2009年度数学II夏学期期末試験（担当教員：足助太郎）　解答

問1.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \underline{-4}.$

2) $\begin{vmatrix} 13 & 11 & -13 & 2 & -26 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 39 & -7 & 26 & -17 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 26 & 11 & -39 & 21 & -65 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 11 & -13 & -26 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 39 & -7 & 26 & 52 \\ 26 & 11 & -39 & -65 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 13 & -13 & -26 \\ 39 & 26 & 52 \\ 26 & -39 & -65 \end{vmatrix} = 2\cdot 13^3\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix}$

$= 2\cdot 13^3\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 13^3\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{21970}.$

問2.

1) $v, v' \in \mathbb{R}^3$ を $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, v' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}$ と成分で表すと,

$\forall v, v' \in \mathbb{R}^3, f_u(v+v') = \begin{pmatrix} v_1+v'_1 & v_2+v'_2 \\ v_3+v'_3 & -(v_1+v'_1) \end{pmatrix} u = \left(\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & -v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v'_1 & v'_2 \\ v'_3 & -v'_1 \end{pmatrix}\right) u$

$= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & -v_1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} v'_1 & v'_2 \\ v'_3 & -v'_1 \end{pmatrix} u = f_u(v) + f_u(v'),$

$\forall v \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f_u(\lambda v) = \begin{pmatrix} \lambda v_1 & \lambda v_2 \\ \lambda v_3 & -\lambda v_1 \end{pmatrix} u = \lambda \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & -v_1 \end{pmatrix} u = \lambda f_u(v).$

従って f_u は線型写像である. □

また, $f_u(v) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & -v_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1u_1 + v_2u_2 \\ -u_2v_1 + u_1v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ -u_2 & 0 & u_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ より,

f_u の表現行列は $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ -u_2 & 0 & u_1 \end{pmatrix}$.

2) $g_u(w) = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & -w_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1w_1 + u_2w_2 \\ -u_2w_1 + u_1w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ より, g_u の表現行列は $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix}$.

これを P とおく. g_u が線型同型写像であるとき, g_u の逆写像 g'_u の表現行列を Q として,

$g_u \circ g'_u = g'_u \circ g_u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow PQ = QP = E_2$ が成り立つ. そのような Q が存在するための条件は,

$\det P = {u_1}^2 + {u_2}^2 \neq 0 \Leftrightarrow (u_1, u_2) \neq (0, 0)$ である. 従って求める条件は $\underline{u \neq 0}$ である.

問3.

1) （例）$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}, U = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$

2) 線型写像 f が全単射のとき, f は線型同型写像である. 故に f が全単射であることを示せばよい.

まず f が全射, 即ち $\forall w \in \mathbb{R}^2, \exists v \in W (w = f(v))$ が成り立つことを示す. これは

$\forall w_2, w_3 \in \mathbb{R}, \exists w_1 \in \mathbb{R} \left(\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in V \right)$ と同値である．背理法のため $\exists w_2, w_3 \in \mathbb{R}, \forall w_1 \in \mathbb{R} \left(\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \notin V \right)$

と仮定する．そのような w_2, w_3 について $\begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を考えると，$\begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \notin V + W$ となり，$\mathbb{R}^3 = W + V$ に反し矛盾．よって f は全射である．

次に f が単射，即ち $f(w) = f(w') \Rightarrow w = w'$ が成り立つことを示す．$f(w) = f(w') = \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ とするとき，$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, w' = \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in W$ とおける．ここで $w - w' = \begin{pmatrix} w_1 - w_1' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ は，W が $\mathbb{R}^3$ の部分線型空間であることにより W の元でもある．故に $w - w' \in V \cap W$．ここで $V + W$ が直和であることにより $V \cap W = \{0\}$．
$\therefore w = w'$．よって f は単射である．

従って線型写像 f は全単射であるから，f は線型同型写像である．□

問 4．

1) $i = 1, 2, 3$ に対し，

$Oa_i = O \in W$ より $O \in V$．$\therefore V \neq \emptyset$ であって，さらに W が部分線型空間であることにより，

$\forall X, X' \in V, (X + X')a_i = Xa_1 + X'a_1 \in W$ より $X + X' \in V$，

$\forall X, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda X)a_i = \lambda(Xa_i) \in W$ より $\lambda X \in V$．

従って V は $M_4(\mathbb{R})$ の部分線型空間である．□

2) $X \in V$ となる条件は，$i = 1, 2, 3$ について Xa_i の第 4 成分が 0 となることである．故に求める条件は

$$\begin{cases} x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} & = 0 \\ x_{41} + x_{43} & = 0 \\ x_{41} + 2x_{42} + 3x_{43} + 4x_{44} & = 0 \end{cases}$$

与方程式の拡大係数行列を左基本変形して，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る．左基本変形によって方程式の解空間は不変であったから，もとの方程式は

$$\begin{cases} x_{41} - x_{44} & = 0 \\ x_{42} + x_{44} & = 0 \\ x_{43} + x_{44} & = 0 \end{cases}$$

と同値である．従って求める条件は $\underline{x_{41} = -x_{42} = -x_{43} = x_{44}}$．

3) $X = (x_{ij}) \in V$ に対し，$f : V \to \mathbb{R}^{13}$ を

$$f(X) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{33} \\ x_{34} \\ x_{41} \end{pmatrix}$$ で定め，$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{13} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{13}$ に対し，$g : \mathbb{R}^{13} \to V$ を $g(w) = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ w_5 & w_6 & w_7 & w_8 \\ w_9 & w_{10} & w_{11} & w_{12} \\ w_{13} & -w_{13} & -w_{13} & w_{13} \end{pmatrix}$

で定めると，f, g は線型写像であって，$f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{13}}, g \circ f = \mathrm{id}_V$ が成り立つから，$V \cong \mathbb{R}^{13}$．

従って $\underline{\dim V = 13}$ である．