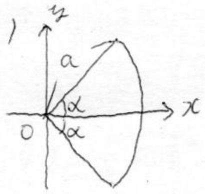
2008年度 力学A1 期末試験　解答・解説

1 (1)



左図のような扇形の重心座標を(X, Y)とおく。

密度 ρ であるとする。

対称性より $Y=0$　(明らか)

Xについて.

$X=\dfrac{\rho\int x\,dxdy}{\rho\int dxdy}$ であり $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおく。この時 $dxdy=rdrd\theta$

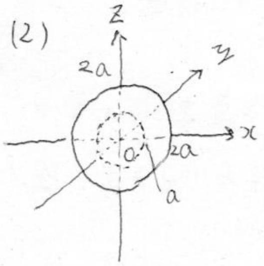
$0\leqq r\leqq a$, $-\alpha\leqq\theta\leqq\alpha$ で

$$\int x\,dxdy=\int r\cos\theta\cdot rdrd\theta=\int_0^a r^2dr\cdot\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta d\theta=\frac{2}{3}a^3\sin\alpha$$

$$\int dxdy=\int rdrd\theta=\int_0^a rdr\cdot\int_{-\alpha}^{\alpha}d\theta=a^2\alpha$$

$\therefore X=\frac{2}{3}a^3\sin\alpha\,/\,a^2\alpha=\dfrac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$　　$\therefore\left(\dfrac{2a\sin\alpha}{3\alpha},\ 0\right)$

(2)



左図のように球殻を配置する。

中心軸をz軸とする。

球殻の密度 $\rho=\dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi(8a^3-a^3)}=\dfrac{3M}{28\pi a^3}$

慣性モーメント $I=\rho\int(x^2+y^2)\,dxdydz$

このとき $0\leqq\theta\leqq\pi$, $0\leqq\varphi\leqq2\pi$　　$a\leqq r\leqq2a$ として

$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$ とおくと、この時 $dxdydz=r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$

したがって.

$$\int r^2\sin^2\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi=\int_a^{2a}r^4dr\cdot\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi$$
$$=\frac{248}{15}\pi a^5$$

$$\therefore I=\frac{3M}{28\pi a^3}\cdot\frac{248}{15}\pi a^5=\underline{\frac{62}{35}a^2M}$$

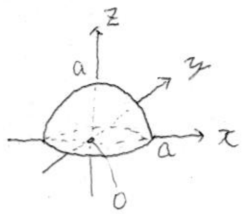
〈解説〉

問題は授業で出たものとほぼ同じである。以下の補充題を解いておいたほうがいい。ただし解答のみを示すので解き方は自分のノートを参照してほしい。

〈補充題〉

Ⅰ (1) 半径 a の半球の重心座標を求めなさい。（下図を参照）

(2) 1 (2) の球殻で重心から距離 h だけ離れた軸回りの慣性モーメントを求めなさい。



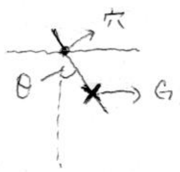
Ⅰ 解答

(1) $(0, 0, \frac{3}{8}a)$

(2) $Mh^2+\frac{62}{35}a^2M$

Ⅱ

左図のような平べったいまが玉がある。質量 M で穴を通り、まが玉に対して垂直な回転軸まわりの慣性モーメント I とする。



$(|\theta|\ll 1)$

左下図のようにまが玉が見えるよう振動させるとき（まが玉が真横に見える状況で振動させる）、振動周期を求めなさい

$\left(2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}}\right.$

2(1) 質点の座標 $(x, y) = (l\sin\theta, \ -l\cos\theta)$ より

$(\dot{x}, \dot{y}) = (l\dot{\theta}\cos\theta, \ l\dot{\theta}\sin\theta)$ である

このとき、原点基準でポテンシャルエネルギーを考えるとする

ラグランジュアン $L(\theta, \dot{\theta})$ は、

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg(-l\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl\cos\theta$$

(2) ラグランジュ方程式 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ より、

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

〈解説〉 07年第1問も同じ

ラグランジュアン $L(q, \dot{q}) = K(\dot{q}) - U(q)$

運動エネルギー　位置エネルギー

ラグランジュ方程式 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

なお、この問題は、$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$ で、

$\theta \ll 1$ のとき、$\sin\theta$ を近似するとニュートンの運動方程式から

得られるのと同じものが出る。

3 (1) $m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x}$ なので $\mu/m = 2\gamma$, $k/m = \omega_0^2$ に注意して

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - 2\gamma m\dot{x}$$

(2) (1)の式を以下のように書きかえる

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \cdots (*)$$

xはtの関数で $x = e^{\lambda t}$ とおくと、$e^{\lambda t} > 0$ より (*)から

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \cdots (**)$$

(**)の解を以下のように文字をおく ($\gamma^2 < \omega_0^2$ に注意する)

$$\lambda_+ = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \qquad \lambda_- = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

(*)の一般解 $x = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t}$ と書けて

初期条件より

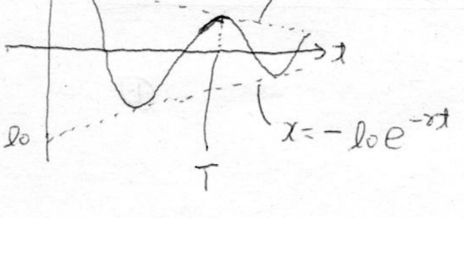
$$\begin{cases} l_0 = C_+ + C_- \\ 0 = \lambda_+ C_+ + \lambda_- C_- \end{cases} \iff \begin{cases} C_+ = \dfrac{\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}{2i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} l_0 \\ C_- = \dfrac{-\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}{2i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} l_0 \end{cases}$$

ここで

$$\begin{cases} e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x \\ e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \end{cases}$$ であるから

$$x = l_0 e^{-\gamma t}\left(\cos\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t + \frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \sin\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

これは減衰振動で、グラフは以下のようになる



ただし周期

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

④

(3) $f(t)=2a\dot{x}+lx$ を与えるとき 運動方程式

$$m\ddot{x}=-m\omega_0^2x-2\gamma m\dot{x}+2a\dot{x}+lx$$

$x=e^{\lambda t}$ として

$$\lambda^2+2\left(\gamma-\frac{a}{m}\right)\lambda+\left(\omega_0^2-\frac{l}{m}\right)=0 \quad \cdots (☆)$$

「(☆)の判別式$=0$」が臨界減衰の条件より

$$\left(\gamma-\frac{a}{m}\right)^2-\left(\omega_0^2-\frac{l}{m}\right)=0$$

$\therefore \left(\gamma-\frac{a}{m}\right)^2=\omega_0^2-\frac{l}{m}$ で $\omega_0^2-\frac{l}{m}\geqq 0$ (実数条件)

ここで $(0<)\ l\leqq m\omega_0^2 \quad \cdots$ Ⓐ の下で

$$\gamma-\frac{a}{m}=\pm\sqrt{\omega_0^2-\frac{l}{m}}$$

したがって

$\gamma-\frac{a}{m}\geqq 0$ のとき $a=m\gamma-m\sqrt{\omega_0^2-\frac{l}{m}}$

$\gamma-\frac{a}{m}\leqq 0$ のとき $a=m\gamma+m\sqrt{\omega_0^2-\frac{l}{m}}$ $\quad \cdots$ Ⓑ

以上 Ⓐ Ⓑ より

$$\begin{cases} l\leqq m\omega_0^2 \\ a=m\gamma-m\sqrt{\omega_0^2-\frac{l}{m}} & (0<a\leqq m\gamma) \\ a=m\gamma+m\sqrt{\omega_0^2-\frac{l}{m}} & (a\geqq m\gamma) \end{cases}$$

〈解説〉

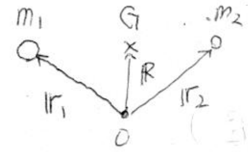
板書そのまま。減衰振動、臨界減衰、過減衰の条件を確認しておこう!

〈補充題〉

過減衰($\gamma^2>\omega_0^2$)についての式を求めよ

解答: $x=l_0e^{-\gamma t}\left(\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}{2\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t}+\frac{-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}{2\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t}\right)$

4.



G：重心

(1) 2質点における全外力＝0より 重心系：$(m_1+m_2)\ddot{\mathbb{R}}=0$

換算質量 μ とする。$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$ で、相対運動方程式は

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^2} \quad \left(\mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right) \cdots ①$$

(2) 角運動量についても考えるので、極座標系で考える

m_2：固定としたとき、そこからとれる極座標 (r, θ) から①は以下のように書きかえられる

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}) = G\frac{\mu(m_1+m_2)}{r^2} \Leftrightarrow \ddot{r} - r\dot{\theta} = G\frac{m_1+m_2}{r^2}$$

以下は2007年第4問(3)同様に

$r^2\dot{\theta} = h$ (一定)を使い、$M \to m_1+m_2$ とすると

以下の式が得られる

$$r = \frac{\frac{h^2}{G(m_1+m_2)}}{1+\frac{Ah^2}{G(m_1+m_2)}\cos(\theta+\delta)}$$

よって定数 $l=\frac{h^2}{G(m_1+m_2)}$　$\varepsilon=\frac{Ah^2}{G(m_1+m_2)}$ とすると

$r=\frac{l}{1+\varepsilon\cos(\theta+\delta)}$ で軌道は円錐曲線となる

(3). $0<\varepsilon<1$ で楕円を描く

このとき

$$a=\frac{l}{1-\varepsilon^2} \qquad b=\frac{l}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$ とした楕円となる（b：半短径）。

周期 T とすると、

楕円の面積：$\pi a b$

単位時間内に r によって掃く面積：$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\frac{1}{2}h$ より

周期 $T=\dfrac{\pi a b}{\frac{1}{2}h}=\dfrac{2\pi a b}{h}$

$$\therefore \frac{T^2}{a^3}=\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2\cdot\frac{b^2}{a}=\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2\cdot l$$

このとき

$$l=\frac{h^2}{G(m_1+m_2)}=\frac{h^2}{Gm_2\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)}\xrightarrow{\frac{m_1}{m_2}\to 0}\frac{h^2}{Gm_2}$$ なので

$$\frac{\dfrac{T^2}{a^3}}{\displaystyle\lim_{\frac{m_1}{m_2}\to 0}\frac{T^2}{a^3}}=\frac{\dfrac{h^2}{G(m_1+m_2)}}{\dfrac{h^2}{Gm_2}}=\frac{m_2}{m_1+m_2}$$

〈解説〉

(2)は2007年 第4問 (3) の計算過程を参照してください

(本来なら先にこちらをアップするつもりが後になったので逆転しました)

事前に暗記しておくことが多いのでよく勉強しておきましょう。

とりあえず板書見直したら、何だかいけそうな気がする〜

(あると思います(笑))

9月3日試験終わってからのおつコン楽しみです