソレノイドの長さが十分大きいとしたとき、内側と外側の磁場を求めよ。

第III部

電磁場

第11章 電磁誘導

これまでに扱ってきたのは時間依存性のない系である。そのような系では電荷が静電場、定常電流が静磁場をつくりだす。定常電流系は動的であるとはいえず動的効果の取り扱いは限定的なものであった。第III部では電磁場や電荷密度、電流密度の全てが時間依存性をもつ一般的な場合を扱う。

まず、電磁誘導の問題から考える。電磁誘導は時間に依存する磁場が起電力をもたらすというものである。この法則は、発電機の原理になるので応用上重要であるが、同時に電磁気学の基礎理論を構築する手がかりともなる。

11.1 磁場と起電力

第II部で導入した磁場は奇妙な力を電荷に及ぼす。止まっている電荷に磁場をかけても変化しないが、動いている電荷に磁場をかけると進行方向と直交する方向に力(Lorentz力)がかかる。ここでは、導体を静磁場中にて動かす問題を考えてみよう。導体中の電荷が力を受け電流が生じるはずである。扱っているのは静磁場であるから、これまで考えてきた範囲の理論を用いて記述できる。それでも、Lorentz力の法則と組み合わせることである種の動的効果を扱うことができる。

11.1.1 動く導線に生じる起電力

図11.1のように一様な静磁場 B 中に導体棒を置き、一定の速度 v で動かす。このとき、導体中に電荷 q があって B の向きと v の向きが異なれば $qv \times B$ の力が働き、電荷は導体の中を移動する。十分時間がたつて定常状態に達したとすれば、導体の中の電荷に力は働いていないはずである。電荷がかたよることにより電場が生じ、それによる力が元の磁場によってつくられる力とつりあっている¹。つまり、

$$\mathbf{0} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (11.1)$$

より、定常状態において生じている電場は

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (11.2)$$

である。電場があるということは導体棒内に電位差が生じていることを意味する。

抵抗のない理想的な導体の棒に、電気伝導率 σ の導線、つまり Ohm の法則が成り立つ導線、をつないで閉回路をつくと電流が生じる(図11.2)。動き続けて定常電流 J ができるとすると

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \quad (11.3)$$

である。左辺第1項の電場は保存力であり、電位の勾配を用いて表される。したがって、閉回路について線積分を行うと0になる。一方、第2項は0にならない。これが起電力を与える²。

$$V_{\text{emf}} = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (11.4)$$

¹両端の電荷が速度 v で動くことによってつくられる磁場は無視する。両端が十分離れていれば互いの電荷がつくる磁場の影響は無視できる。

²式(11.3)や起電力については第7章を参照。

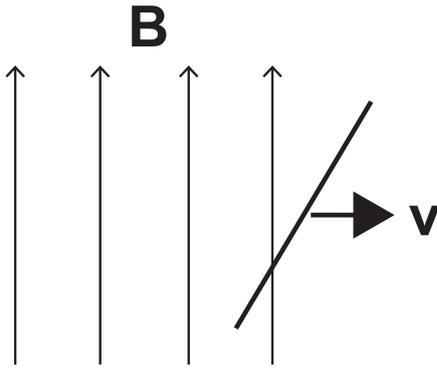


図 11.1: 一様磁場中で導体棒を動かす。磁場の向きと棒の向きと速度の向きは互いに異なるとする。

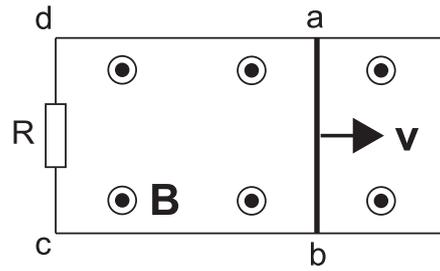


図 11.2: ab の導体棒を一様磁場中で動かすことによって起電力が生じ、回路 abcd に電流が生じる。ab の導体棒以外は静止していることに注意。

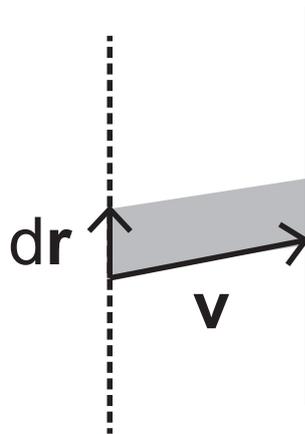


図 11.3: 線要素 dr は速度 v で動かされることによって単位時間あたり $v \times dr$ の面積を掃く。 $v \times dr$ の向きは紙面上向きである。

11.1.2 磁束と起電力

式 (11.4) はもう少し一般的な表現にすることができる。まず、(3.43) 式 (47 ページ) のベクトルの三重積についての公式を用いると

$$V_{\text{emf}} = \int_C dr \times v \cdot B \quad (11.5)$$

である。図 11.3 を見るとわかるように、 $v \times dr$ は導体棒が単位時間に空間を掃く面積に等しい。面の向きを考慮すると、起電力は

$$V_{\text{emf}}(t) = -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} dS \cdot B \quad (11.6)$$

と書ける。 $S(t)$ は図 11.2 の回路 abcd がつくる面を表している。右辺の積分は面 $S(t)$ を貫く磁束 (9.2) 式 (106 ページ) に等しい。

この公式は、これまでに議論してきた静電磁場の法則と Lorentz 力に基づくものであり本質的に新しいものではない。それでも時間微分が表式に現れたことは興味深い。これは Lorentz 力に速度があらわれることに起因する。

11.2 電磁誘導の法則

11.2.1 電磁誘導

磁場が定常電流によってつくられることを第 II 部で議論した。これは電気と磁気が直接関係することを示した性質であり画期的なものであったが、電場と磁場は別々の法則として書かれる。より直接的な関係はないものだろうか。

電流によって磁場がつくられるのであれば磁場によって電流がつくられることがあってもよいのではないかと考えたのが Faraday である。たとえばソレノイドに電流を生じさせて磁場をつくる。そのそばに導線でできたコイルをおくとどうなるか。静磁場であれば電流は流れない。磁場があっても荷電粒子が静止していれば Lorentz 力は働かないからである。Faraday は 1831 年、電流を入れたり切ったりして磁場が時間変化するときコイルに電流が生じることを見出した³。

この現象はどのように解釈できるだろうか。磁場が時間変化する系を扱っているのでこれまでの法則では記述できない新しい現象であることは明らかである。電流が生じることは起電力によって表される。磁場の時間変化が起電力をもたらす。これをどのように表現するかであるが、前節の法則 (11.6) 式に注目する。それは回路を貫く磁束の時間変化が起電力をもたらすという法則である。磁束の時間変化は領域が動くことによってもたらされていたが、磁場が動くことによってもたらされているとしても同じ効果を生み出す。

$$V_{\text{emf}}(t) = -\frac{d}{dt} \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (11.7)$$

閉回路であるコイルを境界とする面を積分領域 S とした。これが Faraday によって見出された電磁誘導 (electromagnetic induction) の法則である。Faraday の法則 (Faraday's law of induction) とよばれることもある⁴。なぜこれでよいと期待できるのか、前節の結果との関係についてはまとめて考察する。

電磁誘導の法則は発電機の原理ともなる。問題 [11-2] の系 (図 11.5) はまさに発電機であり、円盤をまわすことによって起電力が発生する。

11.2.2 電磁誘導の法則の一般化

電磁誘導の法則をさらに一般化しよう。電磁誘導の法則は、時間変化する磁場中において固定した回路にもたらされる起電力がその回路を貫く磁束の時間変化に比例しているというものである。実のところ、磁束というものは回路に関係なく任意の曲面において定義できる。そのような任意性を用いて静電磁場の法則の微分形を導いた。ここでも同様に考えよう。回路に関係なく磁束の時間変化が意味をもつという考え方である。起電力は導体の 2 点間の電位差として定義されるが、それは電場の線積分として表現される。任意の閉じた経路 C を考えると

$$\oint_{C=\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{d}{dt} \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (11.8)$$

である。 S は C を境界にもつ面領域を表す。この領域は回路に関係なく任意だが、時間に依存せず固定されているとする。 C が回路に一致すれば左辺は起電力を表すが、回路でなくても電場はあるので意味をもつ。これが Faraday の法則の積分形である。

³少し前に同様の結果が J. Henry によって得られている。発表は Faraday の方が早かった。Henry は自己誘導の現象について業績があり、インダクタンスの単位としてその名前が用いられている (ヘンリー [H])。

⁴1831 年に実験で電磁誘導の法則を発見したのが Faraday であるが (Henry は 1830 年)、(11.7) 式を書き下したのは F. E. Neumann である (1845 年)。また、(11.7) 式の右辺にマイナスがつくことを表した E. Lenz による Lenz の法則 (1834 年) というものがある。そのため、Lenz-Neumann の法則とか、Faraday-Neumann の法則ともよばれる。

Stokes の定理 (5.2) 式 (61 ページ) を用いると

$$\int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \left(\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) = 0 \quad (11.9)$$

と書ける。領域が時間に依存しないので時間微分を積分の中に入れることができる⁵。領域は任意のものにとれるのであるから積分を外した式も成り立つ。つまり、

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (11.10)$$

を得る。Faraday の法則の微分形である。

この公式は磁場が時間変化する場所では電場もまた時間変化しながら存在していることを意味している。もちろん逆の解釈も成り立つ。電場が空間的に変動しておりその回転が有限であるとき、時間依存する磁場が存在する。静電場の場合、電場は渦をつくることができず電場の回転が 0 であったが、時間変化のある場合には時間依存する磁場があるので電場の回転は 0 にならない。時間依存性を無視すると静電場の法則に帰着する。

11.3 まとめと考察

本章は短いがきわめて重要な一步を踏み出した。

- 起電力と磁束の関係
- 電磁誘導の法則

それぞれ似たような式が出てくるが、問題設定は異なっている。前者は静磁場中で回路を動かすときの問題であるが、後者は固定された回路があるときに磁場を時間変化させる問題、そして回路とは関係なく磁場を時間変化させる問題である。

相対性原理

回路を動かすときと磁場を動かすときのいずれの場合にも起電力が磁束の時間微分を用いて表現された。異なる状況で同じ表現を用いるのは何か意味があるのだろうか。

Faraday の考えた実験では起電力は磁束の時間変化に比例していることまでは言えるが、比例係数が前節のものと一致していることは示すことができない⁶。正確に述べると Faraday の電磁誘導の実験は次の関係を示している。

$$V_{\text{emf}}(t) = -k_{\text{emf}} \frac{d}{dt} \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (11.11)$$

回路に生じる起電力が回路を貫く磁束の時間変化率に比例しているということを表した式である。 k_{emf} は正の比例係数であり決めることができない。この係数を保ったまま Faraday の法則の微分形を導くと、

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + k_{\text{emf}} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (11.12)$$

⁵被積分関数は座標にも依存する関数なので微分は偏微分になる。

⁶Faraday は動く導線の結果をもとにして電磁誘導の法則を見出したわけではない。動く導線の結果が Lorentz 力を用いて説明できることが認識されるようになったのはその後である。

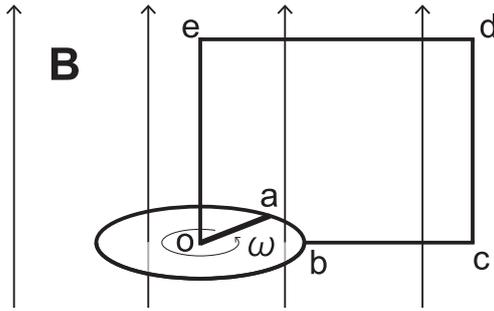


図 11.4: 問題 [11-2](a) の系。一様磁場中で导体棒 oa を回転すると回路 $oabcde$ に電流が生じる。磁場の向きは回転面に直交する。导体棒以外は静止しているとする。

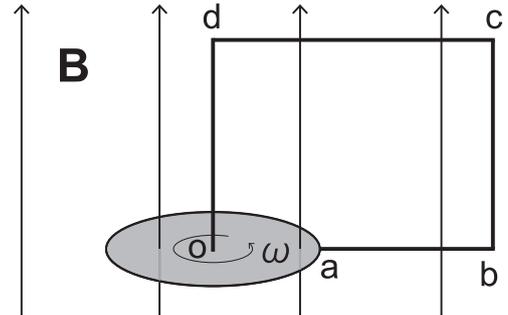


図 11.5: 問題 [11-2](b) の系。一様磁場中で点 o を中心とする导体円盤を回転する。導線 $abcd$ は静止しているとする。

となる。係数 k_{emf} は電場と磁場の相対的な定義に関わるものであることがわかる。時間によらない系の場合、静電場と静磁場はそれぞれ別の式を用いて表されており、両者の関係を規定するものは何もない。

ところが、Lorentz 力の式 (8.14) (100 ページ) では、電場と磁場が並列してあらわれる。片方の定義だけを勝手に変えるわけにはいかない。Lorentz 力の式は (11.6) 式の法則を導くために本質的に重要なものであった。よって、それらとの関係を調べることで電場と磁場の関係を決めることにもつながる。

二つの法則は、いずれも磁束の時間微分を用いて表される。磁束という形で表現してしまえば時間依存性が何に起因するものであるかは問わない。つまり、回路が動いて磁束が変化しても磁場が変化して磁束が変化しても起電力が生じる。どちらが変化したのか見分けがつかないのである。とすれば k_{emf} を 1 とおくことは自然なことから考えられる。このような考え方は相対性原理 (principle of relativity) とよばれる原理に基づくものである。

相対性原理を詳しく調べていくと、 $k_{emf} = 1$ を得ることができるだけでなく磁場とは何なのかを理解することもできる。相対性理論にもつながる話題である。

電磁場の法則の確立に向けて

電磁誘導の法則は、電磁場が時間に依存する場合への拡張の第一歩となる。そしてはじめて電場と磁場が一つの式の中で同時に用いられた。その式は、磁場が時間変化している場所では電場も同時に存在していることを意味している。果たしてこれが電磁場の基本法則になるのだろうか。そもそも、Faraday の法則を任意の面領域に拡張した (11.8) 式は自然な拡張とはいえ、何の根拠もない。発想の大きな飛躍がある。一般化された Faraday の法則をどのようにして確かめるのか、さらなる項が必要となることはないのか、他の法則と矛盾しないのかなど気になる点はいろいろある。次章でこれらの問題について考えることで電磁場の法則の確立に挑む。

11.4 問題

[11-1] 起電力

図 11.2 の回路について起電力を求めよ。回路を固定して同じ起電力を得るためにはどのような磁場をかければよいか。

[11-2] 回転する導体

(a). 図 11.4 のように導体棒を一端を固定して一定の角速度で回転させる。このときの起電力を求めよ。そしてそれは磁束の時間微分として表すことができることを具体的に示せ。

(b). 導体の棒を円盤におきかえて考えたとき (図 11.5) はどうなるか。

第12章 Maxwell方程式

前章で考えた電磁誘導の法則によって時間依存する系の確立に向けての第一歩が踏み出された。本章ではいよいよ電磁場の法則の最終形態に至る。ここまでの法則における不備を解消することによって意外と簡単に導かれる。電磁場の法則を表す Maxwell 方程式は電磁場の実在性について一定の解釈を与えるものとなる。

なお、ここから先は積分形より微分形の法則を主に用いていく。微分形を用いる方が形式的な議論がしやすいからである。

12.1 変位電流

12.1.1 静電磁場の法則の拡張

静電磁場の法則をもう一度まとめてみよう。

$$\oint_{S=\partial V} d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k \rho(\mathbf{r}) \quad (12.1)$$

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (12.2)$$

$$\oint_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (12.3)$$

$$\oint_{C=\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 4\pi k_m \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 4\pi k_m \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (12.4)$$

前章では Faraday の法則を導いた。

$$\oint_{C=\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{d}{dt} \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (12.5)$$

これは静電磁場の法則の二つめの式 (12.2) を時間依存性のある系に拡張したものである。他の式においても同様の拡張をすればよいだろう。もちろん拡張と言ってもやみくもにやればいいというわけではない。何らかの原理を用いる必要がある。

用いるべき原理として一つ考えられるのが電荷の保存則である。これは第7章において連続の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (12.6)$$

として表現された。電磁場の法則は電荷と電流密度を含むので、法則が連続の方程式と矛盾するものにならないように気をつける必要がある。式 (12.1) と (12.4) を時間依存する系にそのまま拡張してみる。そのとき、前者の時間微分、後者の発散を考えると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (12.7)$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_m \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (12.8)$$

を得る。二つめの式の左辺は回転の発散が0であることから恒等的に0となる。右辺が0であるということは、連続の方程式から一つめの式の右辺も0である。これは連続の方程式の各項がそれぞれ0となるこ

とを意味しているが、電荷密度が時間依存してはならないという結果は、任意の時間依存する系を扱うには適切ではない。新たな項の付加が必要となる。その項は時間依存性のない静的な系では0にならなければならないから、時間微分を含むべきである。次のようにすればいいだろう。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k \rho(\mathbf{r}, t) \quad (12.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{k_m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_m \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (12.10)$$

二つめの式の左辺第2項が付加項である。連続の方程式を満たすためには一つめの式に時間依存する新たな項を付け加えることはできない。とするとこれ以上変更の可能性はありえない¹。積分形を用いて表現することも可能であり、次のようになる。

$$\oint_{S=\partial V} d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (12.11)$$

$$\oint_{C=\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_m \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi k} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (12.12)$$

新たな項は電場の時間微分を用いて表されているが、電流密度の役割を果たす。したがって、この項は変位電流 (displacement current) とよばれる。 $\mathbf{J}_d(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi k} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ は変位電流密度を表す。変位電流の項は Maxwell が導いたものである。

ここまで来たらあと一つ、(12.3) 式である。これについては (12.2) 式の拡張である (12.5) 式との無矛盾性を考えよう。式 (12.5) の微分形の発散をとると

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (12.13)$$

であるが、左辺第1項は恒等的に0である。第2項の時間微分と空間微分を交換させると、この式は磁場の発散が時間によらないことを示している。静磁場の発散は (12.3) 式で表されているから、これを時間依存する系にそのまま拡張すればよい。

$$\oint_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (12.14)$$

変位電流を導いた上の議論と違って何の付加項もいらぬという単純さは磁荷が存在しないという性質によるものである。磁荷が存在するとしたら Faraday の法則 (12.5) 式には磁流密度とよぶべき項がつけ加わらずである。電磁誘導の法則に何の問題も生じないという実験事実が単磁荷が存在しないという性質にもつながる。

こうして電磁場の法則が時間依存性のある場合に拡張された。これ以上の問題があるかどうかは次節において議論する。

12.1.2 変位電流の役割

変位電流の果たす役割を具体的な例において見てみよう。考える系は半無限の直線電流である。図 12.1 のように $z < 0$ の z 軸上に定常電流があり、原点に電荷がたまっていく。定常電流であるため、原点における電荷は $Q(t) = It$ で与えられる。時間依存のある系でも Gauss の法則 (12.9) 式が成り立つとしているので、電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = kIt \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (12.15)$$

¹ 本当にそうだろうか？本章最後の考察も参照。

のように与えられる。したがって、変位電流は

$$\mathbf{J}_d(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi k} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (12.16)$$

と計算される。

この変位電流を用いて (12.12) 式を調べてみる。磁場の形は円柱座標を用いて

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B(\rho, z, t) \mathbf{e}_\varphi \quad (12.17)$$

となるはずである。 z 軸回りの回転対称性により、磁場の大きさは軸からの距離 ρ と z にのみ依存する。 \mathbf{e}_ρ 方向の磁場が 0 であることは磁場についての Gauss の法則 (12.14) 式からわかるし、 \mathbf{e}_z 方向も 0 である²。 z 軸を中心軸としてもつ半径 ρ の円を積分経路にとると

$$2\pi\rho B(\rho, z, t) = \begin{cases} k_m I \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} & z > 0 \\ 4\pi k_m I + k_m I \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} & z < 0 \end{cases} \quad (12.18)$$

と書くことができる。積分の項が変位電流の寄与を表す。面積分は次のように計算できる。

$$\int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \int_0^\rho \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{z}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \quad (12.19a)$$

$$= \pi z \int_0^{\rho^2} \frac{d\rho'^2}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \quad (12.19b)$$

$$= 2\pi \frac{z}{|z|} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \quad (12.19c)$$

したがって、

$$B(\rho, z, t) = \frac{k_m I}{\rho} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \quad (12.20)$$

を得る。磁場は時間に依存しない。

途中の計算では $z > 0$ と $z < 0$ で区別して計算を行う必要があったのにもかかわらず答えは全ての領域で同じ表現にまとめられる。磁場は $z = 0$ で連続となるからこれはもっともな結果である。変位電流の寄与がなければ不連続となってしまう。

12.2 Maxwell 方程式

これまでの議論により以下の方程式にたどり着いた。

$$\oint_{S=\partial V} d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (12.21)$$

$$\oint_{C=\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{d}{dt} \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (12.22)$$

$$\oint_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (12.23)$$

$$\oint_{C=\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_m \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi k} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (12.24)$$

いずれも考える領域は任意であり、領域の大きさを無限小にすることによって微分形の法則が導かれる。

²本当にそうだろうか。問題 [12-1] で考えてほしい。

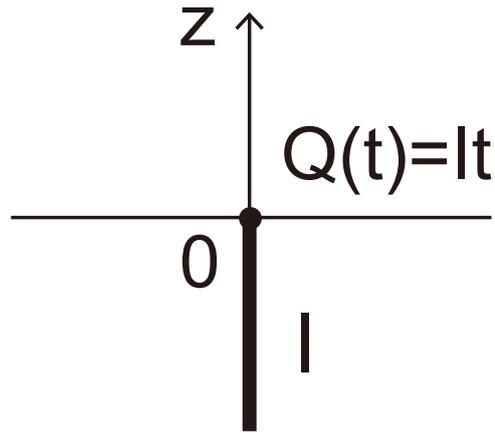


図 12.1: 半無限直線電流の系。 $z < 0$ の軸上に電流 I が流れ、原点に電荷 $Q(t) = It$ がたまっていく。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k \rho(\mathbf{r}, t) \quad (12.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (12.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (12.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{k_m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_m \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (12.28)$$

これが Maxwell 方程式 (Maxwell equation) である。積分形は具体的な問題を解くときに便利であるが、理論の構造を調べるには微分形が向いている。これまでのところこの方程式に矛盾はないが、さらに性質を見ながら問題の有無を調べよう。

線形性

Maxwell 方程式は電荷・電流密度および電磁場の量の組 $(\rho, \mathbf{J}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ について線形の方程式である。よって、2 種類の組がそれぞれ Maxwell 方程式を満たすのであればそれらの和も Maxwell 方程式を満たす。つまり、重ねあわせの原理が成り立っている。線形の方程式であることが重ねあわせの原理が成り立つことを保証している。単純であるがきわめて重要で便利な性質である。

連続の方程式と初期条件

連続の方程式と矛盾のないことはすでに前節で確認した。連続方程式が自動的に満たされるということは、その式を陽に述べる必要はないということである。どうでもいいわけではなく、たいへん重要な基本原理である。

連続の方程式を用いると次のようなことも言える。Maxwell 方程式の第 4 式 (12.28) の発散をとって連続の方程式を用いると、

$$-\frac{k_m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_m \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -4\pi k_m \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (12.29)$$

つまり、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - 4\pi k \rho(\mathbf{r}, t) \right) = 0 \quad (12.30)$$

である。この式は括弧の中の量が時間によらない定数であることを示しているが、それは Maxwell 方程式の第 1 式 (12.25) から 0 である。同様に、第 2 式 (12.26) の発散をとると

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (12.31)$$

を得る。磁場の発散が時間によらないことを示しているが、それは第 3 式より 0 である。このように、Maxwell 方程式の第 1 式と第 3 式は初期条件を定める式となっている。

Maxwell 方程式は 4 つの式からなるが、ベクトルで表されているものもある。各成分を別と考えると全部で 8 つの方程式がある。そのうち二つは初期条件を決めるものであるから 6 つの自由度がある。一方、方程式にあらわれる電磁場は 6 つの成分をもつ。したがって、与えられた電荷密度と電流密度のもとで電磁場成分は Maxwell 方程式を解くことで求まる³。

第 1 式と第 3 式は初期状態を定めるためのもので補足方程式ともよばれる。それらの式には時間微分が存在しないから、運動法則を規定するものではなく拘束条件のようなものである。第 2 式と第 4 式が電磁場の運動方程式となる。

波動方程式

上の考察では第 2 式と第 4 式の発散をとったが、それでは回転をとったらどうなるか考えるのは自然な発想であろう。回転の回転について公式 (3.46) (47 ページ) を用いると

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (12.32)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) - \nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{k_m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi k_m \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (12.33)$$

Maxwell 方程式の第 1 式と第 4 式を用いて変形を行うと

$$-\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{k_m}{k} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -4\pi k \nabla \rho(\mathbf{r}, t) - 4\pi k_m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (12.34)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \frac{k_m}{k} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_m \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (12.35)$$

を得る。

右辺の電荷密度と電流密度が 0 のときを考えてみよう。

$$-\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{k_m}{k} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (12.36)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \frac{k_m}{k} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (12.37)$$

これは波動方程式 (wave equation) を表している。つまり、電荷がない空間では電磁場は波として伝搬する。電荷がないと何も起こらないと思えるが、適当な初期状態を与えると電場と磁場が互いに影響を及ぼしながら波として空間を伝わっていくのである。これまでに得られた法則を組み合わせただけで電磁場は波であるという結論が得られたのは非常に興味深い。電荷が存在する場合、波は電荷によって影響を受ける。電荷は波の源としての役割を果たすだろう。

波動方程式について詳しくは次章で扱うが、波の伝搬する速度は波動方程式の空間微分と時間微分の項の係数の比から決まる。今の場合、次の式で与えられる。

$$v = \sqrt{\frac{k}{k_m}} \quad (12.38)$$

³初期条件や境界条件を指定すれば一意的に決まる。

これまで比例係数 k や k_m の意味は全く不明であったが、ここでそれらの関係が明らかになった。係数の比の $1/2$ 乗が速度の次元をもっていることは第 8 章で言及したが、それは電磁場が波として進行する速度を表している。

1861 年、Maxwell は観測結果から見積もられる $\sqrt{\frac{k}{k_m}}$ の値が光の速度 $c \approx 299792458\text{m/s}$ に近いことに気づいた。光速度は 1849 年 H. Fizeau により初めての測定がなされていた。1856 年には R. Kohlrausch と W. E. Weber によって k と k_m の比を表す量が測定されている。Maxwell はこれらの結果から、電磁場が光に他ならないと結論づけた。電磁場の波としての速度 $v = \sqrt{\frac{k}{k_m}}$ は光速 c に等しい⁴。

これまで電場と磁場にあらわれる係数として k と k_m を用いてきたが、次の表現がよく用いられる。

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (12.39)$$

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (12.40)$$

ϵ_0 は誘電率 (permittivity)、 μ_0 は透磁率 (permeability) とよばれる⁵。これらは次の関係をもつ。

$$\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (12.41)$$

光速度を既知のものとするれば Maxwell 方程式にあらわれる定数は一つのみである。第 2 章で述べたように、それは電磁場を力に変換する役割を果たしている。

以下の議論において参照できるように、新しい記号を用いて Maxwell 方程式を表現しておこう。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (12.42)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (12.43)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (12.44)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (12.45)$$

これが電磁場の基本法則の最終形態である。

時間反転

第 7 章で Ohm の法則が時間反転対称性を破っていることを述べた。それでは Maxwell 方程式は時間反転対称性をもっているだろうか。Maxwell 方程式について時間反転 $t \rightarrow -t$ を行うと

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, -t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, -t) \quad (12.46)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, -t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, -t) = \mathbf{0} \quad (12.47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, -t) = 0 \quad (12.48)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, -t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, -t) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, -t) \quad (12.49)$$

となる。電荷分布は一般に時間反転について対称である必要はないが、対称であるという場合を考える。

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, -t) \quad (12.50)$$

⁴電磁場が波であり光であることは、1846 年 Faraday によって予見されている。

⁵これらは誘電体や磁性体を扱う際に便利な量である。本講義では扱わない。

このとき、他の量は次のように変化するとすれば Maxwell 方程式は不変である。

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{J}(\mathbf{r}, -t) \quad (12.51)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, -t) \quad (12.52)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{B}(\mathbf{r}, -t) \quad (12.53)$$

電流密度は電荷の流れであるから符号を変化させる。電場は不変、磁場は符号を変える。磁場は電流によってつくられるものであるから、符号を変えるのももっともな結果である。

12.3 電磁場のエネルギー

力学系ではエネルギーや運動量、角運動量といった量を考え、系によってはそれらが保存することを見つけた。電磁場の系においても力学の法則と関係がある以上、保存則が存在するはずである。ここでは特にエネルギー保存則 (law of conservation of energy) について考えてみることにする。そしてこれが電磁場の法則の最終チェックになる。

電磁場の中を速度 v で運動する質量 m 、電荷 q の粒子は運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ をもつ。電磁場によって Lorentz 力を受けるのであるから運動エネルギーは時間によって変化する⁶。運動エネルギーの時間微分を計算すると $v(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ より

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2(t) \right) = m\mathbf{v}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(t) \quad (12.54a)$$

$$= q\mathbf{v}(t) \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t)) \quad (12.54b)$$

$$= q\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) \quad (12.54c)$$

となる。磁場は仕事をしないということを反映して最後の表式に電場のみがあらわれるのは自然な結果である。多数の電荷が運動している一般の場合にも容易に拡張できる。

$$\frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{1}{2}m_i v_i^2(t) \right) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_i(t), t) = \int d^3\mathbf{r} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (12.55)$$

積分表式に移行し、電荷密度と速度をかけたものが電流密度になるという (7.23) 式 (91 ページ) を用いた。

力学において、粒子の運動エネルギーが変化した分は位置エネルギーに変換されるということを学んだ。両者の和を考えることによってエネルギーが保存する。運動エネルギーはエネルギーの一形態にすぎないわけである。今の場合も、運動エネルギーが変化する以上、位置エネルギーに相当するエネルギーが存在するはずである。そしてそれは電磁場によって表現されるものと考えられる。このことを確かめてみよう。

運動エネルギーがどれくらい変化するかを表す量 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ について、Maxwell 方程式の第 4 式 (12.45) を用いて変形を行う。

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{E} = -\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \quad (12.56)$$

これで電磁場を用いて書くことができたが、もう少し変形すると電場と磁場のバランスをよくすることができる。最後の項を (3-8.1) 式 (52 ページ) の公式を用いて変形すると

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (12.57)$$

⁶Lorentz 力は時間に依存する電磁場でも同じ形に書けるとしている。以下で見るように、それでエネルギー保存則が導かれる。

となる。さらに、電場の回転を Maxwell 方程式の第 2 式 (12.43) を用いて書き換えると、

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (12.58a)$$

$$= -\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (12.58b)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (12.58c)$$

を得る。以上をまとめると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) = -\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (12.59)$$

である。

この式は何を意味しているだろうか。式 (12.55) に戻すために、電荷を含む領域 V で積分すると

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3\mathbf{r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \int_V d^3\mathbf{r} \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{d}{dt} T \quad (12.60)$$

となる。 T は領域 V 内にある電荷の運動エネルギーを表す。左辺第 2 項は Gauss の定理を用いて変形すると

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3\mathbf{r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \int_{S=\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{d}{dt} T \quad (12.61)$$

のように表面積分を用いて表すことができる。電磁場が領域の外側に出て行かないとすると、その項は 0 となり

$$\frac{d}{dt} (T + \mathcal{E}) = 0 \quad (12.62)$$

と書ける。 \mathcal{E} は電磁場の担うエネルギー

$$\mathcal{E}(t) = \int_V d^3\mathbf{r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right) \quad (12.63)$$

を表す。

表面項が無視できない場合、エネルギーは保存しないが、それは外側にエネルギーが電磁場として流失するからである。式 (12.59) は連続の方程式とよく似ている。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (12.64)$$

「密度」および「流れ」は次のように書ける。

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \quad (12.65)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (12.66)$$

$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ は電磁場のエネルギー密度を表す。電磁場が存在する空間ではエネルギーが蓄えられていると解釈できる。 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ は電磁場のエネルギーの流れを表す量であり Poynting ベクトル (Poynting vector) とよばれる⁷。電磁場の運動量とよばれることもある。Poynting ベクトルがどういうものであるかは次章の具体例で見ることにしよう。

⁷1884 年、J. H. Poynting によって考案された。Pointing の綴り間違いではない。

式 (12.64) の右辺は電荷によって担われる運動エネルギーの分である。左辺はちょうど連続の方程式と同じ形をしている。電荷密度と電流密度の代わりに電磁場のエネルギーと Poynting ベクトルが用いられている。詳しくは議論しないが、連続の方程式は一般に何かの保存則を表しているので、そこから Poynting ベクトルの意味を見出すことができる。電荷が全く存在せず電磁場のみが存在する系では電磁場は連続の方程式を満たし、エネルギーが保存する。ところが、電荷が存在する場合には電磁場のみでは閉じた系とはならず電荷の運動エネルギーも考えないといけない。その場合、式 (12.64) の右辺は湧き出したり吸い込みの寄与を表していると解釈することができる。体積積分を行うことによって右辺が時間微分を用いて表されエネルギー保存則の式に組み込まれることも上で示した。

問題 [12-4] では、(12-4.1) 式左辺の電磁場のエネルギーは右辺のコンデンサーに蓄えられるエネルギーとして表される。左辺の表現ではコンデンサー間の空間にエネルギーが蓄えられているとみなされることに対して右辺ではコンデンサー（電荷）がエネルギーをもっていると解釈できる。両者は被積分関数が等しいわけではなく、ある条件の下で積分を行うことによってはじめて成り立つものである。等式が成り立つための条件を、問題を解いて調べてみてほしい。本章での議論からは空間の各点で電場がエネルギーを蓄えている左辺の方が自然な表現である。静電場の場合にのみ電荷がエネルギーをもつという表現が可能になる。

このようにして電磁場の性質をいろいろと見てきたが、そのことによって、電磁場は計算の都合上導入された量ではなくエネルギーを担って有限の速度で伝わる物理的実体であることがわかった。これは静電磁場を調べているだけではわからなかったことである。時間変化する電磁場を調べることによって、電荷から独立した電磁場の存在意義を見出すことができたのである。

12.4 電磁ポテンシャルとゲージ変換**

第 I 部および第 II 部で静電磁場がそれぞれ次のように書けることを示した。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (12.67)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (12.68)$$

ϕ はスカラーポテンシャル、 \mathbf{A} はベクトルポテンシャルを表す。まとめて電磁ポテンシャル (electromagnetic potential) ともよばれる。スカラーポテンシャルは電場が保存力で仕事が経路に依存しないことから導かれる表現であり、後者は磁場が湧き出し・吸い込みをもたないことから導かれる。これらの性質が動的な系ではどのようなになるか調べることは意義があるだろう。

電磁ポテンシャルを導入する利点は静電場および静磁場の法則の一部分が自動的に満たされることであった。Maxwell 方程式でいうと第 2 式と第 3 式である。動的な系に法則を拡張を行っても、第 3 式 (12.44) の渦なしの法則は変化しない。したがって

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (12.69)$$

と書くことができる。一方、第 2 式 (12.43) には新たな項が加わっている。そこで、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) + \dot{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, t) \quad (12.70)$$

とおいてみよう。これらの式を第 2 式に代入すると

$$\nabla \times \dot{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (12.71)$$

を得る。したがって

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (12.72)$$

とおけばよい。まとめると、次のように電磁場をおくと Maxwell 方程式の第 2・3 式は満たされる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (12.73)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (12.74)$$

残りの第 1・4 式に代入すると電磁ポテンシャルの満たすべき式が得られる。

$$-\nabla^2\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (12.75)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla\phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (12.76)$$

整理すると

$$-\nabla^2\phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (12.77)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (12.78)$$

と書ける。このようにして電磁ポテンシャルを用いて Maxwell 方程式を表現することもできる。

電磁ポテンシャルの特徴は、ゲージ不変性が存在することである。むだな自由度が混入するのでやっかいであるともいえるが、便利なゲージを選んで計算を進めることができる。第 9 章では $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を満たすようなゲージを選んだ。今の場合にはどのように選んだらよいだろうか。一つの可能性としては

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (12.79)$$

とおくことである。これは上の式を見ると考えなくなる条件である⁸。このようにできるとすれば

$$-\nabla^2\phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (12.80)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (12.81)$$

となる。つまり、電荷が存在しなければ電磁ポテンシャルは波動方程式を満たす。これも電磁ポテンシャルが波として伝わることを示している。電磁ポテンシャルを微分して得る電磁場も波を表す。

他にもさまざまなゲージの固定の仕方を考えることができる。ベクトルポテンシャルを次のように変換しても磁場 (12.74) 式は不変である。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t) \quad (12.82)$$

つけくわえた項はスカラー関数の勾配であるが、この項は回転をとると恒等的に 0 になる。一方、電場 (12.73) 式がこの変換で不変となるためにはスカラーポテンシャルを同時に

$$\phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \phi'(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \chi(\mathbf{r}, t) \quad (12.83)$$

と変換する必要がある。このスカラー関数 $\chi(\mathbf{r}, t)$ は原理的にどのようにとろうとも自由であるからさまざまな表現を考えることができる。式 (12.79) のようなゲージをとれることも示すことができる。

⁸これは Lorenz ゲージとよばれる。L. Lorenz のことであって Lorentz ではない。

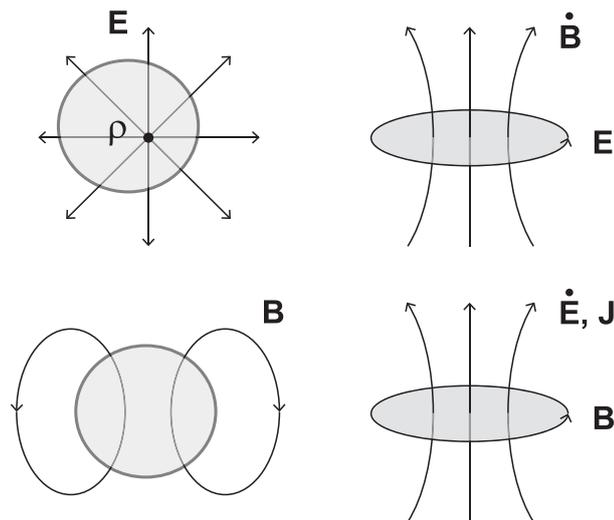


図 12.2: Maxwell 方程式。

12.5 まとめと考察

本章ではついに Maxwell 方程式にたどり着いた。次の点を理解してほしい。

- 静電磁場から一般の系への拡張
- Maxwell 方程式の意味
- 電磁場のエネルギー

静電磁場の法則を、電磁誘導の法則といくつかの原理をてがかりにして時間依存する系に拡張した。その論理とともに、得られる方程式の意味とその帰結を理解する必要がある。Maxwell 方程式のおおよその解釈については、図 12.2 を理解できるようになるとよい。

方程式の拡張

静電磁場の法則が得られたからといって電磁場の一般法則を一意的につくりあげることはいできない。拡張するためにはいくつかの知識や洞察が必要であった。

そこで主に用いられたのは電磁誘導の法則である。前節で現象を注意深く観察し、法則を検討し、一般的な法則へ拡張した。回路にとらわれない一般化を行った Faraday には場が見えていたのかもしれない⁹。これが結局のところ電磁場の法則を完成させるために決定的な役割を果たした。あとは連続方程式や線形性などを用いれば拡張の可能性をかなり狭めて法則を得ることができる。変位電流の導入は理論的考察の醍醐味であるといえる。

幸運だったのは拡張が比較的簡単だったことである。静電磁場の法則と比較すると、拡張は電磁場の時間 1 階微分項を 2 箇所に付け加えることで済む。新たな項も電磁場の 1 次の項であり、線形性を保っている。線形性を破ったり 2 階微分があらわれていたら、これまでのような考察ではうまくいかなかっただろう。これらの性質は、法則の確立後に変重要なる意味をもっていることが明らかにされた。が、それはまた別の話である¹⁰。

⁹Faraday は電磁場が回路だけでなく何もない空間にも存在すると主張したが、はじめは受け入れられなかった。Faraday は実験家であり、数学的な素養はあまりなかったらしいが、それでもそのような抽象化を推し進めたことは興味深い。

¹⁰Einstein による特殊相対性理論である。

法則の形式

第 I 部・第 II 部では静電磁場を直接的な表現から間接的な表現（湧き出し・吸い込み・渦についての法則）に直すことに多大な労力を費やした。そこではいろいろないいわけをしてきたが、静電磁場の系にとどまっていたら Gauss の法則などは電磁場の満たす性質のひとつに過ぎなかつただろう。本章でようやく意義が実感できたはずである。拡張のしやすい形に法則を書き直すことによって電磁気の法則を自然だがきわめて非自明な形で拡張できたことがよくわかる。電場が Coulomb 力の形、磁場が Biot-Savart の形のままでどう拡張していいかわからなただろう。微分方程式で法則を書き下すことによって個々の状況を表す情報が落とされている。それによって普遍的な法則をはじめて書き下せるのである。次章でいくつかの例を扱うが、個々の状況に応じて Maxwell 方程式を解くことはたいへん難しい。

場の理論

Maxwell 方程式は電場と磁場が複雑にからみあった式である。電場が時間変化する系では磁場が変動しており、逆に磁場が時間変動すると電場も変動する。そのような変動が空間の全ての点で起こっている。線形で 1 階微分のみを含む単純な方程式とはいえ、得られる電磁場の変動規則は複雑である。

力学の場合は力が与えられれば位置座標の時間変化をおっていけばよい。現在の位置と速度がわかれば次の瞬間どちらに動けばよいかわかる。Maxwell 方程式は時間微分を用いているので同様に時間変化を追っていくことができる。しかも 1 階微分であるから 2 階微分を扱う Newton 方程式より簡単に見える。

大きな違いは、Newton 方程式は粒子の座標を時間の関数として求めるが、Maxwell 方程式は電磁場を全ての位置座標 r と時間 t で求めないといけない。力学では粒子のいる座標だけ気にしていればよいことと比べると大きな違いである。力学では座標を力学変数として時間の関数として求めるのに対して電磁気学では座標と時間は自由に選ぶことができるパラメータにすぎない。これは、電磁気学が場の理論であることを意味している。力学と全く異なる法則の表現形式を確立させることができたのは古典物理学の大きな成果のひとつでもあり、現代物理学においてもその考え方は受け継がれている¹¹。

方程式の帰結

電荷・電流密度が 0 であったとしても Maxwell 方程式は電磁場の運動法則を記述する。具体的に示したように、電磁場は波動方程式を満たす。つまり、電荷・電流密度がない時間・空間の点においても電磁場は存在し波として時空を伝わっている。そして、その速度は光の速度に等しいことから、Maxwell は電磁場は光に他ならないと結論づけた。

これは予期せぬ結論である。これまでよくわからないままに扱ってきた電磁場がこの世の中の至るところにある光であったという発見は、電磁気学の偉大な到達点である。これによって、さまざまな現象や実験、理論が結びついた。速度の値が光のものと同じであるからというだけで電磁場が光であると結論づけるのは短絡的かもしれないが、論理性だけでは新しい発見にたどり着けない。

エネルギー保存則

電磁場が実在するということの有力な根拠のひとつは、電磁場がエネルギーを担っているという性質である。力学の場合、エネルギーは運動する粒子がもっているものとして計算されるが、電磁気学では電磁場がエネルギーを担っている。電磁場は空間全域にひろがっているから、エネルギーは空間の各点に蓄えられている。荷電粒子と電磁場のエネルギーの両方をあわせてエネルギー保存則をはじめて成り立つ。荷電

¹¹場の量子論は極微スケールの法則を記述する基本言語である。

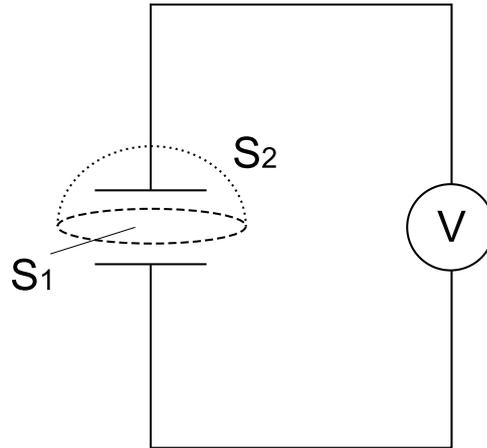


図 12.3: 問題 [12-2] の系。起電力 $V(t)$ をかけて電流 $I(t)$ が流れる。面領域をコンデンサー内を通る面 S_1 と導線を通る面 S_2 の 2 通りにとって積分をそれぞれ行う。両者の面領域は共通の境界（破線）をもつ。

粒子のみでは成り立たない。静電場の場合には電磁場のエネルギーは一定であるから電磁場と電荷の間でエネルギーが移り変わることがない。そのため、電磁場のエネルギーを意識する必要がなかったのである。

12.6 問題

[12-1] 半無限直線電流の系

12.1.2 節の系について、磁場の e_ρ 成分が 0 であることを示せ。 e_z 成分はどうか。

[12-2] コンデンサーと変位電流

図 12.3 のようにコンデンサーをつなぎ、時間に依存する起電力をかける。式 (12.12) の右辺について、図の面領域 S_1 と S_2 で積分をそれぞれ行い、一致することを具体的に示せ。コンデンサーは十分大きく、その電気容量は (6.18) 式 (75 ページ) で与えられるとする。

[12-3] 磁荷

磁荷が存在して磁荷密度が定義できれば、磁場の発散は磁化密度に比例している。磁荷の流れである磁流密度も定義できてそれらは連続の方程式を満たす。これらが存在するとしたとき、Maxwell 方程式はどのように修正されるべきか。

[12-4] 静電場のエネルギー

静電場の系を考える。

(a). ある体積領域 V に対して、次の式が成り立つための条件は何か。

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3\mathbf{r} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) \quad (12-4.1)$$

$\phi(\mathbf{r})$ は静電ポテンシャルを表す。被積分関数が等しいわけではないことに注意。

(b). 図 6.7 (74 ページ) の球状コンデンサーの系において上の式が成り立っていることを、両辺をそれぞれ計算することによって具体的に示せ。体積領域はコンデンサーを内部に含むようにとる。

第13章 電磁波

最後に、電磁場の波としての性質を調べる。波動方程式を解くと、電磁場が進行していく様子を見ることが出来る。また、電荷がどのように電磁場を放出するかについて簡単な例を用いて調べる。これらの計算によって電荷と電場と磁場が互いに影響を及ぼし合いながら変化していく様子を実感することができるだろう。

13.1 波動方程式

電磁場は電荷と電流密度がないとき波動方程式を満たす。 $\rho = 0$ 、 $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ の Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (13.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (13.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (13.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (13.4)$$

より、

$$-\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (13.5)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (13.6)$$

が導かれることを前章で示した。電荷や電流密度がないからといって電磁場がないわけではない。何らかの要因で電磁場がつくられたとき、その電磁場は空間を伝搬してひろがっていく。Maxwell 方程式はその電磁場の何も無い空間、つまり真空中での伝搬の様子が波の運動と全く同じであることを示している。Maxwell 方程式から得られる驚くべき性質である。

本節では真空中における電磁場の波としての伝搬の様子を波動方程式を解くことによって調べる。波として伝わる電磁場のことを電磁波 (electromagnetic wave) とよぶ。波動方程式は2階の線形微分方程式である。微分方程式の解き方・扱い方については系統的な理論を展開できるが、本講義ノートでは一般論を扱うことはしない。いくつかの簡単な例を示すことによって電磁場の伝搬の様子を探ることにしよう。

電場と磁場はそれぞれ波動方程式を満たし、別々に方程式を解くことができるが、もちろん両者は独立ではない。Maxwell 方程式に戻ってみると電場と磁場は互いに関係しあっている。Maxwell 方程式の第2・4式を見ると電場の変化がある場所では磁場もまた変化している。

13.1.1 平面波

もっとも簡単な場合として、空間座標の一つのみに依存する解を考えてみよう。つまり電場がたとえば z にもみ依存して $E(z, t)$ のときである。さらに、変数分離 (separation of variables) された解を仮定する。

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 Z(z) T(t) \quad (13.7)$$

E_0 は定ベクトルを表す。波動方程式に代入すると

$$E_0 \left(-Z''(z)T(t) + \frac{1}{c^2} Z(z)\ddot{T}(t) \right) = 0 \quad (13.8)$$

を得る。 Z' は Z の z 微分、 \dot{T} は T の t 微分を表す。これより

$$-\frac{Z''(z)}{Z(z)} + \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = 0 \quad (13.9)$$

と書ける。左辺第1項は z の関数で t によらず、第2項は t の関数で z によらない。それらを足したものが任意の z 、 t で0になるということは両者が定数であることを示している。つまり、

$$-\frac{Z''(z)}{Z(z)} = C_1 \quad (13.10)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -C_1 \quad (13.11)$$

と書ける。これらの2解微分方程式は簡単に解くことができる。 $C_1 = k^2$ とおくと

$$-Z''(z) = k^2 Z(z) \quad (13.12)$$

$$-\ddot{T}(t) = c^2 k^2 T(t) \quad (13.13)$$

を得る。 k^2 は任意定数であるが正の値をとるものとする。2乗するから k は正としても一般性を失わない。 $C_1 < 0$ の場合も考えることができ、その場合対応する k は純虚数となるが、問題 [13-1] でわかるようにそれは物理的な解を表していないので、考えない。微分方程式は簡単に解くことができ

$$Z(z) = Z_0 \sin(kz - kz_0) \quad (13.14)$$

$$T(t) = T_0 \sin(ckt - ckt_0) \quad (13.15)$$

を得る。添字に0がついたものは積分定数を表す。4つあるが、電場の表式に戻すと $Z_0 T_0$ は E_0 に吸収できてしまうので考える必要がない。まとめると、電場は

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(k(z - z_0)) \sin(ck(t - t_0)) \quad (13.16)$$

と書ける。このように方程式はそれぞれの変数の方程式に分離することができる¹。積分定数は初期条件に応じて決まるものである。電場は波として伝搬し、その波数は k 、周波数は ck で与えられる。位相速度はそれらの比 c となる。これらの用語については本節末の囲みを参照。

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ より

$$kE_{0z} \cos(k(z - z_0)) \sin(ck(t - t_0)) = 0 \quad (13.17)$$

となる。この式が z や t によらず常に成り立つとすると $E_{0z} = 0$ でなければならない。 $k = 0$ は $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ の自明な解なので考えない。 $E_{0z} = 0$ ということは、電場の向きが波の進行方向 z に直交していることを意味している。次節で議論するが、波の向きは一般に波数ベクトル k の向きによって指定される。今の場合、 k は z 成分のみをもつ。

¹これは多変数関数を解くときの常套手段である。もちろん全ての方程式が変数分離を用いて解くことができるわけではないが、これができると大変便利であるため、できるかどうか試してみるとよい。また、変数分離で解ける系でも変数分離で表されない解が存在する。ところが、線形の系ではそのような解は変数分離で求められた解の線形結合で表すことができる。どのような解でも変数分離された解で表すことができるのであれば変数分離で求めた解で十分であると言える。詳しい説明は別の講義に譲る。物理学専攻者は、量子力学や物理数学 (Fourier 変換の理論) で詳しく扱う。

磁場も波動方程式を満たすから、同じように変数分離される。Maxwell 方程式を満たすようにすると

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} \sin(k(z - z_0)) \sin(ck(t - t_0)) \quad (13.18)$$

に対して

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -E_{0y} \\ E_{0x} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(k(z - z_0)) \cos(ck(t - t_0)) \quad (13.19)$$

を得る。これらは平面波 (plain wave) とよばれるものである。磁場は電場と直交していることがわかる。さらに、磁場は進行方向にも直交している。つまり、電磁波の進行方向、電場、磁場は互いに直交している。電磁波は横波であると言える。

13.1.2 一般的性質

前節では平面波を得た。ここでは、平面波で得られた電磁波の性質がどれだけ一般的なものを調べよう。

まず、前節と同様にして波動方程式が座標 z と時間 t にのみ依存すると仮定する²。このとき、波動方程式は $\xi = z - ct$ 、 $\eta = z + ct$ という変数を用いて

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (13.20)$$

と書くことができる。よって、容易に積分を行うことができ

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_+(\xi) + \mathbf{E}_-(\eta) = \mathbf{E}_+(z - ct) + \mathbf{E}_-(z + ct) \quad (13.21)$$

という解を得る。 \mathbf{E}_\pm は任意の関数を表す。第 1 項の $\mathbf{E}_+(z - ct)$ は関数とその形を保ちながら速度 c で動いていく解、第 2 項は速度 $-c$ で動いていく解を表している。

一般化することも容易であり、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_+(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt) + \mathbf{E}_-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + ckt) \quad (13.22)$$

が解となっていることは波動方程式に代入することで確かめられる。 \mathbf{k} は任意のベクトルを表す。これはベクトル \mathbf{k} の方向に進行する解を表している。

平面波と同様にして $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ を考慮すると

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{E}'_+(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt) + \mathbf{E}'_-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + ckt)) = 0 \quad (13.23)$$

となる。 \mathbf{E}'_\pm はそれぞれの引数についての微分を表す。この式は \mathbf{E}_\pm の \mathbf{k} 方向成分についての微分がそれぞれ 0 であることを示している。任意の座標について成り立つということは

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (13.24)$$

を意味する。つまり、一般に電場は横波である。問題 [13-3] を解くと磁場も得ることができて進行方向と電場と磁場が互いに直交することが言える。

さらに重要な点は、波動方程式 (Maxwell 方程式) が線形の方程式であるということである。これは解の重ねあわせが可能であることを意味している。 \mathbf{E}_1 と \mathbf{E}_2 が解であればそれらの和 $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ もまた解を

² z のみに依存するという制限は計算後に外す。

表す。このようにしていくらでもみかけの異なる解を作り出すことができる。上で示した波動方程式は k によらず成り立つから、いろいろな k について和をとった解を考えることができる。どのような重ねあわせを用いるかは初期条件・境界条件に依存する。これは問題に応じて定める必要がある。線形性は非常に重要な性質であり、これによって無数にある解を表現できる³。

波

高校物理では、波 (wave) を表す式として次のような形を用いていた。

$$\psi(x, t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \quad (13.25)$$

これは x 方向に進む波を表している。 A は波の振幅 (amplitude) T は周期 (period) λ は波長 (wave length) を表す。波の速さが

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad (13.26)$$

であることは、関数をプロットして時間とともにどう変わるかを調べるとわかる。周期は時間の次元、波長は長さの次元をもった量である。上記の波の速さは位相速度 (phase velocity) とよばれる。大学の物理では、周期より角周波数 (angular frequency) ω 、波長より波数 (wave number) k を用いて表すことが多い ($k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ とは異なるものなので注意)。それぞれ次のように定義される。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (13.27)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (13.28)$$

これらを用いると、波の式は

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx - \theta_0) \quad (13.29)$$

と書かれる。

ここまでは波は x 方向に進行するという前提で考えていた。一般に、波の向きを単位ベクトル \mathbf{n} で表すと、位相のずれ θ_0 も入れて

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \theta_0) \quad (13.30)$$

となる。波数に波の向きの情報を加えて波数ベクトル

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n} \quad (13.31)$$

を定義すると、

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \theta_0) \quad (13.32)$$

と書ける。これが本章で用いる電磁波の標準形である。その場合、電磁場はベクトルであるので ψ もベクトルになる。つまり振幅 A がベクトルで表される。その向きは k の向きとは一般に異なる。それらが直交しているとき横波、同じ方向のとき縦波という。

波を複数重ね合わせるときには速度として群速度とよばれるものが定義されることがあり、位相速度と区別される。ここでは詳しく扱わない。

³Fourier 変換の理論を学ぶとほとんどどんな関数でも波の重ねあわせで表現できてしまうことがわかる。例えば、次節で得る電磁場は全く波に見えない。

13.2 電磁場の伝搬**

運動する電荷は電磁場をつくる。ある点で電荷が動き電磁場がつくられるとその電磁場は光速で進むため、遠く離れた点に到達するには時間がかかるはずである。前章で見たように電磁場はエネルギーを担っている。このように見ると電磁場が記述の都合のためだけに導入されたものではなく物理的な実体をともなうものであるとわかるだろう。静電場の範囲ではそのような性質を理解する余地がなかったのである。

ただ、電荷が発する電磁場の伝搬の様子を簡単な計算で具体的に示すことは非常に難しい。電荷と電磁波の運動の原理は完全に理解しているはずだが、法則がわかったからといって現象が理解できるとは限らない。簡単な法則からきわめて複雑な現象が得られるというのは物理学の面白さでもある。1個の電荷が電磁波を放射しながら運動していくその様子を理解するのだけでもかなりの労力が必要となる。

ここでは一般論を展開することはやめて、知られている結果を紹介することおよび簡単な例を用いて電磁波の伝わっていく様子を見ることを行う。それによってこれまでに展開してきた電磁気の理論のしめくりとしたい⁴。さしあたって計算は追わなくてもよい。問題設定(13.2.2節の最初の部分)と結果(13.54)、(13.55)式)を見てほしい。

13.2.1 遅延ポテンシャル

時間依存性のない系において、静電磁場は電磁ポテンシャルを用いて計算される。それらは

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') \quad (13.33)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \quad (13.34)$$

のように書けることを第I部・第II部でそれぞれ見た。電場はスカラーポテンシャル ϕ の勾配、磁場はベクトルポテンシャル \mathbf{A} の回転でそれぞれ表される。

それでは時間依存のある系でこれらはどのようになるだろうか。導出を省くが次のような表現が知られている⁵。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \quad (13.35)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \quad (13.36)$$

電磁場はこれらのポテンシャルを用いて、(12.73)・(12.74)式(138ページ)のように与えられる。導出がわからなくても表式が意味するところはともわかりやすい。ある場所 \mathbf{r} でつくられる電磁場は、そこから $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ の距離だけ離れた電荷から影響を受けるが、電磁波が伝わる速さ c を考慮して $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ だけ遅れる。時間 t の電磁場は同時間ではなく過去の時間 $t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$ における電荷によって決まる。電磁波が光速 c で伝わることから理解される表現である。上の表現は遅延ポテンシャル (retarded potential) とよばれている。情報が光速を超えて伝わらないことを因果律 (causality) とよぶ。電磁気の理論は因果律を満たしている。

⁴本節の計算は標準的な内容ではないが、これがないと最後がしまらないので入れた。Feynman の言葉を借りると、“If it gets difficult in places, well, that’s life – there is no other way.” (Feynman Lectures on Physics, Volume II)

⁵Lorenz ゲージとよばれるゲージを用いた場合である。

13.2.2 直線電流

上で得た表現の導出や一般的性質を議論することは本講義のレベルを超えてしまう。そこでここではなるべく簡単な例を用いて電磁波が遅れて伝わる様子を見てみることにする⁶

考える系は直線電流の系である。 z 軸に沿って導線をおき、電流を生じさせる。はじめ電流はゼロであり電荷はとまっている。このとき空間中には電荷も電磁場も存在しない。時刻 $t = 0$ で定常電流 I を生じさせる。十分時間がたてば第 8 章で考察したように軸からの距離に反比例した静磁場が得られるが (電場は 0)、有限の時間では異なるふるまいが得られる。どのような電磁場が生じるかを調べるのがこの目的である。

直線電流の系なので電磁場は z 軸まわりの回転に対して不変である。円柱座標系 ρ, φ, z を用いるのが便利であり、次のように電磁場を書く。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_\rho(\rho, t)\mathbf{e}_\rho + E_\varphi(\rho, t)\mathbf{e}_\varphi + E_z(\rho, t)\mathbf{e}_z \quad (13.37)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B_\rho(\rho, t)\mathbf{e}_\rho + B_\varphi(\rho, t)\mathbf{e}_\varphi + B_z(\rho, t)\mathbf{e}_z \quad (13.38)$$

円柱座標は

$$x = \rho \cos \varphi \quad (13.39)$$

$$y = \rho \sin \varphi \quad (13.40)$$

と定義され、三つの基底ベクトルは

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13.41)$$

と書くことができる。電磁場の各成分は z 軸からの距離 ρ の関数を用いて表される。

定常電流がはじめからある系の場合、電磁場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (13.42)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\varphi \quad (13.43)$$

のようになる。定常電流があっても電荷密度は 0 であることに注意してほしい。これは第 7 章で議論した。したがって、生じるのは静磁場のみである。

時間 $t = 0$ で定常電流を生じさせる。この場合も電荷密度はいたるところで常に 0 であるので電場も磁場も発散は 0 である。 z 軸を中心にした薄い円盤領域を考えて Gauss の法則を用いることで電場と磁場の ρ 成分は 0 であることが示される。

$$E_\rho = 0 \quad (13.44)$$

$$B_\rho = 0 \quad (13.45)$$

これで Maxwell 方程式の第 1・3 式が満たされる。

残りの成分を決めるためにベクトルポテンシャルを考える。一般にベクトルポテンシャルは (13.36) 式で与えられる。動き出した電流が軸から距離 ρ だけ離れたところに電磁場をつくるには時間がかかる。図 13.1 のような領域からの寄与がベクトルポテンシャルに寄与するはずである。その長さ ℓ は

$$\frac{\ell}{2} = \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2} \quad (13.46)$$

⁶前節の遅延ポテンシャルの結果を用いるが、それを知らなくても (13.47) 式を認めてもらえればあとは特に難しい計算はない。式 (13.47) は直観的な説明が可能である。

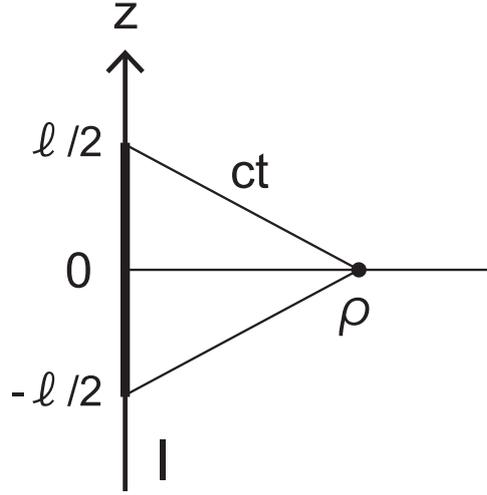


図 13.1: z 軸に電流がある。時間 t で点の位置の電磁場は $-\frac{\ell}{2} < z < \frac{\ell}{2}$ の部分の導線からの寄与で決まる。

より決まる。このことを考慮すると

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{|z-z'| < \frac{\ell}{2}} dz' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{e}_z \quad (13.47)$$

と書くことができる。積分計算は次のように行われる。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{|z-z'| < \frac{\ell}{2}} dz' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{e}_z \quad (13.48a)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{|z-z'| < \frac{\ell}{2}} dz' \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} \mathbf{e}_z \quad (13.48b)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz' \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \mathbf{e}_z \quad (13.48c)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[-\ln \left(\sqrt{\rho^2 + z'^2} - z' \right) \right]_{-\ell/2}^{\ell/2} \mathbf{e}_z \quad (13.48d)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{\sqrt{\rho^2 + (\frac{\ell}{2})^2} + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{\rho^2 + (\frac{\ell}{2})^2} - \frac{\ell}{2}} \right) \mathbf{e}_z \quad (13.48e)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{ct - \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right) \mathbf{e}_z \quad (13.48f)$$

この結果を用いると、電磁場は次のようになる。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (13.49a)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.49b)$$

$$= -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi \quad (13.49c)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \mathbf{e}_\varphi \quad (13.49d)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \mathbf{e}_z \quad (13.50)$$

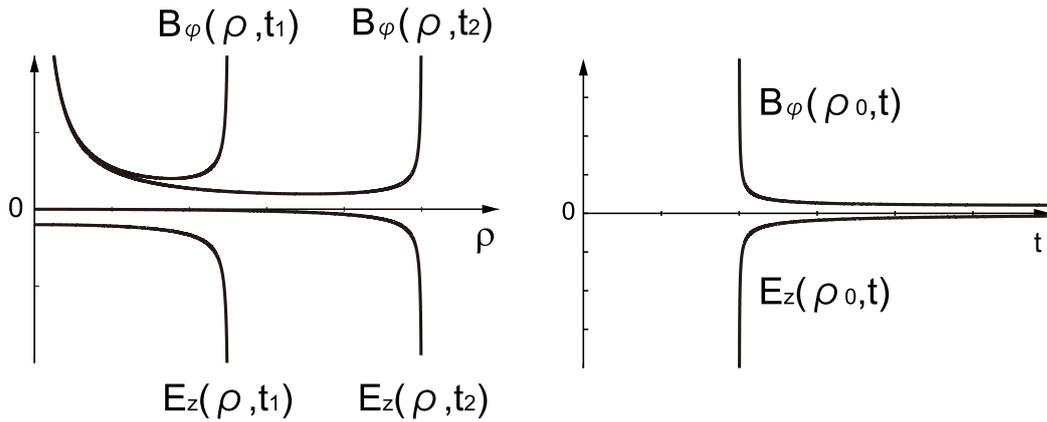


図 13.2: 式 (13.54)、(13.55) の電磁場。(左): $t = t_1, t_2$ のとき ($t_1 < t_2$)、 ρ の関数としてのふるまい。(右): $\rho = \rho_0$ のとき、 t の関数としてのふるまい。いずれも $\rho = ct$ で発散する。

これらは Maxwell 方程式の第 2 式を満たしている⁷。

Maxwell 方程式の第 4 式を満たしているかどうか確認しよう。電流密度が入った表式であるため、積分形を用いる⁸。 z 軸を中心軸にした半径 ρ の円を領域 S としてとると

$$\oint_{C=\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 I \quad (13.51)$$

が成り立つ。C は領域 S の境界、つまり半径 ρ の円を表す。左辺の各項を計算すると

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 2\pi\rho B_\varphi(\rho, t) = \mu_0 I \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}} \quad (13.52)$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_0^\rho 2\pi\rho' d\rho' E_z(\rho', t) \quad (13.53a)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2c} \frac{d}{dt} \int_0^{\rho^2} \frac{d\rho'^2}{\sqrt{c^2t^2 - \rho'^2}} \quad (13.53b)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2c} \frac{d}{dt} (2ct - 2\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}) \quad (13.53c)$$

$$= \mu_0 I \left(1 - \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}} \right) \quad (13.53d)$$

となる。代入すると確かに Maxwell 方程式の第 4 式が成り立っていることがわかる。

以上より電磁場は次のようになる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}} \mathbf{e}_z \quad (13.54)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}} \mathbf{e}_\varphi \quad (13.55)$$

得られた電磁場の ρ 依存性を図 13.2 に示す。電磁場は $\rho < ct$ の領域で有限の値をもち、 $\rho = ct$ で発散している。時間を大きくすると電場は 0、磁場は (13.43) 式に近づいていく。無限大の電磁場が生じるのは突然電流を生じさせたことによる効果である。

Poynting ベクトルを計算すると

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2} \frac{c^2 t}{\rho(c^2t^2 - \rho^2)} \mathbf{e}_\rho \quad (13.56)$$

⁷電磁場を電磁ポテンシャルで書くことによって Maxwell 方程式の第 2・3 式が自動的に満たされることを前章で述べた。

⁸単純に第 4 式の左辺を考えると 0 になるが、これは $z = 0$ の特異性を考慮にいれていない。第 5.6 節 (65 ページ) で考えたような正則化を用いると正しい結果を得る。以下で行うように積分形を考えてもよい。

となる。軸から電磁場が拡散していくが、静電磁場に達するにつれて減衰していく様子がみてとれる。

13.3 まとめと考察

本章では Maxwell 方程式を用いて電磁場の波としての性質を調べた。

- 波動としての電磁場
- 波動方程式の一般的性質
- 電磁場の伝搬

電磁場が有限の速度で伝わる横波であることを理解することが目的である。

運動方程式としての Maxwell 方程式

Maxwell 方程式は電磁場の変動規則を規定する方程式である。電荷・電流があるときには電磁場が生じて変動する。電場が変化している空間では磁場が存在しているし、逆もまた成り立つ。電磁場があれば対応する電荷や電流を求めることもできる。Maxwell 方程式は変動が電磁場や電荷・電流の間でどのように連動するかを表す式であると言える。そのため、たとえば変位電流が磁場の源であるという見方は正しいものではない。Maxwell 方程式は、さまざまな量が関連しあっているということを表しているに過ぎない。

電荷があれば電磁場が生じ、電磁場があれば電荷は Lorentz 力によって運動する。その運動形態はあまりにも複雑である。点電荷をひとつ適当な初速度で打ち出したとしてそれが電磁場も含めてどのような運動を行うかはとてつもなく難しい問題である。序章でも述べたように、基本となる法則は単純でも実際に得られる運動は多彩で複雑である。

電磁波の伝搬

電磁波は有限速度で伝わる。これは物体間の力が一瞬で無限遠方にまで伝わるものなのかという疑問に答えている。Newton 力学の問題や、静電磁場の問題では、重力や電磁場の影響が完全に全ての空間に行き渡ったときの状況を考えている。波動方程式の解はすでに全空間にひろがっていると解なので、そのような伝搬の様子をみることができない。そのため、やや難しい計算であるが、13.2 節の例を扱った。結果を見ると電磁場が有限速度で伝わっていく様子が観察できる。

有限の速度で情報が伝わることを一般に因果律という。物理学では特に、光の速度を超えて情報が伝わることはないことをいう。光の速度の絶対性は Einstein の相対性理論によって確立した。電磁気学の理論ができたときにはまだ知られていなかったが、電磁気学が相対性理論と矛盾するどころか相対性理論の要求にかなった体系であったことは面白い。

なお、12.1.2 節 (130 ページ) でも、類似の系を扱っている。この系でも原点に電荷が生じる系を考えている。このような場合、やはり電磁場は有限の速度で伝わっているはずであるが、結果がそうなっているようには見えない。特に、(12.15) 式 (130 ページ) の電場は Gauss の法則を適用することで得られているが、これは原点の電荷が遠方にまで一瞬で伝わるように思える。そもそも、Gauss の法則は時間に依存する電場および電荷密度にまでそのままの形で拡張されたが、これは因果律に反しているようにも見える。

結論だけ言うと、これは因果律に反するわけではない。それを理解するにはもう少し詳しい議論が必要である。

13.4 問題

[13-1] 電磁波のエネルギー密度と Poynting ベクトル

13.1.1 節の平面波解について、前章で導いた電磁場のエネルギー密度と Poynting ベクトルを計算せよ。それらはどのような特徴をもつか。また、 $k^2 < 0$ のときの解に物理的意味がないことを議論せよ。

[13-2] 波の重ねあわせ

式 (13.18) の電場が (13.32) 式の形の波の重ねあわせで書けることを示せ。

[13-3] 磁場の計算

電場が (13.22) 式で与えられるとき、磁場を求め、それが k および電場と直交することを示せ。

[13-4] 動径方向に進行する解

電場が動径変数 $r = |\mathbf{r}|$ と t にのみ依存する関数であるとして波動方程式を調べる。 $rE(r, t)$ が満たすべき微分方程式を書き下し、一般解を求めよ。ラプラシアン ∇^2 が動径変数 r のみの関数に作用するとき、次のように置きかえられることを用いる。

$$\nabla^2 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (13-4.1)$$

[13-5] 運動する電荷がつくる電磁場

電荷密度が $\rho(\mathbf{r}, t)$ 、電流密度が $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ の系について、電磁場が静電磁場と同じ形で与えられるとしてみる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = k \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (13-5.1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = k_m \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (13-5.2)$$

これらの表式が Maxwell 方程式を満たしているか調べよ。

第14章 おわりに

14.1 やったこと・やり残したこと

電磁気学の法則をひと通り見てきた。教養の物理といえども本質的なことはほとんど全て扱っている。できるだけごまかしのないように論理の道筋を示してきたつもりである。ただ、どうしても技術的な面において深入りすることを避けざるをえないところはいくつかあった。重要なのは、今の知識の範囲で理解できる部分とできない部分を区別することである。原理的に理解できない部分をごまかして教えられてもあまり意味はない¹。

ベクトル解析

本質的な部分は簡単な数学で理解できる。ベクトル解析と微分・積分の知識があれば事足りるのは、ここまで読んでくればいやでも理解できたはずである。たびたび書いているが、ベクトル解析は電磁気学の理解に欠かせないし、ベクトル解析を電磁気学に用いることで発散や回転などの操作のイメージをつかむことができるようになる。電磁気学を理解することとベクトル解析を理解することはほとんど同義であるという気すらしてくる²。ベクトル解析の知識はその実体を問わず用いることができるので、他の場合にもそのまま応用できるという利点もある。たとえば、電場の湧き出し・吸い込み・渦に関する法則は磁場にも用いることができたし、電荷保存を表す連続の方程式はエネルギーの保存を示すためにも用いられた。

微分・積分

力学でもそうだったが、物理学の理論には微分・積分の知識は欠かせない。電磁気学の理論でもご多分にもれずいろいろな形で用いられる。実のところ、そこでやり残したことが多い。

Poisson 方程式については系統的な手法を用いて解を詳しく調べることができる。一般解の求め方や解の一意性の問題など扱うべき内容は多い。そこまではじめて Coulomb の法則が静電場の基本法則から得られることを実感できるだろう。本講義ではその点が十分ではない。さらに、デルタ関数や Fourier 変換の理論まで扱えるようになるといういろいろなことが理解できるようになってくる。

Maxwell 方程式の解析もまだまだやるべきことはある。波動方程式の取り扱い、波動一般にも用いられる手法であるので別の機会に行うかもしれない。これらもまた偏微分方程式の解析や Fourier 変換の理論を用いて理解される。

法則の書き方には微分形と積分形があるが、本講義前半では積分形を中心に扱った。それは直観的な理解がしやすいということと、実際に電磁場を求める際に役立つからである。微分方程式を解くことでもできるが、それには上で述べたように技術的な知識が必要となる。ただ、後半にいくにつれわかってくるが、形式的な議論を行うときは微分形を用いる方が圧倒的に簡単である。序章で述べたように、微分方程式を用いることで普遍的な法則を無駄なく記述することができる。具体的な問題を調べるときは、初期条件や

¹従来の教養向けの教科書のいくつかはその点に不満がある。わかって当然のような書き方にごまかされたい。本講義ノートでも論理や計算を省いた部分があるが、その点は今後改善していきたい。

²物理専攻者（他も？）の多くはベクトル解析とくくと電磁気学を思い浮かべるはずである。

境界条件など個々の状況に応じた情報を組み込んで解を求める。前章でも簡単な例をいくつか見たが、解にはいろいろなものがある。それらの全てが Maxwell 方程式を満たすというのはあらためて考えるととても驚くべきことである。

数学の有効性

そしてまた、全ての電磁気学の法則が方程式を用いて数学的に精密に表現できるということを学べたのは大きな収穫である。ここに高校物理との大きな違いがある。一見同じ法則でも理解の深さがまるで違う。表面的・公式的な理解の仕方ではなく、第一原理に基づいて法則を理解する。そうすると高校で扱ったさまざまな法則が有機的に絡み合っていることがわかってくる。それを理解できることが大学物理の醍醐味である。

物理学者の E. P. Wigner は、「The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences」（自然科学における数学の理不尽な有効性）という言葉を残している。古典物理学の成功に味をしめた物理学者はこの後、量子物理学の建設でもさまざまな数学を駆使して進んでいく。それについては以下で少し述べるが、その流れは現在にまで続いている。

本講義は議論にやや深みを欠く点があるので、たとえば前章最後に述べたような疑問点が生じたとき、それが理論の不備にあるのか、(個人的な) 数学的知識の欠如からくるものなのか判断できないところがある。よくわからないけど教科書に書いてあるから、というのは科学の姿勢としては正しいものではない。結局のところ、電磁気学を自由に使えるようになるまでは問題に応じて知識および技術を深めるしかない。本講義はあくまでもその導入である。

そしてこれは現実の難しさでもあるのだが、多くの問題は純粋に電磁気学だけを用いて理解できるものではない。たとえば Ohm の法則のところでも述べたように、Maxwell 方程式から Ohm の法則を導くことはできない。電磁気学とは異なる法則が必要になる。

14.2 電磁気学の応用

電磁気学の応用範囲は非常に多彩である。物理学では固体物理学に用いられることが多い。物質中の電磁気学は誘電体・磁性体の問題などを扱う。こういった問題では、第 6 章で扱ったような導体が現実的にどのようなものか考えなおす必要がある。本講義では理想化された物体としての導体を考えたが、もちろん現実的にそのような導体があるわけではない。電荷が必ずしも自由に動けない場合、どのような扱いが必要となるか、そもそも自由に動けないのはなぜかを考える必要がある。

そのような問題は電磁気学の範疇で理解できない。原子・分子からできている物質がどのような構造をもっているかに強く依存する。それは古典物理学で理解できるものではなく、量子力学が必要となる。そのような系において、たとえば電気伝導の問題を考えることは物性物理学の主要な問題のひとつである。物質の構造によってさまざまな影響を受け、同時に電荷同士でも相互作用がある場合の電気伝導の問題を理解することは基本法則を理解することとは質的に異なる問題であり、とてつもなく難しい。簡単な場合には Ohm の法則が成り立つが、あくまでもそれは限定的かつ理想的な状況においてのみ正しい。

他にもさまざまな応用がある。力学や相対論、量子力学、熱力学、統計力学といったものと組み合わせることにより実に多様な現象や法則が生み出される。

そういった外部の要因による現象でも適当な物理量に落としこんで電磁気学の範囲で記述することはある程度可能である。抵抗がどのように決まるのかわからなくても抵抗のある系を電磁気学で記述することはできる。それは全ての物理学の理解の仕方でもある³。分野によっては今後いろいろな形で電磁気学を用いることがあるはずである。どの範囲までが電磁気学で理解できるものなのか把握していくと理解の助けになるだろう。問題を要素毎に切り分けて理解していくというのが科学の方法であるが、いろいろな要素が複合的に絡み合う問題では総合的な視点ももつことも課題となる。

14.3 電磁気学の理論の発展

電磁気学の理論の先に何があるのかについて概観する。

14.3.1 相対性理論

電磁気学の体系は相対性理論の観点から捉えられる。相対性理論、正確に言うと特殊相対性理論は、相対性を原理に据えた理論体系であり、いくつかの基本的な仮定から驚くべき結論が導かれる。

相対論の基本的な仮定には光速の不変性が含まれるが、光を扱う電磁気学はその影響を受けることは避けられない。ところが、相対論的效果によって修正される Newton 力学と違って、電磁気学は一切の変更を受けず不変であることがわかったのである。相対性のことなどあまり考えずにつくった理論が相対性理論と矛盾するものでなかったことは非常に面白い⁴。したがって、電磁気学の理論がこれ以上変更されることはない。相対論的形式と矛盾しないことを確かめる必要はあるが、それは形式論である。物理学を専門にするひとであれば知る必要があるが、他で相対論に関わらないひとは知らなくても困ることはほとんどないだろう⁵。

それでも一見して矛盾としか考えられない問題は多い。たとえば、定常電流のそばで運動する電荷の問題を考える。電荷は磁場による Lorentz 力を受けて運動する。電荷とともに運動する座標系では電荷は止まって見えるから磁場による Lorentz 力は働かないはずである。これをどのように相対性理論の観点から理解するかは面白い問題である。

本講義では、Coulomb の法則、Ampère の法則、Faraday の法則という三つの法則をよりどころとして議論を行ってきた。どれを欠いても基本法則をつくりあげることにはできない。ところが、相対論を受け入れると Coulomb の法則によって静電場を導入すれば他は自動的に導かれるのである。といってもそれは形式的な理論に過ぎないから、その物理的な意味を見出すには結局本講義ノートで考えたような議論が必要となる。それでも、静的ではないが完全に動的とも言えない非常に中途半端な状況で導入された磁場の存在意義について一定の見方を提供してくれるなど、得るものはある。

14.3.2 波と粒子の二重性

電磁場は光であり、波としての性質を示す。光が波であることは日常的に実感できる。

光が波であるか粒子であるかという議論は古くから論争になってきている。17 世紀末、C. Huygens は光は波であることを回折などの現象から主張した⁶。ところが、その後出版された Newton の「光学」(1704 年)では光は粒子であると主張されている。これらは電磁気学の体系ができる前のことである。

³たとえば k がどう決まるかは最後までわからなかった。これを決める理論が存在するはずであるがそれはまた別の問題である。

⁴ただし、電磁誘導のところで相対性をもちだして考察している。

⁵もちろん、役に立つ立たないで科学をやるわけではないので、純粋な興味があればぜひ学んでほしい。

⁶ホイヘンスの原理。

19世紀になって電磁気学の理論が理解されるようになるにつれ、光の粒子説はほとんど忘れ去られようとしていた。ところがはなしはそれで終わらなかったのである。

光が波である場合、媒質となる「エーテル」とはどんなものかということが問題となった。ところが結局のところ、エーテルなんてものは存在しなかったのである。これは Einstein の相対性理論と強く関係がある。そして Einstein は相対性理論とは別に、光電効果という現象を説明するために、光量子仮説というものを提唱した。これはある意味、光が粒子であることを示している。

19世紀末から20世紀はじめは古典物理学がほぼ完成し、物理学は終わりであるともみなされていた時期であったが、ミクロの世界の法則を調べられるようになるにつれて古典物理学ではどうしても説明のできない現象も報告されるようになってきていた。

そして、20世紀のはじめ量子物理学の登場により、物理学の世界は一変することになる。現在、われわれは光は波であり粒子でもあるという、にわかには信じがたい結論を確信している。

14.3.3 場の理論

電磁気学は場の理論である。粒子がどこにあるかということではなく、全ての任意の時空点に電磁場が定義されている。それは力学の記述の仕方とは全く違う。荷電粒子の運動を記述するときには力学の法則も必要となる。記述方法が異なる理論を同時に扱うことは難しい。これをどのように解決すべきかが問題となる。電磁場の理論の記述方法はとても魅力的であり、力学にもその理論を適用したいところであるが、そうはいつでも Newton 力学の記述もまた完成度の高い方法である。

この問題の解決はそう簡単ではなく、先は長い。まずは力学を「普遍性」のある形式で記述する解析力学の理論の確立、電磁気学の理論の解析力学的記述がまず必要である。そこではゲージポテンシャルの導入が欠かせない。

そして量子力学である。力学の記述法は量子力学によって根本的に変えられてしまう。量子力学は波動力学とよばれることもあるように、粒子などの状態を波として記述する。そして、波の性質に加えて粒子性を記述するためには、場の量子論が必要となる。それによって波と粒子の二重性を記述することがようやく可能になる。光に限らず、電子などの電荷もまた粒子であり波でもあるという性質を示す。

場の量子論では粒子の生成・消滅過程だけでなく波としての干渉効果も記述できる。電荷と電磁場の量子論は量子電磁力学とよばれている。量子電磁力学は現在人類が手にしている最も精密な理論の一つである。

通常の課程では全てを理解するには大学院まで行く必要がある。先は長いのだが、各論はそれぞれのレベルで閉じた体系であるので、段階的に理解していくことができる。急がないで楽しんでもらえればと思う。

付録A 試験問題(1)

問1.

$x = a$ 、 $y = 0$ の直線に線密度 λ の電荷、 $x = -a$ 、 $y = 0$ に線密度 $-\lambda$ の電荷がそれぞれ一様に分布している系を考える。

[1-1] 電場 $E(r)$ および電位 $\phi(r)$ を求めよ。

[1-2] xy 平面において各電気力線の満たす方程式を

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

各等電位曲線を

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

と書く。このとき、関数 f および g を求めよ。また、電気力線を xy 平面において図示せよ。

問2.

2枚の平面導体を $z = a/2$ と $z = -a/2$ にそれぞれ置きコンデンサーをつくる。それぞれの平面に蓄えられる電荷面密度を σ 、 $-\sigma$ とする。平面は十分大きいとして端の効果は考えないとする。

[2-1] 電場 $E(r)$ を求めよ。

[2-2] 二つの導体が受ける単位面積あたりの力をそれぞれ求めよ。

[2-3] 原点を中心として半径 b の導体球をおく。 $2b < a$ とする。また、導体球は電荷をもたない。平面導体間の電位 $\phi(r)$ がどのような関数形をもつか考察せよ。ただし、導体球は平面の電荷分布に影響を与えないとする。微分方程式を解かないでわかる範囲でとりうる関数形を定めよ。

[2-4] 前問のとき、導体球表面に誘起される電荷面密度の大きさおよび全電荷を、前問で定めた関数を用いて表せ。

[2-5] [2-3] で導体球は平面の電荷分布に影響を与えないと仮定したが、正しいか。正しくない場合、どのようなになると考えられるか。

問3.

z 軸上に置いた無限に長い導線に定常電流 I を流す。この系に質量 m 、電荷 q の荷電粒子を入射する。荷電粒子の運動方程式をたて、初期条件に応じてどのような運動をするか調べよ。平面内に限られる運動を詳しく考え、一般の場合は簡単に議論せよ。

付録B 試験問題(2)

問1.

電荷密度 $\rho(r)$ が時間によらない静電場 $E(r)$ の系を考える。

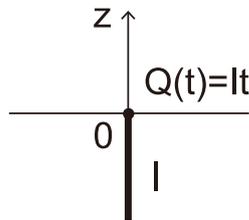
[1-1] 電荷密度の関数形が次のように与えられるとき、それぞれ電場の取りうる関数形をできるだけ詳しく定めよ。ただし、計算を行ってはならない。結果とともにどのようにしてその結果を得たかも書くこと。

- (a). 動径変数 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ のみによる: $\rho = \rho(r)$
- (b). z によらない: $\rho = \rho(x, y)$
- (c). 円柱座標の動径変数 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ のみによる: $\rho = \rho(r)$
- (d). xy 平面に電荷が分布。面密度は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ のみによる: $\sigma = \sigma(r)$

[1-2] 原点を中心とする半径 a の球内部に電荷が一様に分布している系について、電場 $E(r)$ を求めよ。全電荷量を Q とする。球面に分布している場合との違いは何か。

問2.

$z < 0$ に定常電流 I が流れ、原点に電荷 $Q(t) = It$ がたまっていく系を考える(下図)。この系の電磁場を求めよ。



問3.

以下の各項目についてそれぞれ議論せよ。[3-1] 以外は結論だけでなくなぜそのような結論に至ったかについて要点を簡潔にまとめよ。

- [3-1] Maxwell 方程式の各式はそれぞれ電磁場のどのような性質を表すか。
- [3-2] Gauss の法則は Coulomb の法則と等価か。
- [3-3] 磁場の源は電流として定式化されたが、磁荷ではだめなのか。
- [3-4] 電荷が非等速度運動している時間依存系に静電磁場の法則を適用することはできないのはなぜか。
- [3-5] 電磁場は計算に都合よく定義されたものなのか物理的に実在するものなのか。

付録C 試験問題(3)

問1.

xy 平面、原点を中心とする半径 a の円の内部領域 ($x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = 0$) に電荷が一様分布している系を考える。全電荷量を Q としたとき、以下の問いに答えよ。

[1-1] 計算を行わないで電場 $E(r)$ のとりうる関数形をできるだけ詳しく定めよ。

[1-2] z 軸上の任意の点における電場を求めよ。

[1-3] [1-2] の電場を適当に図示せよ (関数形をグラフで表す。縦軸、横軸は適切と考えられるものをとる)。

問2.

原点を中心に、半径 R_0 の導体球がある。導体球に正の電荷 Q を与える。導体内で電荷は分裂して自由に動くことができる。このとき、以下の問いに答えよ。

[2-1] 電場 $E(r)$ を求めよ。

[2-2] 導体球を内半径 R_1 、外半径 R_2 の導体球殻で覆う ($R_0 < R_1 < R_2$)。球殻の中心は球の中心と同じ (原点) である。導体球殻に負の電荷 $-Q'$ を与えたとき、それぞれの導体内において電荷分布はどのようになるか。 $Q < Q'$ とする。

[2-3] [2-2] のとき、任意の点において電場を求め、電気力線の様子を図示せよ。

[2-4] [2-2] のとき、電位 $\phi(r)$ を求め、図示せよ (関数形をグラフで表す。縦軸、横軸は適切と考えられるものをとる)。電位は無限遠点で 0 になるとする。

問3.

[3-1] 電場が

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

と書けるとき、次の式を示せ。 C は任意の閉曲線を表す。

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

[3-2] 以下の文章はそれぞれ正しいか。正しくなければ訂正し、反例を挙げよ。

(a). 電荷分布が与えられたとき、Gauss の法則のみを用いて電場を (原理的には) 計算できる。

(b). 万有引力も Gauss および渦なしの法則の形で表現することができる。

(c). 電場のある系を考える。このとき、正の電荷をもつ粒子は電場の電気力線に沿って運動する。考えている粒子の電荷量の大きさは非常に小さく電場に影響を与えないとする。

(d). ある有限領域以外の電場は完全にわかっていると。このとき、その有限領域の電荷分布を知ることができる。

付録D 試験問題(4)

問1.

無限に長い直線導線に定常電流 I が流れている系を考える。電流が z 軸上正方向に流れるように座標系をとる。

[1-1] 磁場を円柱座標 (ρ, φ, z) を用いて $B(\mathbf{r}) = B_\rho(\mathbf{r})\mathbf{e}_\rho + B_\varphi(\mathbf{r})\mathbf{e}_\varphi + B_z(\mathbf{r})\mathbf{e}_z$ と表す。 $\mathbf{e}_{\rho, \varphi, z}$ は基底ベクトルを表す。裏面の Maxwell 方程式から導かれる静磁場の法則を用いて次の性質をそれぞれ示せ。

(a). B_ρ, B_φ, B_z は ρ のみの関数 (b). $B_\rho = 0$ (c). $B_z = \text{const.}$

[1-2] Ampère の法則を用いて磁場を求めよ。ただし、 $B_z = 0$ とする。

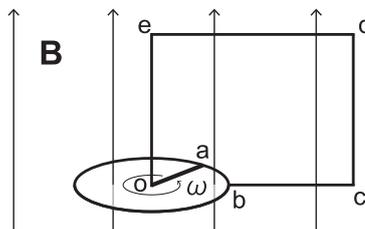
[1-3] 新たな直線導線を元のものと同じ向きに電流を生じさせる。このとき導線間にどのような力が働くか。答えを表すのに必要な量があれば自身で記号を定義して答えよ。

問2.

図のように一様定磁場中で導体棒 oa の一端 o を固定して一定の角速度 ω で回転させると回路 $oabcdeo$ に電流が生じる。導体棒以外は静止しているとする。磁場 B の方向は、 oa がつくる円を直交して貫き、 $ocde$ の面に沿っている。 oa の長さを a とする。

[2-1] 回路を貫く磁束 $\Phi(t) = \int_{S(t)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ を計算せよ。 $S(t)$ は回路がつくる経路を境界にもつ面を表す。

[2-2] $bcdeo$ の導線が抵抗 R の Ohm の法則を満たすとき、回路に生じる電流を求めよ。 oa, ab 部分の抵抗は無視する。



問3.

[3-1] 以下の方程式は、用いられている場の量(関数)がどのような性質をもつことを意味しているか。それぞれについてなるべく詳しく述べよ。単語だけで終わらせないで文章で書くこと。具体的に何の物理量を表しているかを問うているわけではないし、微分方程式を解けというわけでもないことに注意。

(a). $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ (b). $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$
 (c). $\frac{\partial}{\partial t} C(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0$ (d). $\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$

[3-2] 以下のような一様定電磁場 E, B 中で質量と電荷をもつ粒子はそれぞれどのような運動をするか定性的に述べよ。計算はしなくてよい。電磁場によるもの以外の力は働かないとする。また、電荷がつくる電磁場は無視してよい。

(a). $B = 0$, 初速度は 0 (b). $E = 0$, 初速度は磁場に直交 (c). $E \perp B$, 初速度は 0

[3-3] 以下の文章はそれぞれ正しいか。正しくなければ訂正するか反例を挙げよ。

- (a). 定常電流があると Ampère の法則によって磁場が生じ、Maxwell 方程式の第 4 式(裏面の M4 式)にしたがって電場が生じる。
 (b). Ohm の法則を Maxwell 方程式から導くことはできない。
 (c). 導線中の電流は電荷(電子)が光速で動くことによって伝わる。

付録E 試験問題(5)

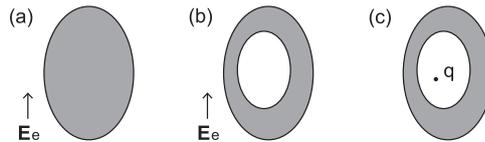
問1.

半径 a の無限に長い円筒表面上に一様に分布した電荷がつくる電場 $E(r)$ を求めよ。電荷面密度を σ とする。必要な設定や導出を省略せず最大限丁寧に記述すること。

問2.

球状（正確に球とは限らない）の導体がある。全電荷量はゼロである。次のそれぞれの場合に、電気力線と電荷分布の様子を図に描き、なぜそのようになるのか説明せよ。下にある図は断面図を表す。

- (a). 外部から定電場 E_0 をかけたとき。
- (b). 導体内部をくりぬいて空洞にする。空洞は導体によって完全に囲まれていることに注意（ドーナツ形ではない）。定電場はかけたまま。
- (c). 外部電場を切り、空洞内に点電荷 $q (> 0)$ を固定して置く。



問3.

Gauss の法則がどのように証明されるか概要を述べよ。何を示すべきでそれを示すために何をどのようにするか説明する。詳細の計算を行う必要はない。

問4.

電荷分布 $\rho(r)$ が次の対称性をもつと言ったとき、それぞれ $\rho(r)$ がどのような関数であることを意味しているか（それぞれ独立に考える）。

- (a). 原点を通る任意の軸に対する任意の角度の回転について対称
- (b). z 軸方向について並進対称
- (c). xy 平面について反転対称

問5.

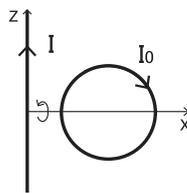
図のようなベクトル場 ($z = z_0 = \text{const.}$ の面（紙面）に沿って切ったとき z_0 の値によらず、向き y （上）方向、大きさは y によらない）について、流束（発散）や渦（回転）が有限になりうるか常にゼロであるかそれぞれ調べよ。



付録F 試験問題(6)

問1.

直線導線上の定常電流 I 、円形導線上の定常電流 I_0 を下図のように配置する。円導線は軸まわりに自由に回転することができる。直線導線は z 軸上に固定、電流は正の方向である。円導線は図の位置で $(x-x_0)^2+z^2=a^2$ ($0 < a < x_0$), $y=0$ 、電流は時計まわり、導線は x 軸まわりに回転する。 I_0 は十分小さく、直線電流に影響を与えないとする。



- 直線電流のつくる静磁場 $B(r)$ を Biot-Savart の法則（裏面参照）より導け。
- (a) の磁場について、磁力線の様子を図示せよ。
- 円電流が図の位置にあるとき、(a) の磁場が円電流の各部に及ぼす力のだいたいの様子（向きおよび大きさ）を図示せよ。大きさは定性的でよいが相対的な違いがわかるようにすること。
- 円電流を図の位置から 90 度・ 180 度・ 270 度回転したときのそれぞれの場合に、(c) と同様の問いに答えよ。
- 系を放置して十分時間がたったとき、円電流はどの位置に落ち着くと考えられるか。

問2.

(a). 次の法則や現象は Maxwell 方程式（4 つ。裏面参照）のどの式と関わっているか。下のように表にして直接関わっているものに、直接関係ないものに \times をつけよ。はひとつとは限らないことに注意。がひとつでない場合、その理由を簡単に述べよ。

	M1	M2	M3	M4
1. Coulomb の法則（電場）				
2. Gauss の法則（電場）				
3. Ohm の法則				
4. 磁荷がないこと				
5. 連続の方程式（電荷）				
6. 電磁誘導の法則				

- 電荷が存在しないとき、電場と磁場がそれぞれ満たす波動方程式を Maxwell 方程式から導け。また、波の速度はどのように表されるか。
- 次の問題についてそれぞれ考察せよ。
 - 電磁気学は「場の理論」であるといわれる。場とは何か。どのような特徴や意義があるか。
 - 磁場の定義について、磁石や磁荷ではなく電流を用いる理由、およびその意義。磁石や磁荷ではダメなのか。

索引

- Ampère, 95
Ampère の法則, 108
Ampère 力, 95
Arago, 95
- Biot, 95
Biot-Savart の法則, 98
- Cavendish, 77
Coulomb, 18
Coulomb の法則, 17, 71, 77
Coulomb 力, 17, 40
- Dirac, 66
- Faraday, 125
Faraday の法則, 125
Feynman, 2
Fizeau, 134
Fleming, 102
- Gauss, 46
Gauss の定理, 46, 86
Gauss の法則, 38, 44, 48, 107
Gilbert, 17
Grassmann, 97, 103
Green の定理, 65
- Hankel, 61
Henry, 125
Huygens, 155
- Kepler, 4
Kirchhoff, 88
Kirchhoff の法則, 93
Kohlrausch, 134
Kronecker のデルタ, 30
- Laplace, 19
Laplace 方程式, 64
- Larmor 周波数, 102
Lenz, 125
Lorentz, 100
Lorentz 力, 100, 123
Lorenz, 138
Lorenz ゲージ, 138, 147
- Maxwell, 134
Maxwell 方程式, 6, 132, 143
Mayer, 95
Michell, 95
MKSA 単位系, 96
- Neumann, 125
Newton, 3
Newton 方程式, 5
- Ohm, 88
Ohm の法則, 88, 123
Ørsted, 95
Ostrogradsky, 46
- Poisson, 64
Poisson 方程式, 64
Poynting, 136
Poynting ベクトル, 136
Priestley, 77
- Savart, 95
Stokes, 61
Stokes の定理, 61, 62
- Thomson, 61
van Musschenbroek, 74
von Kleist, 74
- Weber, 134
Wigner, 154
アンペア, 96

位相速度, 146
 因果律, 147, 151
 ウェーバー, 106
 渦なしの法則, 61
 運動方程式, 17
 エネルギー, 53, 135
 エネルギー保存則, 135
 円柱座標, 35

 外積, 45, 47
 回転, 45, 61
 角周波数, 146
 重ねあわせの原理, 15, 19
 慣性質量, 13
 起電力, 89, 123
 鏡像法, 73
 極座標, 29
 クーロン, 18, 96
 ゲージ固定, 111
 ゲージ不変性, 111, 138
 ゲージ変換, 111
 勾配, 45, 56
 古典物理学, 1
 コンデンサー, 74, 137

 作用・反作用の法則, 15
 磁位, 116
 磁荷, 116
 磁気双極子, 115
 磁気双極子モーメント, 115
 磁気に関する Coulomb の法則, 116
 磁気モーメント, 117
 次元, 14
 仕事, 53
 磁石, 114, 117
 磁束, 106, 124
 質点, 15
 質量, 13
 磁場, 97
 周期, 146
 重力質量, 13
 重力定数, 13
 磁力線, 106

 振幅, 146
 スカラー, 16
 スカラー積, 46
 スカラーポテンシャル, 109, 137, 147
 ステラジアン, 39
 スピン, 118
 静磁場, 97
 静磁場の法則, 108
 正則化, 66
 静電遮蔽, 72
 静電場, 33
 静電場の法則, 63
 静電ポテンシャル, 54
 静電誘導, 70
 接地, 72
 漸近形, 76
 線積分, 53, 55
 線密度, 24
 相対性原理, 127
 ソレノイド, 117

 対称性, 28
 体積積分, 20
 単位, 14
 単磁荷, 118
 遅延ポテンシャル, 147
 定常状態, 87
 定常電流, 87
 デカルト座標, 28
 テスラ, 98
 デルタ関数, 66
 電圧, 88
 電位, 54, 56
 電荷, 5, 17
 電界, 21
 電荷密度, 20, 85
 電気双極子, 76, 115
 電気双極子モーメント, 76
 電気素量, 18
 電気抵抗, 88
 電気抵抗率, 88
 電気伝導率, 89
 電気容量, 75

電気力線, 36, 58
電気力束, 38
電磁波, 143
電磁ポテンシャル, 137, 147
電磁誘導, 125
点電荷, 19, 65
電場, 21
電流, 85
電流密度, 85
透磁率, 134
導体, 69

内積, 45, 46
ナブラ, 44
波, 146

場, 21, 32, 140
波数, 146
波長, 146
発散, 44, 45
発散定理, 46
波動方程式, 133, 143
万有引力, 13
光, 134
フレミング左手の法則, 102
平衡状態, 80
平面波, 145
ベクトル, 16, 29, 46
ベクトル積, 47
ベクトルポテンシャル, 109, 114, 137, 147
変位電流, 130
変数分離, 143
放電, 70
保存則, 86
保存力, 56
ポテンシャル, 54

右手系, 29
右ねじの法則, 102
面積分, 37, 55

ヤコビアン, 31, 55
誘電率, 134

ライデン瓶, 74

ラジアン, 39
ラプラシアン, 64
立体角, 31, 38
流束, 38, 85
連続の方程式, 86