No. ・ ・ (　　)

2004年度.

I、 $A=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$. とする.

①、$\vec{a}=0$ のとき、 $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\neq 0$ とすると、

$$A\vec{v}=\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}=0$$

② $\vec{a}\neq 0$ のとき、 Aを行基本変形して、

$$B=\begin{pmatrix}a_{11}' & b_{12}' & c_{13}'\\ 0 & b_{22}' & c_{23}'\\ 0 & b_{32}' & c_{33}'\end{pmatrix}$$ とすることができる.

$\det(A)=\det(B)=0$ 　　$\therefore 0=a_{11}'\underbrace{\begin{vmatrix}b_{22}' & c_{23}'\\ b_{32}' & c_{33}'\end{vmatrix}}_{B'\text{とする}}$

$a_{11}'\neq 0$ より、 $\begin{vmatrix}b_{22}' & c_{23}'\\ b_{32}' & c_{33}'\end{vmatrix}=0$

$\therefore \det(B')=0$

このとき、 $B'\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=0$ となる $\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}\neq 0$ は存在する

$a_{11}'x+b_{12}'y+c_{13}'z=0$ より $x=-\frac{1}{a_{11}'}(b_{12}'y+c_{13}'z)$

とすると、 $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\neq 0$ となる解ができる.

II. Bを対角化する.

$\phi(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 4 + \lambda^2 - 5\lambda - 4$
$= \lambda^2 - 5\lambda = 0$
$\lambda(\lambda - 5) = 0 \qquad \therefore \lambda = 0, 5$

I. $\lambda = 0$のとき 固有ベクトル$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$とおける.

II. $\lambda = 5$のとき 固有ベクトル$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$とおける.

$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{p}_1\|}\vec{p}_1$, $\vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{p}_2\|}\vec{p}_2$, $Q = (\vec{q}_1, \vec{q}_2)$とすると.

Qは回転行列で正則.

$BQ = B(\vec{q}_1\ \vec{q}_2) = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore B = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}Q^{-1} \Rightarrow Q^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}Q^{-1}$

$(B\vec{v}, \vec{v}) = (Q^{-1}B\vec{v}, Q^{-1}\vec{v}) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}Q^{-1}\vec{v}, Q^{-1}\vec{v}\right)$

Q^{-1}は回転行列、$\vec{v}$は$\|\vec{v}\| = 1$を満たして動くので、
$Q^{-1}\vec{v}$も$\|Q^{-1}\vec{v}\| = 1$を満たして動く

$Q^{-1}\vec{v} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$とすると、$(B\vec{v}, \vec{v}) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)$
$= 5\eta^2$

$0 \leq \eta^2 \leq 1$より 2次形式の最大値は5
最小値は0

04

No.

Ⅲ. $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$とする　$C\vec{v}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$

$\|C\vec{v}\|=\|\vec{v}\|$より、　$\|C\vec{v}\|^2=\|\vec{v}\|^2$

$(ax+by)^2+(cx+dy)^2=x^2+y^2$

$a^2x^2+b^2y^2+2abxy+c^2x^2+d^2y^2+2cdxy=x^2+y^2$

x, yに関する恒等なので、$\begin{cases} a^2+c^2=1 \cdots ① \\ b^2+d^2=1 \cdots ② \\ ab+cd=0 \cdots ③ \end{cases}$ が成り立つ

①,②より、$a=\sin\alpha$　$b=\sin\beta$とおくと　$c=\cos\alpha$　$d=\cos\beta$とおける。

③に代入して、　$\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=0$　$(0\leq\alpha, \beta\leq 2\pi)$

$\cos(\alpha-\beta)=0$

$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi.$

$\alpha>\beta$とすると、　$\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi.$

$\alpha=\beta+\frac{\pi}{2}, \beta+\frac{3}{2}\pi.$

$\sin\alpha=\sin(\beta+\frac{\pi}{2}), \sin(\beta+\frac{3}{2}\pi)=\cos\beta, -\cos\beta.$

$\cos\alpha=\cos(\beta+\frac{\pi}{2}), \cos(\beta+\frac{3}{2}\pi)=-\sin\beta, \sin\beta.$

$\beta=\theta$とおきなおすと、

$C=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix}-\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

04

Ⅳ、$\phi(\lambda) = (2-\lambda)(-4-\lambda)+9$
$= -8 + \lambda^2 + 2\lambda + 1$
$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

Hamilton-Cayleyの定理より、

$$D^2 + 2D + I_2 = 0$$
$$(D+I_2)^2 = 0$$
$$D^2 + D = -(D+I_2)$$
$$D(D+I_2) = -(D+I_2)$$
$$D^n(D+I_2) = (-1)^n(D+I_2)$$
$$D^{n+1} + D^n = (-1)^n(D+I_2)$$
$$D^{n+1} = -D^n + (-1)^n(D+I_2)$$
$$\frac{D^{n+1}}{(-1)^{n+1}} = \frac{D^n}{(-1)^n} - (D+I_2)$$

漸化式を解き、$D^n = \frac{D}{(-1)} + (n-1)(-D-I_2)$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + (n-1)\left\{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + (n-1)\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3n+3 & n+1 \\ 9n-9 & 3n-3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3n+1 & n \\ 9n & 3n+1 \end{pmatrix}$$

No. ( )

VI. Dが正則であることの必要十分条件は、 $\det(A) \neq 0$

$$\det(D) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - 3a = a^3 - 3a + 2$$

$$= (a-1)(a^2+a-2)$$

$$= (a-1)(a+2)(a-1)$$

$$= (a-1)^2(a+2) \neq 0$$

VII

(1) $\vec{e_1} = \frac{1}{\|\vec{a_1}\|}\vec{a_1}$ とおく

$\vec{a_2}$ の $\vec{a_1}$ への正射影は、$\vec{w} = \frac{(\vec{a_1}, \vec{a_2})}{\|\vec{a_1}\|^2}\vec{a_1} = \frac{5}{6}\vec{a_1}$

$\vec{e_2} = \frac{1}{\|\vec{a_2} - \vec{w}\|}(\vec{a_2} - \vec{w})$ とおく

$\vec{c} = (\vec{e}, \vec{e_1})\vec{e_1} + (\vec{e}, \vec{e_2})\vec{e_2} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ //

(2) $\vec{c} = \alpha\vec{a_1} + \beta\vec{a_2} = A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$、$\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ とおく

$0 = (\vec{e} - \vec{c}, A\vec{v})$

$\quad = ({}^tA(\vec{e} - A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}), \vec{v})$

$\vec{v}$ は任意なので、${}^tA(\vec{e} - A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}) = \vec{0}$

$\therefore {}^tAA\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = {}^tA\vec{e}$

ここで、${}^tAA = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ より、$|{}^tAA| = 11 \neq 0$

$\therefore \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\vec{e}$

$\therefore \vec{c} = A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A({}^tAA)^{-1}A\vec{e}$ //

(※) $\vec{c} = A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ とおかず、$\vec{c}$ のまま考えると、

${}^tA\vec{c} = {}^tA\vec{e}$ … ☆

$\therefore A{}^tA\vec{c} = A{}^tA\vec{e}$

$\therefore \vec{c} = (A{}^tA)^{-1}A{}^tA\vec{e}$

としたくなりますが、これは間違いです

なぜなら、$|A{}^tA| = 0$ だからです。

☆からも答えが得られるのか、よく分かりません