2007年度.

I. 1). I. $n=0$ のとき (右辺) $= I$

(左辺) $= I$ より成立

II $n=l$ のとき $(\lambda I+A)^l=\sum_{k=0}^{l} {}_lC_k \lambda^k A^{l-k}$ が成り立って仮定する.

III $n=l+1$ のとき、 $(\lambda I+A)^{l+1}=(\lambda I+A)(\lambda I+A)^l$

$=(\lambda I+A)\sum_{k=0}^{l} {}_lC_k \lambda^k A^{l-k}$

$0\le m\le l+1$ となる整数 m について、 A^m の項について考えてみる.

A^m の項は、 $k=l-m$ のときと、 $\leftarrow \lambda I \times {}_lC_k \lambda^k A^{\overset{m}{\overset{\shortparallel}{l-k}}}$

$k=l-m+1$ のときにできる. $\leftarrow A \times {}_lC_k \lambda^k A^{\underset{m-1}{\underset{\shortparallel}{l-k}}}$

$k=l-m$ のとき、 ${}_lC_{l-m}\lambda^{l-m+1}A^m$

$k=l-m+1$ のとき ${}_lC_{l-m+1}\lambda^{l-m+1}A^m$

$\therefore\ ({}_lC_{l-m}+{}_lC_{l-m+1})\lambda^{l-m+1}A^m$

$={}_{l+1}C_{l-m+1}\lambda^{l-m+1}A^m$

$m=0,1,\dots,l+1$ より、

$(\lambda I+A)^{l+1}=\sum_{m=0}^{l+1} {}_{l+1}C_{l-m+1}\lambda^{l-m+1}A^m$

$m\to k$ に置換して、 $(\lambda I+A)^{l+1}=\sum_{k=0}^{l+1} {}_{l+1}C_{l+1-k}\lambda^{l+1-k}A^k$

I, II, III より数学的帰納法を用いて証明終3

2). $\begin{pmatrix} x & a & b \\ 0 & x & c \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \underset{\lambda}{\underset{\shortparallel}{x}} I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}$ とおく $\Rightarrow \lambda I_3 + A$ で表わせる

$\begin{pmatrix} x & a & b \\ 0 & x & c \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}^n = (xI_3+A)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k A^{n-k}$

ここで、 A^n について考える

I $n=1$ のとき $A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n=2$ のとき. $A^2=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n=3$ のとき. $A^3=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ n\ge 3$ のとき、 $A^n=A^{n-3}A^3=A^{n-3}\cdot O=O$ となる.

$\therefore\ n-k=0,1,2,$ のときだけ考える.

$\Rightarrow\ k=n,n-1,n-2$ "

$\begin{pmatrix} x & a & b \\ 0 & x & c \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}^n = {}_nC_n x^n A^{n-n} + {}_nC_{n-1}x^{n-1}A^{n-n+1} + {}_nC_{n-2}x^{n-2}A^{n-n+2}$

$=x^nI+nx^{n-1}A+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}A^2=\begin{pmatrix} x^n & anx^{n-1} & \frac{ac}{2}n(n-1)x^{n-2}+bnx^{n-1} \\ 0 & x^n & cnx^{n-1} \\ 0 & 0 & x^n \end{pmatrix}$

2007.

II.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 15 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 2r - 3\times(1r) \\ 3r - 3\times(1r) \\ 4r - 1r \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 12 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 1r - 2r \\ 3r - 3\times(2r) \\ 4r - 3\times(2r) \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 1r + 3r \\ 2r + 2(3r) \\ 3r - 3(3r) \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 10 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -15 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 1r - 4r \\ 2r + 3\cdot(4r) \\ 3r - 3(4r) \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 20 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -45 & 23 & -11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 36 & -21 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

2007.

III.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 6 & 6 & 10 & 15 & 21 & 0 \\ 4 & 4 & 10 & 20 & 34 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} 2r - 4\times(1r) \\ 3r - 6\times(1r) \\ 4r - 4\times(1r) \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 16 & 30 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} 1r - 2r \\ 3r - 4\times(2r) \\ 4r - 6\times(2r) \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} 1r + 3r \\ 2r - 2\times(3r) \\ 4r - 4\times(3r) \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{D\text{とする}} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とすると、}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ v - 3z = 0 \\ w + 3z = 0 \end{cases}$$

$z = \alpha$, $y = \beta$ とすると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta \\ \beta \\ \alpha \\ 3\alpha \\ -3\alpha \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \beta}_{\ker(C)\text{の基底}}$$

$D = (\vec{d_1}\ \vec{d_2}\ \vec{d_3}\ \vec{d_4}\ \vec{d_5})$ とすると、$\vec{d_1}, \vec{d_3}, \vec{d_4}$ は一次独立なので、
$C = (\vec{c_1}\ \vec{c_2}\ \vec{c_3}\ \vec{c_4}\ \vec{c_5})$ とすると、$\vec{c_1}, \vec{c_3}, \vec{c_4}$ も一次独立

∴ $\mathrm{Im}(C)$ の基底は $\vec{c_1}, \vec{c_3}, \vec{c_4}$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

No. ・ ・ (　　)

2007.

Ⅳ. クラメールの公式より、

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & c & b \\ \beta & 0 & a \\ \gamma & a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \alpha & b \\ c & \beta & a \\ b & \gamma & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & c & \alpha \\ c & 0 & \beta \\ b & a & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = abc + abc = 2abc \qquad \therefore x = \frac{b\beta + c\gamma - a\alpha}{2bc}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & c & b \\ \beta & 0 & a \\ \gamma & a & 0 \end{vmatrix} = ab\beta + ac\gamma - a^2\alpha \qquad y = \frac{a\alpha + c\gamma - b\beta}{2ac}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & b \\ c & \beta & a \\ b & \gamma & 0 \end{vmatrix} = bc\gamma + ab\alpha - b^2\beta \qquad z = \frac{b\beta + a\alpha - c\gamma}{2ab}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & c & \alpha \\ c & 0 & \beta \\ b & a & \gamma \end{vmatrix} = bc\beta + ac\alpha - c^2\gamma$$

Ⅴ. $\vec{a_2}$を中心に考える　$\vec{e_2} = \frac{1}{\|\vec{a_2}\|}\vec{a_2}$ とする.

$\|\vec{a_2}\|^2 = 9$

$\therefore \|\vec{a_2}\| = 3$　　$\therefore \vec{e_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

定数kについて、$\vec{a_1} - k\vec{e_2} \perp \vec{e_2}$ となる kを求める.

(グラム・シュミットの直交化法)

$$(\vec{a_1} - k\vec{e_2}, \vec{e_2}) = \vec{a_1}\cdot\vec{e_2} - k\|\vec{e_2}\|^2$$
$$= \frac{1}{3}(-2+1+10) - k$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 9 - k = 0$$
$$k = 3$$

$\vec{e_1} = \frac{1}{\|\vec{a_1} - 3\vec{e_2}\|}(\vec{a_1} - 3\vec{e_2})$ とする　　$\vec{a_1} - \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\therefore \vec{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{e_1} = \frac{1}{\|\vec{a_1} - \vec{a_2}\|}(\vec{a_1} - \vec{a_2})$

$\therefore$

同様に $\underbrace{\vec{a_3} - s\vec{e_1} - t\vec{e_2} \perp \vec{e_1}}_{①}$ かつ $\underbrace{\vec{a_3} - s\vec{e_1} - t\vec{e_2} \perp \vec{e_2}}_{②}$ となる

定数 s, tを求める

① … $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 9 - s = 0$　　② … $\frac{1}{3}(-4+1+14) - t = 0$

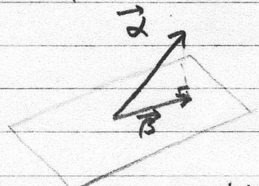
$\frac{9}{\sqrt{2}} = s$　　$t = 3$

$$\vec{e_3} = \frac{1}{\|\vec{a_3} - \frac{9}{2}\sqrt{2}\vec{e_1} - 3\vec{e_2}\|}(\vec{a_3} - \frac{9}{2}\sqrt{2}\vec{e_1} - 3\vec{e_2})$$

$$\vec{a_3} - \frac{9}{2}\sqrt{2}\vec{e_1} - 3\vec{e_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

07.

VI. 任意のベクトル $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ を用いることで、$\vec{\beta}$ のある平面を $D\vec{\omega}$ で表わせる



$$(\vec{\alpha}-\vec{\beta},\ D\vec{\omega})=0$$
$$({}^tD(\vec{\alpha}-\vec{\beta}),\ \vec{\omega})=0$$

$\vec{\omega}$ は任意のベクトルなので、上の式が成り立つためには、${}^tD(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=0$ が成り立つ必要がある

また、$\vec{\beta}$ は $\exists\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ を用いて、$\vec{\beta}=D\vec{y}$ と表わせる

$$ {}^tD(\vec{\alpha}-D\vec{y})=0$$
$$ {}^tD\vec{\alpha}-{}^tDD\vec{y}=0$$
$$ {}^tD\vec{\alpha}={}^tDD\vec{y}$$

$${}^tDD=\begin{pmatrix} \|\vec{a_1}\|^2 & (\vec{a_1},\vec{a_2}) & (\vec{a_1},\vec{a_3}) \\ (\vec{a_1},\vec{a_2}) & \|\vec{a_2}\|^2 & (\vec{a_2},\vec{a_3}) \\ (\vec{a_1},\vec{a_3}) & (\vec{a_2},\vec{a_3}) & \|\vec{a_3}\|^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 27 & 9 & 36 \\ 9 & 9 & 9 \\ 36 & 9 & 54 \end{pmatrix}$$

$${}^tD\vec{\alpha}=\begin{pmatrix} {}^t\vec{a_1} \\ {}^t\vec{a_2} \\ {}^t\vec{a_3} \end{pmatrix}\vec{\alpha}=\begin{pmatrix} (\vec{a_1},\vec{\alpha}) \\ (\vec{a_2},\vec{\alpha}) \\ (\vec{a_3},\vec{\alpha}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{pmatrix}$$ とする

$$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 27 & 9 & 36 \\ 9 & 9 & 9 \\ 36 & 9 & 54 \end{pmatrix}\vec{y} \qquad \vec{y}=\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$$ とする

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= 27s+9t+36u \\ \alpha_2' &= 9s+9t+9u \\ \alpha_3' &= 36s+9t+54u \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} s=\frac{1}{9}(5\alpha_1'-2\alpha_2'-3\alpha_3') \\ t=\frac{1}{9}(-2\alpha_1'+2\alpha_2'+\alpha_3') \\ u=\frac{1}{9}(-3\alpha_1'+\alpha_2'+2\alpha_3') \end{cases}$$

$$\vec{\beta}=D\vec{y}=s\vec{a_1}+t\vec{a_2}+u\vec{a_3}=\begin{pmatrix} s-2t+2u \\ -s-t+u \\ 0 \\ 5s+2t+7u \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3\alpha_1'-4\alpha_2'-\alpha_3' \\ -6\alpha_1'+\alpha_2'+4\alpha_3' \\ 0 \\ \alpha_2'+\alpha_3' \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3(\vec{a_1},\vec{\alpha})-4(\vec{a_2},\vec{\alpha})-(\vec{a_3},\vec{\alpha}) \\ -6(\vec{a_1},\vec{\alpha})+(\vec{a_2},\vec{\alpha})+4(\vec{a_3},\vec{\alpha}) \\ 0 \\ (\vec{a_2},\vec{\alpha})+(\vec{a_3},\vec{\alpha}) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} (3\vec{a_1}-4\vec{a_2}-\vec{a_3},\vec{\alpha}) \\ (-6\vec{a_1}+\vec{a_2}+4\vec{a_3},\vec{\alpha}) \\ 0 \\ (\vec{a_2}+\vec{a_3},\vec{\alpha}) \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} {}^t(3\vec{a_1}-4\vec{a_2}-\vec{a_3})\vec{\alpha} \\ {}^t(-6\vec{a_1}+\vec{a_2}+4\vec{a_3})\vec{\alpha} \\ {}^t\vec{0} \\ {}^t(\vec{a_2}+\vec{a_3})\vec{\alpha} \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} {}^t(3\vec{a_1}-4\vec{a_2}-\vec{a_3}) \\ {}^t(-6\vec{a_1}+\vec{a_2}+4\vec{a_3}) \\ {}^t\vec{0} \\ {}^t(\vec{a_2}+\vec{a_3}) \end{pmatrix}\vec{\alpha}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\vec{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{\alpha}$$

2007.

No. ・ ・ (　　)

Ⅶ. 1). $\phi(\lambda) = (11-\lambda)(8-\lambda) - 4$

$= 88 - 19\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 19\lambda + 84$

$= (\lambda - 7)(\lambda - 12) = 0$

$\therefore \lambda = 7, 12$

Ⅰ. $\lambda = 7$ のとき、$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し、

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+2y \\ 2x+y \end{pmatrix} = 0 \qquad y = -2x$$

固有ベクトル $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする.

Ⅱ $\lambda = 12$ のとき、$\vec{p_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し、

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ 2x-4y \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} -x+2y=0 \\ 2y = x \end{matrix}$$

固有ベクトル $\vec{p_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

$\vec{q_1} = \frac{1}{\|\vec{p_1}\|}\vec{p_1} \quad \vec{q_2} = \frac{1}{\|\vec{p_2}\|}\vec{p_2} \qquad Q = (\vec{q_1} \ \vec{q_2})$ とすると、

$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ は回転行列.

$FQ = Q\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \qquad F = Q\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} Q^{-1}$

2) 1)より、$F = Q\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} Q^{-1} \qquad Q^{-1}F = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} Q^{-1}$

$\left(F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(Q^{-1}F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, Q^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

$= \left(\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} Q^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, Q^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

$Q^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ とおくと、

$\left(F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 7\xi \\ 12\eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = 7\xi^2 + 12\eta^2$

また、$x^2+y^2=1$、Q^{-1} は回転行列であることより、

$\xi^2 + \eta^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \xi^2 = 1 - \eta^2$

$7(1-\eta^2) + 12\eta^2 = 7 + 5\eta^2$

$0 \leq \eta^2 \leq 1$ より 最小値は $\eta^2 = 0$, $\xi^2 = 1$ のとき、

7.

'07

Ⅵ

$\vec{\beta} = D\vec{p}$ ($\vec{p} \in \mathbb{R}^3$) とおける ($\because \vec{\beta} \in \mathrm{Im}(D)$)

任意の$\vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$をとる

$(\vec{\alpha} - \vec{\beta}, D\vec{\gamma}) = 0$

$\therefore ({}^tD(\vec{\alpha} - D\vec{p}), \vec{\gamma}) = 0$

$\vec{\gamma}$は任意なので、${}^tD(\vec{\alpha} - D\vec{p}) = \vec{0}$

$\therefore {}^tDD\vec{p} = {}^tD\vec{\alpha}$

$\therefore \vec{p} = ({}^tDD)^{-1}\,{}^tD\vec{\alpha}$

$\therefore \vec{\beta} = D({}^tDD)^{-1}\,{}^tD\vec{\alpha}$

$=$ (略) □

(※)機械的に計算ができる分、少し手間が少ない、かも

というか、よく考えたら'06(Ⅶ)と全く同じだった