数学Ⅱ

4/14 第0章

0.1 集合の基礎

目標；数学の基礎となる"集合"の概念の導入

定義 0.1.1 (definition)

含まれるか含まれないかの条件が明確である「もの」の集まりを集合(set)という。
「もの」1つ1つを要素(element)または元という.

定義 0.1.2

X；集合 (Xを集合とする)

$x \in X$ (xがXに属する) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ xはXの要素である。
(左側を右側で定義)

$x \notin X$ (xがXに属さない) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ xはXの要素ではない.

記号 0.1.3

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$；自然数全体の集合
$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$；整数全体 〃
$\mathbb{Q}$；有理数全体の集合
$\mathbb{R}$；実数全体 〃
$\mathbb{C}$；複素数全体 〃
ϕ；空集合 (どんな要素も含まない集合)

記号 0.1.4

x；変数 (条件を表すために使う文字)
$C(x)$；xに関する条件
$\{x \mid C(x)\}$；xに関する条件$C(x)$をみたすもの全体の集合.

例 0.1.5

$\leqq$

$\{x \mid x \in \mathbb{R}$ かつ $-1 \leq x \leq 1\}$
$= \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 1\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $(= [-1, 1])$
$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$

NO

DATE

定義 0.1.6

X, Y ; 集合

$X \subset Y \overset{\Leftrightarrow}{\scriptstyle def}$ $\boxed{x \in X \text{ ならば } x \in Y}$ 　　$x \in X \Rightarrow x \in Y$ とも書く.

X を Y の部分集合という.

例 0.1.7

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

定義 0.1.8

X, Y ; 集合

$X = Y \overset{\Leftrightarrow}{\scriptstyle def} X \subset Y$ かつ $Y \subset X$

つまり

"$x \in X \Rightarrow x \in Y$" かつ "$x \in Y \Rightarrow x \in X$"

第1章 ベクトル

目標 「平面ベクトル」,「空間ベクトル」を一般次元に拡張する.

1.1 ベクトル

平面ベクトルは $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ で表されていた.

空間 〃 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ 〃

この一般化を考える.

定義 1.1.1

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (a_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n)$$ を n 次元数ベクトルや n 項数ベクトルという.

太文字

a_i を第 i 成分という.

n 次元数ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と書き n 次元数ベクトル空間という.

例1.1.2

$\mathbb{R}^2$ は平面ベクトル全体の集合

$\mathbb{R}^3$ は空間　〃

注意1.1.3

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a_i \in \mathbb{R} \\ (1 \leqq i \leqq n) \end{array} \right\}$$

注意1.1.4

ベクトルは太文字を用いる。

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{h}, \mathbf{v}, \mathbf{u}$

定義1.1.5

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{\mathbf{a} + \mathbf{b}}_{\text{ベクトルの和}} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \underbrace{k\mathbf{a}}_{\text{スカラー倍}} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

ここで $(-1)\mathbf{a}$ を $-\mathbf{a}$ と書く.

命題1.1.6

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $k, h \in \mathbb{R}$

(1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$　交換法則

(2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$　結合法則

(3)

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{とすると}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

ゼロベクトルの存在

(零)

NO.

DATE

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ 逆ベクトルの存在

(5) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 分配法則

(6) $(k+h)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{a}$ 〃

(7) $kh\boldsymbol{a}=k(h\boldsymbol{a})$ 結合法則

(8) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

証明

成分計算をすればよい.

定義 1.1.7

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$

$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \underset{def}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ に対し, $a_i=b_i$ $(1\leq {}^{\forall}i\leq n)$ 任意の

1.2 複素数

目標 複素数の導入

定義 1.2.1

i; 虚数単位

$a,b\in\mathbb{R}$に対し, $z=a+bi=a+ib$を複素数という.

$w=c+di$ $(c,d\in\mathbb{R})$

$z=w \underset{def}{\Leftrightarrow} a=c$ かつ $b=d$

$z+w \underset{def}{=} (a+c)+(b+d)i$

$zw \underset{def}{=} (ac-bd)+(ad+bc)i$

$c\neq 0$ または $d\neq 0$ のとき

$\dfrac{z}{w} \underset{def}{=} \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

で, $=$, 和, 積, 商を定義する.

$i^2=-1$となる。

実数も複素数とみる.

$$\frac{z}{w}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$=\frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

定義1.2.2

$z = a + bi \in \mathbb{C} \quad (a, b \in \mathbb{R})$

$\bar{z} = a - bi$; 共役複素数

$\mathrm{Re}\, z = a$ 実数, $\mathrm{Im}\, z = b$ 虚部

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; 絶対値

z ; 虚数 $\underset{def}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Im}\, z \neq 0$

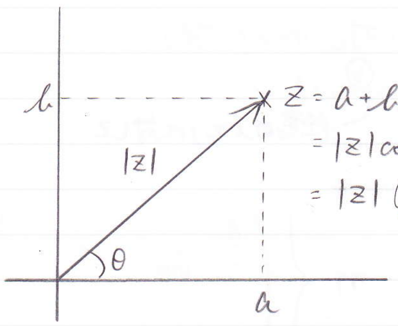
z ; 純虚数 $\underset{def}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Re}\, z = 0$

定義1.2.3

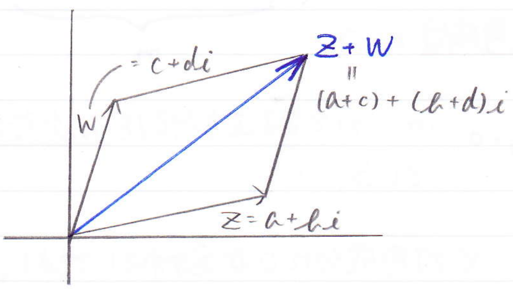
$$\begin{array}{ccc} a + bi & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{C} & \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

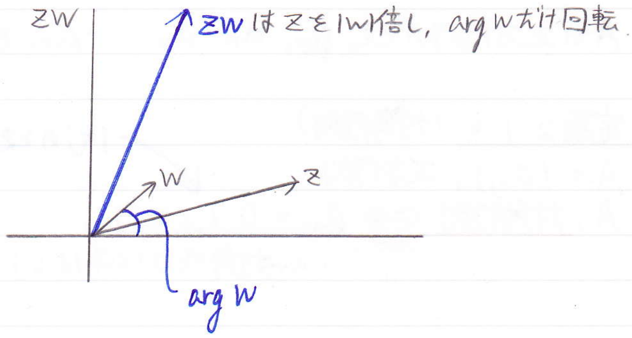
この同一視のもとで $\mathbb{R}^2$ を複素(数)平面という.

$\theta = \arg z$ 　zの偏角



$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta \\ &= |z|\underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}_{= e^{i\theta}} \end{aligned}$$





NO

DATE

4/28 第2章 行列

2.1 行列の定義と演算

目標；行列の概念と計算になれる.

定義2.1.1 (行列)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を $m \times n$ 行列といい, 各 a_{ij} $(\in \mathbb{R})$ を (i, j) 成分という.

$$A = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \\ \text{第}j\text{列} \end{array} \text{第}i\text{行}$$

(i, j) 成分が a_{ij} で与えられている行列を $A = (a_{ij})$ と書く.

定義2.1.2 (行列の相等)

すなわち, that is (ラテン語 id est)

A, B : 行列

$A = B \underset{def}{\Longleftrightarrow}$ AとBは同じ型 (i.e. AもBもある m と n に対し, $m \times n$ 行列.)

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ のとき, $a_{ij} = b_{ij}$ $(\forall i, j)$

任意の i と j に対して.

定義2.1.3 (正方行列)

$A = (a_{ij})$; $m \times n$ 行列

A ; 正方行列 $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $m = n$ (行と列の数が一致.)

$$n \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{n} \right.$$

A が正方行列のとき, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots a_{nn}$ を対角成分という.

定義2.1.4 (対角行列)

$i \neq j$ のとき $a_{ij} = 0$

$m = n$ となる正方行列を n 次行列という.

$A = (a_{ij})$; 正方行列

A ; 対角行列 $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$

(i.e. 対角成分以外は0).

※対角成分に0が含まれていてもよい。

NO.

DATE

定義 2.1.5 (零行列, 単位行列)

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \text{零行列}, \quad E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{単位行列}$$

$m \times n$ 行列　　　n 次行列

$E = (\delta_{ij})$　$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ クロネッカーのデルタ.

定義 2.1.6 (転置行列)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \ m \times n \text{ 行列 に対し,} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \ n \times m \text{ 行列}$$

を A の転置行列という.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \ 2 \times 3 \text{ 行列} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \ 3 \times 2 \text{ 行列}.$$

定義 2.1.7 (スカラー倍)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ に対し,} \quad \underset{(k \in \mathbb{R})}{\underline{kA}} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>A の k 倍</u>
<u>A のスカラー倍</u> という.

定義 2.1.8 (行列の和)

A, B ; $m \times n$ 行列 (同じ型).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \text{ のとき,}$$

$$\underline{A + B} \underset{def}{=} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \quad \underline{A \text{ と } B \text{ の和}}$$

$$\underline{A - B} \underset{def}{=} A + (-1)B.$$

NO.

DATE

定義 2.1.9（行列の積）

A；$m\times n$ 行列，B；$n\times r$ 行列．

$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$

$$AB=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mr} \end{pmatrix} \quad m\times r \text{ 行列を}$$

$$c_{ij}=\sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

AB を A と B の積という．

$$A=\begin{pmatrix} \underbrace{a_{i1}\ \ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}}_{n\text{個}} \end{pmatrix} \begin{array}{l} i\text{行} \end{array} \quad m\times n \qquad B=\begin{pmatrix} \left.\begin{array}{c} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{array}\right\} n\text{個} \end{pmatrix} \quad n\times r$$

j 列

$$C=\begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \cdots\cdots \\ & \vdots & (i,j)\text{成分} \end{pmatrix} \begin{array}{l} i\text{行} \end{array} \quad m\times r$$

j 列

一般的な定義が 2×2 行列についても成り立つ．

問 2.1.10

上の行列の積の定義が 2×2 行列の積の拡張であることを確かめよ．

注意 2.1.11

AB が定義されても BA が存在するとは限らない．
（定義される）

命題 2.1.12

両辺とも定義できるとき，以下が成立．

A, B, C；行列　$k, h\in\mathbb{R}$

(1) $A+B=B+A$．

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) $A+O=O+A=A$．
　$A-A=O$．

(4) $(AB)C=A(BC)$

(5) $AE=EA=A$．　$m\times n$
　（n 次，m 次）

$AO=O$
（$m\times n$，$n\times r$，$m\times r$）

$OA=O$

(6) $(kh)A=k(hA)$

(7) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

(8) $0A=O$，$1A=A$
（0：ゼロ，O：零行列）

(9) $A(B+C) = AB + AC$
(10) $(A+B)C = AC + BC$
(11) $k(A+B) = kA + kB$
(12) $(k+h)A = kA + hA$

証明 成分を用いて示す。
(4)のみ示す.
$A = (a_{ij})$; $m\times n$行列
$B = (b_{ij})$; $n\times r$行列
$C = (c_{ij})$; $r\times s$行列.
ABは$m\times r$行列.
ABとCは積が計算できて, $(AB)C$は$m\times s$行列.
BCは$n\times s$行列.
AとBCは積が計算できて, $A(BC)$は$m\times s$行列.
$(AB)C$と$A(BC)$の(i,k)成分をみる.

(ABのi行とCのk列で$(AB)C$の(i,k)成分.)

ABの(i,j)成分は,

$$\overset{m\times n}{}\ \overset{n\times r}{}\ \sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} b_{\lambda j}$$

$(AB)C$の(i,k)成分は,

$$\sum_{j=1}^{r} \underbrace{\left(\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} b_{\lambda j}\right)}_{AB\text{の}(i,j)\text{成分.}} c_{jk} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} b_{\lambda j} c_{jk}$$

(和はどちらからでもOK)

BCの(λ, k)成分は,

$$\overset{n\times r}{}\ \overset{r\times s}{}\ \sum_{j=1}^{r} b_{\lambda j} c_{jk}$$

$A(BC)$の(i,k)成分は,

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{r} b_{\lambda j} c_{jk}\right)}_{BC\text{の}(\lambda,k)\text{成分}} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} b_{\lambda j} c_{jk} \quad \square.$$

命題 2.1.13
(1) ${}^t({}^tA) = A$
(2) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
(3) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$
(4) ${}^t(aA) = a\,{}^tA$.

証明
(3) $A = (a_{ij})$; $m\times n$行列

NO.
DATE

$B=(b_{ij})$; $n \times r$ 行列
AB の (i,j) 成分は $\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} b_{\lambda j}$
$\therefore\ {}^t(AB)$ の (j,i) 成分は $\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} b_{\lambda j}$
${}^t(AB)$ は $r \times m$ 行列
${}^tB$ は $r \times n$ 行列
${}^tA$ は $n \times m$ 行列
$\therefore\ {}^tB\,{}^tA$ は $r \times m$ 行列.
${}^tB$ の (j,λ) 成分は $b_{\lambda j}$
${}^tA$ の (λ,i) 成分は $a_{i\lambda}$.
$\therefore\ {}^tB\,{}^tA$ の (j,i) 成分は

$$\sum_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda j} a_{i\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} b_{\lambda j} \quad \square.$$

2.2. 正則行列, 逆行列
目標 ; 正則行列と逆行列の理解

定義 2.2.1 (正則行列)
$A=(a_{ij})$; n 次行列
A ; 正則 $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists B$; n 次行列
s.t. (such that) $AB=BA=E_n$
"…となるような"

5/12 定義 2.2.2 (逆行列)
B を A の逆行列という.

命題 2.2.3
逆行列は一意である。
A ; 正則行列
B, C ; A の逆行列 $\Rightarrow B=C$.
証明
$C = EC = (BA)C$
$= B(AC)$
$= BE$
$= B$. $\square$

NO.
DATE

記号2.2.4.
Aの逆行列をA^{-1}と書く.

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

命題2.2.5
(1) A, B; n次正則行列 $\Rightarrow$ ABは正則で$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
(2) A; 正則 $\Rightarrow$ A^{-1}も正則で$(A^{-1})^{-1}=A$.
証明
(1) A, B; 正則 $\Rightarrow$ $\exists A^{-1}, B^{-1}$; 逆行列.
ABに対し, $B^{-1}A^{-1}$をとると,
$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$.
$(B^{-1}A^{-1})(AB)=E$
$\therefore$ ABは正則で$B^{-1}A^{-1}$が逆行列.

(2) $A^{-1}A=E$.
$AA^{-1}=E$.
$\therefore$ A^{-1}は正則でAが逆行列. □

定義2.2.6
A; 正方行列, $n\in\mathbb{Z}$.

$$A^n \underset{def.}{=} \begin{cases} \underbrace{A\cdots A}_{n} & (n>0) \\ E & (n=0) \\ \underbrace{A^{-1}\cdots A^{-1}}_{-n} & (n<0 \text{かつ} A\text{;正則}) \end{cases}$$

2.3 行列の分割.
目標 分割を用いた行列の積の計算の理解.

分割の例.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$$

NO.

DATE

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},\ A_{12} = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix},\ A_{21} = (a_{31},\ a_{32},\ a_{33}),\ A_{22} = (a_{34}).$$

定義 2.3.1 (行列の分割)
このように A を小行列 A_{ij} に分けることを，分割という．

例 2.3.2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_i = (a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in})\quad (1 \leq i \leq m)$
とすると，行ベクトルによる分割．

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

$a'_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ $(1 \leq j \leq n)$ とすると，列ベクトルによる分割

$$A = (a'_1\ \ a'_2\ \ \cdots\ \ a'_n)$$

同じ型の2つの行列に同じ分割を行うと，小行列の和を用いて元の行列の和を計算できる．

分割と積の関係を考える。
A ; $m \times n$ 行列
B ; $n \times l$ 行列．
積 AB を考える。

$$A = \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{ccccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array}} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ A_{r1} & \cdots & & A_{rs} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}m_1 \\ \}m_2 \\ \ \vdots \\ \}m_r \end{array},\quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} l_1 & l_2 & \cdots & l_t \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & & B_{st} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\boxed{n_1} \\ \}\boxed{n_2} \\ \ \vdots \\ \}\boxed{n_s} \end{array}.$$

$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r,\ n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s,\ l = l_1 + l_2 + \cdots l_t$

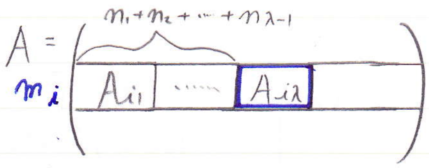
AとBはnの分割の方法が一致している。

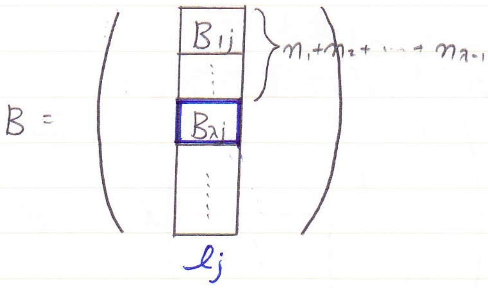
$$C \underset{def}{=} \underset{n\times l}{AB}$$

$$C = \begin{array}{cccccc} & l_1 & l_2 & \cdots & l_t & \\ & \left(\begin{matrix} C_{11} \\ C_{21} \\ \vdots \\ C_{r1} \end{matrix}\right. & C_{12} & \cdots & \left.\begin{matrix} C_{1t} \\ \vdots \\ \\ C_{rt} \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \}m_1 \\ \}m_2 \\ \vdots \\ \}m_r \end{matrix} \end{array}$$

命題 2.3.3

$$C_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{s} A_{i\lambda} B_{\lambda j} \quad (m_i \times l_j \text{ 行列})$$





証明

右辺が定義できること.

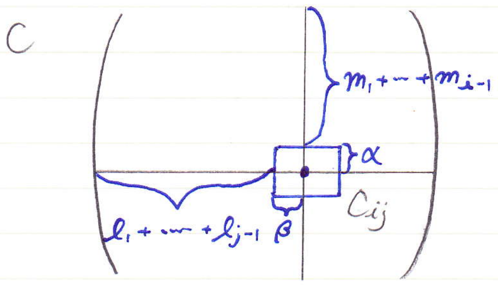
$A_{i\lambda}$; $m_i \times n_\lambda$ 行列.

$B_{\lambda j}$; $n_\lambda \times l_j$ 行列.

∴ $A_{i\lambda}B_{\lambda j}$ は $m_i \times l_j$ 行列. $(1 \leq \lambda \leq s)$.

和は定義される。

さらに左辺も $m_i \times l_j$ 行列より両辺で型が一致.



$$p \underset{def.}{=} m_1 + \cdots + m_{i-1} + \alpha$$

$$q \underset{def.}{=} l_1 + \cdots + l_{j-1} + \beta.$$

$$(C\text{の}(p,q)\text{成分}) = (C_{ij}\text{の}(\alpha,\beta)\text{成分})$$

$$\| $$

$$\sum_{\gamma=1}^{n} a_{p\gamma} b_{\gamma q}.$$

$A_{i\lambda}B_{\lambda j}$ の (α,β) 成分は,

$$\sum_{\gamma=n_1+\cdots+n_{\lambda-1}+1}^{n_1+\cdots+n_\lambda} a_{p\gamma} b_{\gamma q}.$$

$$\sum_{\lambda=1}^{s}\left(\sum_{\tau=n_1+\cdots+n_{\lambda-1}+1}^{n_1+\cdots+n_\lambda} a_{p\tau}b_{\tau q}\right)=\sum_{\tau=1}^{n} a_{p\tau}b_{\tau q} \quad \square.$$

2.4 行列の基本変形 (text P.194)

目標; 逆行列の具体的な求め方を学習する。

定義2.4.1 (行基本変形)

(I) 第i行にc($\neq 0$)をかける。

(II) 第i行のc倍を第j行に加える。　(下線の行のみ変化する.)

(III) 第i行と第j行を入れかえる。

これらを行基本変形という.

定義2.4.2 (基本行列)

以下の正方行列を基本行列という.

(I)
$$P=\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&O&\\&&1&&&&\\&&&c&&&\\&&&&1&&\\&O&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right)&\begin{array}{c}\\\\\\ i\\\\\\\\\end{array}\\ \begin{array}{ccccccc}\;&\;&\;&i&\;&\;&\;\end{array}&\end{array}$$

(II)
$$Q=\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&O&\\&&1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&c&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right)&\begin{array}{c}\\\\\\\\ i\\\\\\\end{array}\\ \begin{array}{ccccccc}\;&\;&j&\;&\;&\;&\;\end{array}&\end{array}$$

$(i \neq j)$

$(i > j$のとき$)$

(III)
$$R=\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{ccccccccc}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&0&&1&&&\\&&&&1\;\ddots\;1&&&&\\&&&1&&0&&&\\&&&&&&1&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&1\end{array}\right)&\begin{array}{c}\\\\\\ i\\\\ j\\\\\\\\\end{array}\\ \begin{array}{ccccccccc}\;&\;&\;&i&\;&j&\;&\;&\;\end{array}&\end{array}$$

$P=(p_{st})$
$$p_{st}=\begin{cases}1 & (s=t \text{ かつ } s\neq i)\\ c & (s=t=i)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$Q=(q_{st})$
$$q_{st}=\begin{cases}1 & (s=t)\\ c & ((s,t)=(i,j))\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$R=(r_{st})$ $\quad r_{st}=\begin{cases}1 & (s,t)=(k,k)\ \text{or}\ (i,j)\ \text{or}\ (j,i) \quad (k\neq i,j)\\ 0 & (\text{その他}).\end{cases}$

命題 2.4.3

基本行列は正則で逆行列は

$$(\mathrm{I}')\quad \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccccc}1 & & & & & & 0\\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c^{-1} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ \\ i\\ \\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array}\end{array}
\qquad
(\mathrm{II}')\quad \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccc}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -c & \ddots & \\ & & & & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ \\ i\\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array}\end{array}$$

$$(\mathrm{III}')\quad \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccccc}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & 1\ \ddots\ 1 & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ i\\ \\ j\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array}\end{array}$$

(同じもの)

証明

成分計算を行う(略).

$\left(\sum p_{ik}p'_{kj}\right)$.

5/19

命題 2.4.4

$m\times n$ 行列の行基本変形は, m 次基本行列を左からかけることで実現できる。

証明

成分計算で示す。

(II)を考える。

$A=(a_{tu})$; $m\times n$ 行列

$Q=(q_{st})$; (II)の基本行列

$$q_{st}=\begin{cases}c & (s,t)=(j,i)\\ 1 & s=t\\ 0 & \text{その他}.\end{cases}$$

$\underset{m\times m,\ m\times n}{QA}$ の (s,u) は $\displaystyle\sum_{t=1}^{m} q_{st}a_{tu}$

$s\neq j$ のとき $q_{st}=\begin{cases}1 & (t=s)\\ 0 & (t\neq s)\end{cases}$

よって QA の (s, u) 成分は a_{su}.
j 行以外は QA と A は一致.
$s=j$ のとき.

$$q_{st} = \begin{cases} c & t=i \\ 1 & t=j \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

よって QA の (s, u) 成分は
$a_{ju} + c a_{iu}$
i 行の c 倍を j 行にかえた。□

定義 2.4.5 (行基本変形)
(I) 第 i 列に $c\ (\neq 0)$ をかける.
(II) 第 j 列の c 倍を第 i 列にかえる.
(III) 第 i 列と第 j 列を入れかえる。
$\Big\}$ これらを列基本変形という.

命題 2.4.6
$m \times n$ 行列の列基本変形は, n 次基本行列を右からかけることで実現できる.

$\underset{m\times n,\ n\times n}{AQ^{t}}$ 列.

○基本変形による逆行列の求め方.
定理 2.4.7 (p. 216)
A; n 次正則行列
$n \times 2n$ 行列 $n\big(\underset{n}{\boxed{A}}\ \underset{n}{\boxed{E}}\big)$ を考え, 有限回の行基本変形で A の部分を単位行列に変形出来ると
すると, 出来る行列は $(E\ A^{-1})$。

例 2.4.8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{(II)}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

第1行の(-2)倍を
第2行にかえる.
行基本変形.

$$\xrightarrow{(\mathrm{III})}$$

第1行の(-1)倍を第3行に加える。
③ + (-1) ①

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{②}\leftrightarrow\text{③}]{(\mathrm{III})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(1, 1)成分を用いて
第1列を掃き出す

$$\xrightarrow[\text{①}+(-3)\text{②}]{(\mathrm{II})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③}+5\text{②}]{(\mathrm{III})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{③}\times(-2)]{(\mathrm{I})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{①}+(-2)\text{③}]{(\mathrm{III})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{\begin{array}{ccc} -10 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \end{array}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

A^{-1}.

証明.
行基本変形は, n次の基本行列を, 左からかけて実現出来る。

$Q_k \cdots\cdots Q_2 Q_1 A$

その積を P とする。 $(P = Q_k \cdots\cdots Q_2 Q_1)$

$PA = E$

$\therefore P = A^{-1}$

$\because$ Pは正則

$\because$ Q_iが正則

正則行列の積も正則.

$A = P^{-1}$; 正則.

$AP = P^{-1}P = E$; PはAの逆行列.

$\underset{n\times n}{P}\ \underset{n\times 2n}{(A \mid E)} = (PA \mid P)$ ⟶ 分割を利用.

$= (E \mid A^{-1})$

Pを左からかけることは, 行基本変形を表す。

定理2.4.9 (後期に証明).
A ; 正則 $\Longleftrightarrow$ 行基本変形でAを単位行列に変形できる。

2.5 複素ベクトルと複素行列.
定義2.5.1

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (a_i \in \mathbb{C},\ 1 \leq i \leq n)$$ をn次元複素ベクトルという。

NO.

DATE

$A=(a_{ij})$ $(a_{ij}\in\mathbb{C})$ を複素行列という。

演算は同様。スカラー倍は複素数倍。

定義 2.5.2

$A=(a_{ij})$ $(a_{ij}\in\mathbb{C})$

$\overline{A} \underset{\text{def.}}{=} (\overline{a_{ij}})$ 複素共役行列.

$a+bi \to a-bi$. $(a, b\in\mathbb{R})$.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1+i\\ i & 0\end{pmatrix} \qquad \overline{A}=\begin{pmatrix}2 & 1-i\\ -i & 0\end{pmatrix}$$

$\overline{a+bi}=a-bi$. 複素共役.

以下, 複素行列をこの章では考える。

命題 2.5.3

A, B ; 行列, $\lambda\in\mathbb{C}$

(1) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$

(2) $\overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\,\overline{A}$

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$

(4) $\overline{\overline{A}}=A$

証明は成分計算.

定義 2.5.4

A ; 行列

$A^* \underset{\text{def.}}{=} {}^t\overline{A}$ 随伴行列.

命題 2.5.5

(1) $(A+B)^*=A^*+B^*$

(2) $(\lambda A)^*=\overline{\lambda}A^*$

(3) $(AB)^*=B^*A^*$

(4) $(A^*)^*=A$.

定義2.5.6

A; 複素行列 (正方行列)

A; <u>エルミット行列</u> $\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $A^* = A$

A; <u>ユニタリ行列</u> $\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $AA^* = A^*A = E$.

$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$
エルミット	対称
ユニタリ	直交.

A; 実行列 (正方行列)

A; 対称行列 $\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ ${}^tA = A$.

A; 直交行列 $\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $A\,{}^tA = {}^tAA = E$.

第3章 線形写像.

3.1 写像.

<u>目標</u>; 写像の定義の理解.
全射と単射に慣れる。

定義3.1.1

X, Y; 集合.

$f ; X \to Y$ <u>写像</u> $\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ f は Xの元に対し, Yの元を与える対応で, Xの各元に対し Yの元が唯一つ定まっている。

X; fの定義域

Y; fの値域.

<u>$f(x) = y$</u> $\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ 写像fで $x \in X$ に対し y が対応.

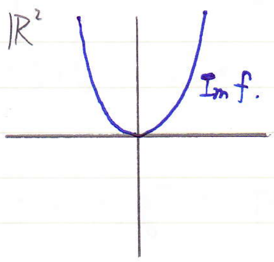
$$\mathrm{Im}(f) = \{ y \in Y \mid {}^{\exists} x \in X \ \text{s.t.}\ f(x) = y \}$$
$$= \{ f(x) \mid x \in X \} \subset Y$$

fの像 (image) という.

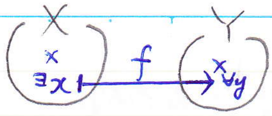
ex.) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$f(x) = (x, x^2)$

$\mathrm{Im}\, f = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \}$.



5/26 定義 3.1.2 (全射, 単射, 全単射)



$f; X \to Y$ 写像

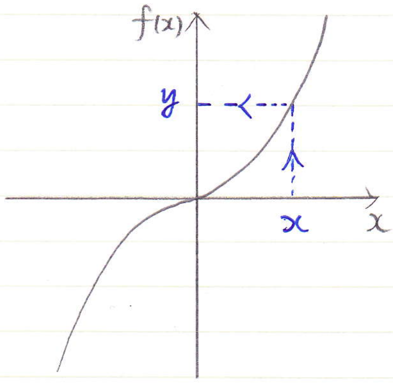
f; 全射 $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Im} f = Y$ i.e. $\forall y \in Y, \exists x \in X$ s.t. $f(x) = y$.

f; 単射 $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ "$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$" $\Longleftrightarrow$ "$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$"

f; 全単射 $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ fは全射かつ単射.

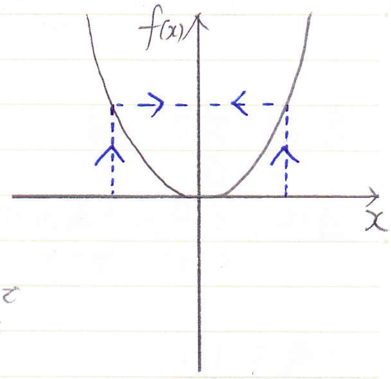
例 3.1.3

$f; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^3$
は全単射.



$g; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g(x) = x^2$
は全射でも
単射でもない.

定義域は実数全体であるのに対し，値域は0以上の実数だから。



定義 3.1.4 (恒等写像)

$f; X \to X$ 恒等写像 (identity map) $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $f(x) = x$

$id : X \to X$ と書く
(id_X)

定義 3.1.5 (合成写像)

$\left.\begin{array}{l} f; X \to Y \\ g; Y \to Z \end{array}\right\}$ 写像

$g \circ f : X \to Z$ を $g \circ f(x) = g(f(x)) \in Z$ で定義する. fとgの合成という.

命題 3.1.6

写像の相等は3.1.9.

$f : X \to Y$ 全単射 $\Rightarrow \exists g : Y \to X$ s.t. $g \circ f = id_X : X \to X$
$f \circ g = id_Y : Y \to Y$

証明

f : 全射より $\forall y \in Y, \exists x \in X$ s.t. $f(x) = y$
f : 単射より, $f(x) = f(x') = y \Rightarrow x = x'$
これにより $g : Y \to X$ を $g(y) = x$ で定義.

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x \overset{3.1.9}{\Rightarrow} \therefore\ g\circ f = id_X \quad (\forall x\in X)$$
$$f\circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y \Rightarrow \therefore\ f\circ g = id_Y. \quad (\forall y\in Y) \quad \square$$

定義3.1.7 (逆写像)
上の $g: Y\to X$ を全単射 f の逆写像とよび f^{-1} と書く.
(inverse map)

命題3.1.8 [証明… text P.45]
$f: X\to Y$, $g: Y\to X$ 写像
(1) $g\circ f = id_X \Rightarrow f$:単射, g:全射.
(2) $g\circ f = id_X$ かつ $f\circ g = id_Y \Rightarrow f, g$:全単射, $g = f^{-1}$, $f = g^{-1}$.

定義3.1.9 (写像の相等)
$f: X\to Y$
$g: Y\to X$ 写像
$f = g \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall x\in X,\ f(x) = g(x)$.

$f: X\to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ を関数という.

3.2 線形写像
目標;数ベクトル空間の線形写像の理解.

定義3.2.1 (数ベクトル空間の線形写像)
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 線形写像
${}^\forall \mathbb{a}, \mathbb{b}\in\mathbb{R}^n$, ${}^\forall k\in\mathbb{R}$ に対し,
(1) $f(\mathbb{a}+\mathbb{b}) = f(\mathbb{a}) + f(\mathbb{b})$
(2) $f(k\mathbb{a}) = kf(\mathbb{a})$.
つまり, f はベクトルの和とスカラー倍を保つ.

注意3.2.2
(1)上の条件は, ${}^\forall \mathbb{a}, \mathbb{b}\in\mathbb{R}^n$, ${}^\forall k, l\in\mathbb{R}$ に対し
$$f(k\mathbb{a}+l\mathbb{b}) = kf(\mathbb{a}) + lf(\mathbb{b})$$
と同値.

NO.

DATE

(2) $\mathbb{0} \in \mathbb{R}^n$ (零ベクトル)

$f(\mathbb{0}) = \mathbb{0} \in \mathbb{R}^m$. (条件(2)より従う.)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = ax + b \ (a, b \in \mathbb{R})$ は $b \neq 0$ のとき線形写像ではない.

例 3.2.3

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = ax$ は線形.

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$ は線形.

命題 3.2.4

$\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l \end{array}\right\}$ 線形 $\Longrightarrow$ $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ も線形.

証明

$^\forall \mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} g \circ f(\mathbb{a} + \mathbb{b}) &= g(f(\mathbb{a} + \mathbb{b})) \\ &= g(f(\mathbb{a}) + f(\mathbb{b})) \\ &= g(f(\mathbb{a})) + g(f(\mathbb{b})) \\ &= g \circ f(\mathbb{a}) + g \circ f(\mathbb{b}) \end{aligned}$$

$^\forall \mathbb{a} \in \mathbb{R}^n, \ ^\forall k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g \circ f(k\mathbb{a}) &= g(f(k\mathbb{a})) \\ &= g(kf(\mathbb{a})) \\ &= kg(f(\mathbb{a})) \\ &= kg \circ f(\mathbb{a}) \end{aligned}$$ □

3.3. 線形写像の行列表現(表示).

目標; 線形写像と行列の対応を考える.

定義 3.3.1 (標準基底)

$\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots\cdots, \ \mathbb{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底という.

(n個のベクトルの組).

$\mathbb{R}^m$ の標準基底を $\mathbb{e}_1', \mathbb{e}_2', \cdots, \mathbb{e}_m'$ とする.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 線形に対し, $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ を対応させる.

$f(\mathbb{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ f(\mathbb{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \cdots, \ f(\mathbb{e}_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ より, a_{ij} を定義する.

$$f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = a_{1j}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{2j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{mj}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$= a_{1j}e_1' + a_{2j}e_2' + \cdots + e_{mj}e_m'$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \boxed{a_{ij}} e_i'$$

<u>定義 3.3.2</u> (線形写像の表現行列)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 線形.

上のように定めた $m \times n$ 行列を <u>fに対応する行列</u>や<u>fの表現行列</u>という.

<u>命題 3.3.3</u>

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 線形

A : fの表現行列. $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = Ax.$

<u>証明</u>

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)$$

$$= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n)$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

2.3.3より.

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)}_{n\text{個}.} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} n\text{個}.$$

$$= Ax \ \square.$$

NO.

DATE

<u>定義 3.3.4</u>.（行列が定める線形写像）

A : $m \times n$ 行列.

$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $f_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^m$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ で定義.

f_A を Aが定める線形写像 という.

<u>命題 3.3.5</u>

f_A は線形.

<u>証明</u>

(1) $f_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = f_A(x) + f_A(y)$.

(2) $f_A(kx) = A(kx) = kAx = kf_A(x)$. □

<u>定理 3.3.6</u>

$M_{m,n}(\mathbb{R})$: 実 $m \times n$ 行列全体の集合.

$L_{m,n}(\mathbb{R})$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 線形写像全体の集合.

$\Longrightarrow {}^{\exists}\varphi$; $L_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ 全単射.

<u>証明</u>.

φ は 3.3.3 のように作る.

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対し, $\varphi(A) = f \in L_{m,n}(\mathbb{R})$ を $f(x) = Ax$ で定義.

<u>φ の全射性</u>

$f \in L_{m,n}(\mathbb{R})$ に対し, 表現行列を A とすると $\varphi(A) = f_A$.

6/2 A : $m \times n$ 行列

$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \in L_{m,n}(\mathbb{R})$ に対し, $\varphi(f_A) = A$

∵

$$f_A(e_j) = Ae_j = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

∴ f_A の表現行列は A.

<u>φ の単射性</u>

$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\varphi(f) = \varphi(g)$ とする。この行列を A とする。

$f(x) = Ax = g(x)$ $({}^{\forall}x \in \mathbb{R}^n)$

∴ $f = g$. □

○ 同型写像

<u>定義 3.3.9</u>（同型写像）

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 線形

f：同型写像 $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ f：全単射.

注意 3.3.10

f：同型写像 $\Longrightarrow$ $n=m$（後で示す.）

○線形写像の合成と行列の積.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 線形，A：$m\times n$ 行列が対応. i.e. $f(\mathbb{x})=A\mathbb{x}$.

$g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ 線形，B：$\ell\times m$ 行列が対応. i.e. $g(\mathbb{y})=B\mathbb{y}$

定理 3.3.7

$g\circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ に対応する行列は BA.（行列の積の由来.）

証明

$g\circ f(\mathbb{x}) = g(f(\mathbb{x})) = g(A\mathbb{x}) = B(A\mathbb{x}) = (BA)\mathbb{x}$. □

例 3.3.8

$f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，角度 α, β の回転.

対応する行列は $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$.

$g\circ f$ は角度 $\alpha+\beta$ の回転.

対応する行列は $C = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$

$C = BA$ より

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

以下，同型写像 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を考える.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 同型

$\exists g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ f の逆写像（f：全単射より.）

i.e. $g\circ f = id_{\mathbb{R}^n}$，$f\circ g = id_{\mathbb{R}^n}$.

命題 3.3.11

g は線形写像.

証明

(1) $g(\mathbb{a}+\mathbb{b}) = g(\mathbb{a})+g(\mathbb{b})$ ($^\forall \mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$) を示す.

$g(\mathbb{a}+\mathbb{b}) - g(\mathbb{a}) - g(\mathbb{b}) = \mathbb{0}$ を示す.

NO.

DATE

$$f(g(\mathbb{a}+\mathbb{b})-g(\mathbb{a})-g(\mathbb{b}))=f\circ g(\mathbb{a}+\mathbb{b})-f\circ g(\mathbb{a})-f\circ g(\mathbb{b})$$
$$=\mathbb{a}+\mathbb{b}-\mathbb{a}-\mathbb{b} \quad \leftarrow f\circ g=id\text{より.}$$
$$=\mathbb{0}$$

f:単射より,

$g(\mathbb{a}+\mathbb{b})-g(\mathbb{a})-g(\mathbb{b})=\mathbb{0}$ $(\because f(\mathbb{0})=\mathbb{0})$

$\therefore g(\mathbb{a}+\mathbb{b})=g(\mathbb{a})+g(\mathbb{b})$.

(2) $g(k\mathbb{a})=kg(\mathbb{a})$ $({}^\forall\mathbb{a}\in\mathbb{R}^m)$ を示す。

$$f(g(k\mathbb{a})-kg(\mathbb{a}))=f\circ g(k\mathbb{a})-kf\circ g(\mathbb{a})$$
$$=k\mathbb{a}-k\mathbb{a}$$
$$=\mathbb{0}.$$

f:単射より,

$g(k\mathbb{a})-kg(\mathbb{a})=\mathbb{0}$

$\therefore g(k\mathbb{a})=kg(\mathbb{a})$ □.

fにAが対応すると, gにはA^{-1}が対応する。(AB = BA = E より.)

↖B

演習で「A : 正則 ⟺ f_A : 同型」を考える.

第4章 行列式.

4.1 置換.

<u>目標</u>: 置換の定義と積の計算.

$M_n \underset{def.}{=} \{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ n文字の集合.

<u>定義 4.1.1</u>

$\sigma: M_n \to M_n$ 全単射を<u>置換</u>という.

<u>記号 4.1.2</u>

$\sigma(1)=i_1,\ \sigma(2)=i_2,\ \cdots\cdots,\ \sigma(n)=i_n$ のとき,

$$\sigma=\underline{\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots\cdots & i_n\end{pmatrix}}$$

と書く.

<u>注意 4.1.3</u>

このσに対し, M_nの順列 $\langle i_1, i_2, \cdots\cdots, i_n\rangle$ を対応させると, 置換と順列が1:1対応.

NO.

DATE . .

記号4.1.4
n文字の置換全体の集合をS_nと書く.

命題4.1.5
S_nの要素の数は$n!$個.

例4.1.6
$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

例4.1.7
(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
… 行き先が等しければ写像としても等しいため.

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}} & 3 & 4 \\ 3 & & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\sigma(i) = i$となるものは省略して表す場合がある。

定義4.1.8 (置換の積)
$\sigma, \tau \in S_n$

σとτの積$\tau\sigma$を合成写像$\tau \circ \sigma : M_n \to M_n$で定義.

$\tau\sigma \in S_n$ (演習で, 全単射2つの合成は全単射を示す.)

○積の求め方

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

τを並びかえて

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$$

$\because$ $\tau\sigma(k) = \tau \circ \sigma(k) = \tau(\sigma(k)) = \tau(i_k) = r_k$.

NO.

DATE

例4.1.9

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{3 \quad 1 \quad 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3 \quad 2 \quad 1} \\ 2 \quad 1 \quad 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{3 \quad 2 \quad 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3 \quad 1 \quad 2} \\ 1 \quad 3 \quad 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\tau\sigma \neq \sigma\tau$.（非可換）

$\tau\sigma(1) = \tau(3) = 1$

4.2 置換の互換への分解

定義4.2.1（恒等置換）

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots\cdots & n \end{pmatrix}$$ を恒等置換という.

定義4.2.2（逆置換）

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots\cdots & i_n \end{pmatrix}$ に対し，$\sigma^{-1} \underset{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots\cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots\cdots & n \end{pmatrix}$ を逆置換という.

注意4.2.3

(1) σ^{-1} は唯一つ定まる。

(2) $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$

6/9 命題4.2.4

S_n は積に関して群（group）になる。

(1) $(\rho\tau)\sigma = \rho(\tau\sigma)$ $(\forall \sigma, \tau, \rho \in S_n)$

(2) $\sigma\varepsilon = \varepsilon\sigma = \sigma$ $(\forall \sigma \in S_n)$

(3) $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \varepsilon$.

定義4.2.5

集合に積が定義され，(1)～(3)を満たすとき，群という.

定義4.2.6

S_n を n 次対称群という.

命題4.2.7

G; 群.
$a, b, c \in G,\ a \neq b$ $\Rightarrow$ (1) $ac \neq bc,\ ca \neq cb$
(2) $a^{-1} \neq b^{-1}$
(3) $f ; G \to G,\ g ; G \to G,\ h ; G \to G$ は全単射.

$$\begin{array}{ccc} G \to G & G \to G & G \to G \\ \cup\!\!\!\!\mid \quad \cup\!\!\!\!\mid & \cup\!\!\!\!\mid \quad \cup\!\!\!\!\mid & \cup\!\!\!\!\mid \quad \cup\!\!\!\!\mid \\ a \mapsto ac & a \mapsto ca & a \mapsto a^{-1} \end{array}$$

cはある決まった元.

定義4.2.8

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{m-1} & i_m & i_{m+1} & \cdots & i_n \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_m & i_1 & i_{m+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$ 巡回置換.

このとき $\sigma = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_m)$ と書く.

例4.2.9

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= (1\ 5\ 3).$$

命題4.2.10

置換は, 共通文字を含まない巡回置換の積で表せる。表し方は順序をのぞき一意

例4.2.11

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 4 & 5 & 1 & 9 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4\ 5)(2\ 7\ 8)(6\ 9)$$
$$= (6\ 9)(2\ 7\ 8)(1\ 3\ 4\ 5)$$

証明

$1 \xmapsto{\sigma} j_1 \xmapsto{\sigma} j_2 \xmapsto{\sigma} \cdots$ を考える。この列には必ず2回現れる文字がみつかる。

主張 初めに2回現れる文字は1.

$\because$) 1ではなく j_k とする。

初めに帰ってくるのが

$$1 \xmapsto{\sigma} j_1 \xmapsto{\sigma} j_2 \xmapsto{\sigma} \cdots \xmapsto{\sigma} j_{k-1} \xmapsto{\sigma} \boxed{j_k} \xmapsto{\sigma} j_{k+1} \xmapsto{\sigma} \cdots$$
$$j_m \xmapsto{\sigma} j_k$$

$\sigma(j_{k-1}) = j_k = \sigma(j_m)$

σ ; 単射より $j_{k-1} = j_m$
これは j_k の取り方に矛盾.

$$1 \overset{\sigma}{\longmapsto} j_1 \overset{\sigma}{\longmapsto} j_2 \overset{\sigma}{\longmapsto} \cdots\cdots \overset{\sigma}{\longmapsto} j_m \overset{\sigma}{\longmapsto} 1$$

$\begin{pmatrix} 1 & j_1 & \cdots\cdots & j_m \\ j_1 & j_2 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}$ に対応.

残りでも同じ議論.
得られた巡回置換の積が求めるもの. $\Box$

定義 4.1.12

(i, j) を互換という. ∵ 2文字の巡回置換.

命題 4.1.13

巡回置換は互換の積で表せる。

証明

$\sigma = (i_1\ i_2\ \cdots\cdots\ i_m)$
$\quad = (i_1\ i_m)(i_1\ i_{m-1})\cdots\cdots(i_1\ i_4)(i_1\ i_3)(i_1\ i_2) = \tau$

∵) $\sigma(i_k) = \tau(i_k)$ $(1 \leq {}^\forall k \leq n)$ を示す.

$1 \leq k \leq m-1$ のとき.

$\sigma(i_k) = i_{k+1}$
$\tau(i_k) = i_{k+1}$

∵) i_k が出てくるのは $(i_1\ i_k)$ のみ.
ここで $i_k \longmapsto i_1$。次の $(i_1\ i_k)$ で i_{k+1} に行く.

$k = m$ のとき

$\sigma(i_m) = i_1$
$\tau(i_m) = i_1$

$m+1 \leq k \leq n$ のとき.

$\sigma(i_k) = i_k = \tau(i_k)$.

$\therefore \sigma = \tau$. $\Box$

i_k 等は巡回置換の文字を用いた。

命題 4.2.13

置換は互換の積で表せる。

4.3 置換の符号.

定義 4.3.1

σ ; m 個の互換の積で表された置換.

$\mathrm{sgn}(\sigma) \underset{\text{def.}}{=} (-1)^m$

σ の符号, sign, signature.

これが定義になるか? → これがきちんと定まることをみる。

定義 4.3.2 text. P.73

P ; $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の多項式.

$\sigma \in S_n$.

σP ; $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}$ で置き換えた多項式.

定義 4.3.3

$\Delta = \Delta(x_1, \cdots, x_n) \underset{\text{def.}}{=} \boxed{\prod_{i<j}} (x_i - x_j)$; 差積.

$i<j$ をみたす全ての項の積.

$\Delta(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$

補題 4.3.4

$\sigma \in S_n$; 互換. $\Rightarrow \sigma\Delta = -\Delta$.

$\sigma = (2 \ \ 3) \quad \cdots \quad \sigma\Delta = (x_1 - x_3)(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)$

$= -(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$

$= -\Delta$.

$\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)$
$\times (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)$
$\times (x_3 - x_4)$

$\sigma = (2 \ \ 4) \quad \cdots \quad \sigma\Delta = (x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)$
$\times (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)$
$\times (x_3 - x_2)$

$= -\Delta$.

NO.

DATE

証明.

$\sigma = (i, j)$

Δ と $\sigma\Delta$ の異なるところは x_i と x_j が現れるところ.

○ 1つ含まれる項

$k \neq i, j$

	$\cdots\cdots$ i	$\cdots\cdots$ j	$\cdots\cdots$
	$\uparrow k$	$\uparrow k$	$\uparrow k$
Δ	$(x_k - x_i)(x_k - x_j)$	$(x_i - x_k)(x_k - x_j)$	$(x_i - x_k)(x_j - x_k)$
	$\parallel \ \downarrow \sigma$	$\parallel \ \downarrow \sigma$	$\parallel \ \downarrow \sigma$
$\sigma\Delta$	$(x_k - x_j)(x_k - x_i)$	$(x_j - x_k)(x_k - x_i)$	$(x_j - x_k)(x_i - x_k)$

○ x_i と x_j が両方入る項.

$$(x_i - x_j) \xrightarrow{\sigma} (x_j - x_i) = -(x_i - x_j)$$

$\therefore \ \sigma\Delta = -\Delta$. □

命題4.3.5

σ を互換で表すとき, 互換の数の偶奇は σ によってのみ定まる。

証明

$\sigma = \sigma_r \sigma_{r-1} \cdots \sigma_1 = \tau_s \tau_{s-1} \cdots \tau_1$ 互換の積.

$\sigma\Delta = (\sigma_r \cdots \sigma_1)\Delta = (-1)^r \Delta$

$\sigma\Delta = (\tau_s \cdots \tau_1)\Delta = (-1)^s \Delta$

$\therefore \ (-1)^r = (-1)^s$

$\therefore \ r \equiv s \pmod 2$. □

定義4.3.6

σ ; 偶置換 (奇) $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{sgn}(\sigma) = +1$ (-1)

命題 4.3.7

$\sigma, \tau \in S_n$

(1) $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$

(2) $\mathrm{sgn}(\varepsilon) = 1$

(3) $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

(3)は $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$ より,

$$\because)\ (\sigma\tau)(\tau^{-1}\sigma^{-1}) = \sigma(\tau\tau^{-1})\sigma^{-1} = \sigma\sigma^{-1} = \varepsilon.$$

$$(i\ \ j)^{-1} = (i\ \ j)$$

4.4. 行列式の定義と基本性質

目標；行列式の定義と計算法の理解.

定義4.4.1

$A = (a_{ij})$; n次行列

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\text{def.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Aの行列式 (determinant).

例4.4.2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \left\{ \overset{\sigma_1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}, \overset{\sigma_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$\qquad +1 \qquad -1$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

A : 3次

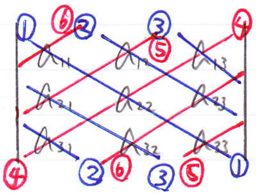
$$S_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\qquad +1 \qquad -1 \qquad -1 \qquad +1 \qquad +1 \qquad -1$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{22}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

6/16



$$= \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}}$$

$$- \underline{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underline{a_{12}a_{21}a_{33}} - \underline{a_{11}a_{23}a_{32}}$$

NO.

DATE

○行列式の性質

命題4.4.3

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

証明

$A = (a_{ij})$

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$\sigma(1) \neq 1$ のとき, $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma 2} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$.

$\because)$ $\sigma(k) = 1$ $(k \neq 1)$

　ここで, $a_{k\sigma(k)} = 0$.

よって $\sigma(1) = 1$ というσのみについて和を考えればよい。

$$|A| = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \mathrm{sgn}(\sigma) \underline{a_{1\sigma(1)}} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{11} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= a_{11} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}(\tau)\, a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

$$\left(\begin{array}{l} \tau ; \{2, \cdots, n\} \to \{2, \cdots, n\} \\ \tau(k) = \sigma(k) \end{array} \right)$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \square$$

系4.4.4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \vdots \\ 0 & \ddots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

命題4.4.5

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & s \end{array} \\ & \begin{vmatrix} A & B \\ \boxed{O} & D \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} r \\ s \end{array} = |A| \cdot |D|$$

零行列　対称分割.

証明

$X = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = (a_{ij}),\ n = r+s$

$i > r,\ 1 \leq j \leq r$ で $a_{ij} = 0$.

よって, $r+1 \leq k \leq s$ のとき $\sigma(k) \geq r+1$ という $\sigma \in S_n$ のみ考えればよい.

$\{\sigma(r+1), \cdots\cdots, \sigma(n)\} = \{r+1, \cdots\cdots, n\}$

よって, $\{\sigma(1), \cdots\cdots, \sigma(r)\} = \{1, \cdots\cdots, r\}$

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots\cdots & r \\ \sigma(1) & \cdots\cdots & \sigma(r) \end{pmatrix} \in S_r$, $\rho = \begin{pmatrix} r+1 & \cdots\cdots & n \\ \sigma(r+1) & \cdots\cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_s$: 文字は $\{r+1, \cdots, n\}$

$\sigma = \rho\tau$ ($\rho, \tau \in S_n$ とみて)

$$\tau = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots\cdots & r & r+1 & \cdots\cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots\cdots & \sigma(r) & r+1 & \cdots\cdots & n \end{array}\right)$$

$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\rho)\,\mathrm{sgn}(\tau)$

$$|X| = \sum_{\substack{\tau \in S_r \\ \rho \in S_s}} \mathrm{sgn}(\rho\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots\cdots a_{r\tau(r)} a_{r+1\rho(r+1)} \cdots\cdots a_{n\rho(n)}.$$

$$= \left(\sum_{\tau \in S_r} \mathrm{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots\cdots a_{r\tau(r)}\right) \times \left(\sum_{\rho \in S_s} \mathrm{sgn}(\rho)\, a_{r+1\rho(r+1)} \cdots\cdots a_{n\rho(n)}\right)$$

$\therefore\ |X| = |A| \cdot |D|.$ □

命題 4.4.6

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{ca_{i1} \quad \cdots\cdots \quad ca_{in}} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

証明

$$(\text{左辺}) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots \boxed{c a_{i\sigma(i)}} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= c \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$= (\text{右辺}).$

命題 4.4.7 第i行において $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$.

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{b_{i1}+c_{i1} \quad \cdots \quad b_{in}+c_{in}} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

命題 4.4.8

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

証明

$\sigma \in S_n$

$$\tau \underset{\text{def.}}{=} \sigma(i\ j) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \boxed{\sigma(j)} & \cdots & \boxed{\sigma(i)} & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \qquad \tau(i) = \sigma(j),\ \tau(j) = \sigma(i).$$

$$\begin{array}{ccc} S_n & \longrightarrow & S_n \\ \cup\!\!\!\!\!| & & \cup\!\!\!\!\!| \\ \sigma & \longmapsto & \sigma(i\ j) \\ & & \| \\ & & \tau \end{array}$$

は全単射. (4.2.7 (3)) $\qquad \therefore \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} = \sum_{\sigma(i\ j) \in S_n}$

$$\operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}((i\ j)) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$$

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots \underbrace{a_{j\sigma(i)}}_{i\text{行目}} \cdots \underbrace{a_{i\sigma(j)}}_{j\text{行目.}} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} (-\operatorname{sgn}(\tau))\, a_{1\tau(1)} \cdots \underbrace{a_{j\tau(j)}}_{i} \cdots \underbrace{a_{i\tau(i)}}_{j} \cdots a_{n\tau(n)} \\
&= -\sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{j\tau(j)} \cdots a_{i\tau(i)} \cdots a_{n\tau(n)} \\
&= (\text{右辺}). \quad \square
\end{aligned}$$

命題 4.4.9

$$\begin{vmatrix} a_{\tau(1)1} & \cdots & a_{\tau(1)n} \\ a_{\tau(2)1} & \cdots & a_{\tau(2)n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\tau(n)1} & \cdots & a_{\tau(n)n} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\tau \in S_n$を用いた行の入れかえ.

命題 4.4.10

2つの行が等しい行列の行列式は0.

証明

その2つの行を入れ換えても行列は同じ. だが行列式は-1倍. (4.4.8)

$\therefore |A| = -|A| \quad \therefore |A| = 0.$ $\square$

NO.

DATE . .

命題4.4.11

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\
\end{array}
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
\boxed{a_{i1}+ca_{j1}} & \cdots\cdots & \boxed{a_{in}+ca_{jn}} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{j1} & \cdots\cdots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots\cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{j1} & \cdots\cdots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

第i行に第j行のc倍を加えても行列式は不変.

証明

$$
(\text{左辺}) =
\begin{array}{c}
\\ i \\ \\ j \\ \\
\end{array}
\begin{vmatrix}
\vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
\vdots & & \vdots \\
\boxed{ca_{j1}} & \cdots & \boxed{ca_{jn}} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots
\end{vmatrix}
= (\text{右辺}) + c
\underbrace{\begin{vmatrix}
\vdots & & \vdots \\
\boxed{a_{j1}} & \cdots & \boxed{a_{jn}} \\
\vdots & & \vdots \\
\boxed{a_{j1}} & \cdots & \boxed{a_{jn}} \\
\vdots & & \vdots
\end{vmatrix}}_{=0.}
\qquad \square
$$

例4.4.12

(1) ある行がすべて0の行列の行列式は0.

(2)

$$
\begin{vmatrix}
0 & -5 & -2 & 3 \\
1 & 3 & 1 & -2 \\
1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & 1
\end{vmatrix}
\underset{4.4.11}{\overset{③+(-1)②,\ ④+②}{=}}
\begin{vmatrix}
0 & -5 & -2 & 3 \\
1 & 3 & 1 & -2 \\
0 & -4 & 0 & 3 \\
0 & 2 & 1 & -1
\end{vmatrix}
$$

(2, 1)成分を用いて第1列を掃き出す.

$$
\underset{4.4.8}{\overset{①\leftrightarrow②}{=}} -
\begin{vmatrix}
\boxed{1} & 3 & 1 & -2 \\
0 & -5 & -2 & 3 \\
0 & -4 & 0 & 3 \\
0 & 2 & 1 & -1
\end{vmatrix}
\underset{4.4.3}{=} -
\begin{vmatrix}
-5 & -2 & 3 \\
-4 & 0 & 3 \\
2 & 1 & -1
\end{vmatrix}
\underset{4.4.11}{\overset{②+(-1)①}{=}} -
\begin{vmatrix}
-5 & -2 & 3 \\
1 & 2 & 0 \\
2 & 1 & -1
\end{vmatrix}
$$

NO.

DATE

$$\overset{\substack{①+5\times② \\ ③+(-2)\times②}}{\underset{4.4.11}{=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} \overset{①\leftrightarrow②}{\underset{4.4.8}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} \underset{4.4.3}{=\!=} \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

命題 4.4.13

$|{}^tA| = |A|.$

証明

${}^tA = (b_{ij})$ とおくと, $b_{ij} = a_{ji}$

$\sigma \in S_n$ に対し, $b_{i\sigma(i)} = a_{\sigma(i)i}$

$$|{}^tA| = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

順番を入れかえて,

$$a_{\sigma(1)1} \cdots\cdots a_{\sigma(n)n} = a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma^{-1}(1) & \sigma^{-1}(2) & \cdots & \sigma^{-1}(n) \end{pmatrix}$$

また, $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$, $\sum_{\sigma\in S_n} = \sum_{\sigma^{-1}\in S_n}$ (4.2.7 (3))

$$\begin{aligned} |{}^tA| &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \quad (\sigma^{-1} = \tau \text{ とおくと}) \\ &= \sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} \\ &= |A|. \quad \square \end{aligned}$$

行に関する結果は列に対しても成立.

6/23 定理 4.4.14 (P. 100)

A, B : n 次行列

$|AB| = |A|\cdot|B|$

証明

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

$\mathbf{b}_j = (b_{j1}, \cdots, b_{jn})$ (第 j 行).

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$$

ABの第j行は,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{j1}, \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jn}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (b_{j1}, b_{j2}, \cdots, b_{jn})$$

$(i, 1)$ (i, n)

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbb{b}_j$$

$$\therefore AB = \begin{pmatrix} \boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \mathbb{b}_j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \mathbb{b}_j \end{pmatrix}$$

第1行を分けた.

$$\therefore |AB| \underset{\substack{4.4.7 \\ 4.4.6}}{=} a_{11} \begin{vmatrix} \mathbb{b}_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \mathbb{b}_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \mathbb{b}_j \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} \mathbb{b}_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \mathbb{b}_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \mathbb{b}_j \end{vmatrix} + \cdots + a_{1n} \begin{vmatrix} \mathbb{b}_n \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \mathbb{b}_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \mathbb{b}_j \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_n=1}^{n} \sum_{j_{n-1}=1}^{n} \cdots \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \begin{vmatrix} \mathbb{b}_{j_1} \\ \mathbb{b}_{j_2} \\ \vdots \\ \mathbb{b}_{j_n} \end{vmatrix} \quad (n^n \text{個}).$$

和は $\mathbb{b}_{j_1}, \mathbb{b}_{j_2}, \cdots, \mathbb{b}_{j_n}$ が全て異なる場合のみ考えればよい.

$$\therefore |AB| = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \begin{vmatrix} \mathbb{b}_{\sigma(1)} \\ \mathbb{b}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbb{b}_{\sigma(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \begin{vmatrix} \mathbb{b}_1 \\ \mathbb{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{b}_n \end{vmatrix}$$

$$= |A| \cdot |B| \quad \square$$

<u>命題 4. 4. 15</u> (P. 103)

$|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

<u>証明</u>

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$

$|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1 \quad (4.4.4) \quad \therefore |A^{-1}| = |A|^{-1} \quad \square$

命題 4.4.16 (ファンデアモンデ(ファンデルモンド)の行列式 (p. 104))

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i).$$

証明

第 i 行と第 j 行が一致すると，行列式は 0. (4.4.10)

つまり $x_i = x_j$ のとき 0.

行列式は $\prod_{i<j} (x_j - x_i)$ を因数にもつ.

次数を比べると，行列式は $\prod_{i<j} (x_j - x_i)$ の定数倍となる.

$1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 \cdot \cdots \cdot x_n^{n-1}$ の係数は両者とも 1. □

4.5 行列式の展開.

目標；n 次行列式を $(n-1)$ 次行列式で表す.

定義 4.5.1 (余因子)

A : n 次行列

A_{ij} : A から第 i 行と第 j 列を除いてできる $(n-1)$ 次行列.

$\widetilde{a_{ij}} \underset{\text{def.}}{=} (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ ； (i, j) 余因子.

例 4.5.2 (p. 93)

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{0} \\ 3 & 5 & -1 \\ \boxed{4} & 6 & \boxed{7} \end{pmatrix} \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{a_{22}} = (-1)^{2+2} |A_{22}| = 7.$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{a_{11}} = (-1)^{1+1} \cdot 41 = 41$$

命題 4.5.3 (行列式の展開)

A : n 次行列.

(1) $|A| = a_{i1}\widetilde{a_{i1}} + a_{i2}\widetilde{a_{i2}} + \cdots + a_{in}\widetilde{a_{in}}$ (第 i 行に関する(余因子)展開).

(2) $a_{i1}\widetilde{a_{k1}} + a_{i2}\widetilde{a_{k2}} + \cdots + a_{in}\widetilde{a_{kn}} = 0$. $(i \neq k)$.

証明

(1)

$$|A| \overset{4.4.7.}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \boxed{0} & \cdots & \boxed{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \boxed{0} & a_{i2} & \boxed{0 \cdots} & \boxed{0} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \boxed{0} & \cdots & \boxed{0} & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & \cdots & & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & & a_{ij} & & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\underbrace{i+j-2}_{(i-1)+(j-1)}} \begin{vmatrix} \boxed{a_{ij}} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i1} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i2} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{in} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A_{ij}

$$= (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$
$$= a_{ij} \widetilde{a_{ij}}$$

$\therefore\ |A| = a_{i1}\widetilde{a_{i1}} + a_{i2}\widetilde{a_{i2}} + \cdots + a_{in}\widetilde{a_{in}}$.

(2)

$$(\text{左辺}) = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ i\text{行} \\ \parallel \\ k\text{行} \\ \\ \end{array}$$

をk行で展開. この行列式は0. □

命題4.5.4（行列式の展開(2)）

A : n次行列

(1) $|A| = a_{1j}\widetilde{a_{1j}} + a_{2j}\widetilde{a_{2j}} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a_{nj}}$ （第j列に関する(余因子)展開）

(2) $a_{1j}\widetilde{a_{1k}} + a_{2j}\widetilde{a_{2k}} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a_{nk}} = 0 \quad (j \neq k)$.

定義4.5.5

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a_{11}} & \widetilde{a_{21}} & \cdots & \widetilde{a_{n1}} \\ \widetilde{a_{12}} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \widetilde{a_{1n}} & \widetilde{a_{2n}} & \cdots & \widetilde{a_{nn}} \end{pmatrix}$$: Aの余因子行列.

$\widetilde{A}$の(i,j)成分は$\widetilde{a_{ji}}$.

NO.

DATE

命題 4.5.6

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \begin{pmatrix} |A| & & O \\ & \ddots & \\ O & & |A| \end{pmatrix} = |A|E.$$

証明

$A\widetilde{A}$ の (i, k) 成分は

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \widetilde{a_{kj}} \underset{4.5.3}{=} \begin{cases} |A| & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \quad \square.$$

$\uparrow$

$\widetilde{A}$ の (j, k) 成分.

定理 4.5.7

A : n 次行列

A : 正則 $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$.

A が正則のとき $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$.

証明

$\Rightarrow$) A : 正則 とする。

$\exists B$ s.t. $AB = E$.

$|AB| = |A|\,|B| = 1 \quad \therefore |A| \neq 0$.

$\Leftarrow$) $|A| \neq 0$ とする.

$B = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$ とおくと,

$AB = BA = \dfrac{1}{|A|} A\widetilde{A} = \dfrac{1}{|A|} \cdot |A|E = E$.

逆行列は一意より示せた. $\square$

系 4.5.8

A, B : n 次行列.

$AB = E \Rightarrow A, B$ は正則で $B = A^{-1}$.

証明

$AB = E$ より $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0 \quad \therefore A, B$: 正則.

A^{-1} を両辺に掛けなて, $B = A^{-1}$ $\square$.

6/30 第5章 連立1次方程式

5.1 クラメールの公式

目標; 連立方程式で, 未知数の数と, 方程式の数が一致し, 係数行列が正則な場合を解く.

$x_1, x_2, \cdots, x_n$：未知数

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \cdots ①$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とおくと，①は $Ax = b$ …②

と書ける。

定義5.1.1

Aを係数行列という。

定理5.1.2

$|A| \neq 0$ のとき，①の解は丁度1組存在し，$x = A^{-1}b$.

証明.

②の両辺に A^{-1} を掛ければよい。

定理5.1.3（クラメールの公式）

係数行列Aが正則とする。

このとき $Ax = b$ の解は

$$x_j = \frac{\Delta_j}{|A|} = \frac{\begin{array}{c} \text{第}j\text{列} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

証明

$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ （a_i；第i列）

$$\begin{aligned} b &= Ax \\ &= (a_1, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \end{aligned}$$

$$\Delta_j = |a_1, \cdots, \underbrace{b}_{j\text{列}}, \cdots, a_n| = |a_1, \cdots, \underbrace{x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n}_{j\text{列}}, \cdots, a_n|$$

$$\underset{4.4.7}{=} |a_1, \cdots, \underbrace{x_1 a_1}_{j}, \cdots, a_n| + \cdots + |a_1, \cdots, x_j a_j, \cdots, a_n| + \cdots + |a_1, \cdots, x_n a_n, \cdots, a_n|$$

NO.

DATE

$$\underset{4.4.6}{=} x_1 \underbrace{|a_1, \cdots, \underset{j}{\underline{a_1}}, \cdots, a_n|}_{=0} + \cdots + x_j \underbrace{|a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_n|}_{=|A|} + \cdots + x_n \underbrace{|a_1, \cdots, \underset{j}{\underline{a_n}}, \cdots, a_n|}_{=0}$$

$$= x_j |A|$$

$$\therefore\ x_j = \frac{\Delta_j}{|A|} \quad \square$$

例 5.1.4

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \\ a^3x + b^3y + c^3z = d^3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} d \\ d^2 \\ d^3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$ → ファンデアモンデの行列式.

$$= abc\,(c-b)(c-a)(b-a)$$
$$= abc\,(a-b)(b-c)(c-a).$$

ここで $|A| \neq 0$ とする。($abc \neq 0$ かつ $a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a$)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} d \\ d^2 \\ d^3 \end{matrix}} & \begin{matrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{matrix} & \begin{matrix} c \\ c^2 \\ c^3 \end{matrix} \end{vmatrix} = dbc\,(d-b)(b-c)(c-d).$$

$$\therefore\ x = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{dbc(d-b)(b-c)(c-d)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}$$

y と z も同様. $\square$

5.2 連立1次方程式の基本変形.

目標；一般の場合の準備と基本変形の例の理解.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

NO.

DATE . .

定義5.2.1 (連立1次方程式の基本変形)

以下の操作を，連立1次方程式の基本変形という。

(I) 第i式に0でない数をかける。(両辺に).

(II) 第i式のc倍を，第j式に加える.

(III) 第i式と第j式を入れ換える. 例P.192.

P.192. $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x-2y+3z=9 \\ 4x+2y+7z=31 \end{cases} \xrightarrow{\text{(III)}} \begin{cases} x-2y+3z=9 \\ 2x+y-z=2 \\ 4x+2y+7z=31 \end{cases} \xrightarrow{\text{(II)}} \begin{cases} x-2y+3z=9 \\ 5y-7z=-16 \\ 10y-5z=-5 \end{cases}$

P.194. $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & 7 & 31 \end{pmatrix}}_{\text{拡大係数行列}} \xrightarrow{\text{(III)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 7 & 31 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & -16 \\ 0 & 10 & -5 & -5 \end{pmatrix} \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$\cdots \longrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$

命題5.2.2

連立1次方程式の基本変形は可逆.

つまり，変形前の解(の集合)と変形後の解(の集合)は一致する。

証明

基本変形のそれぞれについて，逆の操作(基本変形)で元に戻れることを示す。

(I) c倍したとすると $\frac{1}{c}$ 倍すればよい.

(II) $-c$倍を加えればよい.

(III) もう1度入れ換えればよい.

定義5.2.3 (拡大係数行列)

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に対し，

$$(A, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ を拡大係数行列という.

サイズ: Aが $m\times n$ のとき $m\times(n+1)$.

連立1次方程式の基本変形は，拡大係数行列の行基本変形を与えている。

5.3 階段行列と行列のランク.

目標；連立1次方程式を解くための階段行列の準備.

行列のランクの1つ目の定義の理解.

定義 5.3.1 (階段行列 P. 198)

$$
\left.\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2j_2} & * & \cdots & * \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{rj_r} & * \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}\right.
\quad r = \mathrm{rank}A,\ r\text{行}
$$

$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$

$a_{ij_i} \neq 0 \ (\forall i)$

の行列を階段行列という。

※ 零行列は階段行列と思う。

ex.)
$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 3
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

定理 5.3.2

任意の行列は，行基本変形で階段行列に変形できる。

証明

列の数に関する帰納法.

n 列あるとする.

○ 第1列がすべて 0 のとき

$$
\begin{pmatrix}
0 & \\
\vdots & \underbrace{\boxed{\quad B \quad}}_{n-1} \\
0 &
\end{pmatrix}
$$

B は行基本変形で階段行列となる。

∴ このとき第1列は不変.

全体が階段行列.

○ 第1列に 0 でない成分あり

その成分を行の入れ換えで (1, 1) にもってくる。

(1, 1) 成分を用いて第1列を掃き出す。

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} \ \cdots \ a_{1n} \\
0 & \\
\vdots & \underbrace{\boxed{\quad C \quad}}_{n-1} \Big\} n-1 \\
0 &
\end{pmatrix}
$$

C は行基本変形で階段行列。第1列は不変。全体が階段行列となる. □

↑ 帰納法の仮定より.

7/7 **定義 5.3.3**（行列のランク（rank））
行列Aを階段行列に変形したときの，0でない成分を含む行の数をAのランク（階級；rank）といい，$\mathrm{rank}\,A$ と表す。
〔後で rank Aがきちんと定まることを示す。（well-definedness）〕

5.4 連立1次方程式の解法

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ；連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$(A, \boldsymbol{b})$ ；拡大係数行列
$(A, \boldsymbol{b})$ を行基本変形で階段行列に変形。

$$B = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & C_{1j_1} & & & & \cdots & d_1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & C_{2j_2} & & \cdots & d_2 \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & C_{rj_r} & \cdots & d_r \\ 0 & & & & & & & 0 & d_{r+1} \\ 0 & & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$, $C_{ij_i} \neq 0 \ (\forall i)$.
$r = \mathrm{rank}A$.

ここで，$r+1$ 行目は $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = d_{r+1}$.
$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解あり $\Longleftrightarrow$ Bが定める連立1次方程式に解あり
$\Rightarrow d_{r+1} = 0$.

以下，$d_{r+1} = 0$ とする。
このとき，Bの $j_1, \cdots, j_r$ 列を，列の入れ換えで，$1, \cdots, r$ 列に移動。
さらに，各行を $C_{1j_1}, \cdots, C_{rj_r}$ で割る。

$$\begin{array}{cc} C = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & & & 0 & C_{1\,r+1} & \cdots & C_{1n} & d_1 \\ & 1 & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & C_{r\,r+1} & \cdots & C_{rn} & d_r \\ \hline & & & & & & & 0 \\ & 0 & & & & 0 & & \vdots \\ & & & & & & & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ r \\ \\ \\ m-r \\ \\ \end{array} \\ \qquad\quad r \qquad\qquad\qquad n-r \qquad\qquad 1 & \end{array}$$

ここで，列を入れ換えたときは文字も x_{j_1} を x_1 等に書き直す。

対応する連立1次方程式を書き直すと，

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - (C_{1\,r+1}x_{r+1} + \cdots + C_{1n}x_n) \\ \quad\vdots \\ x_r = d_r - (C_{r\,r+1}x_{r+1} + \cdots + C_{rn}x_n) \end{cases}$$

ここで，$k_j = x_j\ (r+1 \leqq j \leqq n)$ とおくと，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underset{\boldsymbol{x}_0}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}} + k_{r+1} \underset{\boldsymbol{s}_{r+1}}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} -c_{1\,r+1} \\ -c_{2\,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r\,r+1} \\ \hline 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}} + k_{r+2} \underset{\boldsymbol{s}_{r+2}}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} -c_{1\,r+2} \\ -c_{2\,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r\,r+2} \\ \hline 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}} + \cdots + k_n \underset{\boldsymbol{s}_{n}}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + k_{r+1}\boldsymbol{s}_{r+1} + \cdots + k_n \boldsymbol{s}_n$

これは C を拡大係数行列にもつ連立1次方程式の解.

文字を元に戻すと $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解.

定理5.4.1

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解あり $\Longleftrightarrow d_{r+1} = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(A, \boldsymbol{b}) = \operatorname{rank} A$.

$$B = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 \cdots 0 & c_{1j_1} & & & & & \\ & & c_{2j_2} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & c_{rj_r} & \cdots\cdots & d_r \\ & & & & & & d_{r+1} \\ & \text{\huge 0} & & & & & \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank} A = r$

$\operatorname{rank}(A, \boldsymbol{b})$

$$= \begin{cases} r & (d_{r+1} = 0) \\ r+1 & (d_{r+1} \neq 0) \end{cases}$$

また，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は上のように表すことができる。

例5.4.2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & 7 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

(1, 1)を用いて第1列を掃き出す.

(列の入れ換えなし.)

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 7 & 7 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{29}{3} \end{array}\right)$$

このとき $\mathrm{rank}A = 2$, $\mathrm{rank}(A, \mathbb{b}) = 3$ $(d_3 \neq 0)$. よって, 解なし.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = k \quad (k \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$(A, \mathbb{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 10 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}(A, \mathbb{b}) \Leftrightarrow k = -3$.

よって, $k = -3$ のときのみ解あり.

$k = -3$ のとき,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = -2 + 2l \\ x_2 = 1 - 2l. \\ x_3 = l \text{ (任意)}. \end{cases}$$

($l \in \mathbb{R}$ は任意).

5.5 連立斉次1次方程式.

定義 5.5.1

$A x = \mathbb{0}$ を連立斉次1次方程式という.

零ベクトル.

解のうち $x = \mathbb{0}$ を自明な解, $x \neq \mathbb{0}$ を非自明な解という.

$A x = \mathbb{0}$ の解は $x = k_{r+1} \mathbb{s}_{r+1} + \cdots + k_n \mathbb{s}_n$ の形.

($(n-r)$ 次元ベクトル空間の例)

定理 5.5.1

$A x = \mathbb{b}$; 連立1次方程式

x_0 ; 1つの解.

$A x = \mathbb{0}$ の解が $k_{r+1} \mathbb{s}_{r+1} + \cdots + k_n \mathbb{s}_n$ $(k_i \in \mathbb{R})$ とする.

$\Rightarrow A x = \mathbb{b}$ の解は $x = x_0 + k_{r+1} \mathbb{s}_{r+1} + \cdots + k_n \mathbb{s}_n$

逆にこの x は $A x = \mathbb{b}$ の解.

NO.

DATE

<u>証明.</u>

x が $Ax = b$ の解とする. $y = x - x_0$ とおく。

$$Ay = A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$$

$$\therefore y = k_{r+1} s_{r+1} + \cdots + k_n s_n$$

$$\therefore x = x_0 + k_{r+1} s_{r+1} + \cdots + k_n s_n$$

逆は

$$Ax = A(x_0 + k_{r+1} s_{r+1} + \cdots + k_n s_n) = b. \quad \square$$

7/14 第6章 行列のランク(1)

<u>定理6.1.1</u>

A; $m \times n$ 行列

A を行と列の基本変形で標準形 $F_{m,n}(r)$ に出来る。

$$F_{m,n}(r) = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \qquad & n-r \end{matrix} \end{array}$$

さらに, r は A のみで定まる。ここで $r = \mathrm{rank} A$.

(先に応用)

<u>系6.1.2</u>

A; n 次行列

A: 正則 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank} A = n$.

<u>補題6.1.3</u>

A; 正方行列

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) \begin{matrix} s \\ n-s \end{matrix} \\ \begin{matrix} s \quad & n-s \end{matrix} \end{array}$$ 対称分割をもつ.

A: 正則 $\Leftrightarrow$ A_1, A_2: 正則

<u>証明(6.1.3)</u>

$\Leftarrow$)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix}$$ は逆行列.

(分割を用いた計算)

⇒) $A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ とおいて分割を用いて積を計算.

$\begin{cases} A_1 B_{11} = B_{11} A_1 = E \\ A_2 B_{22} = B_{22} A_2 = E \end{cases}$ ∴ A_1, A_2 : 正則.

証明(6.1.2)

Aを基本変形で

$$F(r) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & O \\ \hline O & O \end{array}\right) & \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad r \qquad & n-r \end{matrix} & \end{array}$$

と出来る。 i.e. $PAQ = F(r)$ (P, Qは基本行列の積なので正則).

⇒) A : 正則 ⇒ PAQ : 正則 ← $r = n$となる.

⇒ $PAQ = F(n) = E_n$. 単位行列.

(6.1.3)

∴ $\mathrm{rank}\, A = n$.

⇐) $\mathrm{rank}\, A = n$

$PAQ = E_n$ ∴ $A = P^{-1} Q^{-1}$ ∴ A : 正則. □

定理2.4.9

A : 正則 ⇔ 行基本変形でAをEに変形できる.

証明(2.4.9)

⇒) A : 正則 ⇒ $\mathrm{rank}\, A = n$

∴ $\underset{n\text{次}}{P} A \underset{n\text{次}}{Q} = E$ ∴ $PA = Q^{-1}$ ∴ $QPA = E$

P, Qは基本行列の積であった.

QPは行基本行列を与えている. □

※ Aを行基本変形でEにできない ⇒ Aは正則でない ⇒ $\mathrm{rank} A < n$.

証明(6.1.1)

$A = O$ (零行列)のとき, 既に標準形. ($r = 0$).

$A \neq O$とする.

行の数mに関する帰納法.

$m = 1$のとき

$(1, 1)$が0にならないように列を入れ換える.

$(1, 1)$成分を用いて第1列を掃き出すと,

$(1, 0, 0, \cdots, 0) = F_{1,n}(1)$ 標準形.

NO.

DATE . .

$m-1$まで成り立つとしてmの場合を示す.
$(1,1)$成分を用いて第1行と第1列を掃き出す.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{A'} \\ 0 & \end{pmatrix} \Big\} m-1\text{行}.$$

帰納法の仮定から, A'は基本変形で標準形に出来る
第1行と第1列は不変.
全体が標準形.

<u>標準形の一意性.</u>

Aが $F(r)=F_{m,n}(r)$, $F(s)=F_{m,n}(s)$ $(r \leq s)$の2つの標準形をもつとする.
$F(s)=\underset{m\text{次}}{P}F(r)\underset{n\text{次}}{Q}$ と書ける.

$(\because F(s)=P_sAQ_s,\ F(r)=P_rAQ_r)$ → $A=P_r^{-1}F(r)Q_r^{-1}$

$$P=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} \\ \quad r \quad m-r \end{array},\quad Q=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} \\ \quad r \quad n-r \end{array}$$

$$F(s)=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} P_{11} & O \\ P_{21} & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} P_{11}Q_{11} & P_{11}Q_{12} \\ P_{21}Q_{11} & P_{21}Q_{12} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} \\ \quad r \quad n-r \end{array}$$

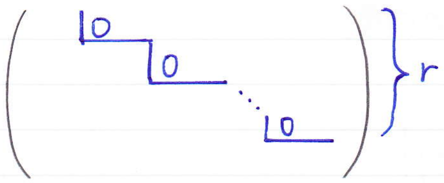
$r \leq s$より,
$P_{11}Q_{11}=E_r$, $P_{11}Q_{12}=O_{r,n-r}$, $P_{21}Q_{11}=O_{m-r,r}$, $P_{21}Q_{12}=F(s-r)$

$$F(s)=\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & O \\ O & \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$s-r$個.

P_{11}, Q_{11}: 正則, $Q_{12}=O_{r,n-r}$, $P_{21}=O_{m-r,r}$, $P_{21}Q_{12}=O_{m-r,n-r}$
$F(s-r)=O$
$\therefore s=r$

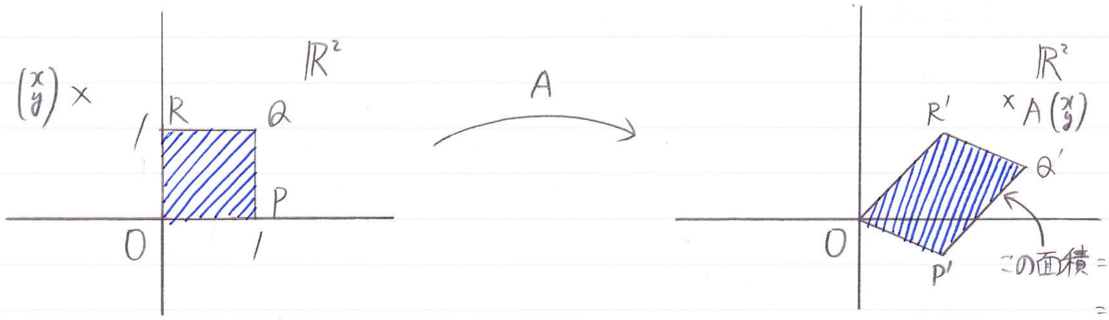
$r = \operatorname{rank} A$ となること。



階段行列から段数をかえずに基本変形で標準形にすることができる。 □

(おまけ)

行列式の図形的意味

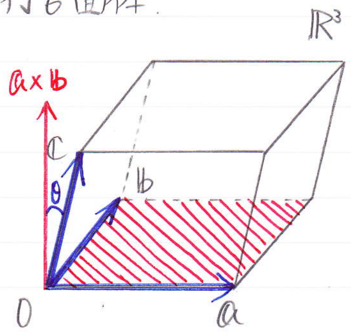


この面積 $= |\det A|$
$= |ad - bc|$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

3次の行列式

平行6面体



$A = (\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c})$ 3次行列

$|\det A|$ は平行6面体の体積。

∵) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} \underset{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$ $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積。

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

内積。

このとき

$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2}$ (計算により示せる。)

ベクトルの大きさ

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の張る平行4辺形の面積。

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に垂直。

NO.

DATE . .

平行6面体の体積 $= \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| \cdot \|\boldsymbol{c}\| \cos\theta = |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$

$\mathbb{R}^3$の内積

$$|\det A| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \left| c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right|$$

$$= |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$$