No.

Date

2006年度 過去問 ①

1. (1) 出生男児の体重を Xkg とすると、$X \sim N(3.2, 0.4^2)$.

$P(2.7 \leqq X \leqq 3.7)$

$= P\left(\frac{2.7-3.2}{0.4} \leqq Z \leqq \frac{3.7-3.2}{0.4}\right)$

$= P\left(-\frac{5}{4} \leqq Z \leqq \frac{5}{4}\right)$

$= P(-1.25 \leqq Z \leqq 1.25) = 1-2\times 0.10565 \fallingdotseq 0.79$ //

(2) $X_1, \cdots, X_{16} \stackrel{iid}{\sim} N(3.2, 0.4^2)$

$\therefore \bar{X} \stackrel{iid}{\sim} N\left(3.2, \frac{0.4^2}{16}\right)$

$\therefore P(X \leqq 3.35)$

$= P\left(Z \leqq \frac{3.35-3.2}{0.4/4}\right)$

$= P(Z \leqq 1.5) = 1-0.0668 \fallingdotseq 0.93$ //

(3) ウイルスにかかっているという事象を A,
感染者と判断される事象を B とする。

$P(B|A) = 0.998$　$P(A) = 5.0\times 10^{-4}$

$P(B|A^c) = 3.0\times 10^{-3}$　$P(A^c) = 0.9995$

$\begin{array}{r} 1 \\ -0.0005 \\ \hline 0.1995 \end{array}$

ベイズの定理より

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)}$$

$$= \frac{0.998\times 5.0\times 10^{-4}}{5.0\times 10^{-4}\times 0.998+0.9995\times 3.0\times 10^{-3}}$$

$\frac{0.000499}{0.00350}$

$\fallingdotseq 0.143$ //

(4) 無作為に選んで、ウイルスに感染している確率 0.05% よりは、
はるかに高い数値を示しているため、診断の効果は認められるが、
そもそも、感染者の割合が非常に低いため、診断の精度自体は、それほど
良くない。

No.

Date

2006 ②

2. $X_i = \begin{cases} 1 & (20代女性) \\ 0 & (その他) \end{cases}$ とすると、$X_1 \cdots X_{600}$ 〜 $Bi(1, p)$ で表される。

$\begin{cases} H_0 : p = 0.7 \\ H_1 : p \neq 0.7 \end{cases}$ の検定を考える。

nが大きいので、中心極限定理より、

$\bar{X} \fallingdotseq N(p, \frac{p(1-p)}{600})$ と近似できる。

$t = \frac{\bar{X} - 0.7}{\sqrt{0.7 \times 0.3 / 600}}$ とおく。このとき、有意水準を0.05とすると

$\frac{27}{6}$

$\begin{cases} |t| > z_{0.025} : H_0 棄却 \\ |t| \leq z_{0.025} : H_0 採択 \end{cases}$ $z_{0.025} = 1.96$.

$\bar{x} = \frac{360}{600} = 0.6$

$|t| = 5.35 > 1.96$. よってH_0は棄却される。すなわち、割合に変化があった。//

3. バクテリアの個数をX_1, X_2, X_3 〜 $Po(3)$ とおく。 $Po(\lambda) \Rightarrow P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$

(1). $P(X \geq 4) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3)$ $Po(3) \Rightarrow P(X=x) = e^{-3}\frac{3^x}{x!}$

$= 1 - e^{-3}(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{9}{2})$ $\frac{13}{e^3}$

$= 0.34$ //

(2) X_1, X_2は独立なので、$P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0)$

$= e^{-3 \times 2} = 0.0026$ //

(3). バクテリアが1つでも含まれる確率は、$1 - P(X=0) = 1 - e^{-3} = 0.949$.

バクテリアが含まれるかどうかは、$Bi(1, 0.949)$ に従う。

バクテリアがY回含まれたとすると $Y \sim Bi(3, 0.949)$

$P(Y=2) = {}_3C_2\, 0.949^2 \times (1 - 0.949) = 0.138$.

$P(Y=3) = {}_3C_3\, 0.949^3 = 0.855$.

$\therefore P(Y \geq 2) = 0.99$ //

No.

Date

2006 ③

4. (1) $\dfrac{\bar{X}-\mu_1}{\sqrt{S_1^2/14}} \sim t(13)$

よって、信頼係数 0.95の信頼区間は

$\left[\bar{X} \pm t_{0.025}(13)\sqrt{S_1^2/14}\right]$

$= \left[44.2 \pm 2.160 \times 2.049 \times \sqrt{\frac{1}{14}}\right]$ 　　　1.183

$= [43.0, 45.4]$ //

(2) $\dfrac{S_1^2 \times 13}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(13)$ 　　　$P\left(\chi^2_{0.975} \leq \dfrac{S_1^2 \times 13}{\sigma_1^2} \leq \chi^2_{0.025}(13)\right) = 0.95$

$\chi^2_{0.025}(13) = 24.74$

$\chi^2_{0.975}(13) = 5.00$

よって、信頼区間は

$\left[\dfrac{13 \times 4.2}{24.74}, \dfrac{13 \times 4.2}{5.0}\right] = [2.21, 10.92]$ //

(3) 各々の標本不偏分散の加重平均をとると

$S^2 = \dfrac{1}{22}(13 \times 4.2 + 9 \times 6.4) = 5.1$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$より、$\dfrac{\bar{Y}-\bar{X}-(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{9}\right)}} \sim t(22)$ なので、信頼区間は

$\left[\bar{Y}-\bar{X} \pm t_{0.025}(22)\sqrt{S^2\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{9}\right)}\right]$

$= [5.4 \pm 2.074 \times 2.258 \times 0.434]$ 　　　2.032

$= [3.37, 7.43]$ //

No.

Date

2006 ④

5 (1) $P(X=0)=\frac{2}{5}$, $P(X=1)=\frac{1}{5}$, $P(X=2)=\frac{2}{5}$

$P(Y=1)=\frac{2}{5}$, $P(X=2)=\frac{1}{5}$, $P(X=3)=\frac{2}{5}$ //

(2) $E(X)=\frac{2}{5}\times 0+\frac{1}{5}\times 1+\frac{2}{5}\times 2=1$.

$V(X)=\frac{2}{5}(0-1)^2+\frac{1}{5}(1-1)^2+\frac{2}{5}(2-1)^2=\frac{4}{5}$ //

(3) $E(XY)=\frac{1}{10}\times 1+\frac{1}{10}\times 3+\frac{3}{20}\times 2+\frac{1}{10}\times 4+\frac{3}{20}\times 6$

$=2$.

$E(Y)=\frac{2}{5}\times 1+\frac{1}{5}\times 2+\frac{2}{5}\times 3=2$.

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$ //

(4) 独立ではない。

(理由) 独立 $\Leftrightarrow P(X_i\cap Y_j)=P(X_i)P(Y_j)$ for all i,j. だが、

$P(X=1\cap Y=2)=0\neq\frac{1}{25}=P(X=1)P(Y=2)$ だから。//