数学II ミクプリ的なもの

P.106 7. (1)

$$\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ 2b & 2a & 0 \\ 2c & 0 & 2a \end{vmatrix}$$ … 1行目を2・3行目に加えただけ

$$= (b+c)\cdot 2a \cdot 2a - (a-c)\cdot 2b \cdot 2a - (a-b)\cdot 2a \cdot 2c$$

$$= 4a^2b + 4a^2c - 4a^2b + 4abc - 4a^2c + 4abc$$

$$= 8abc$$ …(答)

下手に a_{21}, a_{31} を 0にして 2×2 行列の det. を求めるより
こっちの方が楽だと思い、こんな答案にしてみました。

(2)

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a^2 & a+b+c \\ b & b^2 & a+b+c \\ c & c^2 & a+b+c \end{vmatrix}$$ … 1列目を3列目に加えただけ

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$ … P.90 定理4.6.12 (1) 参照

$$= (a+b+c)\left(ab^2 + a^2c + bc^2 - ac^2 - a^2b - b^2c\right)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$ …(答)

計算という計算はほとんどありません。
他にも上手い方法はありそうですが。ファンデアモンデとか。

数学II シケプリ的なもの

(3)
$$\begin{vmatrix} a & bc & a^2 \\ b & ca & b^2 \\ c & ab & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & -c(a-b) & (a+b)(a-b) \\ b-c & -a(b-c) & (b+c)(b-c) \\ c & ab & c^2 \end{vmatrix}$$

…1行目から2行目を引いた後、2行目から3行目を引いた。順序を逆にするとchaos。

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & -c & a+b \\ 1 & -a & b+c \\ c & ab & c^2 \end{vmatrix}$$

…1行目からa-bをくくりだし、2行目からb-cをくくりだした。

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & -c & a+b \\ 0 & c-a & c-a \\ 0 & ab+c^2 & c^2-c(a+b) \end{vmatrix}$$

…2行目から1行目を引き、3行目から1行目のc倍を引いた。

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} c-a & c-a \\ ab+c^2 & c^2-c(a+b) \end{vmatrix}$$

…次数下げみたいな。

$$= (a-b)(b-c)(c-a)\left(c^2-c(a+b)-ab-c^2\right)$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$ …答

「くくりだし」をやらないと大変なことになるのを見越しましょう。
その手段の一例が上の解答例です。

(4)
$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ a+b & a+b & -(a+b) \\ a+c & -(a+c) & a+c \end{vmatrix}$$

…2・3行目に1行目を足しただけ

数学Ⅱ ミケプリ的なもの

$$= (a+b)(a+c)\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$ …くくりだしただけ

$$= 2(a+b)(b+c)(c+a)$$ …(答)

最後はサラスの方法にお世話になるのが1番らくなう。
0とか1とかが消えてきたら妙な変形を施すよりも
ちまちま計算した方が楽だったりしますよね。

8. (1) $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$ …面白い形してますよね。

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$ …1行目に2～4行目を足して
くくりだし。

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & d-b & c-b \\ 0 & d-c & a-c & b-c \\ 0 & c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}$$ 2行目から1行目のb倍を、
3 〃 c 〃、
4 〃 d 〃 引いた。

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}$$ …次数下げ的なこと。

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b-c+d & a-b-c+d & 0 \\ 0 & a+b-c-d & a+b-c-d \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}$$

…1行目に2行目を足した後、2行目に3行目を足した。

数学Ⅱ ミテプリ的なもの

$= (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(a-d+c-d-b+d)$

$= (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$ …(答)

最初の一手に気付くことと，サラスの方法を使うタイミングを見極めることがポイント… かな？

(2) 申し訳ありませんが，i) 地道な方法（足し引きのオンパレード）と ii) 思いつきづらい方法しか見つかりませんでした。
ここではとりあえず ii) を紹介します。

与式を $|A|$ とおく。

$$a|A| = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$ … 1行目を a 倍

$$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$ … ここが1番キツいところ。2行目の $-b$ 倍，3行目の $-c$ 倍，4行目の $-d$ 倍を1行目に足す。するとこんな感じに！

$$= (a^2+b^2+c^2+d^2)\begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix}$$ … もう大丈夫よね？

ここで $B = \begin{pmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{pmatrix}$ とすると，

$$a^2|B| = \begin{vmatrix} a & -d & c \\ da & a^2 & -ab \\ -ac & ab & a^2 \end{vmatrix}$$ … 2，3行目を a 倍

数学Ⅱ ジブリ的なもの

$$= \begin{vmatrix} a & -d & c \\ 0 & a^2+d^2 & -(ab+cd) \\ 0 & ab-cd & a^2+c^2 \end{vmatrix}$$ … 2行目から1行目のd倍を引き3行目に1行目のc倍を足した。

$$= a \begin{vmatrix} a^2+d^2 & -(ab+cd) \\ ab-cd & a^2+c^2 \end{vmatrix}$$ … 略

$$= a(a^4+a^2c^2+a^2d^2+a^2b^2)$$ … 高校範囲(笑)

$$= a^3(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

以上より $a|A| = (a^2+b^2+c^2+d^2)|B|$, $a^2|B| = a^3(a^2+b^2+c^2+d^2)$ なので

求める値は $|A| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ …(答)

$|B|$はサラスで求めても良いと思います。この場合、Bを置く必要はありません。
問題は2つ目の変形ですね…。試行錯誤しているうちに見つかりますけど、いきなりこれを思いつくのは厳しいと思います。
あとはちょっとした工夫(?)として、aが0かどうかで場合分けする必要のない手法をとってます。要するにaが分母に来ないようにしただけですが。

(9) $$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^3 & b^3 & c^3 \\ 1 & a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}$$ … この時点で、列を中心とした変形を見越しましょう。

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) \\ 0 & a(a^2-1) & b(b^2-1) & c(c^2-1) \\ 0 & a(a^3-1) & b(b^3-1) & c(c^3-1) \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ a^3-1 & b^3-1 & c^3-1 \end{vmatrix}$$ … a, b, cをくくり出して次数下げ

数学Ⅱ ミケプリ的なもの

$$= abc(a-1)(b-1)(c-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ a^2+a+1 & b^2+b+1 & c^2+c+1 \end{vmatrix}$$ … くくり出し

$$= abc(a-1)(b-1)(c-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$ … 3行目から2行目を引いた後、2行目から1行目を引いた。

$$= abc(a-1)(b-1)(c-1)(a-b)(b-c)(c-a)$$ …(答) ・サラス＋因数分解

これは余裕ですね。a_{21}, a_{31}, a_{41} を0にしようと考えるだけで あとは全て上手くいきますから。

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 \\ 1 & 2b & 3b^2 & 4b^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & a & 2a^2 & 3a^3 \\ 0 & b & 2b^2 & 3b^3 \end{vmatrix}$$ … 3行目から1行目を引き、4行目から2行目を引いた後、2行目から1行目を引いた。

$$= \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ a & 2a^2 & 3a^3 \\ b & 2b^2 & 3b^3 \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)\begin{vmatrix} 1 & a+b & a^2+ab+b^2 \\ a & 2a^2 & 3a^3 \\ b & 2b^2 & 3b^3 \end{vmatrix}$$ … $b-a=-(a-b)$ をくくり出し

$$= -(a-b)\begin{vmatrix} 1 & a+b & a^2+ab+b^2 \\ 0 & a^2-ab & 2a^3-a^2b-ab^2 \\ 0 & b^2-ab & 2b^3-a^2b-ab^2 \end{vmatrix}$$ … 2行目から1行目のa倍を引き、3行目から1行目のb倍を引いた。

数学Ⅱ 汁プリ的なもの

$$= -(a-b)\begin{vmatrix} a^2-ab & 2a^3-a^2b-ab^2 \\ b^2-ab & 2b^3-a^2b-ab^2 \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)^2\begin{vmatrix} a & 2a^3-a^2b-ab^2 \\ -b & 2b^3-a^2b-ab^2 \end{vmatrix}$$ …くくりだしの際、符号に注意!

$$= -(a-b)^2\left(2ab^3-a^3b-a^2b^2+2a^3b-a^2b^2-ab^3\right)$$

$$= -(a-b)^2(ab^3+a^3b-2a^2b^2)$$

$$= -ab(a-b)^4$$ …(答)

簡単ですが、式がやや長いので計算ミスが命取り。
でも、それだけです。強いて言えば最初の変形がポイントでしょうか。
どの行からどの行を引くかを少し考える必要がありますね。