注：積分定数は省略.

問1 $$\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{x^3+1}=\frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C}{x^3+1}$$

よって, $\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}$ 解くと. $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{2}{3}$, $C=\frac{2}{3}$

$$\therefore \int\frac{1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{3}\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{6}\int\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx \quad -☆$$

$$(3項目)=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{3}d\theta \quad \left(x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) \text{ なので.}$$

$$☆=\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

問2 $x=\tan\theta$ で置換すると.

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int\frac{1+\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}dx=\int\cos^2\theta\,d\theta=\int\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=\underbrace{\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta}_{*}$$

$$\sin2\theta=\frac{2x}{(1+x^2)} \text{ なので. } *=\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,x+\frac{x}{2(1+x^2)}$$

問3 $\alpha=2, \beta=2, \gamma=\frac{1}{2}$. $\to$ $\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma=2$ なので. Case 3.

つまり. $1+\frac{1}{x^2}=t^2$ で置換すればよい ($t\geqq1$ に注意.)

$$x^2=\frac{1}{t^2-1},\quad x^2+1=\frac{t^2}{t^2-1},\quad -\frac{2}{x^3}dx=2t\,dt \Leftrightarrow dx=-tx^3dt$$
$$=-t\cdot\frac{dt}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}} \text{ より.}$$

$$\int x^2\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\frac{1}{t^2-1}\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\cdot -t\cdot\frac{dt}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}=-\int\frac{t^2}{(t^2-1)^3}dt$$

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^3} = \frac{A}{(t-1)} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{(t-1)^3} + \frac{D}{(t+1)} + \frac{E}{(t+1)^2} + \frac{F}{(t+1)^3}$$ とおいて、

A〜Fを求めればよい。通分して $t=\pm 1$ を代入すると、$C=\frac{1}{8}$、$F=-\frac{1}{8}$。
両辺微分して $t=\pm 1$ とすると、$8B+12C=2$、$-8E+12F=-2$ より、$B=E=\frac{1}{16}$。
もう一回微分して $t=\pm 1$ とすると、$16A+24B+12C=2$、$-16D+24E-12F=2$ より、

$A=-\frac{1}{16}$、$D=\frac{1}{16}$。

（具体的な計算は各自やってみましょう。）

よって、$$-\int \frac{t^2}{(t^2-1)^3}dt = -\int \frac{-\frac{1}{16}}{t-1} + \frac{\frac{1}{16}}{(t-1)^2} + \frac{\frac{1}{8}}{(t-1)^3} + \frac{\frac{1}{16}}{t+1} + \frac{\frac{1}{16}}{(t+1)^2} + \frac{-\frac{1}{8}}{(t+1)^3}\,dt$$

$$= \frac{1}{16}\left\{\log(t-1) + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} - \log(t+1) + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{16}\left\{\log\frac{t-1}{t+1} + \frac{2t}{t^2-1} + \frac{4t}{(t^2-1)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{16}\left\{\log\frac{(t-1)^2}{t^2-1} + \frac{2t}{t^2-1} + \frac{4t}{(t^2-1)^2}\right\}.$$

$t=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$、$t^2-1=\frac{1}{x^2}$ より、

$$= \frac{1}{16}\left\{2\log x\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-1\right) + x^2\cdot\frac{2\sqrt{x^2+1}}{x} + x^4\cdot\frac{4\sqrt{x^2+1}}{x}\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\log(\sqrt{x^2+1}-x) + (x+2x^3)\sqrt{x^2+1}\right\}$$

（$\mathrm{Arcsinh}\,x = \log(x+\sqrt{x^2+1}) = -\log(-x+\sqrt{x^2+1})$ です。）

問4 $\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと、$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$、$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$。

$$\int\frac{\sin x+1}{\cos x+1}dx = \int\frac{\frac{2t}{1+t^2}+1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)dt = \frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\log(1+t^2)$$

$$= \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} - \log\cos\frac{x}{2}.$$

問5. (1) $R(f,P,T)=\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\cdot\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{2n^2}=\frac{1}{2n^2}(n(n+1)-n)=\frac{1}{2}$.

(2) $P=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, $T=\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ として,

$$\left(\begin{array}{l} 0=x_0\leq t_1\leq x_1\leq t_2\leq \cdots \leq x_j\leq t_{j+1}\leq x_{j+1}\leq \cdots \leq t_n\leq x_n=2 \\ \qquad x_j\leq 1 \leq x_{j+1} \end{array}\right.$$

だとする.

このとき, $R(f,P,T)=0\cdot\underbrace{x_j}_{x_j-x_0\text{のこと}}+f(t_{j+1})\cdot(x_{j+1}-x_j)+1\cdot(x_n-x_{j+1})$

$=0+1\cdot(2-x_{j+1})+f(t_{j+1})\cdot(x_{j+1}-x_j)$

ここで, $f(t_{j+1})=0$ or 1 より,

$$2-x_{j+1}\leqq R\leqq 2-x_j$$

$|x_{j+1}-1|\leq|x_{j+1}-x_j|\leq \mathrm{mesh}\,P\to 0$ より, $x_{j+1}\xrightarrow{\mathrm{mesh}P\to 0}1$. 同様に, $x_j\xrightarrow{\mathrm{mesh}P\to 0}1$.

よって, はさみうちの定理より, $R\xrightarrow{\mathrm{mesh}P\to 0}1$. //

問6. 有理数に番号をふり, $r_1, r_2, \cdots$ とする
($分母の小さいものから, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \cdots$ と並べていけばよい.)

ここで, 区間 $(a_i, b_i)=(r_i-\varepsilon 2^{-i-1}, r_i+\varepsilon 2^{-i-1})$ を考えると, 全ての有理数は区間 (a_i, b_i) に含まれ, 区間の長さの和は $\sum_i \varepsilon 2^{-i-1}\times 2=\sum_i \varepsilon 2^{-i}=\varepsilon$ である

よって, 全ての $\varepsilon>0$ に対し, 長さの和が ε 以下の区間でおおえるので,
$[0,1]$ の有理数はゼロ集合. □

問7. (1) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx\left(\because x\to 0\text{ で }\frac{1}{\sqrt{x}}\to\infty.\right)=\lim_{c\to+0}\int_c^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{c\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_c^1=\lim_{c\to+0}(2-2\sqrt{c})=2$.

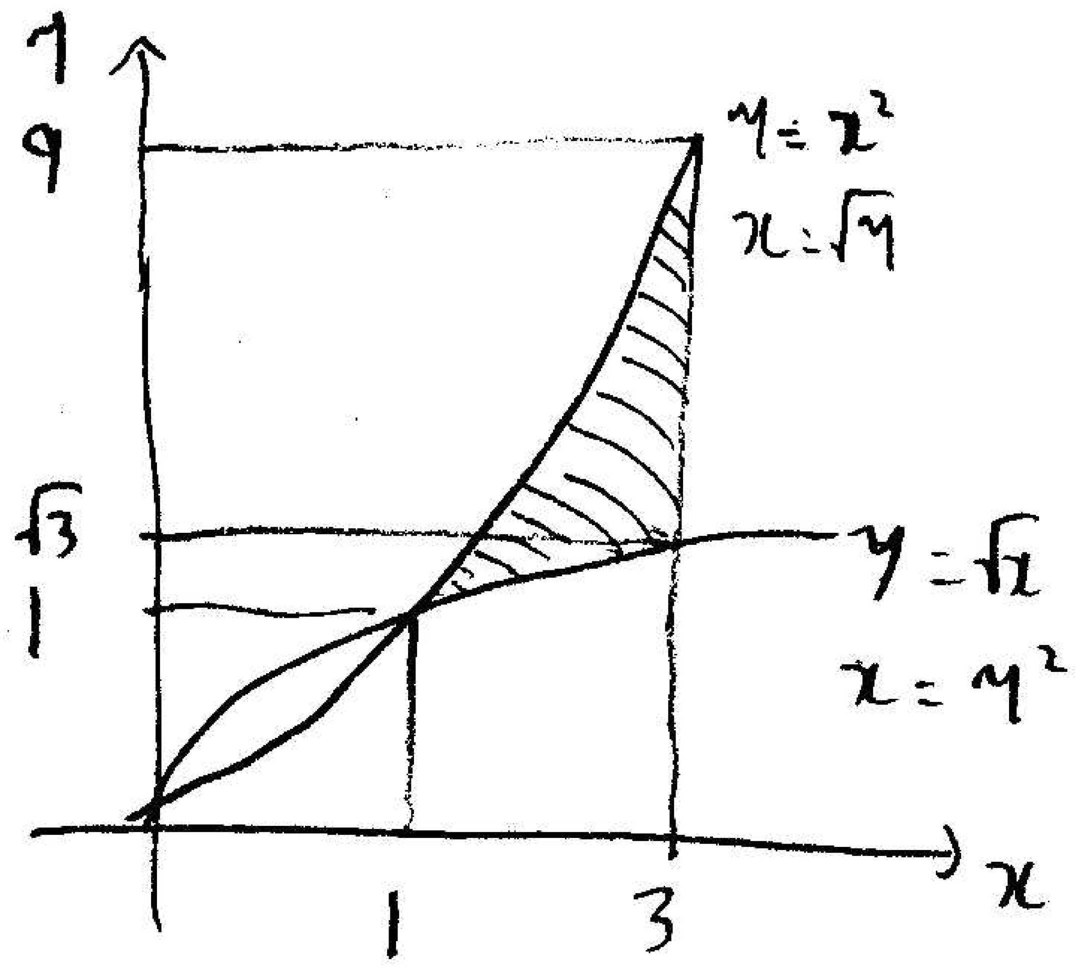
(2) $\int_0^\infty e^{-x}dx=\lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-x}dx=\lim_{c\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^c=\lim_{c\to\infty}(-e^{-c}+1)=1$.

問8. $\iint_D x^3\cos y\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_\pi^{2\pi} x^3\cos y\,dy\right)dx$

$= \int_0^1 \left[x^3\sin y\right]_\pi^{2\pi}dx = \int_0^1 0\,dx = 0$ 　出題ミスじゃないですよー

問9. $\int_1^3\left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2} f\,dy\right)dx$

$1\le x\le 3$ かつ $\sqrt{x}\le y\le x^2$ を図示すると、下図.



yで切ると、

$1\le y\le\sqrt3$ かつ $\sqrt y\le x\le y^2$

$+$

$\sqrt3\le y\le 9$ かつ $\sqrt y\le x\le 3$

よって、$\int_1^{\sqrt3}\left(\int_{\sqrt y}^{y^2} f\,dx\right)dy + \int_{\sqrt3}^9\left(\int_{\sqrt y}^3 f\,dx\right)dy$.

問10. $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}}_{\text{ヤコビ行列}} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$.

ヤコビアンは、$\cos\theta\cdot r\cos\theta - \sin\theta\cdot(-r\sin\theta) = r$

問11 積分区間は、$1<\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}<2$ 　∴ $1<r<2$

$0\leqq\theta<2\pi$.

よって、$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 \frac{r}{r}\,dr\right)d\theta = 2\pi$.

問12. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}+1}{4^{n+1}}\cdot\frac{4^n}{2^n+1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1$ だから $\sum a_n$ は収束.

問13. $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \to \frac{1}{2}<1$ だから $\sum a_n$ は収束.

問14. $\dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1} \to 0$ なので．収束半径は∞．

問15 $f_n(x) = e^{-(x-n)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\left(\lim_{n\to\infty}(x-n)^2 = \infty \text{ より}\right)$

収束先は．$f(x) = 0$．

問16 $f_n(n) - f(n) = e^{-0^2} - 0 = 1$ より．一様収束でない．

問17. $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{x^2} = |x|$ これが収束先．

$\left|f_n(x) - |x|\right|$ の最大値を考える．これは偶関数なので $x \geq 0$ として．

$f_n(x) - x = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - x$

$(f_n(x) - x)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{nx^2}}} - 1 < 0$

よって．最大値は $\left|f_n(0) - 0\right| = \sqrt{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ 一様収束