振動・波動論

（担当：深津 晋 教官）

シケプリ

2008 年度 理科一類 13 組用

文責：酒井 佑士

～はじめに～

- このシケプリは，授業ノートを僕なりに編集・加筆する形式で書いていきますので，たぶん授業ノートよりも詳しいところは詳しいですが，僕があまり重要でないと思ったところは大して言及してないので，授業に出ずにこのシケプリをあてにしてもらってもその責任は負いかねます。
- 質問・批判・要望その他は，クラスの掲示板に書き込むか，筆者に直接聞いてください。
  （筆者のメールアドレス：yuji_0920@livedoor.com）
  まぁ，質問は担当教官にしたほうがいいですけどね。ちなみに，
  　教官の居室：16 号館 507A
  　教官のメールアドレス：cfkatz@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp
  です。

目次

1　1 自由度の振動

- 振動（oscillation，oscillator，OSC）
  - 「周期的 な運動・現象」のこと。
- 自由度（degree of freedom，DOF）
  - 系の状態を記述する変数のうち，独立なものの個数。
    ex1) 天井から吊り下げた振り子の自由度は 1
    ($\because$ 鉛直方向と糸のなす角 θ だけで質点の状態を表せる）
    ex2) 図 1 の系の自由度は 2（独立な変数は x_1 と x_2）

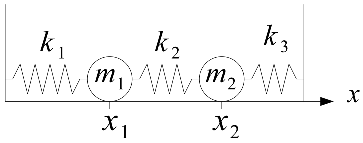


図 1

このような振動を**連成振動**（coupled oscillator）といい，特に m_1 と m_2 をつなぐ，ばね定数 k_2 のばねのことを**結合**（coupling）という。

一般に自由度が大きくなると解析するのが難しくなるが，たとえ 2 自由度であっても，2 重振り子のように全く予想のつかない運動をするものもある。（cf. カオス）

1.1　単振動

1.1.1　単振動の一般解

図 1.1.1 のように，なめらかな水平面でのばね定数 k のばねにつながれた質量 m の運動を考える。

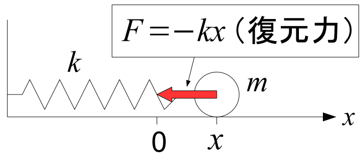


図 1.1.1

水平左向きに x 軸を取り，つりあいの点での質点の位置を $x=0$ とすると，運動方程式（equation of motion，EOM，e.o.m.）は,

$$\text{EOM}：m\ddot{x} = -kx \tag{1}$$

と書ける。[*1]
(1) 式は時刻 t についての線形 2 階常微分方程式であるから，一般解には任意定数が 2 つ必要である。このことを用いて，十分性から解を探し出すことにする（物理としてはこれでよい）。

- 高校生までの解の置き方
  いま，
  $$x = A\cos(\omega t + \theta)$$
  （ただし，A：振幅，ω：角振動数，θ：初期位相，A, θ は任意定数）
  とおく。このとき，
  $$\begin{aligned}\dot{x} &= -A\omega\sin(\omega t + \theta)\\ \ddot{x} &= -A\omega^2\cos(\omega t + \theta) = -\omega^2 x\end{aligned}$$
  となるので，これを (1) 式に代入すると，
  $$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -m\omega^2 x = -kx\\ \therefore \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2)\end{aligned}$$
  を得る。つまり (1) 式の一般解は，
  $$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta\right) \qquad (3)$$
  であると分かる。

- 大学生の置き方（複素数による表示）
  いま，
  $$x = x_0 e^{i\omega t} \qquad (x_0 \in \mathbb{R})$$
  とおいてみる。このとき，
  $$\begin{aligned}\dot{x} &= i\omega x_0 e^{i\omega t}\\ \ddot{x} &= (i\omega)^2 x_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 x\end{aligned}$$
  以下，上の議論と同様にして (2) 式を得る。
  注意：Euler（オイラー）の公式[*2]：
  $$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t \qquad (4)$$

[*1] Hooke（フック）の法則より復元力の大きさは kx と書ける。しかし教官曰くこの法則は「どうでもいい」らしい。ちなみに一番「どうでもいい」物理法則は Ohm（オーム）の法則なんだとか。それでも問題を解くときにはよく使う。
[*2] 証明は 5.2 を参照。

を用いると，

$$x = x_0 e^{i\omega t} = \underbrace{x_0 \cos\omega t}_{\text{実部}} + i \cdot \underbrace{x_0 \sin\omega t}_{\text{虚部}}$$

となるが，これでは位置 x が複素数となってしまうので，物理的にまずい。
そこで，x として

$$\Re(x)\ (x\ \text{の実部}) = x_0 \cos\omega t$$

または,

$$\Im(x)\ (x\ \text{の虚部}) = x_0 \sin\omega t$$

とする必要がある。しかしそれでも，$\Re(x)$ や $\Im(x)$ では**任意定数が 1 つしかない**（x_0 のみ）ので，(1) 式の一般解を表しているとは言えない。そこでこの問題を解決するために,

x_0 を複素数とみなし（$x_0 \in \mathbb{C}$),
(1) その後に $\Re(x)$（または $\Im(x)$）をとり，それを一般解とする
または
(2)x にその複素共役[*3]（complex conjugate，以下 c.c と書く）の項を追加する

ことによって，x を実数とすることができる。
まず，x_0 を複素数表示する。つまり,

$$x_0 = x_1 + ix_2 \qquad (x_1,\ x_2 \in \mathbb{R})$$

とおく。

<u>(1) の場合</u>
このとき,

$$\begin{aligned} x &= (x_1 + ix_2)\cos\omega t + i(x_1 + ix_2)\sin\omega t \\ &= \underbrace{(x_1 \cos\omega t - x_2 \sin\omega t)}_{\text{実部}} + i \cdot \underbrace{(x_1 \sin\omega t + x_2 \cos\omega t)}_{\text{虚部}} \end{aligned}$$

より,

$$\Re(x) = x_1 \cos\omega t - x_2 \cos\omega t \tag{5}$$

$$\Im(x) = x_1 \sin\omega t + x_2 \cos\omega t \tag{6}$$

となり，これらはいずれも一般解 (1)（後述）と同様の形をしているので，一般解といえる。

[*3] ある複素数の i を $-i$ に置き換えたもの

(2) の場合　(授業で扱ったのはこっち)
このとき，x の c.c は，

$$\bar{x} = x_0^* e^{-i\omega t} \qquad （ただし\ x_0^* = x_1 - ix_2）$$

と書けるので，これを加えて，

$$\begin{aligned} x &= x_0 e^{i\omega t} + x_0^* e^{-i\omega t} \\ &= (x_1 + ix_2)e^{i\omega t} + (x_1 - ix_2)e^{-i\omega t} \\ &= (x_1 + ix_2)(\cos\omega t + i\sin\omega t) + (x_1 - ix_2)(\cos\omega t - i\sin\omega t) \quad (\because (4)\ 式) \\ &= 2x_1\cos\omega t - 2x_2\sin\omega t \end{aligned} \tag{7}$$

よってこのように，x は実数となる。*4
他にも，複素数で得られた特殊解の実部と虚部の線形結合が一般解となることも分かる。つまり，

$$x = x_0 e^{i\omega t} = \underbrace{x_0\cos\omega t}_{実部} + i\cdot\underbrace{x_0\sin\omega t}_{虚部}$$

が微分方程式（1）式の特殊解であるならば，実部と虚部もそれぞれ独立にこの方程式の特殊解となるので，その線形結合

$$x = \alpha x_0\cos\omega t + \beta x_0\cos\omega t \quad （\alpha,\ \beta\text{: 定数}）$$

もこの方程式を満たし，さらに任意定数が 2 つ（$\alpha x_0 = A'$ と $\beta x_0 = B'$）あることから一般解であると言える。

1.1.2　解の等価性

$\ddot{x} = -\omega^2 x$ の一般解：

$$\begin{aligned} &(1) x = Acos\omega t + B\sin\omega t \\ &(2) x = C\cos(\omega t + \theta) \\ &(3) x = E(x_0 e^{i\omega t}) + F(x_0 e^{-i\omega t}) \end{aligned}$$

において，

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow x = C\cos\omega t\cos\theta - C\sin\omega t\sin\theta \\ &\Leftrightarrow x = \underbrace{(C\cos\theta)}_{A'}\cos\omega t + \underbrace{(-C\sin\theta)}_{B'}\sin\omega t \\ &\Leftrightarrow (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow x = Ex_0(\cos\omega t + i\sin\omega t) + Fx_0(\cos\omega t - i\sin\omega t) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(E + F)x_0}_{A''}\cos\omega t + \underbrace{i(E - F)x_0}_{B''}\sin\omega t \\ &\Leftrightarrow (1) \end{aligned}$$

*4 (2) のようにしてもよい根拠は，もとの x が (1) 式の特殊解であるならば，その c.c も特殊解となり，さらにそれらの和も特殊解となるからである（各自確かめよ）。

1.1.3　解と初期条件（境界条件）

ex1) 初期条件：$x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ のとき,

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ \dot{x} = -\ A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \end{cases}$$

より,

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \Rightarrow A = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

$$\therefore x = x_0\cos\omega t$$

これより，最大変位（振幅）が x_0 であることがわかる。
また,

$$\dot{x} = -\omega x_o\sin\omega t$$

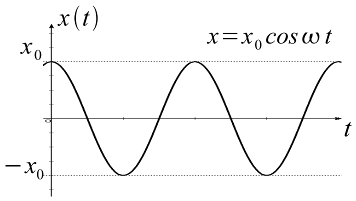


図 1.1.3 − 1

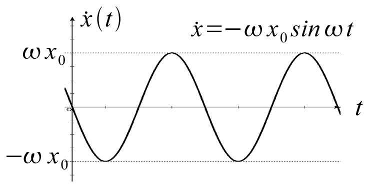


図 1.1.3 − 2

ex2) 初期条件が $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$(初速度) のとき
$x(0) = 0$ より $A = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$ より $B\omega = v_0$
よって,

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \quad \dot{x}(t) = v_0\cos\omega t$$

1.1.4　エネルギー積分

エネルギー積分 ⇒ 運動方程式の積分，エネルギー保存則の導出
物理的意味をつけてやることもできるが，ただの数学的操作だと割り切ってやってしまっても差し支えない。

$$運動方程式：m\ddot{x} = -kx$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

両辺に $\dot{x}$ を掛けて t で積分：

$$m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = 0$$

ここで，$\dfrac{d}{dt}\left(x^2\right) = 2x \cdot \dot{x}$ であることを考えると，

$$
\begin{aligned}
\text{与式} \Leftrightarrow & \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \\
\Leftrightarrow & \int dt \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = \int dt \cdot 0 \\
\Leftrightarrow & \int d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right)_{\leftarrow \text{全微分}} = \text{const}
\end{aligned}
$$

以上より，

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const} \tag{8}$$

という**力学的エネルギー保存則**が導かれる。[*5]
(8) 式の右辺の第 1 項 $\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$ を**運動エネルギー（Kinetic Energy，以下 K.E）**，第 2 項 $\dfrac{1}{2}kx^2$ を**ばねの弾性エネルギー**（一般的には**ポテンシャルエネルギー（Potential Energy，以下 P.E）**）という。

これより $x = A\cos(\omega t + \theta)$ の形の一般解のとき，

$$
\begin{cases}
\text{K.E}: \dfrac{1}{2}m\left\{-A\omega\sin(\omega t + \theta)\right\}^2 \\[2ex]
\text{P.E}: \dfrac{1}{2}k\left\{A\cos(\omega t + \theta)\right\}^2
\end{cases}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
E &\equiv \text{K.E} + \text{P.E} \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \theta) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \theta) \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\left\{\sin^2(\omega t + \theta) + \cos^2(\omega t + \theta)\right\} \quad (\because (2)) \\
&= \frac{1}{2}m(\omega A)^2
\end{aligned}
$$

つまり，

$$E \propto (\text{振幅})^2 \times (\text{角振動数})^2$$

またこのときの各エネルギーの時間変化は図 1.1.4 の通り。

[*5] 直観的には，$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}kx^2\right) = 0$ の時点で「カッコ内の時間変化率が 0→ カッコ内は時間に依らず一定（保存）」と思ってしまえばよい。

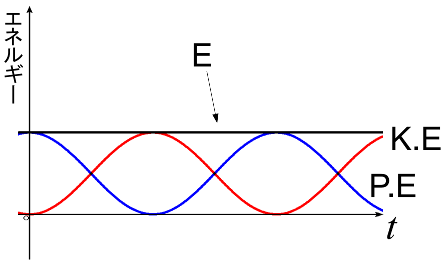


図 1.1.4

1.1.5　任意のポテンシャルの極小近傍での振動

P.E：$U(x)$ が $x = x_0$ が極小のとき，$U(x)$ を Taylor 展開 (5.1 参照) して，

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

ここで極小条件「$U'(x_0) = 0$ かつ $U''(x_0) > 0$」および 3 次以降の微小項を無視することにより，

$$U(x) \fallingdotseq U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2$$

と近似できる。

よって x が x_0 の付近では，P.E が（8）式と同様の形をしているので，調和振動子と同様の形で表わされるような力が働いていることが分かる。よって任意のポテンシャルを持つ質点は，極小点の近傍では単振動をすることが分かる。[*6]

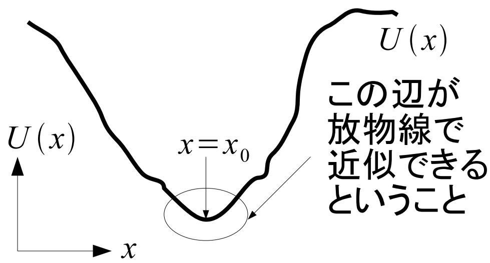


図 1.1.5

[*6] ポテンシャルについては 6.1 を参照。

1.1.6　単振り子（pendulum）

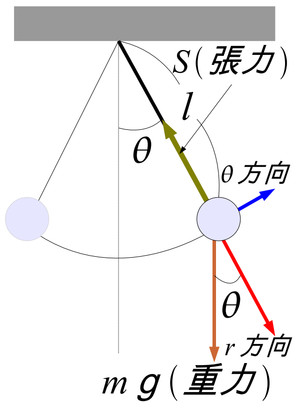


図 1.1.6

図 1.1.6 のときの（一般的な）e.o.m. は 2 次元極座標表示で，

$$r \text{ 方向：} \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = mg\cos\theta - S \tag{9}$$

$$\theta \text{方向：} \quad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -mg\sin\theta \tag{10}$$

であるが，糸の長さが ℓ で一定であるので，$r = \ell$, $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$ である。よって，

$$\text{第 1 式：} \quad S = m\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \quad (\text{張力 } S \text{ を決める式})$$

$$\text{第 2 式：} \quad m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad (\text{振動の式})$$[*7]

(1) $\theta \fallingdotseq 0$(or $\theta \to 0$ or $\theta \ll 1$) のとき　（微小振幅の振動）
　第 2 式を（34）式を用いて変形すると，

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots) \fallingdotseq -mg\theta$$

$$\therefore \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta \quad (\text{単振動})$$

　これより $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ として，

$$\theta(t) = \theta_1 \cos(\omega t + \delta) \quad (\theta_1,\ \delta : \text{定数})$$

[*7] この微分方程式は簡単には解けないことが知られている。だからと言ってあきらめるのではなく，近似することによって現象を理解できれば物理としてはそれで良いのである。このように，しばしば「物理は近似の学問」と呼ばれることもある。

とかける。

初期条件：$\theta(0)=\theta_0$, $\dot\theta_0=0$ より，

$$\begin{cases} \theta_0=\theta_1\cos\delta \\ \dot\theta(0)=-\omega\theta_1\sin(\omega t+\delta)|_{t=0}=-\omega\theta_1\sin\delta=0 \end{cases}$$

これらより，$\theta_1=\theta_0$, $\delta=0$ が得られる。[*8]結局，

$$\theta(t)=\theta_0\cos\omega t$$

を得る。

またこのときの単振動の周期は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

となり，振幅 θ_0 に依存しない。このことを，振り子の**等時性**（isochronism）という。

(2) $\theta_0\gg 1$ のとき　（大振幅の振動）

e.o.m. より分かること

任意の θ について $|\sin\theta|<|\theta|$ であるので，復元力の大きさについて，

$$mg|\sin\theta|<mg|\theta|$$

つまり，微小振動として近似したときよりも実際は常に復元力の大きさが小さいことから，周期は $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ よりも大きくなると予想できる。また，このときの周期は振幅 θ_0 に依存すると考えられる。さらに周期 $T=T(\theta_0)$ は θ_0 の単調増加関数であることも予想できる。以下では，このことを検証する。[*9]

(a) エネルギー積分

e.o.m. は

$$m\ell\ddot\theta+mg\sin\theta=0$$

である。この両辺に $\ell\dot\theta$ をかけて t で積分する：

$$\begin{aligned} m\ell\ddot\theta+mg\ell\sin\theta\cdot\dot\theta&=0 \\ \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(\ell\dot\theta)^2-mg\ell\cos\theta\right]&=0 \\ \therefore\frac{1}{2}m(\ell\dot\theta)^2-mg\ell\cos\theta&=\mathrm{const} \\ &=\frac{1}{2}m\ell^2\cdot 0^2-mg\ell\cos\theta_0\quad(\because\text{初期条件より}) \end{aligned}$$

以上より，力学的エネルギー保存則が導かれた。[*10]

[*8] δ に関しては $\sin\delta=0$ となる δ なら何でもよい。ex)　$\delta=n\pi$　　$(n\in\mathbb{N})$

[*9] 実はこの辺の解析は wikipedia の「振動運動」の項に書いてあったりする。

[*10] $\ell\dot\theta=v$ とおけば，$\frac{1}{2}mv^2=mg\ell(\cos\theta-\cos\theta_0)$ となり，高校の頃によく見たおなじみの式になる。

(b) 力学的エネルギー保存の式の変形

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 &= mg\ell(\cos\theta - \cos\theta_0) \\
&= mg\ell\left\{\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) - \left(1 - 2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right)\right\} \\
&= 2mg\ell\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \\
\therefore \dot{\theta}^2 &= 4\frac{g}{\ell}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

(c) 楕円積分による周期の数学的解析

ここで（天下り式ではあるが），周期 T について，

$$
\frac{T}{4} = \int_0^{\theta_0}\frac{dt}{d\theta}d\theta
$$

が成り立つことを利用して，この積分を実行することにより，T を θ_0 の関数として表すことを考える。

いま，

$$
\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\dot{\theta}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\frac{1}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}
$$

であるので，

$$
\begin{aligned}
T &= 4\int_0^{\theta_0}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \\
&= 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}
\end{aligned}
$$

ここで，変数変換：$\sin\dfrac{\theta}{2} = \sin\dfrac{\theta_0}{2}\sin\phi$ をすると，

$$
\frac{1}{2}d\theta\cos\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\phi d\phi \cdots (*)
$$

であるので，

$$
\begin{aligned}
T &= 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\frac{\theta_0}{2}\sqrt{1 - \sin^2\phi}}\cdot\frac{2}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\phi d\phi \\
&= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\phi}}
\end{aligned}
$$

この積分の部分を楕円積分といい，解析的には計算不可能であることが知られている。そこで，被積分関数を Taylor 展開によって多項式近似することにより，近似的に解析してみる。

$$f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ただし} \quad x = \sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\phi$$

とおくとき，$f(x)$ を $x=0$ の周りで Taylor 展開（つまり Maclaurin 展開）して，

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^2 + \cdots \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} T(\theta_0) &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\phi + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\sin^4\frac{\theta_0}{2}\sin^4\phi + \cdots\right)d\phi \\ &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\phi d\phi + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\sin^4\frac{\theta_0}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\phi d\phi + \cdots\right) \\ &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \cdots\right) \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \cdots\right) \end{aligned}$$

以上より，

$$T(\theta_0) > T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

かつ，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin\dfrac{\theta_0}{2}$ が θ_0 の単調増加関数であるから，$T(\theta_0)$ が θ_0 の単調増加関数であることが分かる。

(d) 解の吟味

$\theta_0 \ll 1$ として，

(i) $\sin\dfrac{\theta_0}{2} \fallingdotseq 0$ とみなす（0 次近似する）と，

$$T(\theta_0) \fallingdotseq 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

となり，微小振動の周期に一致する。

(ii) $\sin\dfrac{\theta_0}{2} \fallingdotseq \dfrac{\theta_0}{2}$（1 次近似）とし，最初の 2 項までで近似すると，

$$T(\theta_0) \fallingdotseq 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2\right)$$

となり，θ_0 に依存する。[*11] これを，**非等時性**という。

以上の議論で押さえておくべきことは結局,

- 単振り子の運動方程式を近似的に単振動として解けること
- エネルギー積分
- 実際の周期が振幅の単調増加関数であることを理解すること

であって，最後の方の楕円積分とかは一回やって納得できれば OK のようです。

1.1.7　単振動の他の例

- LC 共振回路

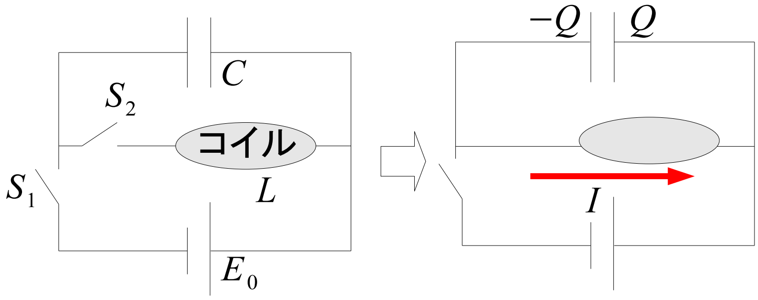


図 1.1.7

図 1.1.7 のような回路[*12]において，スイッチ S_1 を閉じて十分時間がたった後に S_1 を開き，スイッチ S_2 を閉じると，コンデンサーとコイルからなるループに振動電流が流れる。このような回路を **LC 共振回路**という。

このときの回路方程式（キルヒホッフの第 2 法則）は,

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

[*11] このように $T(\theta_0)$ が θ_0 の偶関数にしかならないのは，この運動が $\theta=0$ を中心に完全に対称であり，周期が θ_0 の符号に依らないことからも分かる。

[*12] 授業での図とは少し違うが，あっちは厳密な図ではない。このようにスイッチ S_2 を置くなりしないと，回路が短絡（ショート）してしまうからである。ただ実際のところは導線の抵抗があるので一応定常電流は流れるのだろうが，それなら回路に抵抗の図を入れておくべきであっただろう。ちゃんと教官に質問しに行って確かめたから間違いないですよ。

であるが，$I = \dot{Q}$ という関係があるので，両辺を t で微分すれば，

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{I}{C} = 0$$

$$\therefore \ddot{I} = -\frac{1}{CL}I$$

これは角振動数 $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{CL}}$ の単振動を表す。

1.2　減衰振動

今まではばね（調和振動子）等による単振動を考えてきたが，実際の運動では空気抵抗[*13]や摩擦力により振動運動の振幅が徐々に小さくなっていく。この現象のモデルとして，速度に比例する抵抗力を考えてみる。
いま，抵抗力を $-m\gamma\dot{x}(\gamma > 0)$ [*14]と書くことにすると，e.o.m. は，

$$m\ddot{x} = -kx - m\gamma\dot{x} \tag{11}$$

となる。ここで，$k = m\omega_0^2$（ω_0 を**固有角振動数**[*15]という）と書くことにすると，（11）式は，

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - m\gamma\dot{x}$$

$$\therefore \quad \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

さらに，簡単のため $\gamma = 2\mu$ とおくと，

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{12}$$

を得る。

（12）式は**減衰振動を表す微分方程式**と呼ばれる，2 階の線形常微分方程式である。これを解くためには，物理的には振動解を仮定し，十分性から求めることになる。[*16]

いま，$x = e^{\alpha t}$ と仮定してみると，$\dot{x} = \alpha e^{\alpha t} = \alpha x$，$\ddot{x} = \alpha^2 e^{\alpha t} = \alpha^2 x$ より，（12）式に代入して，

$$(\alpha^2 + 2\mu\alpha + \omega_0^2)e^{\alpha t} = 0$$

これが t に依らず成り立つ（t の恒等式（identity）である）ためには，

$$\alpha^2 + 2\mu\alpha + \omega_0^2 = 0 \tag{13}$$

[*13] 一般には流体による粘性抵抗
[*14] m（質量）がかかっているのは計算上の便宜，マイナスは運動を妨げる向きに働くことを表している。
[*15] 抵抗力の項がないときの，単振動の角振動数
[*16] 数学的には，2 階線形常微分方程式なので，解空間の基底を 2 つ見つければ一般解はその線形結合で書けるという背景がある。

であることが必要となる。（13）式を（12）式の**特性方程式**という。これを解くと，

$$\alpha = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} \tag{14}$$

ここで 3 つの場合分けが生じてくることが分かる：

$$(1)\mu^2 < \omega_0^2 \qquad (2)\mu^2 = \omega_0^2 \qquad (3)\mu^2 > \omega_0^2$$

1.2.1　減衰振動（damped harmonic oscillator）

(1) $\mu^2 < \omega_0^2$ のとき

$\mu^2 - \omega_0^2 = -\Omega^2\,(\Omega > 0)$ と書きなおせば，(14) 式は，

$$\alpha = -\mu \pm i\Omega$$

と書ける。これより，$e^{(-\mu+i\Omega)t}$ と $e^{(-\mu-i\Omega)t}$ が（12）式の特殊解であることがわかる。よって一般解はこれらの線形結合により，

$$x(t) = Ae^{(-\mu+i\Omega)t} + Be^{(-\mu-i\Omega)t} \tag{15}$$

（ただし A, B は定数，$A, B \in \mathbb{C}$）と書ける。

（15）式は（12）式の複素数の範囲での一般解であるので，単振動のときのように実数の解を得るために，工夫をする：

$$A = A_1 + iA_2, \quad B = B_1 + iB_2 \quad (A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R})$$

と書くと，

$$\begin{aligned} x(t) &= (A_1 + iA_2)e^{-\mu t + i\Omega t} + (B_1 + iB_2)e^{-\mu t - i\Omega t} \\ &= e^{-\mu t}\left[(A_1 + iA_2)(\cos\Omega t + i\sin\Omega t + (B_1 + iB_2)(\cos\Omega t - i\sin\Omega t)\right] \end{aligned} \tag{16}$$

となるので，この実部（or 虚部）をとって，

$$\Re(x) = e^{-\mu t}\left[(A_1 + B_1)\cos\Omega t + (B_2 - A_2)\sin\Omega t\right] = x_0 e^{-\mu t}\cos(\Omega t + \theta) \tag{17}$$

（ただし x_0, θ は定数）を得る。これが（11）式の実数の範囲での一般解になる。

ex) 初期条件「$x(0) = x_1, \dot{x}(0) = 0$」の下で，複素数の一般解

$$x(t) = Ae^{(-\mu+i\Omega)t} + Be^{(-\mu-i\Omega)t}$$

の任意定数 A, B を決めると，

$$\dot{x}(t) = A(-\mu + i\Omega)e^{(-\mu+i\Omega)t} + B(-\mu - i\Omega)e^{(-\mu-i\Omega)t}$$

より，

$$\begin{cases} x(0) = x_1 \to x_1 = A + B \\ \dot{x}(0) = 0 \to 0 = A(-\mu + i\Omega) + B(-\mu - i\Omega) \end{cases}$$

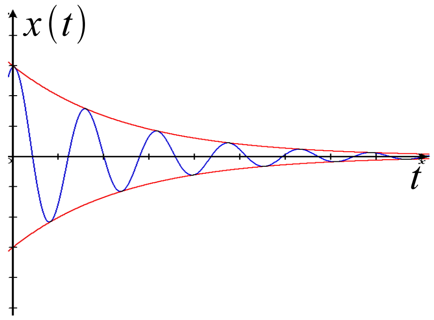
となる。これらを A, B について解くと,

$$A = \frac{\mu + i\Omega}{2i\Omega}x_1, \quad B = \frac{-\mu + i\Omega}{2i\Omega}x_1$$

以上より,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\mu + i\Omega}{2i\Omega}x_1 e^{(-\mu+i\Omega)t} + \frac{-\mu + i\Omega}{2i\Omega}x_1 e^{(-\mu-i\Omega)t} \\ &= \frac{x_1}{2i\Omega}e^{-\mu t}\left[\mu\left(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}\right) + i\Omega\left(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}\right)\right] \\ &= \frac{x_1}{2i\Omega}e^{-\mu t}\left(\mu \cdot 2i\sin\Omega t + i\Omega \cdot 2\cos\Omega t\right) \quad (\because (4) \text{ 式 (Euler の公式)}) \\ &= x_1 e^{-\mu t}\left(\frac{\mu}{\Omega}\sin\omega t + \cos\omega t\right) \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{\Omega}\right)^2}x_1 e^{-\mu t}\sin(\Omega t + \theta) \quad \left(\text{ただし, } \tan\theta = \frac{\Omega}{\mu}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

を得る。このグラフの概形は下図。(青：$x(t)$，赤：包絡線（envelope）$x = \pm e^{-\mu t}$)



1.2.2　臨界制動（critical damping）

(2) $\mu^2 = \omega_0^2$ のとき

$\alpha = -\mu$ となり，特殊解は

$$x(t) = x_0 e^{-\mu t}$$

と，1 つしか出てこない。これでは任意定数が 1 つ（x_0）しかないので，一般解を表すことができない。そこで，やや強引ではあるが，この x_0 を定数ではなく t の関数とみなし,

$$x(t) = x_0(t)e^{-\mu t} \tag{19}$$

という形の一般解を探すことにする。これを**定数変化法**という。

このとき，e.o.m に代入して，$\ddot{x}_0 = 0$ を得る。よって，$x_0 = A + Bt$　(A, B は定数) となる。したがって,

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\mu t} \tag{20}$$

を得る。これは任意定数が 2 つあるので，一般解といえる。このときの運動を**臨界制動（臨界減衰）**（critical damping）という。

ex）初期条件「$x(0)=0, \dot{x}(0)=v_0$」とすると，

$$\dot{x}(t)=Be^{-\mu t}-(A+Bt)\mu e^{-\mu t}$$

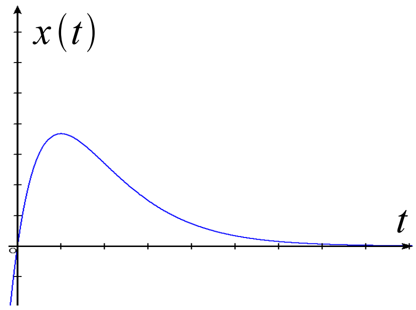
より，

$$A=0, \quad B=v_0$$

を得る。よって，

$$x(t)=v_0 t e^{-\mu t}$$

となる。このときのグラフの概形は下図。



1.2.3　過減衰（over damping）

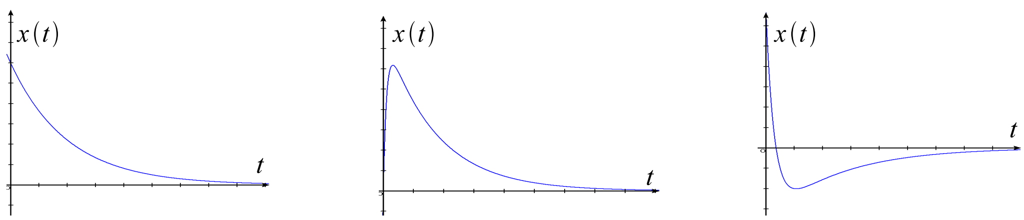
(3) $\mu^2>\omega_0^2$ のとき

$\alpha=-\mu\pm\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}$（負の 2 実数解[*17]）となるので，これを $\omega_\pm$（複号同順）とおくと，

$$x(t)=Ae^{\omega_+ t}+Be^{\omega_- t} \tag{21}$$

を得る。これは表式に三角関数が含まれないので振動を表さない。このときの運動を**過減衰**（over damping）という。

過減衰では，$x-t$ グラフに 3 種類ほどのバリエーションがみられる。



単調減少　　ピークを持つ　　ゼロ点通過

[*17] $\mu^2>\mu^2-\omega_0^2$ より，$0>-\mu\pm\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}$

1.3　強制振動，共鳴，Q 値

1.3.1　強制振動（driven oscillator）

今度は減衰振動の設定から，質点に大きさが $F\cos\omega t$ で表わされるような外力（駆動力）が働く場合を考える。e.o.m は,

$$m\ddot{x} + 2m\mu\dot{x} + m\omega_0^2 x = F\cos\omega t \tag{22}$$

である。
この微分方程式の解法として,

1) 特殊解（particular solution）x_p を求める：

$$m\ddot{x}_p + 2m\mu\dot{x}_p + m\omega_0^2 x_p = F\cos\omega t \tag{23}$$

2) 斉次方程式：$m\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + m\omega_0^2 x = 0$ の一般解（general solution）x_G を求める：

$$m\ddot{x}_G + 2m\mu\dot{x}_G + m\omega_0^2 x_G = 0 \tag{24}$$

3) $x = x_p + x_G$ を解とする
　∵)（23）式と（24）式を辺々足して,

$$m(\ddot{x}_p + \ddot{x}_G) + 2m\mu(\dot{x}_p + \dot{x}_G) + m\omega_0^2(x_p + x_G) = F\cos\omega t$$

　となるので，$x = x_p + x_G$ は（22）式を満たし，しかも x_G に任意定数が 2 つ含まれていることから，これが（22）式の一般解であることがわかる。

という方法がある（これを**重ね合わせの原理**という)。

それでは，この手順に従って一般解を求めてみよう。

1) ふつう微分方程式の特殊解は運が良くなければ見つからないものであるが，物理的に考えれば，角振動数 ω で振動する特殊解があることは明らかである。そこで，特殊解を

$$x = A\cos(\omega t + \theta)$$

とおいて，A と θ を決めることにする。
このとき,

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \theta) = -\omega A\sin\theta\cos\omega t - \omega A\cos\theta\sin\omega t$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \theta) = -\omega^2 x$$

であるので，これらを（22）式に代入して,

$$\begin{aligned} &mA(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\theta\cos\omega t - mA(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\theta\sin\omega t \\ &- 2m\mu A\omega\sin\theta\cos\omega t - 2m\mu A\omega\cos\theta\sin\omega t = F\cos\omega t \end{aligned}$$

これより，$\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ の係数を比較して，

$$\begin{cases} (\omega_0^2-\omega^2)A\cos\theta - 2\mu A\omega\sin\theta = \dfrac{F}{m} \\ -2\mu A\omega\cos\theta - (\omega_0^2-\omega^2)A\sin\theta = 0 \end{cases}$$

これを行列表示すると，

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2-\omega^2 & -2\mu\omega \\ -2\mu\omega & -(\omega_0^2-\omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\cos\theta \\ A\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{F}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

いま，

$$\Delta = -(\omega_0^2-\omega^2)^2 - (2\mu\omega)^2$$

とおけば，$\Delta \not\equiv 0$ であるので，

$$\begin{pmatrix} A\cos\theta \\ A\sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -(\omega_0^2-\omega^2) & 2\mu\omega \\ 2\mu\omega & \omega_0^2-\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{F}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} A\cos\theta = \dfrac{F}{m}\dfrac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\mu\omega)^2} \\ A\sin\theta = \dfrac{F}{m}\dfrac{-2\mu\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\mu\omega)^2} \end{cases}$$

よって，

$$\begin{cases} A = \sqrt{(A\cos\theta)^2+(A\sin\theta)^2} = \dfrac{F}{m}\dfrac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\mu\omega)^2}} \\ \tan\theta = \dfrac{A\sin\theta}{A\cos\theta} = \dfrac{-2\mu\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \end{cases}$$

を得る。

<u>特殊解の別の置き方</u>

以上のように，$x = A\cos(\omega t+\theta)$ の形の特殊解では計算が非常に煩雑になることがわかった。ここでは別の特殊解の置き方として，

$$x = x_0 e^{i\omega t} \quad (x_0 \in \mathbb{C}) \tag{25}$$

を考えてみる。また，これに伴って，（22）式を

$$m\ddot{x} + 2m\mu\dot{x} + m\omega_0^2 x = Fe^{i\omega t} \tag{26}$$

と書きなおしてみる。[*18][*19][*20]

（25）式より，

$$\dot{x} = i\omega x_0 e^{i(\omega t+\theta)} = i\omega x$$

[*18] このようにしてもよいのは，新たに書き直した特殊解と e.o.m の実数部分をとれば，先ほどまで考えていた式に帰着するからである。

[*19] 授業での置き方と符号が異なるが，こちらの方がいいと思う。

[*20] 他にも，ベクトル図を用いた解法もある。

$$\ddot{x} = (i\omega)x_0 e^{i(\omega t+\theta)} = -\omega^2 x$$

であるので，これらを（26）式に代入して，

$$m\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\mu\omega\right] x_0 e^{i\omega t} = Fe^{i\omega t}$$

$$\therefore x_0 = \frac{F}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\mu\omega} = \frac{F}{m}\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\cdot 2\mu\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}$$

よって，

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F}{m}\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\cdot 2\mu\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}(\cos\omega t + i\sin\omega t) \\ &= \frac{F}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}\big((\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\mu\omega\sin\omega t\big) \\ &\quad + i\cdot\frac{F}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}\big(-2\mu\omega\cos\omega t + (\omega_0^2 - \omega^2)\sin\omega t\big) \end{aligned} \tag{27}$$

となるので，

$$\begin{cases} \Re(x) = \dfrac{F}{m}\dfrac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}\big((\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\mu\omega\sin\omega t\big) \\ \Im(x) = \dfrac{F}{m}\dfrac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}\big(-2\mu\omega\cos\omega t + (\omega_0^2 - \omega^2)\sin\omega t\big) \end{cases}$$

これらはどちらも実数の範囲の特殊解を与えている。

ここでは，**特殊解には任意定数が含まれない（特殊解は初期条件に依らない）**ということだけはしっかりと押さえておこう。

2) 斉次方程式の一般解 x_G は，「1.2 減衰振動」で求めたとおり，μ と ω_0 の大小関係によって 3 通りに分けられる。なのでここでは，x_G のままにしておく。ここで重要なのは，3 通りの解はすべて減衰振動の解であるから，十分時間がたつと振動しなくなる。つまり，

$$\lim_{t\to 0} x_G = 0$$

という性質があることである。

3) 以上より，強制振動の一般解

$$x = x_G + \frac{F}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}}\cos(\omega t + \theta) \quad ただし \quad \tan\theta = \frac{-2\mu\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{28}$$

を得る。

- 十分時間がたった時，x_G の項が十分小さくなるので，強制振動の特殊解だけが残る。つまり，**十分時間がたつと，物体はばねの固有角振動数 ω_0 ではなく，外力の角振動数 ω で振動する**ことがわかる。

- 抵抗力が十分小さい場合（$\mu \fallingdotseq 0$）
  強制振動の特殊解は，今まで求めたものにおいて $\mu = 0$ とおいて，

$$x = \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

これより，
- $\omega < \omega_0$ のとき，物体は外力と同位相で振動する
- $\omega > \omega_0$ のとき，物体は外力と位相が π だけずれて振動する

ことがわかる。

1.3.2　共振（resonance）

強制振動の特殊解の振幅：

$$A = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}}$$

が，外力の角振動数 ω とともにどのように変化するのか見てみると，

$$(\omega_0^2 - \omega^2) + (2\mu\omega)^2 \text{が最小} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\omega_0 - 2\mu^2}$$

であることから，A が最大となるときは $\omega = \omega_0$ から少しずれたところであるとわかる。[*21] これは，最大を与える ω の形から見てもわかるように，抵抗の影響である。
いま，$\dfrac{\mu}{\omega_0} \fallingdotseq 0$（抵抗力を表す係数が固有角振動数よりはるかに小さい）の場合，A が最大になる ω の値は 1 次近似までで ω_0 に一致する。このようなとき，振幅 A のグラフ（図 1.3.3）は ω が ω_0 の近傍で急激に大きくなるという現象がみられる。これを**共振**（resonance）という。[*22][*23]

1.3.3　Q 値

共振のピークの鋭さを表す指標として，よく，振幅 A と外力の振動数 ω のグラフにおいて，最大値の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の高さの直線と交わるところの ω の値を ω_+，ω_-（$\omega_- < \omega_+$）[*24] として，

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega}{\omega_+ - \omega_-}$$

を用いる。この値を **Q 値**という。この値が大きいほど，よりピークが鋭いことを表す。

[*21] ちなみに $\dot{x}$ の最大値は厳密に $\omega = \omega_0$ のときに最も大きくなる。
[*22] この辺は授業中に大急ぎでやったため，かなりいい加減になっていた。このシケプリでは一切の妥協を許さず，しっかりとやることにしたい。
[*23] その次の授業ではちゃんとフォローしていた。
[*24] 実際のところ $\omega_\pm$ は，振動エネルギーがピーク時の半分となるときの角振動数である。振動エネルギーが振幅の 2 乗に比例することからも，ピークの $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍のときの高さとして定義されていることが分かるであろう。

いま，$\dfrac{\mu}{\omega_0} \fallingdotseq 0$ とする。
さらに，このままでは計算が煩雑になるため，ω の関数 $A = A(\omega)$ を $\omega = \omega_0$ の近傍で近似することを考える。
$\omega \fallingdotseq \omega_0$ のとき，

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \fallingdotseq 2\omega_0(\omega - \omega_0)$$

とできるので，このとき，

$$\begin{aligned} A &\fallingdotseq \frac{F}{m}\frac{1}{\sqrt{(2\omega_0)^2(\omega-\omega_0)^2 + (2\mu\omega_0)^2}} \\ &= \frac{F}{2m\omega_0}\frac{1}{\sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + \mu^2}} \\ &\equiv f(\omega) \end{aligned}$$

とおくと，

$$\max f(\omega) = f(\omega_0) = \frac{F}{2m\omega_0\mu}$$

であるので，

$$\begin{aligned} & f(\omega_\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}f(\omega_0) \\ & \Leftrightarrow \omega_\pm = \omega_0 \pm \mu \quad \text{（複号同順）} \end{aligned}$$

となる。以上より，

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} = \frac{\omega_0}{2\mu}$$

を得る。つまり，**抵抗力が小さいほど，共振のピークは鋭くなる。**

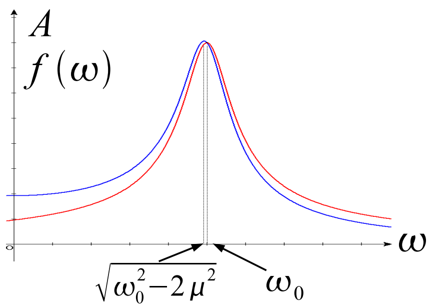


図 1.3.3
青：A，赤：$f(\omega)$

1.3.4　エネルギー散逸

強制振動においては，抵抗力による熱の発生（**エネルギー損失（散逸）**（dissipation））が，強制力による仕事で補われている。ここでは，エネルギー損失，つまりは外力（駆動力）のした仕事を

見積もってみよう。
さて，強制振動の e.o.m は，

$$m\ddot{x} + 2m\mu\dot{x} + m\omega_0^2 x = F\cos\omega t$$

であった。そして，この特殊解は，

$$x = \frac{F}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}\cos\omega t + \frac{F}{m}\frac{2\mu\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}\sin\omega t$$

と書くことができた。[*25]いま，

$$A = \frac{F}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}$$

$$B = \frac{F}{m}\frac{2\mu\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}$$

と書くことにすれば，特殊解は，

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

と，すっきりとした形で書ける。

外力（駆動力）のした仕事

外力のした仕事の値を見積もるために，ここでは，以下のふたつを要請しておく：

要請その 1： 1 周期あたりの平均の仕事を計算することにする。つまり，

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T F\cos\omega t\cdot\frac{dx}{dt}dt \quad （T：周期）$$

を計算する。

要請その 2： 駆動力が働き始めてから十分に時間が経過していることにする。つまり，強制振動の一般解のうち，減衰振動の一般解の項を無視する。

いま，

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

であるので，以上の要請より，

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T F\cos\omega t\cdot(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t)dt$$

---

*25 前回求めた解を加法定理で展開すればこの形になる。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\omega F}{T}\int_0^T (-A\cos\omega t\sin\omega t)dt + \frac{\omega F}{T}\int_0^T B\cos^2\omega t dt \\
&= -\frac{\omega F}{2T}A\int_0^T \sin 2\omega t dt + \frac{\omega F}{2T}B\int_0^T (1+\cos 2\omega t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\omega F B \\
&= \frac{\mu F^2\omega^2}{m\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\mu\omega)^2\right]}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

を得る。

ここで重要なのは，W **は** A **に無関係である**こと，つまり，**駆動力と** $\frac{\pi}{2}$ **だけ位相のずれた項がエネルギー損失を与える**ことである。

また，$\omega=\omega_0$ の近傍で近似すれば，やはり ω_0 近傍では値が急激に大きくなっていることがわかる：$\omega\to\omega_0$ として，先ほどやったような近似を施せば，

$$
W \fallingdotseq \frac{F^2}{m}\frac{\mu\omega_0^2}{(\omega_0-\omega)^2(\omega_0+\omega_0)^2+(2\mu\omega_0)^2} = \frac{F^2}{4m}\frac{\mu}{(\omega_0-\omega)^2+\mu^2}
$$

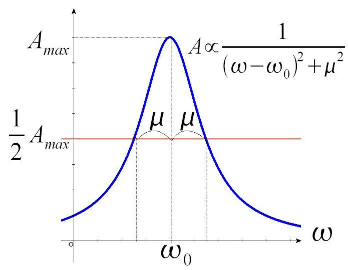
これは Lorentz 型の共鳴曲線（後述）を与える。

1.3.5 共鳴曲線

(1) **Lorentz 型**

$$
A \propto \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\mu^2}
$$

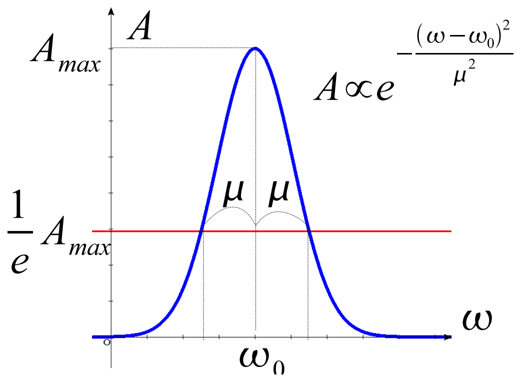
のような曲線を **Lorentz 型の共鳴曲線**といい，このときの μ を**半値半幅**（Half With Half Mat，HWHM）という。ここでは，最大値の $\frac{1}{2}$ を与える ω の値と，最大値を与える ω の値との差が μ である。



(2) **Gauss 型**

$$
A \propto e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\mu^2}}
$$

のような曲線を **Gauss 型の共鳴曲線**といい，このときの μ を (1) 同様に半値半幅という。ここでは，最大値の $\frac{1}{e}$ を与える ω の値と，最大値を与える ω の値との差が μ である。



(1)，(2) のどちらでも，2μ のことを**半値全幅**（Full With Half Mat，FWHM）という。

2　多自由度のシステム

2.1　2 自由度の系

ex1) 二重振り子（ここではくわしくはやらない）

ex2) 連成振動（結合振動子）の系

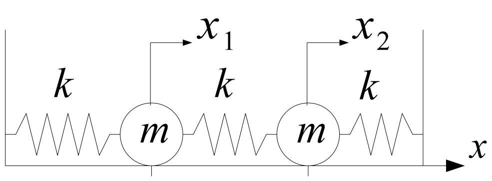


図 2

e.o.m は,

$$\text{左側の質点について：}\quad m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) \tag{30}$$

$$\text{右側の質点について：}\quad m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) \tag{31}$$

ここで,

$$\begin{cases} x_1 = Ae^{i\omega t} \\ x_2 = Be^{i\omega t} \end{cases} \quad (A,\ B \text{ は定数})$$

のように，振動型の解を仮定すると, [*26]

$$\ddot{x}_1 = (i\omega)^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 x_1$$

$$\ddot{x}_2 = (i\omega)^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 x_2$$

[*26] 物理としては十分性からでよい

より，

$$\begin{cases} -m\omega^2 x_1 = -k(2x_1 - x_2) \\ -m\omega^2 x_2 = -k(2x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} (-m\omega^2 + 2k)x_1 - kx_2 = 0 \\ -kx_1 + (-m\omega^2 + 2k)x_2 = 0 \end{cases}$$

これを行列表示すると，

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。ここで，もし係数行列の行列式が 0 でないならば，両辺の左から逆行列をかけることによって，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となってしまい，明らかに不適（自明，trivial）な解である。
よって（行列式）$= 0$ としてよい。これより，

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} = 0$$

つまり，

$$(-m\omega^2 + 2k)^2 - (-k)^2 = 0$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad (\omega > 0)$$

が得られる。

- $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \quad (m\omega^2 = k)$ のとき
  もとの方程式系は，
  $$k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  となることから，$x_1 = x_2$（x_1 と x_2 は同位相）という関係があることがわかる。
- $\omega = \sqrt{\dfrac{3k}{m}} \quad (m\omega^2 = 3k)$ のとき
  もとの方程式系は，
  $$-k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  となることから，$x_1 = -x_2$（x_1 と x_2 は逆位相）という関係があることがわかる。

（この辺でまた図が欲しい）

ex3) 2 自由度の結合系（2 原子分子の振動のモデル）

（図をいれるつもり）e.o.m は,

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$x_1 = Ae^{i\omega t}$, $x_2 = Be^{i\omega t}$ であると仮定すると，$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1, \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2$ となるので，e.o.m に代入して，

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + k & -k \\ -k & -m\omega^2 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(行列式) $= 0$ を解くことにより，

$$\omega = 0\,,\ \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

を得る。

- $\omega = 0$ のとき

  もとの方程式系は,

  $$k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  となることから，$x_1 = x_2$ となることがわかる。しかしこれが振動を表していない（並進運動を表している）ことは，計算しなくてもわかる（角振動数がゼロなのだから）。

- $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ のとき

  もとの方程式系は,

  $$-k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  となることから，$x_1 = -x_2$（逆位相で振動）という関係があることがわかる。

ex3') 2 自由度の結合系（再考）

（ここにも図を入れたい）

質量が異なるとすると，このときの e.o.m は,

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

ここでも，$x_1 = Ae^{i\omega t}$, $x_2 = Be^{i\omega t}$ であると仮定すると，$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1$, $\ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2$ となるので,

$$\begin{pmatrix} -m_1\omega^2 + k & -k \\ -k & -m_2\omega^2 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(行列式) $= 0$ とおくと,

$$\omega^2(m_1 m_2 \omega^2 - k(m_1 + m_2)) = 0$$

$$\therefore \omega^2 = 0 \quad \text{または} \quad \omega^2 = k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

を得る。
ここで,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

として μ を定義すると，上の式は

$$\omega = 0\,,\ \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

と書くことができる。この μ を**換算質量**（reduced mass）という。

- $\omega = 0$ のとき
  さっきのいっしょ。
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ のとき
  もとの方程式系は,

$$k \begin{pmatrix} -\frac{m_1}{m_2} & -1 \\ -1 & -\frac{m_2}{m_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより，$m_1x_1 + m_2x_2 = 0$ という関係があることがわかる。
これは質点 1 と質点 2 が $m_2 : (-m_1)$ の振幅の比（逆位相）で振動することを表している。

（別解）

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) & \cdots(*) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) & \cdots(**) \end{cases}$$

は,

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)X = m_1x_1 + m_2x_2 & \text{：質量中心の座標 } X \\ x = x_1 - x_2 & \text{：相対座標 } x \end{cases}$$

を用いると,
$(*) + (**)$ より，$\boxed{\ddot{X} = 0}$，$(*) \times \frac{1}{m_1} - (**) \times \frac{1}{m_2}$ より，$\boxed{\ddot{x} = -\frac{k}{\mu}x}$ を得る。[27]
これらはともに簡単に解ける形の 2 階線形常微分方程式である：
$\ddot{X} = 0$ より $\boxed{X = at + b}$ （a, b は任意定数）
$\ddot{x} = -\frac{k}{\mu}x$ より $\boxed{x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t + \theta\right)}$ （A, θ は任意定数）

[27] ちゃんと自分で計算してみてね。

これで X, x がわかったので，これらを x_1, x_2 について解く[*28]ことにより，

$$\begin{cases} x_1 = at + b + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} A \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{\mu}} t + \theta\right) \\ x_2 = at + b - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} A \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{\mu}} t + \theta\right) \end{cases}$$

を得る。

2.2　3 自由度の系

（ばね 4 つ，質点 3 つの図をいれたい）

e.o.m は一般的には，

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_2 - x_3) \\ m_3 \ddot{x}_3 = -k_3(x_3 - x_2) - k_4 x_3 \end{cases}$$

となる。[*29]簡単のために質量をすべて m，ばね定数をすべて k とすると，

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = k(x_2 - 2x_1) \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 + x_3 - 2x_2) \\ m\ddot{x}_3 = k(x_2 - 2x_3) \end{cases}$$

となる。

ここでもやはり，振動型の解として，

$$x_1 = Ae^{i\omega t}\,,\, x_2 = Be^{i\omega t}\,,\, x_3 = Ce^{i\omega t} \quad (A, B, C \in \mathbb{C})$$

とおけば，e.o.m から，

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k & 0 \\ -k & -m\omega^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & -m\omega^2 + 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る。

これが非自明な解をもつための条件：(行列式) $= 0$ から，

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k & 0 \\ -k & -m\omega^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} = 0$$

が必要。これを計算して[*30]，

$$(-m\omega^2 + 2k)(-m\omega^2 + (2 + \sqrt{2})k)(-m\omega^2 + (2 - \sqrt{2})k) = 0$$

[*28] ちゃんと自分でやってみてね！

[*29] 自分でたてられるように！特に符号に注意！

[*30] 行列式の展開は大丈夫だよね？

$$\therefore \omega^2 = (2-\sqrt{2})\frac{k}{m}\,,\ \frac{2k}{m}\,,\ (2+\sqrt{2})\frac{k}{m}$$

を得る。

2.3 N 自由度の系

($N \geqq 4$ だと思って差し支えない)
物質（固体）でのイオンの振動（格子振動）のモデル。

（ばね定数 k のばね N+1 こ，質量 m の質点 N この図をいれたい）
e.o.m は,

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + k(x_3 - x_2) \\ \cdots \\ m\ddot{x}_N = k(x_{N-1} - x_N) - kx_N \end{cases}$$

となるが，1 番目と N 番目の対称性の悪さを補正するために,

$$\begin{cases} x_0 \equiv 0 \quad \text{@左端}\ (X=0) \\ x_{N+1} \equiv 0 \quad \text{@右端}\ (X=(N+1)a) \end{cases}$$

であるような 2 つの質点 x_0, x_{N+1} を仮想的に追加する。このとき，これらは固定端となる。
すると，e.o.m は,

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n-1} - x_n) + k(x_{n+1} - x_n) \quad (n = 1, 2, \cdots, N)$$

として，統一的に書ける。
このときも，十分性から解を探すことにする。振動型の解として,

$$x_n = A_n \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{振幅 } A_n \text{は } n \text{ に依存，コサインの部分は n に非依存})$$

を仮定すると，e.o.m より,

$$-m\omega^2 A_n = k(A_{n-1} + A_{n+1} - 2A_n)$$

を得る。さらに（天下り的ではあるが),

$$A_n = B\sin(q \cdot na + \theta) \quad (B \text{ は定数},\ q : \textbf{波数})$$

とおいてみる。すると，まじめに計算することにより[*31],

$$\omega^2 = \frac{4k}{m}\sin^2\frac{qa}{2}$$

$$\therefore \omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left|\frac{qa}{2}\right|$$

[*31] 自分でやってみてね！三角関数の和を積に直すとうまくいくと思うよ！

と書ける。つまり，**角振動数は波数の関数になる**ことがわかる。

次に波数をどのようになっているのかを調べよう。
まだ考えてない条件：$A_0 = A_{N+1} = 0$ ($\because$ 固定端) を考えると，
$A_0 = B\sin\theta = 0$ $(B \neq 0)$ より，$\boxed{\theta = 0}$ としてよい。
また，$A_{N+1} = B\sin(q(N+1)a + \theta) = 0$ より，$q(N+1)a = l\pi \quad (l \in \mathbb{N})$ $\boxed{\therefore q = \dfrac{l\pi}{(N+1)a}}$

ここで，l の範囲として，$l = 1, 2, \cdots, N$ で十分である[*32]。

3 連続体の振動

構造化学の教科書「量子化学」（化学同人）の P26〜31 の記述が詳しいので、そちらを参照のこと。

4 波動

4.1 1 次元の波

- 連続体の振動について，その波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

  の解：

$$u(x,t) = A\cos(qx - \omega t + \theta) \quad (q : \text{波数})$$

  の形をしたもの。一般的には，$f(x \pm vt)$ という形のもの。
- 上の解は x 軸正の向きに進む進行波を表す。
- x 軸負の向きに進む進行波は,

$$u(x,t) = A\cos(-qx - \omega t + \theta)$$

  と書ける。
- q と ω の関係
  $u(x,t) = A\cos(\pm qx - \omega t + \theta)$ を波動方程式に代入してみると，

$$\omega^2 = v^2 q^2$$

  という関係が得られる。これを**分散関係**という。

[*32] 理由は，構造化学の教科書に似たような話があった気がするから，そこに書いてあると思う。

- $$v = \frac{\omega}{q}$$

  を**位相速度**（phase velocity）という。これは位相が同じ部分が進む速さを表す。
- v が q に依存するとき，**分散のある波**，v が q に依存しないとき，**分散のない波**という。

4.2 群速度

いま，2 つの正弦進行波

$$u_1 = A\cos(q_1 x - \omega_1 t)$$

$$u_2 = A\cos(q_2 x - \omega_2 t)$$

の重ね合わせを考える。

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_1 + u_2 \\ &= A\cos(q_1 x - \omega_1 t) + A\cos(q_2 x - \omega_2 t) \\ &= 2A\cos\left(\frac{q_1+q_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{q_1-q_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{q_1+q_2}{2} = \bar{q}$，$\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2} = \bar{\omega}$，$q_1 - q_2 = \Delta q$，$\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$ とおくと，

$$u(x,t) = 2A\cos(\bar{q}x - \bar{\omega}t)\cos\left(\frac{\Delta q}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

となる。
以下，$q_1 \fallingdotseq q_2$，$\omega_1 \fallingdotseq \omega_2$ の状況を考える。

- $\cos(\bar{q}x - \bar{\omega}t)$ は u_1，u_2 とほとんど同じ波を表す。
- $\cos\left(\dfrac{\Delta q}{2}x - \dfrac{\Delta\omega}{2}t\right)$ は，位相速度

  $$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta q} \to \frac{d\omega}{dq} \quad (\mathrm{as}\Delta q \to 0, \Delta\omega \to 0)$$

  の波を表す。v_g を**群速度**（group velocity）という。これは**波束**（wave packet）が進む速さを表す。
  また，波長は $\lambda_\Delta = \dfrac{4\pi}{\Delta q}$ と，非常に大きい。

以上から，この 2 つの合成波は下図の通り。
（ここにうなり（beat）の図が入る予定。）

（備考）

- 固有値問題についての詳しい解説（固有値，固有ベクトル etc）
- 基準振動
- モードの重ね合わせ
- 節（node）

の話は後回し。
∵ 今までの話では ω を求めただけで，「でっていう？」って感じだと思います。ここから変位の一般解を求めるのですが，この辺は線形代数の話がわかってると理解が早いと思うので，みなさんの数学 II の勉強が進んでからってことで後回しにします。うそです。僕の気力が足りないだけです (笑)。

5　補足 1：数学的準備

5.1　Taylor 展開

無限回微分可能な関数 $f(x)$ について，

$$f(x) = f(a) + f'(x)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \tag{32}$$

とできる[*33]。これを $f(x)$ の $x = a$ での **Taylor（テイラー）展開**という。
特に，$a = 0$ のときを **Maclaurin（マクローリン）展開**という：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \tag{33}$$

（33）式より，以下が導かれる：

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \tag{34}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots \tag{35}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \tag{36}$$

5.2　Euler の公式

（36）式において，x を ix におきかえると，

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\cdot\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + i\cdot\frac{1}{5!}x^5 + \cdots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots\right)}_{\cos x} + i\cdot\underbrace{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots\right)}_{\sin x} \\ &= \cos x + i\sin x \end{aligned}$$

以上より，（4）式（**Euler（オイラー）の公式**）：

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

を得る。また，この式とその c.c（複素共役）：

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

*33 収束半径とかの細かい話はここでは気にしない。

から，

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

となる。
つまり，**三角関数と指数関数は** i **（アイ）で結ばれている**ということです（笑）。

5.3　常微分方程式と解

5.3.1　1 階線形非斉次常微分方程式

x の関数 $y = y(x)$ に対して，

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

の形の微分方程式を，**1 階線形非斉次常微分方程式**という。とくに $Q(x) \equiv 0$：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

の形のとき，**1 階線形斉次常微分方程式**という。後者は変数分離法により直ちに解けて，

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (C \text{ は任意定数})$$

を得る。ここから

> C を定数ではなく x の関数としてしまえば，非斉次の場合にも解になるのではないか

と考えて，非斉次の解を

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

と仮定する。これを**定数変化法**という。
このとき，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx} - P(x)y$$

であるので，微分方程式に代入して，

$$\frac{dC}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

これより，

$$C(x) = c' + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \quad (c' \text{は任意定数})$$

となるので，

$$y = \left[c' + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right]e^{-\int P(x)dx}$$

を得る。

5.3.2　2 階線形非斉次常微分方程式

リクエストがあれば書くかもしれない。

6　補足 2：力学の復習（振動分野以外の範囲）

6.1　保存力とポテンシャル

- 一般に力 $\mathbf{F}$ のする仕事 $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ は始点と終点の位置のみで決まるわけではなく，途中の経路 C にも依存する。しかし、$\mathbf{F}$ の種類によっては W が始点，終点の位置のみで決まり，途中経路に依存しない場合がある。このような力を**保存力**という。

  「$\mathbf{F}$ が保存力」
  $\Longleftrightarrow$「任意の 2 点 A,B を定めると，A→B へ動くときの $\mathbf{F}$ の仕事が途中経路に依らず決まってしまう」
  $\Longleftrightarrow$「$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \equiv 0$」

  ex) 地表付近での重力は保存力
  質量 m の質点を地表付近の点 $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$ から点 $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}, z_\mathrm{B})$ まで，任意の経路 C を通って動かす時，重力のする仕事を W とすると，重力加速度ベクトルを $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ として，

$$W = \int_C m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = \int_C m(0,0,-g) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = -\int_C mgdz = -mg(z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})$$

  となり，経路 C の取り方に依らない。

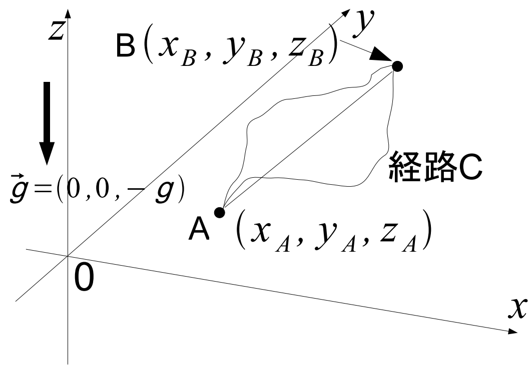


図 6.1

- 力 $\mathbf{F}$ が保存力のとき，その力による **Potential Energy(P.E，ポテンシャルエネルギー，**

位置エネルギー) を次のように定義する：

$$\text{位置 A}(\mathbf{r}_\mathrm{A}) \text{ に対する位置 B}(\mathbf{r}_\mathrm{B}) \text{ の P.E：} U_\mathrm{B} = -\int_{\mathbf{r}_\mathrm{A}}^{\mathbf{r}_\mathrm{B}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

＝「A から B まで運ぶ時，保存力につりあわせる外力のする仕事」
＝「B から A まで運ぶ時，保存力自身のする仕事」

- P.E：$U(\mathbf{r})(= U(x,y,z))$ が先に分かっているとき，そのもととなる保存力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ を逆算できる。

点 $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$ と，点 P から x 軸方向へ微小に dx だけ離れた点 $\mathrm{Q}(x_0+dx, y_0, z_0)$ を考えると，P に対する Q の P.E は,

$$U(x_0+dx, y_0, z_0) - U(x_0, y_0, z_0) = -\int_P^Q \mathbf{F}\cdot\mathbf{r} = -\int_{x_0}^{x_0+dx} F_x dx \fallingdotseq -F_x dx$$

よって,

$$F_x \fallingdotseq -\frac{U(x_0+dx, y_0, z_0) - U(x_0, y_0, z_0)}{dx}$$

$dx \to 0$ の極限を考えると,

$$F_x = -\lim_{dx\to 0}\frac{U(x_0+dx, y_0, z_0) - U(x_0, y_0, z_0)}{dx} = -\frac{\partial}{\partial x}U(x_0, y_0, z_0)$$

F_y, F_z についても同様である。
以上より，$U(x,y,z)$ がわかると，保存力 $\mathbf{F}(x,y,z)$ は,

$$\mathbf{F} = (-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}) = -\mathrm{grad}U$$

で与えられる。
ここで，grad（gradient、グラディエント）は演算子（オペレーター）であり,

$$\mathrm{grad} \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \equiv \nabla \quad {}^{*34}$$

で定義される。

6.2　極座標表示

- 2 次元座標系の場合のみを考える。

*34 ”ナブラ”と読む

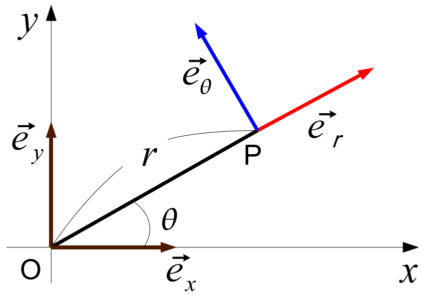


図 6.2

– デカルト座標系

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$$

基底 $< \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y >$ は時間に依らず一定。

– 極座標系

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = r\mathbf{e}_r + 0\cdot\mathbf{e}_\theta \quad {}^{*35}$$

基底 $< \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta >$ は θ が時刻 t の関数なので，時刻によって変化する。

このとき，両辺を時刻 t で微分して $\dot{x}, \dot{y}$ を $r, \theta, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ を用いて表すことを考える。[*36]

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix} = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad {}^{*37}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\cos\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix} = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r$$

であるので，これらより，

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

を得る。また，

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

を得る。

[*35] $\mathbf{e}_r$ は位置ベクトル方向の単位ベクトル，$\mathbf{e}_\theta$ はそれに垂直な方向の単位ベクトル。
[*36] 授業では図形的考察から導いた。
[*37] $\dfrac{d}{dt}(\cos\theta) = \dfrac{d}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}(\cos\theta) = \dfrac{d\theta}{dt}\left\{\dfrac{d}{d\theta}(\cos\theta)\right\} = -\dot{\theta}\sin\theta$ を用いた。

7　演習問題

(1) 単振動の運動方程式 $m\ddot{x} = -kx$ を，初期条件：$x(0) = x_0$，$\dot{x}(0) = v_0$ の下で解け。また，エネルギー積分を施すことにより，速度 $\dot{x}$ を位置 x の式で表せ。

(2) 運動方程式 $m\ddot{x} + 2m\mu\dot{x} + m\omega_0^2 x = 0$ の一般解を，次のそれぞれの場合について求めよ。
　(a) $\mu > \omega$ のとき
　(b) $\mu = \omega$ のとき
　(c) $\mu < \omega$ のとき

(3) 運動方程式 $m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = F\cos\omega t$ の特殊解を求めよ。また，一般解を求めよ。

(4) 図 (4) について，2 つの質点は微小振動を行なうものとして，次の問いに答えよ。
　(i) x_1 と x_2 に対する運動方程式を求めよ。

　以下の設問では，$k_1 = k$，$k_2 = 4k$，$k_3 = k$，$m_1 = m_2 = m$ として答えよ。

　(ii) 基準振動の角振動数 ω_1 と ω_2 を求めよ。ただし，$\omega_1 < \omega_2$ とする。
　(iii) x_1，x_2 の一般解を求めよ。
　(iv) $t = 0$ での初期条件を $x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = v_0$，$x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$ とするときの解を求めよ。

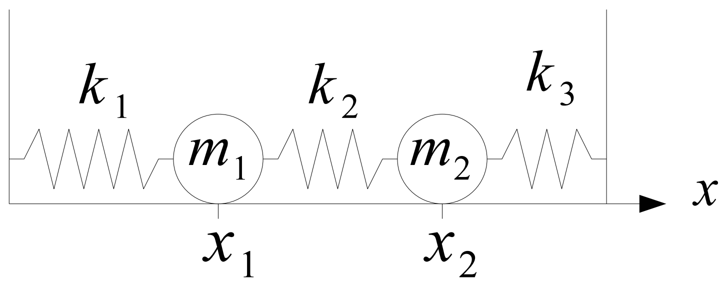


図 4

8　平成 20 年度 試験問題

第 1 問

講義では，一次元の振動子モデルを用いて共鳴（共振）現象を説明した。ここでは，共鳴（共振）が関係していると考えられる身の回りの事例をひとつあげ，その特徴を述べよ。とくに　共鳴（共振）周波（振動）数，　外力（駆動力），　エネルギー損失（あるいは散逸），　位相 について言及すること。

第 2 問

質量 m の N 個の質点が，自然長 a，ばね定数 k の $(N+1)$ 個のバネと交互につながれた連成振動子の縦振動（一次元方向の振動）について以下に答えよ。ただし，両側のバネの端は，垂直な壁に固定されており，床は滑らかであるとする。

(1) n 番目の質点の変位を x_n として運動方程式を書け。ただし，$1 < n < N$ とする。

(2) $x_n = A\sin(qna+\phi)\cos(\omega t+\theta)$ $(A, \phi, \theta$は定数$)$ は，(1) の解であることを示せ。これから波数 q と角振動数 ω の間に成り立つ分散関係を求め，図示せよ。

(3) 両端が固定端の場合の基準振動を考えよう。両壁に仮想的な質点を考え，これらの変位 x_0，x_{N+1} を 0 とすれば，(1) の結果が $n = 1, N$ でも使えて便利である。この時，$qa = B$ の関係が成立する。B を求めよ。また，許される q は N 個あることを示せ。

(4) 基準振動のおおまかな様子を，縦振動とは直角な方向に変位をとって図示せよ。なお，$N(>3)$ は奇数とし，最も低い振動数から 3 つと，最も高い振動数の 4 つのモードを選び，波長も記すこと。また，弦の振動との類似点・相違点を述べよ。

(5) N が大きい極限では，弦を伝わる一次元方向の波を考えることになり，(2) の分散関係を満たすすべての ω が許される。この時，「波長が短い極限」での群速度 $d\omega/dq$ を求めよ。また，この結果は，何を意味するのかを答えよ。

(6) (5) で波長が「長い」極限では，位相速度 ω/q が波長に依存しないことを示せ。

(7) (3) を参考に，自由端の条件を x_n を用いて表現してみよ。