科目名 電磁気学 A	教員名 中村　哲	1月３０日３時限 試験時間９０分

指定クラス	解答用紙	計算用紙	持ち込み
1年(文1 文2 文3 理一 24・26-27), 2年(文1 文2 文3)	B4両面１枚タイプ ２枚	２枚	無

以下の問題に解答せよ。解答は考えの道筋、式変形等を論理の飛躍なく分かりやすく記述せよ。正しい考え方、式変形等ができているかを確認したいので、答えだけ書かれていても点数は与えられない。

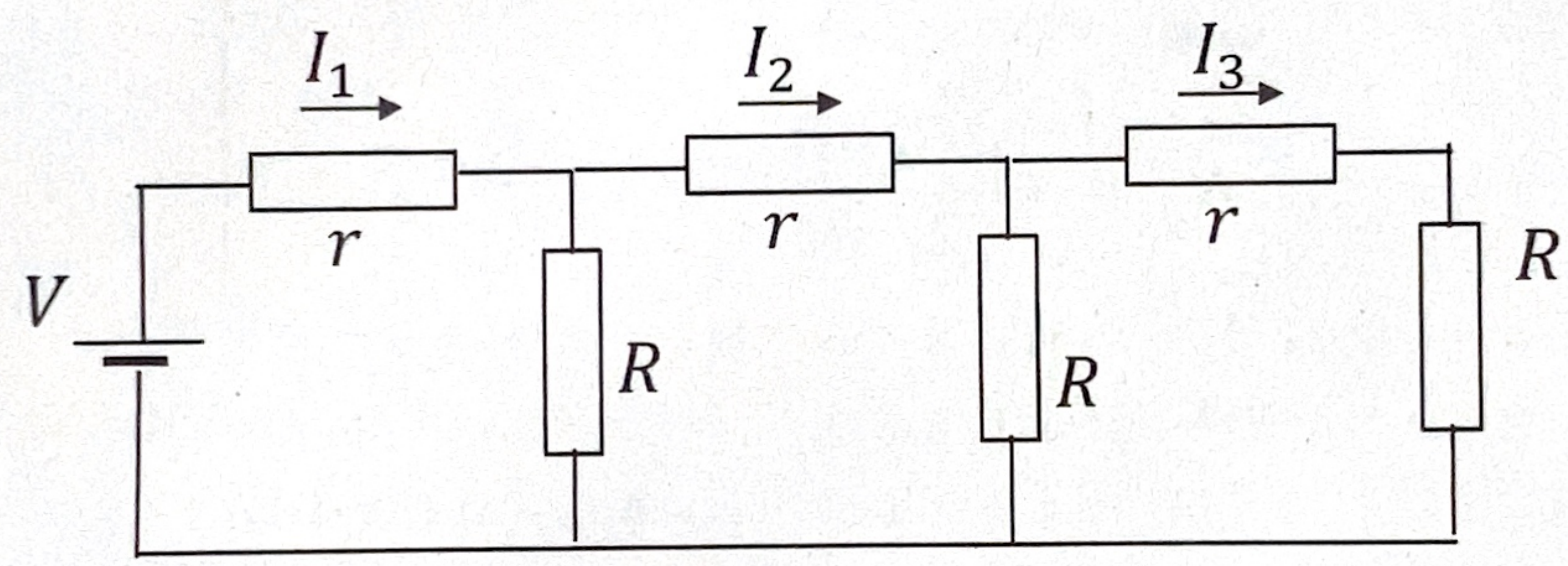
また、単位系に関しては講義で使っているMKSA単位系を使い、判読可能な文字で書くこと（判断に迷う文字だった場合、本人に確認することはしないで減点対象になる可能性がある）。

１．原点を中心とし、半径 R の一様帯電球（電荷密度ρ）がある。

(ア) 静電ポテンシャル(ϕ)、電場（$\vec{E}$）を求め、$\phi, |\vec{E}|$を原点からの距離 r の関数としてグラフに表せ。ただし、無限遠方を静電ポテンシャルの基準($\phi(\infty)=0$)とする。

(イ) 静電エネルギーを求めよ。

２．以下のように電気抵抗r, Rをハシゴ状につなげた定常電流回路を考える。



(ア) ハシゴが３段の場合に、初段、２段、３段目の抵抗 r を流れる電流 $I_1, I_2. I_3$を求めよ。

(イ) ハシゴが無限に長くなったときのI_1から、全抵抗の合成抵抗を求めよ。ハシゴが無限に長くなったときは、段数が一つ増えても I_1は変化しないことに注目せよ。

３．中心軸を共通とする２つの円形コイル（半径a）を距離 a だけ離して設置し、同じ向きに電流Iを流す。中心軸上のコイルの中点における磁場を求め、ほぼ一様の磁場が生じることを示せ。このように配置したコイルはヘルムホルツコイルと呼ばれる。

裏面あり

4．静電ポテンシャルの基本方程式であるポアソン方程式($\Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0$)について考える。

(ア)ポアソン方程式をマクスウェル方程式と静電ポテンシャルの定義式から導け。

(イ)ポアソン方程式の解ϕ_1が与えられたとき、$\phi_2 = \phi_1 + f$が同じポアソン方程式の解となるためには$\Delta f = 0$でなくてはならない。これに留意してある領域Ｖ内における電荷分布ρ、その表面Ｓにおける静電ポテンシャル$\phi|_S$が与えられたらＶ内の静電ポテンシャルが一意に決定することを示せ。グリーンの恒等式の一つ

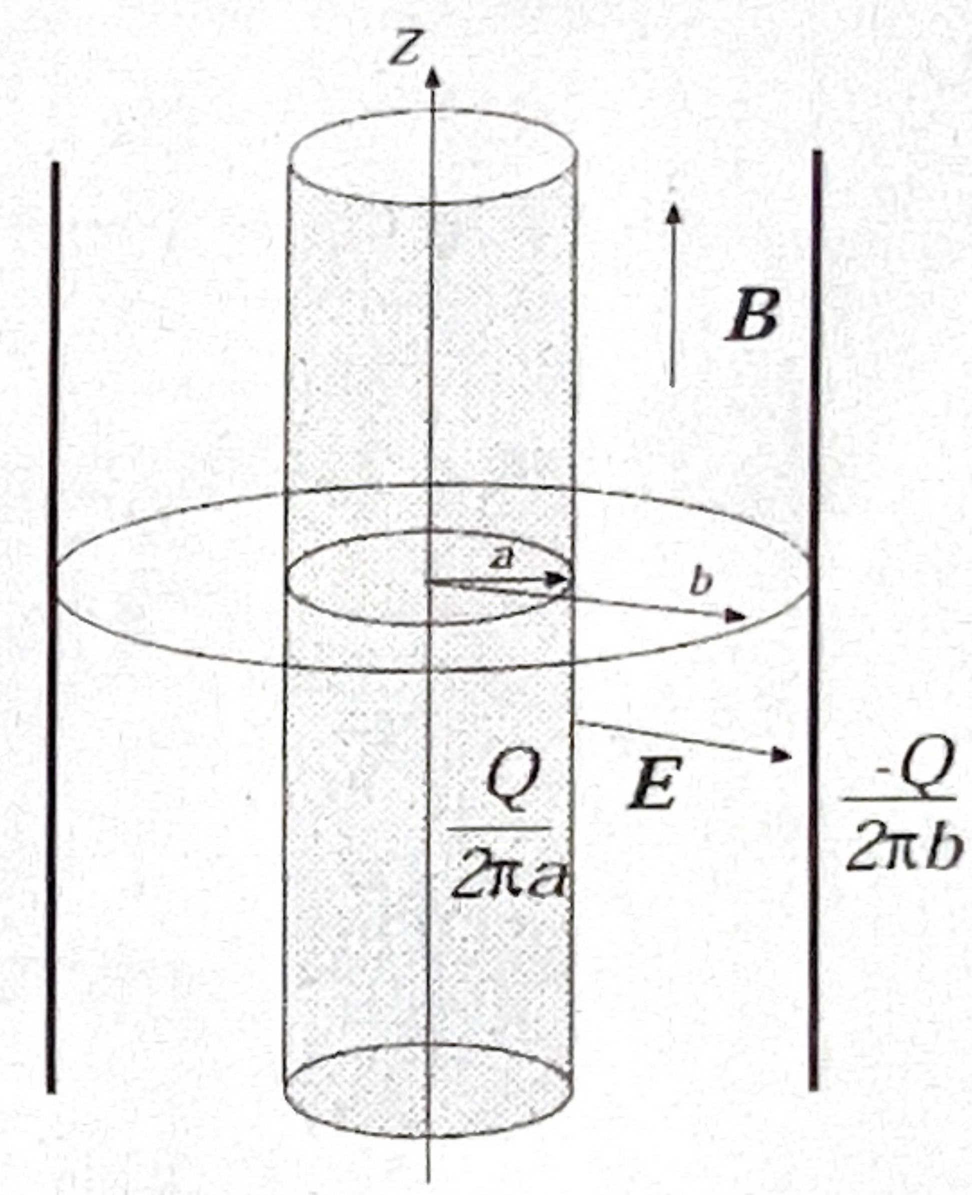
$$\iiint_V \psi\Delta\psi\ dV = \iint_S (\psi\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{S} - \iiint_V (\nabla\psi)^2\, dV$$

は証明なしに使って良い。

5．図のようにz方向に一様な磁場$\boldsymbol{B}$中に半径aの無限に長い導体円柱Ａと同軸の半径bの導体円筒Ｂがある。単位長さあたりＡは表面電荷密度$Q/(2\pi a)$, Ｂは$-Q/(2\pi b)$で一様に帯電している($a < b$)。

A, Bはz軸を中心になめらかに回転できる（回転角をθとする）が最初は止まっており、系の角運動量はゼロである。

今、磁場をゆっくりと変化させてゼロにする。



(ア) 講義でベータトロンを議論したときを思い出して、Ａ表面に回転軸回りに電磁誘導される電場E_θを求め、Ａが誘導電場から受けるトルク（角運動量の時間変化率）が

$$\boldsymbol{N}_A = -\frac{a^2 Q}{2}\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

となることを示せ。さらに、時間 $0 \to \infty$ で積分して、磁場ゼロになった際にＡが持つ角運動量$\boldsymbol{L_A}$を求め、同様に磁場ゼロになった際にＢが持つ角運動量$\boldsymbol{L_B}$も同様に求めよ。この時、系全体の力学的角運動量$\boldsymbol{L_A} + \boldsymbol{L_B}$がゼロにならないことを示せ。

(イ)上記のパラドックス（ファインマンの教科書で紹介されている有名な円盤のパラドックスと本質的に同じ）は電磁場が角運動量を持つことを考慮していないことに起因する。電磁場の角運動量密度は電磁運動量密度$\boldsymbol{g}_{電磁}$ を使って以下のように書ける。

$$\boldsymbol{\ell}_{電磁} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}_{電磁} = \varepsilon_0 \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$$

A, Bの間の電磁場の角運動量密度を求め体積分することで単位長さあたりに電磁場が持つ角運動量を求め、（ア）で求めた力学的角運動量との関係およびエネルギーの流れを議論せよ。

以上