2008 夏（大島）

1.(1) $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} = \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right) \times \frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}}$

$$= \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to \frac{1}{2} \quad (n\to\infty)$$

∴ $n\to\infty$ での極限は存在し、$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ //

(2) $a_n = \sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2+1} = \left(\sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2+1}\right) \times \frac{\left(\sqrt[3]{n^2+n}\right)^2 + \sqrt[3]{n^2+n}\sqrt[3]{n^2+1} + \left(\sqrt[3]{n^2+1}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{n^2+n}\right)^2 + \sqrt[3]{n^2+n}\sqrt[3]{n^2+1} + \left(\sqrt[3]{n^2+1}\right)^2}$

$$= \frac{n-1}{\sqrt[3]{(n^2+n)^2} + \sqrt[3]{(n^2+n)(n^2+1)} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n+3+\frac{1}{n}} + \sqrt[3]{n+1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{n+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

∴ $n\to\infty$ での極限は存在し、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ //

△ (3). $a_{n+1} - a_n = (n+1)r^{n+1}\sin(n+1) = b_n$ とすると、

$a_{n+1} = a_1 + \sum_{n=1}^{n} b_n$ とかける。　（$\lim a_1 = 0$）

∴ $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.　（$b_n$ の収束条件と a_n の収束条件は同じ）

ここで、b_n の収束条件を考える。

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{(n+2)r^{n+2}\sin(n+2)}{(n+1)r^{n+1}\sin(n+1)}\right| = \cdots$$

$|b_n| = |(n+1)r^{n+1}\sin(n+1)| \leqq |(n+1)r^{n+1}|$ … ①.　（∵ $|\sin x| \leqq 1$）

$c_n = (n+1)r^{n+1}$ とおくと、Σc_n が収束すれば、Σb_n が収束し、a_n も収束する。

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \frac{r^{n+2}}{r^{n+1}}\right| \to |r| \quad (n\to\infty) \quad \cdots ②$$

② と判定法より $|r| < 1$ で収束し、$|r| \geqq 1$ で発散するので、

（$r = 1$ の時、$c_n = n+1$ より $\Sigma c_n \to \infty$）.

$|r| \geqq 1$ で a_n は発散、$|r| < 1$ で a_n は収束する。 //

(4)（省略）

No. Date . .

2.(1) $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

$\varepsilon_n(x) = f(x) - P_n(x)$

とおく。この時、各 x ($\in \mathbb{R}$) に対して $0<\theta<1$ を満たす θ で、

$\varepsilon_n = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x+a)^{n+1}$ となるものが存在する。

この時、$P_n(x)$ を $f(x)$ の n 次近似多項式と呼ぶ。// (4り)

(2). $f(x) = \sqrt{x}$, $f^{(n)}(x) = \frac{1\cdot(-1)\cdots(3-2n)}{2^n}x^{\frac{1}{2}-n}$

$= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)\, x^{\frac{1}{2}-n} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot\{2(n-1)\}!}{2^{2n-1}\cdot(n-1)!}x^{\frac{1}{2}-n}$

$= \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot n!}x^{\frac{1}{2}-n}$ //

(3). $f(x)$ の $x=1$ における n 次近似多項式 $P_n(x)$ と $\varepsilon_n(x)$ を以下とする。

$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\frac{(2k)!}{2^{2n}\cdot(k!)^2}(x-1)^k$

$\varepsilon_n(x) = f(x) - P_n(x)$

この時、各 x ($\in \mathbb{R}$) に対して $0<\theta<1$ を満たす θ で

$\varepsilon_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(1+\theta(x-1))}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$ $\left(f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot n!}x^{\frac{1}{2}-n} \right)$

となるものが存在する。

(4) $\sqrt{17} = 4\sqrt{\frac{17}{16}} = 4\sqrt{1+\frac{1}{16}}$ $\left(\frac{1}{16} < 10^{-1}$ より $(x-1)^3$ の項は $\frac{1}{32}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^3 < \frac{1}{10^4}$ となるので、2乗の項までで十分 $\right)$

(3) より、2次近似多項式は、

$P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$

であるので、$x=\frac{17}{16}$ を代入して、$P_2\left(\frac{17}{16}\right) = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^2 \simeq 1.031738$

$\therefore \sqrt{17} = 4\times 1.031738 = 4.126952$

$\therefore \sqrt{17} = 4.1269\cdots$ //

上記の計算より $\sqrt{17} - 4.1269 = 0.000052\cdots \simeq 5.0\times 10^{-5}$ //

($P_2(x)$ と $f(x)$ の誤差は3乗の項($\varepsilon_2(x)$)の分だけでなく、小数として切りすてた部分も含まれる → $\varepsilon_2(x)$ は使えない)

(5). $a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$ とおくと、$P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(1)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{f^{(n)}(1)(x-1)^n}\right| = \left|\frac{x-1}{n-1}\cdot\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\times\frac{(2n+2)!}{2^{2(n+1)}\cdot(n+1)!}\right)\cdot\left(\frac{2n-1}{(-1)^{n-1}}\cdot\frac{2^{2n}\cdot n!}{(2n)!}\right)\right|$

$\to |x-1|$ $(n\to\infty)$

よって $|x-1|<1 \Leftrightarrow 0<x<2$ で収束、$x<0$, $2<x$ で発散する。

Date . . No.

2008 夏 （大島）

(5)つづき

ここで $x=0$ について考える。

この時． $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\right| = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\right)$

より発散する？

⋮

(6). テイラーの定理より

$$\varepsilon_n = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(c_n - 1)^{n+1}$$

となる c_n が 0 と x の間に存在する。

$0 \leqq x \leqq 2$ の時． $0 < c_n \leqq 2$. （$0 < c_n < 2$？）

$0 < c_n \leqq 2$ で (5) と同様に考えれば ε_n は $n \to \infty$ で収束し．

テイラー展開の無限級数と $f(x)$ は等しいといえる．

（$\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$）

数学1B 08大島　補足1

菊竹

平成21 年8 月18 日

第I部
第1問(3)について

1　解答

まず次のような数列を考える

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} r^k \sin k$$

これを用いて次の3つの式の組を考える。

$$\begin{aligned} b_n &= r\sin 1 + r^2\sin 2 + r^3 \sin 3 + \ldots + r^n \sin n \ldots (i) \\ r^2 b_n &= r^3 \sin 1 + \ldots + r^n \sin n \\ &+ r^{n+1}\sin(n-1) + r^{n+2}\sin n \ldots (ii) \\ 2r\cos 1 b_n &= r^2 \cos 1 \sin 1 + 2r^3 \cos 1 \sin 2 + \ldots + 2r^n \cos 1 \sin(n-1) \\ &+ 2r^{n+1}\cos 1 \sin n \ldots (iii) \end{aligned}$$

ここで (i)+(ii)-(iii) を考える。すなわち

$$\begin{aligned} (1+r^2-2r\cos 1)b_n &= r\sin 1 + \sum_{k=2}^{n} r^k(\sin k + \sin(k-2) - \cos 1 \sin(k-1)) \\ &+ r^{n+1}\sin(n-1) + r^n \sin n - 2r^{n+1}\cos 1 \sin n \end{aligned}$$

ここで任意の整数 k に対して

$$\begin{aligned} \sin k + \sin(k-2) &= \sin((k-1)+1) + \sin((k-1)-1) \\ &= 2\sin(k-1)\cos 1 \end{aligned}$$

であるので、結局

$$(1+r^2-2r\cos 1)b_n = r\sin 1 + r^{n+1}\sin(n-1) + r^n\sin n - 2r^{n+1}\cos 1\sin n$$

となる。ここで、n に関して極限をとれば、

$$\lim_{n\to\infty}(1+r^2-2r\cos 1)b_n = r\sin 1$$

となり、すなわち

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{r\sin 1}{1+r^2-2r\cos 1}$$

となる。これでやっと本題に入ることができる。ここで次のような数列を考える、

$$\begin{aligned}
a_n &= r\sin 1 + 2r^2\sin 2 + 3r^3\sin 3 + \ldots + nr^n\sin n \\
a_n + 2b_n &= +3r\sin 1 + \ldots + nr^{n-2}\sin(n-2) \\
&+ (n+1)r^{n-1}\sin(n-1) + (n+2)r^n\sin n \\
a_n + b_n &= +2r\sin 1 + 3r^2\sin 2 + \ldots + nr^{n-1}\sin(n-1) \\
&+ (n+1)r^n\sin n
\end{aligned}$$

先ほどと同じように小細工を加える。

$$\begin{aligned}
a_n &= r\sin 1 + 2r^2\sin 2 + 3r^3\sin 3 + \ldots + nr^n\sin n \\
r^2(a_n + 2b_n) &= +3r^2\sin 1 + \ldots + nr^n\sin(n-2) \\
&+ (n+1)r^{n+1}\sin(n-1) + (n+2)r^{n+2}\sin n \\
2r\cos 1(a_n + b_n) &= +2r^2 2\cos 1\sin 1 + 3r^3 2\cos 1\sin 2 + \ldots + nr^n 2\cos 1\sin(n-1) \\
&+ (n+1)r^{n+1}2\cos 1\sin n
\end{aligned}$$

先ほどと同じように加えれば、

$$\begin{aligned}
(1+r^2-2r\cos 1)a_n + (2r^2-2r\cos 1)b_n &= r\sin 1 + \sum_{k=2}^{n} kr^k(\sin k + \sin(k-2) - 2\sin(k-1)\cos 1) \\
&+ (n+1)r^{n+1}\sin(n-1) + (n+2)r^{n+2}\sin n \\
&- 2(n+1)r^{n+1}\sin(n-2)\cos 1 \\
&= r\sin 1 + (n+1)r^{n+1}\sin(n-1) + (n+2)r^{n+2}\sin n \\
&- 2(n+1)r^{n+1}\sin(n-2)\cos 1
\end{aligned}$$

先ほどと同じようにして第二項の和部分を消した。
これも n を無限大に飛ばせば、

$$(1+r^2-2r\cos 1)\lim_{n\to\infty} a_n + (2r^2-2r\cos 1)\lim_{n\to\infty} b_n = r\sin 1$$

先ほど求めた極限を代入すれば

$$(1+r^2-2r\cos 1)\lim_{n\to\infty} a_n + (2r^2-2r\cos 1)\frac{r\sin 1}{1+r^2-2r\cos 1} = r\sin 1$$

これを整理すれば、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{r(1-r^2)\sin 1}{(1+r^2-2r\cos 1)^2}; |r|<1$$

を得る。

2 考察

まぁ、結論からいえば、時間内に解くのは至難の技。
収束の証明は簡単なのでそれだけ言って逃げるが勝ちか？
もしかしたらものすごく簡単な解法があるかもしれないので探してみてください。
というか絶対あると思います。極限を求める$\neq$ 一般解を求める。

第 II 部
(4) について

3　考察

　よーわからん。ただ、オイラーの公式やド・モアブルの定理を使って展開していくと (3) と似た形が出てくる。
すなわち、

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とおけば、ド・モアブルの定理を用いて

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + \ldots + z^n &= 1 + r(\cos\theta + i\sin\theta) + r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots + r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \\ &= 1 + r\cos\theta + \ldots + r^n\cos n\theta + i(r\sin\theta + \ldots + r^n\sin n\theta) \end{aligned}$$

ね？でも実部と虚部の極限値がもとまらない。というのも、(3) ではあらかじめ収束するための r の範囲を求めてその中でやってたから直接極限を求めれたわけだけれども今回は収束するための r の範囲がわからないので、どうしようもない。後たぶんこの方法で極限が具体的にもとまってもそのときの極限は r と θ の関数になってるのだけれども、これを複素数 z に戻すのが大変な気がする。
そんなわけでだれか暇な人がいたらやってください。