

科目名：熱力学	教員名：桂 法称	7月31日3時限	試験時間90分
1年理一 26-28, 1・2年文一二三	解答用紙：1枚	計算用紙：1枚	持ち込み不可

以下の大問1~3に解答せよ。解答用紙は裏面も使用して良い。試験日から一年たったら答案を予告なく廃棄することがある。

1. 以下の設問に答えよ。

(1) 次の2変数関数に対して、偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ。

(a) $f(x, y) = x^2 + 6xy^2 + 9y^4$, (b) $f(x, y) = \ln(xy) + \cos(2y)$

(2) 次の(a), (b)が完全微分か否かを判定せよ。また、完全微分でない場合は、積分因子があれば求めよ。

(a) $2ydx + 3xdy$, (b) $\left(\frac{y}{x} + \cos y\right) dx + (\ln x - x \sin y) dy$

(3) 理想気体の断熱自由膨張が不可逆過程である理由を議論せよ。

(4) 1モルのファンデルワールス気体の状態方程式は以下で与えられる。

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (1)$$

ここで、 p は圧力、 V は体積、 T は温度、 R は気体定数、 a, b は正の定数である。

(a) この気体の内部エネルギーを U とする。 $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ を求めよ。(ヒント：熱力学の基礎方程式 $dU = TdS - pdV$ とマクスウェルの関係式を使うとよい。)

(b) この気体の定積熱容量 C_V が体積 V に依存しないことを示せ。

(5) 0°C ($\sim 273\text{K}$) の水 1kg を 91°C の熱源に接触させると、しばらくして熱源と同じ温度になった。水 1kg の定圧熱容量を $C_p = 4.18 \times 10^3\text{ J/K}$ 、この過程で C_p 、熱源の温度は変化しないとして以下を求めよ。ただし、 $\ln(4/3) \sim 0.288$ を用いてよい。

(a) 水のエントロピー変化, (b) 水と熱源を合わせた全系のエントロピー変化

(6) 1モルの理想気体の温度を T 、体積を V 、圧力を p 、エントロピーを S 、定圧熱容量を C_p とする。

(a) $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S$ を $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$ と $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$ を用いて表せ。

(b) $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S$ を T, V, C_p 、気体定数 R のうち必要なものを用いて表せ。

2. 図1は1モルの理想気体を作業物質とするブレイトンサイクルの (p, V) 図で、4つの異なる状態 A, B, C, D が2つの等圧線 AB, CD と2つの断熱線 BC, DA で結ばれている。作業物質の定積熱容量 C_V 、定圧熱容量 C_p は温度によらない、また各過程は準静的であるとして、以下の設問に答えよ。

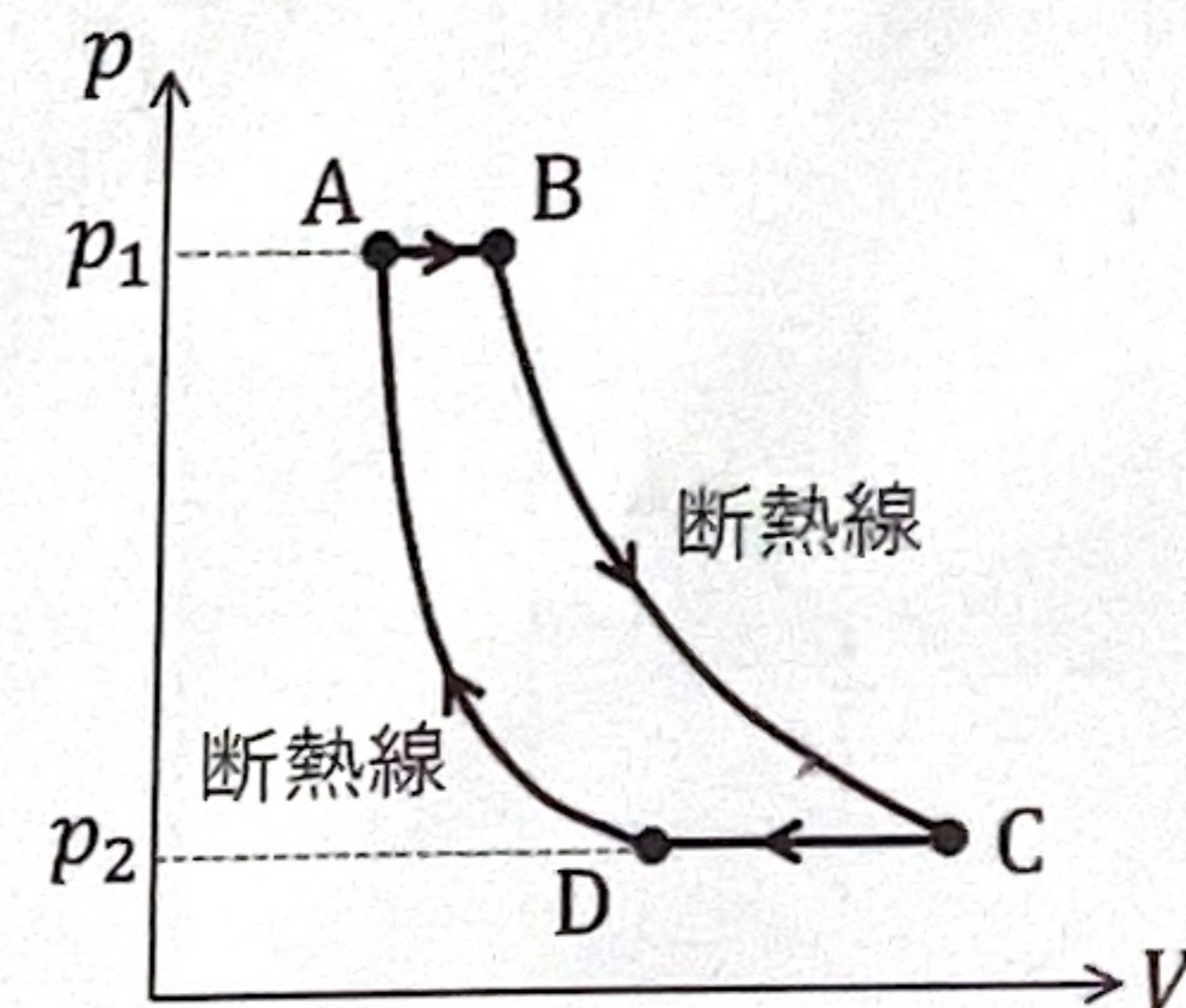


図1

(1) 各状態 $i (= A, B, C, D)$ における作業物質の気体の温度を T_i とする。以下の量を T_i 、気体定数 R 、 C_V 、 C_p のうち必要なものを用いて表せ。

(a) A→B で気体が受け取る熱量 Q_{AB} 、される仕事 W_{AB}

(b) B→C で気体が受け取る熱量 Q_{BC} 、される仕事 W_{BC}

(c) C→D で気体が受け取る熱量 Q_{CD} 、される仕事 W_{CD}

(d) D→A で気体が受け取る熱量 Q_{DA} 、される仕事 W_{DA}

(2) 熱力学の第1法則と前問の結果を用いて、 C_p と C_V の間に成り立つ関係式を導出せよ。

(3) ブレイトンサイクルの熱効率 $\eta = \bar{W}/Q$ を T_i を用いて表せ。ここで \bar{W} は気体が1サイクルで外界にする仕事の総量、 $Q > 0$ は気体が吸熱過程で受け取った熱量である。

(4) C→D における気体のエントロピー変化 ΔS_{CD} を C_p, T_A, T_B を用いて表せ。

(5) 理想気体の準静的断熱膨張・圧縮において成立するポアソンの関係式

$$pV^\gamma = \text{const.} \quad (2)$$

を示せ。ただし、 $\gamma = C_p/C_V$ 、気体の物質量は1モルとする。

(6) AB, CD における圧力をそれぞれ p_1, p_2 とする。熱効率 η を p_1, p_2, γ を用いて表せ。

裏面に問題が続くので注意せよ。

3. 一成分の液体がピストンのついた容器内に入り、温度 T 、体積 V_L の平衡状態にある (図 2(a))。ここで圧力を p に保ったまま等温準静的操作で、容器内の流体を液体から体積 V_G の気体に変化させる。この過程で流体の密度は、図 2(a) では温度 T で液体として存在できる最低の値であり、図 2(c) では温度 T で気体として存在できる最大の値である。途中の図 2(b) では、容器内に液体と気体が共存している。

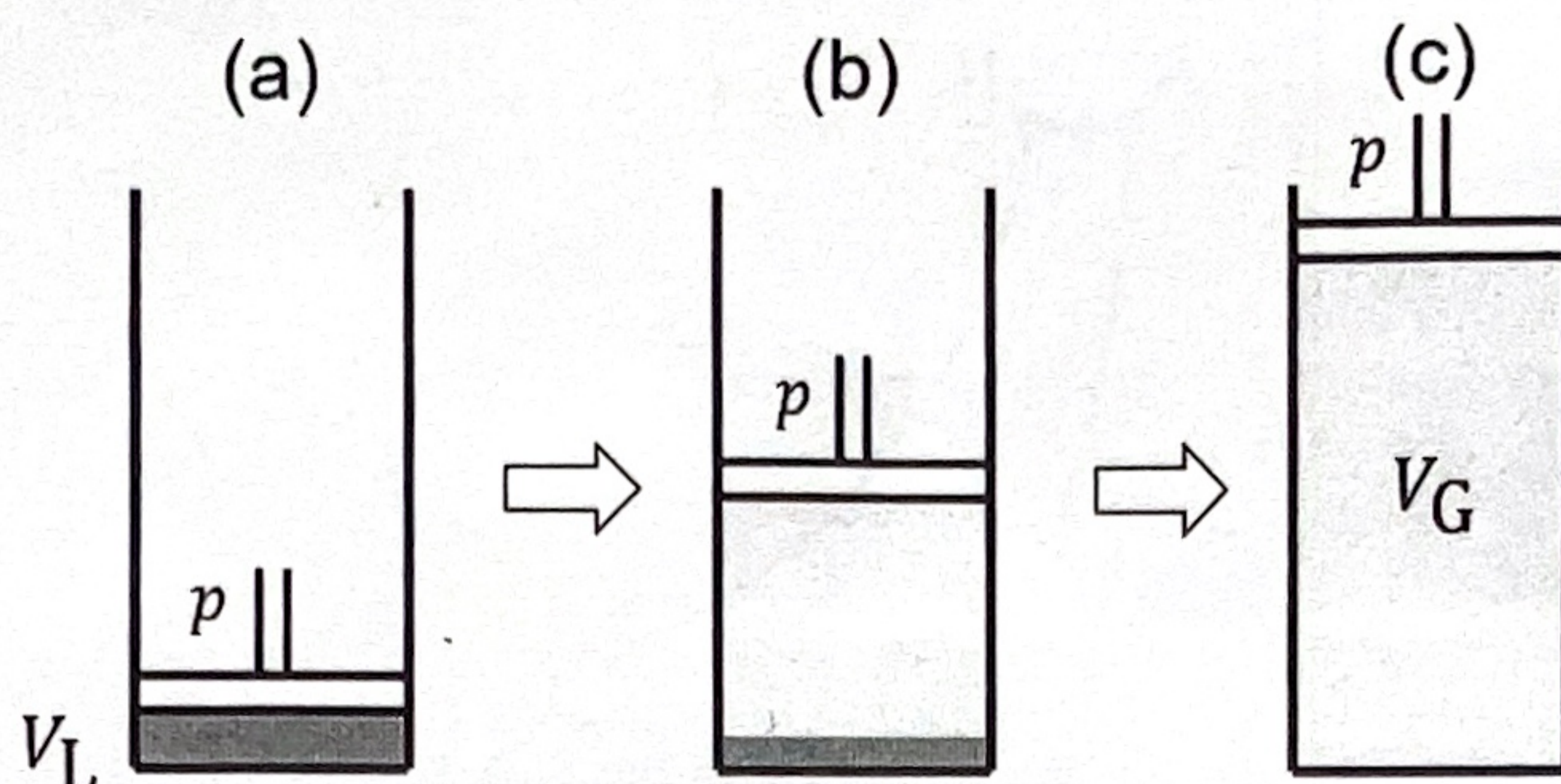


図 2

- (1) この過程で系が外界から吸収する熱 (蒸発熱) は、系のエンタルピーの変化に等しいことを示せ。
- (2) 図 2(a), (c) における流体のヘルムホルツの自由エネルギーをそれぞれ、 $F(T, V_L)$, $F(T, V_G)$ とする。 $F(T, V_G) - F(T, V_L)$ を求めよ。
- (3) 前問の結果を用いて、以下のクラウジウス・クラペイロンの関係式を導け。

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(v_G - v_L)} \quad (3)$$

ただし、系の全粒子数を N として、 $v_L = V_L/N$, $v_G = V_G/N$ である。また、 $q > 0$ は 1 粒子あたりの蒸発熱である。(ヒント: V_L, V_G も温度 T に依存する点に注意せよ。)

- (4) q が温度に依存しない、また v_G は v_L より十分大きく、気体は理想気体であるという近似のもとで、微分方程式 (3) を解き、気液共存線 $p(T)$ を求めよ。
- (5) 1 気圧でのエタノールの沸騰温度は 351 K であり、1 モルあたりの蒸発の潜熱は 38 kJ/mol であった。このことと前問の結果を用いて、2 気圧でのエタノールの沸騰温度を概算せよ。ただし、気体定数の値を $R = 8.3 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$ としてよい。また、 $\ln 2 \sim 0.69$ を用いよ。