2008年度冬学期　振動・波動論(担当：深津晋)　試験問題解答例

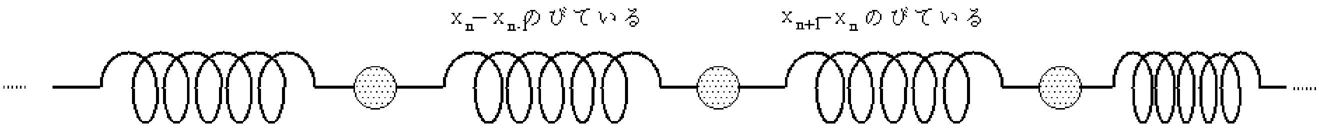
作成者：ゴミのほこり(´・ω・｀)　(S1−37)

第1問

例：ブランコに乗っている人の背中をタイミングよく押してあげるとどんどん振幅が大きくなっていく．

特徴：ブランコと人を一体の剛体振り子と見ればその固有振動数が共振周波数である．外力は他人から加えられる(押す)力である．ブランコの軸〜軸受間の摩擦や空気の粘性抵抗によってエネルギーが僅かではあるが失われる．定常状態では外力とブランコの振動との位相差はおよそπ／2である．

(注：位相差についてきちんと述べていないので不完全かも(コメント参照))



第2問

以下，1番目の質点からN番目の質点へ向かう方向を変位の正の向きとする．

(1) n番目の質点の両側のばねはそれぞれ $x_n - x_{n-1}, x_{n+1} - x_n$ だけ変位しているので，向きを考慮して

運動方程式は $\underline{m\dfrac{d^2x_n}{dt^2} = -k(x_n - x_{n-1}) + k(x_{n+1} - x_n) = k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n)}$ となる．　($1 < n < N$)　□

(2) $x_n = A\sin(qna+\varphi)\cos(\omega t+\theta)$ を　運動方程式 $m\dfrac{d^2x_n}{dt^2} = k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n)$ に代入する．

(左辺)$= -m\omega^2 A\sin(qna+\varphi)\cos(\omega t+\theta)$,

(右辺)

$$= kA\cos(\omega t+\theta)\cdot\left\{\sin(q(n+1)a+\varphi) + \sin(q(n-1)a+\varphi) - 2\sin(qna+\varphi)\right\}$$

$$= kA\cos(\omega t+\theta)\cdot\left\{2\sin\frac{(q(n+1)a+\varphi)+(q(n-1)a+\varphi)}{2}\cos\frac{(q(n+1)a+\varphi)-(q(n-1)a+\varphi)}{2} - 2\sin(qna+\varphi)\right\}$$

$$= kA\cos(\omega t+\theta)\cdot\left\{2\sin(qna+\varphi)\cos(qa) - 2\sin(qna+\varphi)\right\}$$

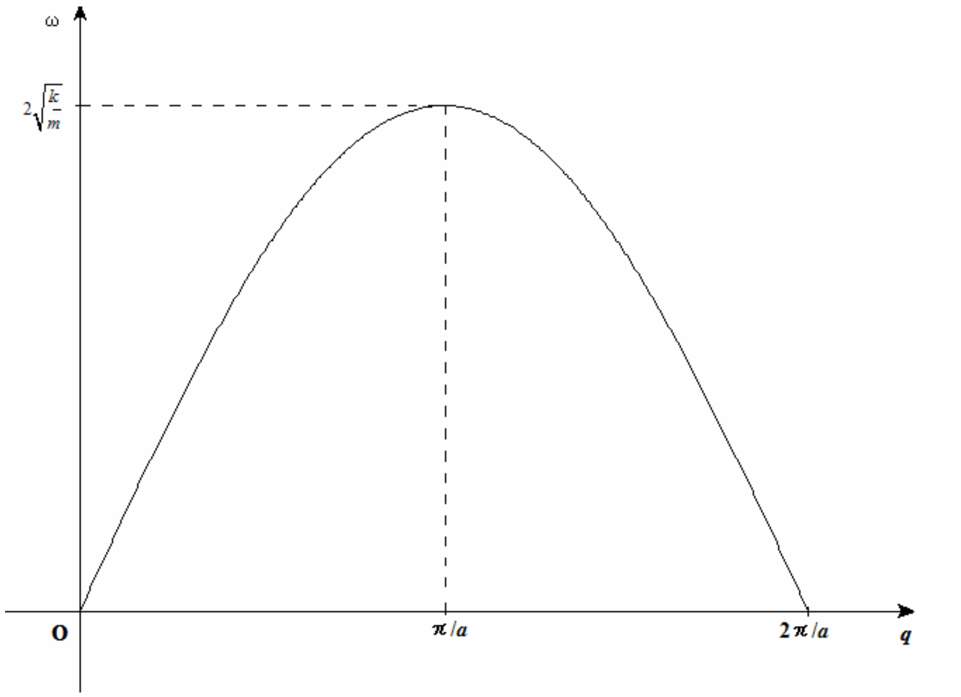
$$= 2k\cdot\left\{\cos(qa)-1\right\}\cdot A\sin(qna+\varphi)\cos(\omega t+\theta)$$

となるので，$\omega^2 = \dfrac{2k}{m}(1-\cos(qa)) = \dfrac{4k}{m}\sin^2\dfrac{qa}{2}$ であれば確かに $x_n = A\sin(qna+\varphi)\cos(\omega t+\theta)$ は

運動方程式 $m\dfrac{d^2x_n}{dt^2} = k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n)$ の解になっている．

そして，角振動数ωは正なので分散関係は $\omega = 2\sqrt{\dfrac{k}{m}}\left|\sin\dfrac{qa}{2}\right|$ と表せて，図示すると下のようになる．

(注：実は(3)で$0 < q < \dfrac{\pi}{a}$ が分かるので絶対値をとる必要はなく，下図も$0 < q < \dfrac{\pi}{a}$の範囲のみで良い)



□

(3) $x_n = A\sin(qna+\varphi)\cos(\omega t+\theta)$ が $n=0, N+1$ でも成り立つようにする，つまり $x_0 = A\sin\varphi\cos(\omega t+\theta)=0, x_{N+1} = A\sin(q(N+1)a+\varphi)\cos(\omega t+\theta)=0$ が t に関する恒等式となっていればよい．そしてそれには $\sin\varphi=0,\ \sin(q(N+1)a+\varphi)=0$ であればよい．

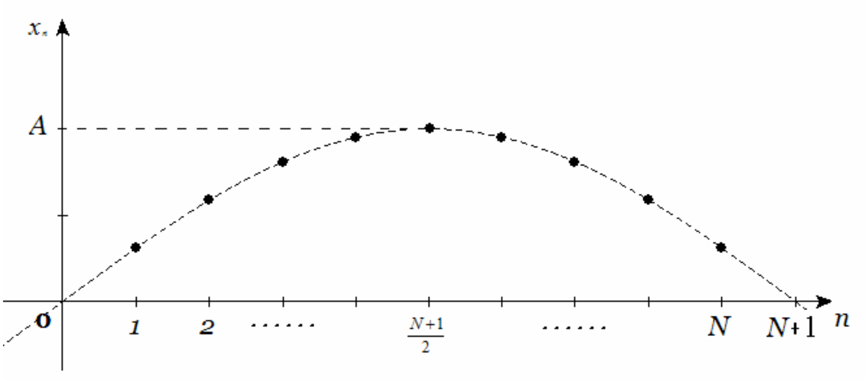
$\sin\varphi=0$ より m を任意の整数として $\varphi=m\pi$ と表せて，これより
$\sin(q(N+1)a+\varphi)=0 \quad \Leftrightarrow$
$\sin(q(N+1)a+m\pi)=\sin(q(N+1)a)\cos m\pi+\cos(q(N+1)a)\sin m\pi=\pm\sin(q(N+1)a)=0$
が分かるから，波数 $q>0$，$N+1>0$，$a>0$ を踏まえて $q(N+1)a=i\pi \quad (i=1,2,3,\cdots)$ である．

さて， $qa=\dfrac{i\pi}{N+1}$ であるが， $i=p(N+1)$ (p は整数) の時は
$A\sin(qna+\varphi)=A\sin(pn\pi+m\pi)=0 \quad (\because pn, m$ は整数$)$
なので全ての n に対し $x_n=0$ となってしまい振動を表さない．
さらに $i>N+1$ で、i が $N+1$ の整数倍でない時は，$qa=\dfrac{i'\pi}{N+1}+l\pi \quad (i,l$ は整数$,1\le i'\le N)$ と表すと
$A\sin(qna+\varphi)=A\sin\left(\dfrac{ni'\pi}{N+1}+(l+m)\pi\right)=\pm A\sin\left(\dfrac{ni'\pi}{N+1}\right)$ となり，この q で決まる振動は
$q'a=\dfrac{i'\pi}{N+1}$ の時の振動モードと振幅が全く同じ(符号が反転しているものも含む)状態である．ゆえに
本質的に異なる振動を表している波数は $q_i=\dfrac{i\pi}{(N+1)a} \quad (i=1,2,3,\cdots,N)$ の N 個しかなく，
このとき $B=q_ia=\dfrac{i\pi}{N+1} \quad (i=1,2,3,\cdots N)$ である． □

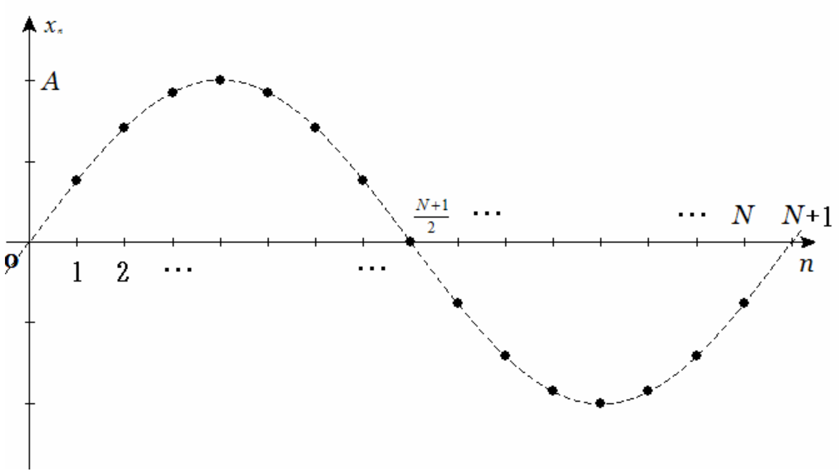
(4) (2)で書いたグラフより，振動数が低い方から $q=\dfrac{\pi}{(N+1)a},\dfrac{2\pi}{(N+1)a},\dfrac{3\pi}{(N+1)a}$,

高い方から $q=\dfrac{N\pi}{(N+1)a},\dfrac{(N-1)\pi}{(N+1)a},\dfrac{(N-2)\pi}{(N+1)a},\dfrac{(N-3)\pi}{(N+1)a}$ となる． $(\because 0<q<\dfrac{\pi}{a})$

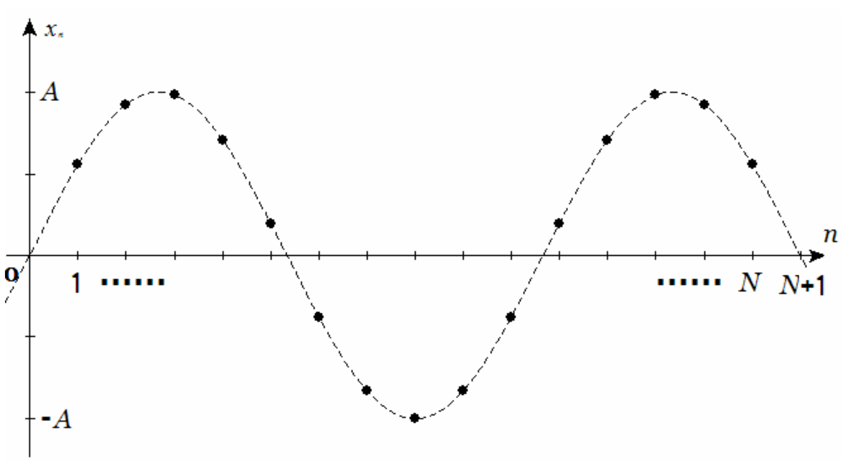
これらを波長と共に図示すると以下のようになる．



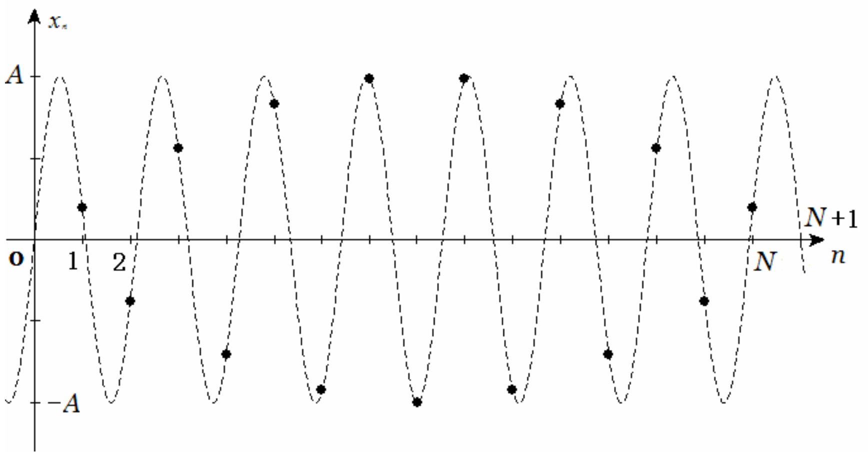
$$q=\frac{\pi}{(N+1)a},$$
$$\lambda=\frac{2\pi}{q}=2(N+1)a$$



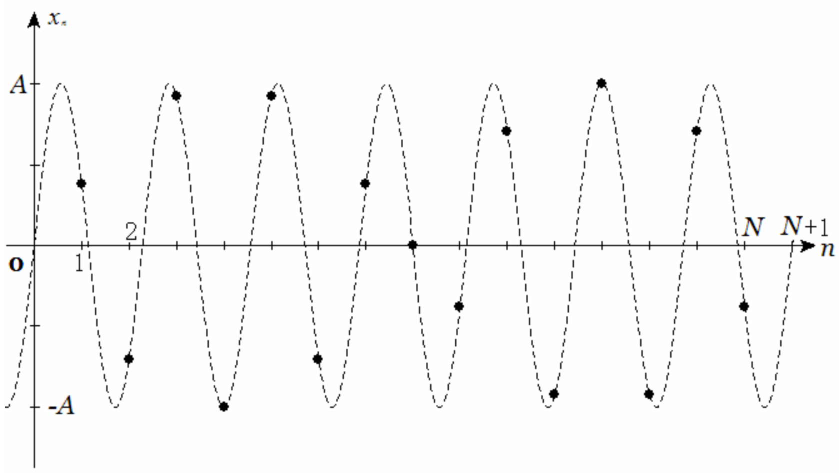
$$q=\frac{2\pi}{(N+1)a},$$
$$\lambda=\frac{2\pi}{q}=(N+1)a$$



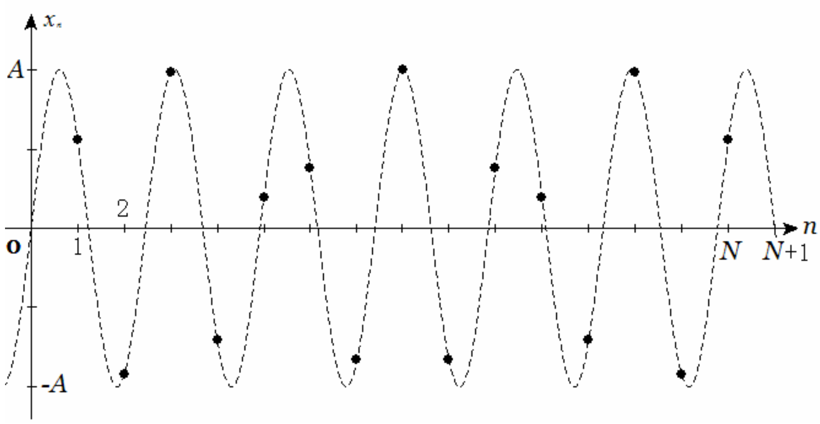
$$q=\frac{3\pi}{(N+1)a},$$
$$\lambda=\frac{2\pi}{q}=\frac{2(N+1)a}{3}$$



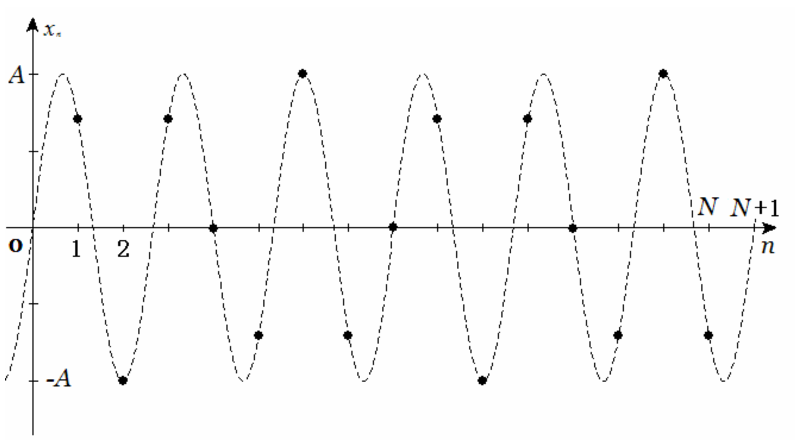
$$q = \frac{N\pi}{(N+1)a},$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{q} = \frac{2(N+1)a}{N}$$



$$q = \frac{(N-1)\pi}{(N+1)a},$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{q} = \frac{2(N+1)a}{N-1}$$



$$q = \frac{(N-2)\pi}{(N+1)a},$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{q} = \frac{2(N+1)a}{N-2}$$



$$q = \frac{(N-3)\pi}{(N+1)a},$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{q} = \frac{2(N+1)a}{N-3}$$

弦の振動との類似点：任意の振動が基準モードの重ね合わせで表現できる．
弦の振動との相違点：弦の振動モードは無限にあるが，N 体連成系の場合は N 個しかない．また，連続体の弦を伝わる波には分散がないが，N 体連成系を伝わる波には分散がある． □

(5)　(3)より $0<q<\dfrac{\pi}{a}$ だから分散関係は $\omega = 2\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\dfrac{qa}{2}$ である．

ゆえに群速度は $v_g = \dfrac{d\omega}{dq} = a\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cos\dfrac{qa}{2}$ となる．

さて，N が大きい極限をとるが，弦の全質量，全長が一定であるように，$M \equiv Nm, L \equiv (N+1)a$ は N に依らない定数であるとする．また，ばね定数の大きさはばねの長さに反比例するので，$K \equiv ka$ も N に依らず一定である．ゆえに

$$a\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{ka^2}{m}} = \sqrt{\frac{ka\cdot(N+1)a}{Nm}\cdot\frac{N}{N+1}} = \sqrt{\frac{KL}{M}\cdot\frac{N}{N+1}} \to \sqrt{\frac{KL}{M}} \quad (N\to\infty)$$ となる．

波長が短い極限とは波数 q が十分大きい極限のことであり，N 体連成系において最大の波数は

$q = \dfrac{N\pi}{(N+1)a}$ だからこの波数の時の群速度について考えて，N が大きい極限をとる．

つまり，$$v_g = \frac{d\omega}{dq} = a\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\frac{qa}{2} = a\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\frac{N\pi}{2(N+1)} \to \sqrt{\frac{KL}{M}}\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad (N\to\infty)$$

が分かるから，波長が短い極限での群速度は 0 である．この結果は，波長を短くしていき弦の構成原子の間隔に近づいてくると，弦が連続体と近似できなくなって，伝わる波に分散が現れることを示している．□

(6) (5)同様，分散関係は $\omega = 2\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\dfrac{qa}{2}$ である．これを波数 q でわって，

位相速度は $v_p = \dfrac{\omega}{q} = \dfrac{2}{q}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\dfrac{qa}{2}$ である．　波長が長い極限⇔波数が短い極限 であり，N を十分大きくすると $a = \dfrac{L}{N+1}$ が極めて小さくなるから，$\left|\dfrac{qa}{2}\right| \ll 1$ としてよい．

すると $$v_p = \frac{2}{q}\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{qa}{2} \sim \frac{2}{q}\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\frac{qa}{2} = a\sqrt{\frac{k}{m}} \to \sqrt{\frac{KL}{M}} \quad (N\to\infty)$$ となり，位相速度は波長に依らない定数である事が分かる．□

(7) 両端の質点を壁につないでいたばねがなくなった状況を考えればよい．つまり運動方程式を書くと

$m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1)$，$m\dfrac{d^2x_N}{dt^2} = -k(x_N - x_{N-1})$ であるが，ここで $x_0 = x_1, x_N = x_{N+1}$ と設定すれば

n = 1, N でも(1)の運動方程式 $m\dfrac{d^2x_n}{dt^2}=-k(x_n-x_{n-1})+k(x_{n+1}-x_n)=k(x_{n+1}+x_{n-1}-2x_n)$ が成り立っているように出来る． よって $x_0=x_1, x_N=x_{N+1}$ というのが自由端の条件である． □

【コメント】

第 1 問

ブランコしか思いつかなかった(電子レンジも共振(共鳴)を利用していますがあれをきっちり説明できる自信がない･･･)ので解答例ではブランコの話を述べていますが，正直かなり怪しい解答です．自分なりに必要と思うことを述べればいいんじゃないんでしょうか．(投げやり)

解答中に述べた位相差について：
ブランコの振れ角を θ，抵抗の大きさを表すパラメータを b，減衰がないときの固有振動数を ω_0，ブランコと人の質量を m，外力を $f_0\sin\omega t$ とおくと運動方程式は $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=-\omega_0{}^2\theta-2b\dfrac{d\theta}{dt}+\dfrac{f_0}{m}\sin\omega t$ となりますが, この運動の定常状態の解(十分時間が経った後の解)を $\theta=\theta_0\sin(\omega t+\delta)$ とおいて代入してみると $\theta_0=\dfrac{f_0}{m\sqrt{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+4b^2\omega^2}}, \tan\delta=\dfrac{2b\omega}{\omega^2-\omega_0{}^2}$ が得られます．(授業の復習)

よって共鳴振動数(振幅が一番大きくなる振動数)は簡単な計算により $\omega=\sqrt{\omega_0{}^2-2b^2}$ と分かります．

いまのブランコの場合は，減衰がとても小さいのでパラメータ b が極めて小さく，$\sqrt{\omega_0{}^2-2b^2}\sim\omega_0$ だと考えてよい事になります．これを外力と振動の位相差 δ の式に代入してみると
$\tan\delta=\dfrac{2b\omega}{\omega^2-\omega_0{}^2}\sim-\infty$ ですから， $\delta\sim-\dfrac{\pi}{2}$ を得ます． (終)

第 2 問

N 体連成系の問題です．$N\to\infty$ の極限で連続体の振動と同等になりますし，割と重要なテーマです．
(1) 向きと符号にだけ注意しましょう．向きが不安になったらいくつか代入して確かめればおｋです．

(2) 代入して，式が成り立つようにするだけ．三角関数の公式がちらほら．

(3) 運動方程式が n = 1，N でも成り立つように仮想的な変位を導入したので，(2)で求めた解の式も n = 1，N で使えるようになったのですが， n = 0，N+1 でも(2)の解が正しいことは別に保証しなければなりません．(x_{-1}, x_{N+2} などが存在しないので(2)の計算が使えない)
そしてそこから簡単な考察を経て，許される q の値が離散的であること，かつ実質的には N 通りしかないことを示します．

(4) 解答中の図は $N=15$ としてグラフ描画ソフトにやってもらいました．N が奇数と指定されているので $\dfrac{N+1}{2}$ 等は整数です. 横軸は n ではなく壁からの距離にとっても良いかもしれません(単に a 倍するだけ)．答案には山の数とか書いた方がいいんでしょうか？

(5)(6) N が大きい極限をとるとき, a や m を一定にしておくと無限に長くて重い弦になってしまうので，弦の全長や全質量といった N に依らない定数を用意します. 忘れてしまいがちなのがばね定数の扱いで，ばね定数はばね長に反比例するので（ばね定数）×(ばねの長さ）は常に一定です(注).
解答でも少し触れてありますが，波長 λ が弦の構成単位の間隔に比べて十分長いときには弦は連続体とみなせるので分散は生じません(つまり $\omega \propto q$)．しかし波長が短くなってくると弦を連続体として考えるのに無理が生じ，分散関係が現れてくることになります.

注： ばね定数の定義を（復元力)／(ばね長に対するひずみ）だと敢えて思ってしまえば，ばね定数は長さに逆比例することは明らかですが(同じばねを 2 本直列にしたみたりいろいろ考えてみても分かります)，大雑把にばねを一本の棒だと思ってしまうと，ヤング率を E，断面積 S，全長 l として

$$E=\frac{\left(\dfrac{F}{S}\right)}{\left(\dfrac{\Delta l}{l}\right)} \Leftrightarrow F=\frac{ES}{l}\Delta l \quad \therefore k=\frac{ES}{l}$$

となるので確かにばね定数 k がばね長に反比例することが分かります.

ちなみに，解答中に用いた記号を使うと $N\to\infty$ のとき

$$x_n = A\sin(qna+\varphi)\cos(\omega t+\theta) = A\sin\left(\frac{n\cdot i\pi}{N+1}\right)\cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\frac{i\pi}{2(N+1)}\right)+\theta\right)$$

$$\to y(x,t) = A\sin\left(\frac{i\pi}{L}x\right)\cos\left(i\pi\sqrt{\frac{K}{LM}}\,t+\theta\right)$$

となります.

(7)　自由端＝壁がない＝壁側のばねから力が働かない，と考えれば答は自ずから明らかです.

終わりに：
この解答例はだいぶ時間に追われて作ったものなので間違ってる部分があってもおかしくないです．特に第 2 問の(5)(6)とか相当怪しいです．「おかしい」と思ったら自分で頑張るかシケ対(私)に聞いてください．それではさようなら.

2009 年 12 月 31 日