数IB 2008年 試験

Date . . No.

) $f(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ とおくと

$f'(x)=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$

よって $f'(0)=\frac{1}{2}$

$f''(0)=\frac{3}{4}$

$f'''(0)=\frac{15}{8}$

$f^{(4)}(0)=\frac{105}{16}$

ゆえに，求めるべき級数展開は

$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4$

である．

) (1) で $x=\frac{1}{2}$ とすると

$\sqrt{2}=1+\frac{1}{4}+\frac{3}{32}+\frac{5}{128}+\frac{35}{2048}$

$=\frac{2048+512+192+80+35}{2048}$

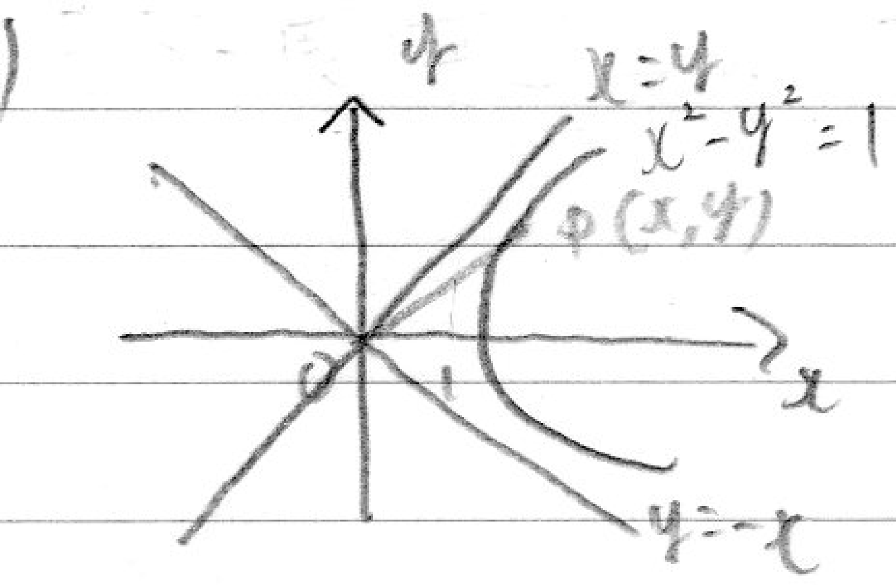
$=\frac{2907}{2048}=1.4194\cdots$

であり $x^5=\frac{1}{32}$，$f^{(5)}(0)=\frac{945}{32}$

なので $\frac{945 \cdot 35}{1024 \times 8}=0.001\cdots$

よって小数第二位まで正しい

)



双曲線関数の定義から

$x=\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}$ $y=\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}$

である．

) $f^2(\theta)-g^2(\theta)$

$=\frac{e^{2\theta}+2+e^{-2\theta}}{4}-\frac{(e^{2\theta}-2+e^{-2\theta})}{4}$

$=1$

よって示された．

) $f'(\theta)=\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}=g(\theta)$

$g'(\theta)=\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}=f(\theta)$

よって示せた．

(4) θ は実数であるので

$e^\theta>0,\ e^{-\theta}>0$

よって

$f(\theta)=g'(\theta)>0$

ゆえに

$y=g(\theta)$

は増加関数である．

また，

$y=\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}$

より

$2e^\theta y=e^{2\theta}-1$

$\therefore e^\theta=y\pm\sqrt{y^2+1}>0$

よって

$\theta=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

である．

(5) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}$

である．

$\boxed{3}$ (1),(2)

$y=x^2$ 上での点 (a,a^2) における法線は

$a\neq 0$ として

$y=-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2$

$\frac{\partial y}{\partial a}=\frac{1}{2a^2}(x-a)+\frac{1}{2a}+2a=0$

$\therefore (x-a)=-2a-4a^3$

$y-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)$

$=\frac{1}{2}+2a^2$

ゆえに

$r^2=(x-a)^2+(y-a^2)^2$

$=a^2(a+4a^3)^2+(1+4a^2)^2\frac{1}{4}$

$=(4a^2+1)(1+4a^2)^2\cdot\frac{1}{4}$

$\therefore r=(4a^2+1)^{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{2}$

また，曲率中心は $\left(-4a^3,\ \frac{1}{2}+3a^2\right)$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836B 6mm ruled×36 lines

(3) パラメータaを消去すると

$$y_0=\frac{1}{2}+3\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

(4) 求める長さをLとすると

$$L=\int_0^a\sqrt{1+\frac{dy}{dx}}\,dx$$
$$=\int_0^a\sqrt{1+2x}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(1+2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{3}\left\{(1+2a)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$$

である.

$\boxed{14}$

(1) $x-\frac{1}{2}=z$ とおくと $dx=dz$

よって

$$=\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C \quad (Cは積分定数)$$

である

(2) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$

$$=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx \quad (\because a\neq 0)$$
$$=\frac{1}{2a}\{\log(x-a)-\log(x+a)\}+C \quad (Cは積分定数)$$
$$=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}+C$$

(3) $\int\frac{dx}{x^4+1}$

$\boxed{5}$ (1) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ (nは十分大きい)

とすると

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x-\sin^n x\,dx$$
$$\therefore I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$