2007 年度冬学期　数学II 試験問題　解答（担当　戸瀬）

誤植等ありましたら雁木までお知らせください

I

（1）

グラムシュミット直交化法を用いて、

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix},\qquad \vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix}\quad \text{を得る。}$$

（2）

V への正射影は、

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}\vec{a}_1 + \mathbf{R}\vec{a}_2 + \mathbf{R}\vec{a}_3 \\
&= \vec{p}_1(\vec{p}_1\cdot\vec{x}) + \vec{p}_2(\vec{p}_2\cdot\vec{x}) + \vec{p}_3(\vec{p}_3\cdot\vec{x}) \\
&= \vec{p}_1\,{}^t\vec{p}_1\vec{x} + \vec{p}_2\,{}^t\vec{p}_2\vec{x} + \vec{p}_3\,{}^t\vec{p}_3\vec{x} \\
&= (\vec{p}_1\,{}^t\vec{p}_1 + \vec{p}_2\,{}^t\vec{p}_2 + \vec{p}_3\,{}^t\vec{p}_3)\vec{x} \\
&= \left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \frac{1}{15}\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\1&1&-2&3\\-2&-2&4&-6\\3&3&-6&9\end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}4&4&2&2\\4&4&2&2\\2&2&1&1\\2&2&1&1\end{pmatrix}\right)\vec{x} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix}8&8&4&4\\8&8&4&4\\4&4&7&-3\\4&4&-3&7\end{pmatrix}\vec{x} \\
&= P\vec{x}
\end{aligned}$$

Ⅱ

（１）a

$\mathbf{V} = \mathbf{R}\vec{a}_1 + \mathbf{R}\vec{a}_2 + \cdots + \mathbf{R}\vec{a}_l \qquad (\vec{v} \in \mathbf{V})$

${}^t A\vec{x} = \vec{0}$ をみたす $\vec{x} \in \ker({}^t A)$ について、

$(\vec{x}, \vec{v})$

$= (\vec{x}, A\vec{\mathbf{R}})$

$= ({}^t A\vec{x}, \vec{\mathbf{R}})$

$= 0$

よって、$\ker({}^t A)$ は $\mathbf{V}$ の直交補空間である。

（１） b

$\mathbf{V} = \mathbf{R}\vec{a}_1 + \mathbf{R}\vec{a}_2 + \cdots + \mathbf{R}\vec{a}_l \qquad (\vec{v} \in \mathbf{V})$

$\mathbf{R}^n = \mathbf{V} \oplus \mathbf{V}^{\perp},\ \dim(\mathbf{V}) = l,\ \dim(\mathbf{R}^n) = n$

$\therefore \dim(\mathbf{V}^{\perp}) = n - l$

（２）a

$\vec{v} \in \mathbf{V}$,$\vec{v}' \in \mathbf{V}^{\perp}$ とする。

$(\vec{v}, \vec{v}') = 0$ ……………①

$\vec{v} \in (\mathbf{V}^{\perp})^{\perp}$ であるためには、

$(\vec{v}, \vec{v}') = 0$ が必要

①　より示せた。

（２） b

次元定理つかってないけど、

$\dim(\mathbf{V}) = l$

また（１）より

$\dim(\mathbf{V}^{\perp}) = n - l$

同様に

$\dim((\mathbf{V}^{\perp})^{\perp}) = n - (n - l) = l$

次元が等しく、$\mathbf{V} \subset (\mathbf{V}^{\perp})^{\perp}$ より

$\mathbf{V} = (\mathbf{V}^{\perp})^{\perp}$

（３）

まず $\mathrm{Im}(A) = \mathbf{V}$ を示す。

$A\vec{v} = \mathrm{Im}(A)$ とすると　（但し $\vec{v}$ は任意）

$A\vec{v} = \mathbf{R}\vec{a}_1 + \mathbf{R}\vec{a}_2 + \cdots + \mathbf{R}\vec{a}_3$ となり

$A\vec{v} \in \mathbf{V}$

より

$\mathrm{Im}(A) = \mathbf{V}$

これと(1)の(a)より、

$(\mathrm{Im}(A))^{\perp} = \ker(A)$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(A) = (\ker(A))^{\perp}$

$A \to B$ と書きなおして

$\mathrm{Im}(B) = (\ker(B))^{\perp}$

Ⅲ

$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 6)$

$\lambda = 3$ のとき、

$\ker(A - 3I_3)$ の基底

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ を得る

$\lambda = 6$ のとき、

$\ker(A - 6I_3)$ の基底

$$\vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ を得る。

$P = (\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3)$ とおくと、

$$A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}P^{-1}$$ となる。

Ⅳ

A の固有値は $\lambda = -1, 3, -3$

$$\therefore \begin{cases} (A-3I_3)\vec{x}_2 = \vec{0} \\ (A+3I_3)\vec{x}_3 = \vec{0} \end{cases}$$ をみたす

$$\therefore f(t) = (t-3)(t+3)$$

Ⅴ

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32} - a_{11}a_{22} - a_{11}a_{33} - a_{22}a_{33} - a_{12}a_{31})\lambda + R$$

（ただし、R は λ の2次以外の項）

$$\therefore a_2 = a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32} - a_{11}a_{22} - a_{11}a_{33} - a_{22}a_{33} - a_{12}a_{31}$$

Ⅵ

(1)

$$\Phi_A(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda-1)$$

$$\begin{cases} (A+2I_3) \neq \mathbf{0}_3 \\ (A-I_3) \neq \mathbf{0}_3 \end{cases}$$ より

$$m_A = (\lambda+2)(\lambda-1)$$

(2)

$$\Phi_B(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$\begin{cases}(B-2I_3)\neq \mathbf{0}_3\\(B-3I_3)\neq \mathbf{0}_3\end{cases}$$

$$\therefore m_B=\Phi_B(\lambda)$$

Ⅶ

Bの固有値$\lambda=2,3$である

$$\begin{cases}\mathbf{V}_1=\ker(B-2I_3)\\\mathbf{V}_2=\ker(B-3I_3)\end{cases}$$ とすると、

$\mathbf{R}^n=\mathbf{V}_1\oplus\mathbf{V}_2$　と表される。

Ⅷ

Aの固有値をα,β,γとおく、

HC定理から

$\Phi_A(A)$

$=A^3-(\alpha+\beta+\gamma)A^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)A-\alpha\beta\gamma I_3=\mathbf{0}$

両辺にA^{-1}をかけて、

$A^2-(\alpha+\beta+\gamma)A^1+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)I^3-\alpha\beta\gamma A^{-1}=\mathbf{0}$

$A^2-(\alpha+\beta+\gamma)A^1+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)I^3=\alpha\beta\gamma A^{-1}$

$\alpha\beta\gamma\neq 0$のとき

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}(A^2-(\alpha+\beta+\gamma)A^1+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)I^3)=A^{-1}$$

$\alpha\beta\gamma$ ＝0のとき

両辺にA^{-1}をかけて　を繰り返すと解が求まるのではないか。