数学 I_A 前期試験　理科１類１，２，２１，２２，２３，２４組　（担当　上村）

１９９５年9月5日（火）３：００〜４：３０

両面解答用紙２枚　計算用紙１枚

（注）教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問１　数列 $a_n\,(n=1,2,\ldots)$ について次の命題は正しいか？正しければ証明し誤りならば反例を挙げよ。

（１）　$\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = 0$ ならば a_n は収束する。

（２）　$a_n > 0$，$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = 0$ ならば a_n は収束する。

問２　$f(x,y)$ をすべての $t\in\mathbf{R}$ とすべての $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ に対し $f(tx,ty)=tf(x,y)$ を満たす関数とするとき、

（１）$f(x,y)$ が原点で連続であるためには $f(x,y)$ が単位円周上で有界であること，すなわち $\sup\{|f(x,y)| \mid x^2+y^2=1\}<\infty$ が必要十分である。これを証明せよ。

（２）$f(x,y)$ が原点で微分可能であるならば $f(x,y)=ax+by$（ただし、a,b は定数）であることを証明せよ。

問３　$u=2x+y,\ v=2x^2+2xy+y^2$（ただし $y>0$）とするとき、

（１）偏微分方程式 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ を $u,\ v$ の方程式に変換せよ。

（２）$\dfrac{\partial x}{\partial u}=\dfrac{x+y}{y}$ が成立することを示せ。また、$\dfrac{\partial x}{\partial v},\ \dfrac{\partial y}{\partial u},\ \dfrac{\partial y}{\partial v}$ を求めよ。

問４　関数 $f(x,y)=x(x^2+x+y^2-1)$ の極値を求めよ。

問１

（１）コーシーの判定法の例に出てきた、数列 $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ は発散するという事実を使いましょう。

誤り：$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ で定めると $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$n > m > N$ として $n = 2m$ とすると

$|a_n - a_m| = \left| \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m-1} + \ldots + \frac{1}{m+1} \right| > \left| \frac{1}{2m} \times m \right| = \frac{1}{2}$

よって $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ と $\forall\varepsilon$ を定めると，$n > m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$ となる N は存在しない。よって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しない。

（２）正しい：$\limsup a_n = 0$ なので上極限の定義より $\forall\varepsilon > 0$ に対し $\varepsilon \leq a_n$ となる a_n は有限個

よって $n > N \Rightarrow 0 < a_n < \varepsilon$ となる自然数 N が存在するので，その N に対し $n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$

すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

問２

（１）$f(0,0) = tf(0,0)$ が任意の t について成立するので $f(0,0) = 0$

$f(x,y)$ が原点で連続であるならば $\forall\varepsilon > 0$ に対して$\delta > \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| < \varepsilon$となる$\delta$が存在する

この式全体に$\frac{2}{\delta}$をかけて $2 > \sqrt{\left(\frac{2x}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{2y}{\delta}\right)^2} \Rightarrow |f(\frac{2x}{\delta}, \frac{2y}{\delta})| < \frac{2\varepsilon}{\delta}$

$x' = \frac{2x}{\delta}, y' = \frac{2y}{\delta}$とおきなおすと $2 > \sqrt{x'^2 + y'^2} \Rightarrow |f(x', y')| < \frac{2\varepsilon}{\delta}$

よって $\sup\{|f(x,y)| \mid x^2+y^2 = 1\} \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} < \infty$ となる

逆に $\sup\{|f(x,y)| \mid x^2+y^2 = 1\} = M$ とすると$\sqrt{x^2+y^2} < \frac{\varepsilon}{M}$のとき

$|f(x,y) - f(0,0)| = |\sqrt{x^2+y^2} f(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})|$

$< |\frac{\varepsilon}{M} \sup\{|f(x,y)| \mid x^2+y^2 = 1\}| = |\frac{\varepsilon}{M} M| = \varepsilon$

つまり $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ と定めると $\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$ より原点で連続

（２）$f(x,y)$ が原点で微分可能であるので $f(x,y)$ は $f(x,y) = f(0,0) + a(x-0) + b(y-0) + \varepsilon(x,y)$ と表すことができ，さらに $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ となる。

ここで $f(tx,ty) = atx + bty + \varepsilon(tx,ty), tf(x,y) = atx + bty + t\varepsilon(x,y)$ であり、この２つが一致するので $t\varepsilon(x,y) = \varepsilon(tx,ty)$ が成立する

よってここで $x=t\cos\theta, y=t\sin\theta$とすると $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta)}{t}$
$=\displaystyle\lim_{t\to 0}\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta)=0$
よって $\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta)=0$ が任意の θ で成立し、それより任意の x,y に対し
$\varepsilon(x,y)=\varepsilon(t\cos\theta,t\sin\theta)=t\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta)=0$ が成立する
よって $f(x,y)$ は $f(x,y)=ax+by$ である。

問３
（１）$\displaystyle\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2\frac{\partial z}{\partial u}+(4x+2y)\frac{\partial z}{\partial v}$
$\displaystyle\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}+(2x+2y)\frac{\partial z}{\partial v}$
これを $\displaystyle x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$ に代入して
$\displaystyle(2x+y)\frac{\partial z}{\partial u}+(4x^2+4xy+2y^2)\frac{\partial z}{\partial v}=u\frac{\partial z}{\partial u}+2v\frac{\partial z}{\partial v}=0$
（２）$u=(2x+y)$, $v=\frac{1}{2}(2x+y)^2+\frac{1}{2}y^2$ に着目し $s=2x+y$, $t=y^2$ と置く。
$u=s$, $v=\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}t$ より逆に s,v を u,v の関数として $s=u,t=2v-u^2$ と書ける
また $s=2x+y$, $t=y^2$ かつ $y>0$ より x,y を s,t の関数として $y=\sqrt{t}$, $x=\frac{1}{2}(s-\sqrt{t})$
と書ける
よって $\displaystyle\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}=\frac{1}{2}\cdot 1+\left(-\frac{1}{4\sqrt{t}}\right)\cdot(-2u)=\frac{1}{2}+\frac{2x+y}{2y}=\frac{x+y}{y}$
$\displaystyle\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}=\frac{1}{2}\cdot 0+\left(-\frac{1}{4\sqrt{t}}\right)\cdot 2=-\frac{1}{2y}$
$\displaystyle\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}=0\cdot 1+\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\cdot(-2u)=-\frac{2x+y}{y}$
$\displaystyle\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}=0\cdot 0+\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\cdot 2=\frac{1}{y}$

問４　$f_x(x,y)=3x^2+2x+y^2-1$, $f_y(x,y)=2xy$
よって $f_x(x,y)=0$ かつ $f_y(x,y)=0 \ \Leftrightarrow\ 3x^2+2x+y^2-1=0$ かつ $2xy=0$
これより極値を取る点の候補は $(x,y)=(0,\pm1),(-1,0)(\frac{1}{3},0)$
$f_{xx}=6x+2, f_{xy}=2y, f_{yy}=2x$
これより $Hesse$ 行列 H は、$H=\begin{pmatrix}6x+2 & 2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}$
$(x,y)=(0,\pm1)$ では $H=\begin{pmatrix}2 & \pm1\\ \pm1 & 0\end{pmatrix}$
$ab-h^2=-1<0$

$(0, \pm 1)$ は f の $saddle\,point$

$(x, y) = (\frac{1}{3}, 0)$ では $H = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$ab - h^2 = \frac{8}{3} > 0$ で $a > 0$

$f(\frac{1}{3}, 0) = -\frac{5}{27}$だから、$f$ は $(\frac{1}{3}, 0)$ で極小値 $-\frac{5}{27}$をとる。

$(x, y) = (-1, 0)$ では $H = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$ab - h^2 = 8 > 0$ で $a < 0$

$f(-1, 0) = 1$ だから、f は $(-1, 0)$ で極大値 1 をとる。

よって $f(x, y)$ は $(-1, 0)$ で極大値 $1, (\frac{1}{3}, 0)$ で極小値 $-\frac{5}{27}$ をとる

数学 I_A 前期試験　理科１類５，６，１４，１５組　（担当　上村）
２００２年9月4日（水）１０：５０〜１２：２０
両面解答用紙２枚　計算用紙１枚

（注）教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問１　$f(x,y)$ は集合 $\{(x,y) \mid -1 \leq x, y \leq 1\}$ で定義された関数で、各 $x \in [-1,1]$ に対し $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ が存在する。このとき、次の命題は正しいか誤りかを判定し、正しければ証明し誤りならば反例を挙げよ。

（１）　$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ が存在すれば $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在し、この二つの極限値は等しい。

（２）　$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在すれば $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ が存在し、この二つの極限値は等しい。

問２　w を $2ww'' = 3(w')^2$ をみたす $\mathbf{R}$ 上の（１変数）関数とする。（ただし w',w'' は w の１階および２階の導関数を表す）とき $f(x,y) = x^2 w(xy)$ は $\mathbf{R}^2$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

をみたすことを示せ。

問３　z を xy 平面内の領域 $\{(x,y) \mid x, y > 0\}$ 上の関数とするとき z が x^2+y^2 の C^1 級関数である（すなわち、C^1 級関数 F で $z = F(x^2+y^2)$ と書ける）ためには z が x, y の C^1 級関数で $y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ をみたすことが必要十分条件である。これを示せ。

ヒント：方程式 $y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ を $u = x^2+y^2$,$v = x^2-y^2$ で変換せよ。

問４　（１）$x = 0$ を含む区間で $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(e^x-1)^n$ が成り立つように定数 $a_n(n = 1, 2, \ldots)$ を定めよ。また、この式が成り立つ x の範囲を記せ。

（２）$x \to 0$ のとき，$\frac{x}{e^x-1} = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$ となるように定数 a, b, c, d を定めよ。

問５　関数 $f(x,y) = x^3 - 6xy + 8y^3$ の極値を求めよ。

問1

（1）誤り：例は $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\text{ のとき}\\ 0 & (x,y)=(0,0)\text{ のとき}\end{cases}$ など

$x=0$ のとき $\lim_{y\to 0} f(x,y)=0$, $x\neq 0$ のとき $\lim_{y\to 0} f(x,y)=0$, よって $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))=0$ と極限値が存在するが $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は $x=y=t$ の場合に限っても $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{t\to 0}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ と一致しない。

（2） 正しい：$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\alpha$ とすると $\forall\varepsilon>0$ に対して $\delta>\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow|f(x,y)-\alpha|<\varepsilon$ となる δ が存在する。

よって $|x-0|<\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ のもとでは $\delta'=\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ として

$|y-0|<\delta'\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ より $|f(x,y)-\alpha|<\varepsilon$ すなわち $\lim_{y\to 0} f(x,y)=\alpha$

よって $\delta''=\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ として $|x-0|<\delta''\Rightarrow|\lim_{y\to 0} f(x,y)-\alpha|=0<\varepsilon$

すなわち $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\alpha$

問2

$xy=t$ とする。

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2w)=w\frac{\partial x^2}{\partial x}+x^2\frac{\partial w}{\partial x}=2xw+x^2\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=2xw+x^2yw'$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2w)=x^2\frac{\partial w}{\partial y}=x^2\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=x^3w'$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(x^3w')=x^3\frac{\partial w'}{\partial y}=x^3\frac{\partial w'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=x^4w''$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(x^3w')=x^3\frac{\partial w'}{\partial x}+w'\frac{\partial x^3}{\partial x}=x^3\frac{\partial w'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+3x^2w'=x^3yw''+3x^2w'$$

よって $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(2xw+x^2yw')(x^4w'')-(x^3w')(x^3yw''+3x^2w')=x^5(2ww''-3w'^2)=0$

問3

$u=x^2+y^2$, $v=x^2-y^2$ とする

$z(x,y)=F(x^2+y^2)=F(u)$ と書けるとき

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=2F'x\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=2F'y$$

よって $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

逆に $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ が成立するとき

u,v が決まれば x,y が一意的に求まり、そこから z も求まる。よって $z(x,y)$ は u,v の関

数として $z(x,y)=F(u,v)$ と書ける

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2x\frac{\partial F}{\partial u}+2x\frac{\partial F}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2y\frac{\partial F}{\partial u}-2y\frac{\partial F}{\partial v}$$

よって $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ に代入して $4xy\dfrac{\partial F}{\partial v}=0$，さらに $x\neq 0$, $y\neq 0$ より $\dfrac{\partial F}{\partial v}=0$

F は u を固定すると v が変化しても値は変化しない。よって u の関数である

すなわち $z(x,y)=F(u)=F(x^2+y^2)$ となる

問４、問５は２００５年度解答を参照のこと。

数学 I_A 前期試験　理科１類５，６，１５，２９組　（担当　上村）

２００３年9月3日（水）１０：５０〜１２：２０

両面解答用紙２枚　計算用紙１枚

（注）教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問１　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について次の命題は正しいか誤りかを判定し，正しければ証明し誤りならば反例を挙げよ。

（１）$a_n - a_{n-1} = \dfrac{1}{n^n}\,(n = 2, 3, \ldots)$ をみたせば，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する。

（２）$a_{n-1} + a_n + a_{n+1} = 0\,(n = 2, 3, \ldots)$ をみたせば，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する。

問２　$F(x, y, z)$ を微分可能な３変数関数で，z についての偏導関数 F_z が $F_z(x, y, z) \neq 0$ をみたすものとする。$z = f(x, y)$ が $F(x, y, f(x, y)) = 0$ をみたすとき，次が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z},\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

ただし，$z = f(x, y)$ は偏微分可能であると仮定してよい。

問３　$t > 0$ に対し，$u = \sqrt{t}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}$ とするとき，次の問に答えよ。

（１）$x \neq 0$ のとき，$\lim_{t\to+\infty} u(x, t)$ を求めよ。

（２）$\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を求めよ。

（３）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ を求めよ。

問４ $|x|$ が十分大きな実数 x に対し，$x - x^2 \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$ が成り立つように，数列 $a_n\,(n = 0, 1, \ldots)$ を定めよ。また，この式が成り立つ x の条件を記せ。

問５　関数 $f(x, y) = x^3 - xy + y^2$ の極値を求めよ。

問１

（１）正しい：$n \geq 2$ より $a_n - a_{n-1} = \dfrac{1}{n^n} \leq \dfrac{1}{n^2}$

１，コーシーの判定法

$n > m > N$ として $|a_n - a_m| = |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \ldots + a_{m+1} - a_m|$

$\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \ldots + |a_{m+1} - a_m|$

$< \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n-1)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(m+1)^2}$

$< \dfrac{1}{n(n-1)} + \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} + \ldots + \dfrac{1}{(m+1)m}$

$= -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n-2} - \ldots - \dfrac{1}{m+1} + \dfrac{1}{m}$

$= \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}$

$< \dfrac{1}{m}$

よって $\forall \varepsilon > 0$ に対して $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ と自然数 N をとれば $n > m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{N} < \varepsilon$ となる。

よってコーシーの判定法より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し,$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する。

２，上に有界な単調増加数列は収束する

$\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ は単調増加数列

$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_2 - a_1) + a_1$

$< \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n-1)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(2)^2} + a_1$

$< \dfrac{1}{n(n-1)} + \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} + \ldots + \dfrac{1}{2 \times 1} + a_1$

$= -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n-2} - \ldots - \dfrac{1}{2} + 1 + a_1$

$= 1 + a_1 - \dfrac{1}{n} < 1 + a_1$

よって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界かつ単調増加数列なので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する。

（２）

誤り：反例は $a_n = \left(\begin{array}{ll} 1 & n \text{ を } 3 \text{ で割ると } 1 \text{ 余るとき} \\ 1 & n \text{ を } 3 \text{ で割ると } 2 \text{ 余るとき} \\ -2 & n \text{ が } 3 \text{ で割り切れるとき} \end{array} \right.$

問２

$s = x, t = y$ とおいて $G(x, y) = F(x, y, f(x, y)) = F(s, t, z)$ とする

$G(x, y)$ を x で偏微分して

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=F_x\cdot 1+F_y\cdot 0+F_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}$$

$G(x,y)=0$ より $\dfrac{\partial G}{\partial x}=0$

よって $F_x+F_z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ となるので $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$ が導かれる。

同様に $G(x,y)$ を y で偏微分して $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$ が導かれる。

問３

（１）$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}=\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}e^{-\frac{x^2}{4t}}=1$

よって $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}u(t,x)=\infty$

（２）$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}+\dfrac{x^2}{4t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{x}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}+\dfrac{x^2}{4t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

よって $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

（３）u は C^3 級だから $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}+\dfrac{\partial^4}{\partial x^4}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$

$\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$

$=-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}+\dfrac{x^2}{4t^2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$

$=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{x}{2t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$

$=-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}+\dfrac{x^2}{4t^2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

よって $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$

問４

$|x|$ が十分大きいと $-1<\dfrac{1}{x}\leq 1$

よって $\log(1+\dfrac{1}{x})=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}\right)^3-\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{x}\right)^n+\ldots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{nx^n}$

$x-x^2\log(1+\dfrac{1}{x})=x-x^2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{nx^n}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{nx^{n-2}}=x-x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{nx^{n-2}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)x^n}$（$n \longrightarrow n+2$ とおきかえた）よって $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$

式が成立する x の範囲は $-1 < \frac{1}{x} \leq 1$ より $x < -1, 1 \leq x$

問 5

$f_x(x,y) = 3x^2 - y,\ f_y(x,y) = -x + 2y$

よって $f_x(x,y) = 0$ かつ $f_y(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ 3x^2 - y = 0$ かつ $-x + 2y = 0$

これより極値を取る点の候補は $(x,y) = (0,0), (\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$

$f_{xx} = 6x, f_{xy} = -1, f_{yy} = 2$

これより $Hesse$ 行列 H は、$H = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$(x,y) = (0,0)$ では $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$ab - h^2 = -1 < 0$

$(0,0)$ は f の $saddle\,point$

$(x,y) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ では $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$ab - h^2 = 1 > 0$ で $a > 0$

$f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{432}$だから、$f$ は $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ で極小値 $-\frac{1}{432}$をとる。

数学 I_A 前期試験　理科１類５，６，１５，２９組　（担当　上村）

２００４年9月1日（水）１０：５０〜１２：２０

両面解答用紙２枚　計算用紙１枚

（注）教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問１ 次の命題は正しいか誤りかを判定し, 正しければ証明し誤りならば反例を挙げよ。

（１）　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{x\to\infty} n^2 (a_n - a_{n-1}) = 1$ をみたせば，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。

（２）　f が $\mathbf{R}^2$ 上の偏微分可能な関数で，φ と ψ が $\mathbf{R}$ 上の微分可能な関数ならば，$F(t) = f(\varphi(t)\,,\psi(t))$ で定まる関数 F は $\mathbf{R}$ 上の微分可能な関数になる。

問２　$z = z(x,y)$ が $\mathbf{R}^2$ 上の C^2 級関数で $xf(z) + g(z) = y$ なる関係式を満たしている（ただし，f, g は $\mathbf{R}$ 上の C^1 級関数とする）とき

（１）z は $z_x + f(z)z_y = 0$ を満たすことを示せ。ただし，ここで z_x, z_y は $z = z(x,y)$ の偏導関数を表す。

（２）z は $z_y^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} = 0$ を満たすことを示せ。ただし，ここで z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} は $z = z(x,y)$ の２階の偏導関数を表す。

問３　$\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1) = 1$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,1) = -1$ なる $\mathbf{R}^2$ 上の C^2 級の関数 $f = f(x,y)$ に対し

$$F(u,v) = f(u+v, u-v)$$

とおくとき

（１）$\dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial v}$ の $(u,v) = (2,1)$ における値を求めよ。

（２）$\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}$ の $(u,v) = (2,1)$ における値を求めよ。

問４　$|x| < 1$ において　$\dfrac{\log(1+x)}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ が成り立つように定数 $a_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ を定めるとき

（１）a_1, a_2, a_3 の値を求めよ。

（２）$\lim_{n\to\infty} a_n$ の値を求めよ。

問５　関数 $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$ の極値を求めよ。

問１

（１）正しい：$\lim_{n\to\infty} n^2(a_n - a_{n-1}) = 1$ より、$\forall\varepsilon > 0$ に対して

$n > N \Rightarrow 1-\varepsilon < n^2(a_n - a_{n-1}) < 1+\varepsilon$ となる自然数 N が存在する。

ここで $\varepsilon = 1$ として $0 < a_n - a_{n-1} < \dfrac{2}{n^2}$

１，コーシーの判定法

$n > m > N$ として $|a_n - a_m| = |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \ldots + a_{m+1} - a_m|$

$\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \ldots + |a_{m+1} - a_m|$

$< \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{2}{(n+1)^2} + \ldots + \dfrac{2}{(m+1)^2}$

$< \dfrac{2}{n(n-1)} + \dfrac{2}{(n-1)(n-2)} + \ldots + \dfrac{2}{(m+1)m}$

$= -\dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{n-1} - \dfrac{2}{n-1} + \dfrac{2}{n-2} - \ldots - \dfrac{2}{m+1} + \dfrac{2}{m} = \dfrac{2}{m} - \dfrac{2}{n} < \dfrac{2}{m}$

よって $\forall\varepsilon' > 0$ に対して $N > \dfrac{2}{\varepsilon'}$ と自然数 N をとれば $n > m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \dfrac{2}{m} < \dfrac{2}{N} < \varepsilon'$ となる。

よってコーシーの判定法より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。

２，上に有界な単調増加数列は収束する

$N < n \Rightarrow 0 < a_n - a_{n-1} < \dfrac{2}{n^2}$ より $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ は単調増加数列

また $n > N$ のとき $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_{N+1} - a_N) + a_N$

$< \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{2}{(n-1)^2} + \ldots + \dfrac{2}{(N+1)^2} + a_N$

$< \dfrac{2}{n(n-1)} + \dfrac{2}{(n-1)(n-2)} + \ldots + \dfrac{2}{(m+1)m} + a_N$

$= \dfrac{2}{m} - \dfrac{2}{n} + a_N < \dfrac{2}{N} + a_N$ よって $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ は上に有界かつ単調増加数列

よって $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ は収束するので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束する。

（２）２００５年度「稲垣」様のシケプリ「講義内容編」の１７ページ目にあるように、授業で反例を出されております。

誤り：$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\phi\psi}{\phi^2+\psi^2} & (\phi,\psi) \neq (0,0) \\ 0 & (\phi,\psi) = (0,0) \end{cases}$ で　$\phi(t) = t, \psi(t) = t$ とすると、これは条件をみたすが

$f(\phi(t),\psi(t)) = F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (t \neq 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$

よって $F(t)$ は $\mathbf{R}$ 上で連続ですらない。微分可能ならば連続なので、微分可能ではない。

問２ z はそのまま x, y で偏微分されます。一方 f, g の x, y での偏微分は $\dfrac{\partial f(z)}{\partial x} =$

$\dfrac{\partial f(z)}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(z)z_x$, $\dfrac{\partial f(z)}{\partial y} = \dfrac{\partial f(z)}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(z)z_y$, $\dfrac{\partial g(z)}{\partial x} = \dfrac{\partial g(z)}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = g'(z)z_x$, $\dfrac{\partial g(z)}{\partial y} = \dfrac{\partial g(z)}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = g'(z)z_y$ となります。また積の微分法 $\dfrac{\partial fg}{\partial x} = g\dfrac{\partial f}{\partial x} + f\dfrac{\partial g}{\partial x}$ を使います。

（１）$xf(z) + g(z) = y$ を x, y で偏微分して $f(z) + xf'(z)z_x + g'(z)z_x = 0$ ー (1)
$xf'(z)z_y + g'(z)z_y = 1$ ー (2)
(1)$\times z_y -$(2)$\times z_x$ より $f(z)z_y + z_x = 0$ が導かれる。

（２）$z_x + f(z)z_y = 0$ を x, y で偏微分して
$z_{xx} + f'(z)z_x z_y + f(z)z_{yx} = 0$ ー (3)
$z_{xy} + f'(z)z_y z_y + f(z)z_{yy} = 0$ ー (4)
$f'(z)$ を $(3) \times z_y - (4) \times z_x$ で消去して
$(z_y z_{xx} - z_x z_{xy}) + f(z)(z_y z_{yx} - z_x z_{yy}) = 0$
両辺に z_y をかけ、$f(z)z_y = -z_x$ で $f(z)$ を消去して
$z_y^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} = 0$
（この問題は教科書１５２ページ：演習問題５６です）

問３
（１）$x = u + v, y = u - v$ として $F(u, v) = f(u + v, u - v) = f(x, y)$

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial f}{\partial x}$$

よって $\dfrac{\partial F}{\partial u}(2, 1) + \dfrac{\partial F}{\partial v}(2, 1) = 2\dfrac{\partial f}{\partial x}(2 + 1, 2 - 1) = 2 \times 1 = 2$

補足：x, y の代わりに、例えば $s = u + v, t = u - v$ としていれば $\dfrac{\partial F}{\partial u}(2, 1) + \dfrac{\partial F}{\partial v}(2, 1) = 2\dfrac{\partial f}{\partial s}(2 + 1, 2 - 1)$ だが、第一変数の微分という意味で $\dfrac{\partial f}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ となるので問題はない。

（２）
$\dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial v} = 2\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を u, v で偏微分して

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial u} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial v} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\right) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)$$

（f は x, y を変数とする C^2 級関数、x, y は u, v を変数とする C^2 級関数なので、その合成関数 F は u, v を変数とする C^2 級関数だから $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}$　←講義内容編１８ページ：系３参照）

$= 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$（$f$ は C^2 級関数だから）

よって $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}(2,1)-\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}(2,1)=4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2+1,2-1)=-4$
（この問題は教科書１５２ページ：演習問題５０です）

問４　（１）$|x|<1$ なので $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$
$\dfrac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+(-1)(-x)^{+}\dfrac{(-1)(-2)}{2!}(-x)^2+\ldots+\dfrac{(-1)^n n!}{n!}(-x)^n+\ldots=\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}x^i$
よって $\dfrac{\log(1+x)}{1-x}=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\right)\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}x^i\right)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}x^{k+i}\right)=$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\times\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$
$\longleftarrow$ $(i+k=n$ となる項でまとめた$)$
よって $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ より $a_1=1,\ a_2=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2},\ a_3=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$

（２）$\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots$
これは $-1<x\leq 1$ で成立する。$x=1$ を代入し，右辺が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ に一致するので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\log 2$

問５
$f_x(x,y)=3x^2+3y^2-3,\ f_y(x,y)=6xy$
よって $f_x(x,y)=0$ かつ $f_y(x,y)=0\ \Leftrightarrow\ x^2+y^2-1=0$ かつ $xy=0$
これより極値を取る点の候補は $(x,y)=(0,\pm1),(\pm1,0)$
$f_{xx}=6x, f_{xy}=6y, f_{yy}=6x$
これより $Hesse$ 行列 H は、$H=\begin{pmatrix}6x & 6y\\ 6y & 6x\end{pmatrix}$
$(x,y)=(0,\pm1)$ では $H=\begin{pmatrix}0 & \pm6\\ \pm6 & 0\end{pmatrix}$
$ab-h^2=36<0$
$(0,\pm1)$ は f の $saddle\,point$
$(x,y)=(1,0)$ では $H=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$
$ab-h^2=36>0$ で $a>0$
$f(1,0)=-2$ だから、f は $(1,0)$ で極小値 -2 をとる。
$(x,y)=(-1,0)$ では $H=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}$
$ab-h^2=36>0$ で $a<0$
$f(-1,0)=2$ だから、f は $(-1,0)$ で極大値 2 をとる。

数学 I_A 前期試験　理科１類１８，１９，２０，２１組　（担当　上村）
２００５年9月5日（月）１０：５０〜１２：２０
両面解答用紙２枚　計算用紙１枚

（注）教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問１　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，次の問に答えよ。
（１）次の (1) から (4) のうち，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と同値であるものを選び，その番号を記せ。（番号だけ明記すればよい。）

(1)　$\sup_n a_n = \inf_n a_n = 0$

(2)　$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} \inf a_n = 0$

(3)　任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$n > N$ ならば $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ となるような自然数 N が存在する。

(4)　任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$n > m > N$ ならば $|a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon$ となるような自然数 N が存在する。

（２）　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば，数列 $b_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{2^{n-k}}$ も 0 に収束することを証明せよ。

問２　$f(x,y)$ は $\mathbf{R}^2$ の領域 $\{(x,y) \mid x+y>0\}$ で定義された C^4 級関数で

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \log(x+y)$$

をみたすとする。このとき、次を求めよ。

（１）$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$　（２）$\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4}$

問３　$f(x,y)$ は $\mathbf{R}^2$ 上の C^2 級関数で，任意の $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ に対し，関係式

$$f(x+y, x-y) - 2f(x,y) = x$$

をみたすとする。このとき，次の問に答えよ。
（１）$f_x(0,0)$ および $f_y(0,0)$ の値を求めよ。
（２）任意の $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ に対し，関係式

$$f_{xx}(x+y, x-y) + f_{yy}(x+y, x-y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$$

が成り立つことを証明せよ。

問４　（１）$x = 0$ を含む区間で $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(e^x - 1)^n$ が成り立つように定数 $a_n (n = 1, 2, \ldots)$ を定めよ。また、この式が成り立つ x の範囲を記せ。

（２）$x \to 0$ のとき，$\dfrac{x}{e^x - 1} = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$ となるように定数 a, b, c, d を定めよ。

問５　関数 $f(x,y) = x^3 - 6xy + 8y^3$ の極値を求めよ。

問１

（１）(1)$\sup_n a_n$ とは $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上限のことだそうです。同様に $\inf_n a_n$ は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の下限のことです。

上限、下限の定義より $\forall n(\in \mathbf{N})$ に対し $a_n \leq 0$ かつ $a_n \geq 0$

よって $a_n = 0\ (\forall n \in \mathbf{N})$　これは $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と同値ではありません。

(2) 命題１．５より $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} \inf a_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ です。よって $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と同値です。

(3)$\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{4}$ とおけば、「任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$n > N \Rightarrow |a_n| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ となるような自然数 N が存在する。」は「任意の $\varepsilon' > 0$ に対し、$n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon'$ となるような自然数 N が存在する。」になります

よってこれは $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と同値です。

(4)$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a_n = \dfrac{1}{n}$ と定められていれば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ をみたします。しかし $n = 2m$ とすると $|a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m+1} + \ldots + \dfrac{1}{2m} > \dfrac{m+1}{2m} > \dfrac{1}{2}$ より、$0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ と ε を定めると、どのように自然数 N を決めても、$N < m < n$ でも $n = 2m$ の場合は $|a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon$ は成立しません。よって同値ではありません。

（２）$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ より、$\forall\varepsilon > 0$ に対して $n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$ となる自然数 N が存在する。

$|b_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{2^{n-k}} \right| = \left| \sum_{k=1}^{N} \dfrac{a_k}{2^{n-k}} + \sum_{k=N+1}^{n} \dfrac{a_k}{2^{n-k}} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{N} \dfrac{a_k}{2^{n-k}} \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{n} \dfrac{a_k}{2^{n-k}} \right|$ である。

$$\left| \sum_{k=N+1}^{n} \frac{a_k}{2^{n-k}} \right| = \left| \frac{a_{N+1}}{2^{n-(N+1)}} + \frac{a_{N+2}}{2^{n-(N+2)}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-(n-1)}} + \frac{a_n}{2^{n-n}} \right|$$
$$\leq \left| \frac{a_{N+1}}{2^{n-(N+1)}} \right| + \left| \frac{a_{N+2}}{2^{n-(N+2)}} \right| + \ldots + \left| \frac{a_{n-1}}{2^1} \right| + \left| \frac{a_n}{2^0} \right|$$
$$= \frac{|a_{N+1}|}{2^{n-(N+1)}} + \frac{|a_{N+2}|}{2^{n-(N+2)}} + \ldots + \frac{|a_{n-1}|}{2} + |a_n|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2^{n-(N+1)}} + \frac{\varepsilon}{2^{n-(N+2)}} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon$$
$$= \varepsilon \left(\frac{1}{2^{n-(N+1)}} + \frac{1}{2^{n-(N+2)}} + \ldots + \frac{1}{2} + 1 \right)$$
$$= \varepsilon \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^{n-N}} \right) < 2\varepsilon$$

また $\left| \sum_{k=1}^{N} \dfrac{a_k}{2^{n-k}} \right| = \dfrac{1}{2^n} \left| \sum_{k=1}^{N} 2^k a_k \right|$　ここでは N は一定なので $\left| \sum_{k=1}^{N} 2^k a_k \right|$ も一定。

$n > N_0(\geq N)$ ならば $\left| \sum_{k=1}^{N} \dfrac{a_k}{2^{n-k}} \right| = \dfrac{1}{2^n} \left| \sum_{k=1}^{N} 2^k a_k \right| < \varepsilon$ となる N_0 がとれる。

これより $\forall\varepsilon$ に対して $n > N_0$ ならば

$$|b_n| \leq \left| \sum_{k-1}^{N} \frac{a_k}{2^(n-k)} \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{n} \frac{a_k}{2_{n-k}} \right| < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$$

$3\varepsilon=\varepsilon'$ とすれば $\forall\varepsilon'>0$ に対し $n>N_0 \Rightarrow |b_n-0|<\varepsilon'$ となる自然数 N_0 が存在する

よって $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

または最初から，$|a_n|<\varepsilon$ を $|a_n|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, 途中を $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{2^{n-k}}\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ と変えて $|b_n|<\varepsilon$ とする。

問２

（１）$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\longleftarrow$($f$ は C^2 級だから)

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\log(x+y)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\log(x+y)\right)$$

$$=\frac{2}{x+y}$$

（２）$\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}-\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4}=\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}-\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2\partial x^2}-\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4}\longleftarrow$($f$ は C^4 級だから)

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{2}{x+y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{2}{x+y}\right)$$

$$=\frac{4}{(x+y)^3}+\frac{4}{(x+y)^3}=\frac{8}{(x+y)^3}$$

問３ $f(x,y)$ の直接の変数は x,y です。ですから x,y でそのまま偏微分されて $f_x(x,y),f_y(x,y)$ となります。ですが $f(x+y,x-y)$ の直接の変数は $x+y,x-y$ ですから x,y で偏微分する場合 $x+y,x-y$ をはさんで偏微分してやる必要があることに注意してください。また $f_x(x+y,x-y),f_y(x+y,x-y)$ の添え字の x,y はそれぞれ第一変数での偏微分、第二変数での偏微分という意味です。ですから $\dfrac{\partial f(x+y,x-y)}{\partial(x+y)}=f_x(x+y,x-y)$, $\dfrac{\partial f(x+y,x-y)}{\partial(x-y)}=f_y(x+y,x-y)$ となるのです。二通りの x,y の用法に注意してください。また以下での f,F の違いは、$f(x+y,x-y)$ は $x+y,x-y$ を直接の変数としており x,y は間接的な変数となっているのに対し、F は同じ関数を角度を変えて、$F(x,y)$ と x,y を直接の変数に持ってきている。というものです。以下の問題でもこれらのことをある程度意識しておいてください。

（１）$s=x+y,t=x-y$ とおいて $F(x,y)=f(x+y,x-y)=f(s,t)$ を x,y でそれぞれ偏微分して

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial t}=f_x(x+y,x-y)+f_y(x+y,x-y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial f}{\partial t}=f_x(x+y,x-y)-f_y(x+y,x-y)$$

$(\dfrac{\partial s}{\partial x}=1,\dfrac{\partial t}{\partial x}=1,\dfrac{\partial s}{\partial y}=1,\dfrac{\partial t}{\partial y}=-1$ より。)

よって $f(x+y,x-y)+2f(x,y)=x$ を x,y で偏微分すると

$f_x(x+y,x-y)+f_y(x+y,x-y)-2f_x(x,y)=1$ ー (1)
$f_x(x+y,x-y)-f_y(x+y,x-y)-2f_y(x,y)=0$ ー (2)
(1), (2) に $x=0, y=0$ を代入して
$f_x(0,0)+f_y(0,0)-2f_x(0,0)=1, f_x(0,0)-f_y(0,0)-2f_y(0,0)=0$
よって $f_x(0,0)=-\dfrac{3}{2}, f_y(0,0)=-\dfrac{1}{2}$

（２）(1) を x で偏微分, (2) を y で偏微分して（$f_x(x+y,x-y), f_y(x+y,x-y)$ を s,t をはさんで偏微分するのは (1) と同じ）
$f_{xx}(x+y,x-y)+f_{xy}(x+y,x-y)+f_{yx}(x+y,x-y)+f_{yy}(x+y,x-y)-2f_{xx}(x,y)=0$
$f_{xx}(x+y,x-y)-f_{xy}(x+y,x-y)-f_{yx}(x+y,x-y)+f_{yy}(x+y,x-y)-2f_{yy}(x,y)=0$
この二つの式を足して
$2f_{xx}(x+y,x-y)+2f_{yy}(x+y,x-y)-2f_{xx}(x,y)-2f_{yy}(x,y)=0$
よって $f_{xx}(x+y,x-y)+f_{yy}(x+y,x-y)=f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$

問４　局所テイラー、テイラー展開に加え（講義内容編　3.2, 3.3)、特に次のことを覚えておきましょう

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\ (-\infty<x<\infty)$$
$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\ (-\infty<x<\infty)$$
$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\ (-\infty<x<\infty)$$
$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n\ (-1<x\leq 1)$$
$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^n+\ldots$$
$(-1<x<1)$ は $\forall\alpha\in\mathbf{R}$ で成立
αが自然数ならば $(-\infty<x<\infty)$ で成立　（２項展開）
$x=1$ のところは$\alpha>-1$ で成立
$x=-1$ のところは$\alpha>0$ で成立
また x を $-x$ で置き換え、$\alpha=-1$ とすると $(-1<x<1)$
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$
例　$e^{2x}=1+2x+\dfrac{1}{2!}(2x)^2+\dfrac{1}{3!}(2x)^3+\ldots\ (-\infty<x<\infty)$
$$e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{1}{2!}\sin^2 x+\frac{1}{3!}\sin^3 x+\ldots\ (-\infty<x<\infty)$$
$$e^x\sin x=\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right)\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)\right)$$
$$=x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+o(x^5)\ (-\infty<x<\infty)$$

確認ですが $o(g(x))\ as\ x \to c$ とは $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ となる $f(x)$ のことです。上式で、6 次以上の項、$o(x^4) \times x, o(x^4) \times x^3$、$o(x^5) \times x, o(x^5) \times x^2$ などがすべて $o(x^5)$ でまとめられることは定義よりわかります。

（1）$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^x - 1)^n$ に $x = \log(1+t)$ を代入し

$\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$

よって $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ であり、成立範囲は $-1 < t \leq 1$、すなわち $x \leq \log 2$

（2）$x \to 0$ では $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$

$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)} \longleftarrow \frac{o(x^4)}{x} = o(x^3)$

よって $1 = \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)\right)(a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3))$

$= a + \left(\frac{a}{2} + b\right)x + \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c\right)x^2 + \left(\frac{a}{24} + \frac{b}{6} + \frac{c}{2} + d\right)x^3 + o(x^3)$

係数を比較し $a = 1,\ \frac{a}{2} + b = 0,\ \frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c = 0,\ \frac{a}{24} + \frac{b}{6} + \frac{c}{2} + d = 0$

よって $a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{12}, d = 0$

補足：$o(x^3)$ が残ってる、と思うかもしれませんが、ここでは $o(x^3)$ は x の 4 次以上の項の集まりという意味でしかありません。ですから $o(x^3) = ex^4 + fx^5 + gx^6 + \ldots$ と表せば $e = f = g = \ldots = 0$ となっていて 0 に等しいわけです。

問 5

$f_x(x,y) = 3x^2 - 6y,\ f_y(x,y) = -6x + 24y^2$

よって $f_x(x,y) = 0$ かつ $f_y(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x^2 - 2y = 0$ かつ $-x + 4y^2 = 0$

これより極値を取る点の候補は $(x,y) = (0,0), (1, \frac{1}{2})$

$f_{xx} = 6x, f_{xy} = -6, f_{yy} = 48y$

これより $Hesse$ 行列 H は、$H = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{pmatrix}$

$(x,y) = (0,0)$ では $H = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

$ab - h^2 = -36 < 0$

$(0,0)$ は f の $saddle\, point$

$(x,y) = (1, \frac{1}{2})$ では $H = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}$

$ab - h^2 = 108 > 0$ で $a > 0$
$f\left(1, \dfrac{1}{2}\right) = -1$ だから、f は $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ で極小値 -1 をとる。

数学 I_A 夏学期試験　理科1類6、7、8、13、14、15組　（担当　上村）
2006年9月5日（火）10：50－12：20
両面解答用紙2枚　計算用紙1枚

（注）教科書，ノート類の持ち込みはしてはいけない．

問1　次の命題は正しいか誤りかを判定し，正しければ証明し誤りならば反例を挙げよ。

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $|a_n| < 1$ をみたすとき，$\lim_{n\to\infty} a_1 a_2 \cdots a_n = 0$.

(2) f を $\boldsymbol{R}^n$ 上の連続関数で，任意の $\lambda \geqq 0$ と任意の $X \in \boldsymbol{R}^n$ に対し $f(\lambda X) = \lambda f(X)$ をみたすとする．また，$|X| = 1$ のとき $f(X) > 0$ とする．このとき，$f(X) \geqq m|X|$ なる $m > 0$ が存在する．

問2　$\boldsymbol{R}^2$ 上の C^4 級関数 $u(x,y)$ が $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \log(x^2 + y^2 + 1)$ をみたすとき，$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ を求めよ．

問3　f を $\boldsymbol{R}^2$ 上の C^1 級関数とし，$u(x,y,z) = f(x^2 + 2ye^z,\ y^2 + 2xe^z)$ とするとき

$$\left(y^2 e^z - xe^{2z}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(x^2 e^z - ye^{2z}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(e^{2z} - xy\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

が成立することを証明せよ．

問4　(1) $\sqrt{1-x}$ を $x = 0$ を中心として Taylor 展開せよ．また，この展開が $|x| < r$ で成立する正数 r の上限を求めよ．

(2) a を 0 でない実数とするとき，$\dfrac{1}{1-ax}$ を $x = 0$ を中心として Taylor 展開せよ．また，この展開が $|x| < r$ で成立する正数 r の上限を求めよ．

(3) 次が成立するように実数 a, b の値を定めよ．

$$\sqrt{1-x} - \frac{1-bx}{1-ax} = o(x^2) \qquad (x \to 0)$$

問5　関数 $f(x,y) = x(x^2 + x + y^2 - 1)$ の極値を求めよ．

2006年度数学IA夏学期試験解答　教官:上村豊

問1 (1) 誤り　反例は $a_n = \exp(-\frac{1}{2^n})$ で、$\lim_{n\to\infty} a_1 a_2 \ldots a_n = \frac{1}{e}$

(2) 正しい

$\forall X \in \mathbf{R}^n$ について

(i) $|X| = 0$ のとき

$f(X) = f(2X) = 2f(X)$ より $f(X) = m|X| = 0$

(ii)$|X| > 0$ のとき

$$\frac{f(X)}{|X|} = f\left(\frac{X}{|X|}\right) > 0$$

よって

$$\exists m > 0 : f(X) = m|X|$$

以上より、題意は示された。

問2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\log(x^2+y^2+1)\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\log(x^2+y^2+1)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+1}\right) \\
&= \frac{2(x^2+y^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2} + \frac{2(x^2+y^2+1) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2} \\
&= \frac{4}{(x^2+y^2+1)}
\end{aligned}$$

問3

$$\theta(x,y,z) = x^2 + 2ye^z, \phi(x,y,z) = y^2 + 2xe^z$$

とすると

$$u(x,y,z) = f(\theta, \phi)$$

で

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}\right) &= \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\begin{pmatrix} 2x & 2e^z & 2ye^z \\ 2e^z & 2y & 2xe^z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

従って

$$
\begin{aligned}
& \left(y^2e^z - xe^{2z}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(x^2e^z - ye^{2z}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(e^{2z} - xy\right)\frac{\partial u}{\partial z} \\
= & \left(2xy^2e^z - 2x^2e^{2z} + 2x^2e2z - 2ye^{3z} + 2ye3z - 2xy^2e^z\right)\frac{\partial f}{\partial \theta} \\
+ & \left(2y^2e^{2z} - 2xe^{3z} + 2x^2ye^z - 2y^2e^{2z} + 2xe^{3z} - 2x^2ye^z\right)\frac{\partial f}{\partial \phi} \\
= & 0
\end{aligned}
$$

問 4 時間かかるから無理です orz $\longrightarrow$ 後日 ちゃんと解答作ります

問 5

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x(x^2 + x + y^2 - 1) \\
&= x^3 + x^2 + xy^2 - x \\
f_x(x,y) &= 3x^2 + 2x + y^2 - 1 \\
f_y(x,y) &= 2xy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= f_y(x,y) = 0 \\
\Leftrightarrow (x,y) &= (0,1), (0,-1), \left(\frac{1}{3}, 0\right), (-1,0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= 6x + 2 \\
f_{xy}(x,y) &= 2y \\
f_{yy}(x,y) &= 2x \\
\det H &= f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 \\
&= 4(3x^2 + x - y^2)
\end{aligned}
$$

よって、$\det H > 0, \mathrm{grad} f = O$ を満たす (x,y) は

$$(x,y) = \left(\frac{1}{3}, 0\right), (-1,0)$$

であり、

$$f_{xx}\left(\frac{1}{3}, 0\right) = 4 > 0, f_{xx}(-1,0) = -4 < 0$$

だから f は
$(\frac{1}{3}, 0)$ で極小値 $f(\frac{1}{3}, 0) = -\frac{5}{27}$ をとり
$(-1,0)$ で極大値 $f(-1,0) = 1$ をとる。

2007 年度　数学 I_A 前期試験　理科 1 類 6,7,8,13,14,15 組　（担当　上村）
2007 年 9 月 4 日（火）10:50 ー 12:20
両面解答用紙 1 枚　計算用紙 1 枚

（注）教科書，ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問 1　次の命題は正しいか誤りかを判定し，正しければ証明し誤りならば反例を挙げよ。

(1) 数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ が 0 に収束すれば，$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ で定義される数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

（2）数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ が有界数列ならば，$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$ で定義される数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

問 2　$z = f(x,y)$ が $\boldsymbol{R}^2$ 上の C^2 級の関数で，常に $z + x = \sin(z+y)$ をみたすものとする．このとき，次の問に答えよ.
(1) $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$ は定数であることを示し，その定数の値を求めよ.
(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ は定数であること示し，その定数の値を求めよ.

問 3　$\boldsymbol{R}^3$ 上の微分可能な関数 $f(x,y,z)$ がすべての $t \in \boldsymbol{R}$ とすべての $(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3$ に対し $f(tx,ty,tz) = tf(x,y,z)$ を満たすならば，$f(x,y,z) = ax + by + cz$ である（ただし a,b,c は定数）ことを示せ.

問 4　(1) $\log(1+x)$ を $x=0$ を中心として Taylor 展開せよ．また，この展開が $|x| < r$ で成立する正数 r の上限を求めよ.

(2) $\log\frac{1+x}{1-x}$ を $x=0$ を中心として Taylor 展開せよ．また，この展開が $|x| < r$ で成立する正数 r の上限を求めよ.

(3) 極限
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\frac{1+x}{1-x} - 2\sin x}{x^n}$$
が存在して 0 でないように自然数 n を定め，そのときのこの極限の値を求めよ.

問 5　関数 $f(x,y) = x^3 - x - 2xy + y^2$ の極値を求めよ。

数学IA 前期試験2007年度過去問

問1

(1) 反例：$a_k = \sqrt{\mathrm{k}+1} - \sqrt{\mathrm{k}} \left(= \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{k}+1} + \sqrt{\mathrm{k}}} \right), \dfrac{1}{\mathrm{k}}$ など

(2) ${}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対し $m > n > {}^{\exists}N \Rightarrow |b_m - b_n| < \varepsilon$ であることを示せばよい。

$|a_k| < {}^{\exists}M$ より、$m > n > N > 1$ のとき

$$|b_m - b_n| = \left| \frac{a_m}{m^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \right| \leq \frac{|a_m|}{m^2} + \cdots + \frac{|a_n|}{n^2}$$

$$\leq \frac{M}{m(m-1)} + \cdots + \frac{M}{n(n-1)} = M\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{M}{N}$$

であるから、$N > \dfrac{M}{\varepsilon}$ とすると $|b_m - b_n| < \varepsilon$ となる。

よって、この命題は正しい。

問2

(1) $z + x = \sin(z+y)$ を x, y それぞれで偏微分することにより、

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 1 = \frac{\partial z}{\partial x}\cos(z+y), \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} + 1\right)\cos(z+y)$$

よって、辺々足して整理すると

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)(1 - \cos(z+y)) = -1 + \cos(z+y)$$

となるので、$\cos(z+y) \neq 1$ のとき $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$

また、$\cos(z+y) = 1$ のとき、x で偏微分した式に代入すると

$$1 = 0$$

となるので、このようなことはない。

よって、$\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$ は定数である。 □

また、その値は -1 …（答）

(2) $z = f(x, y)$ が C^2 級であるので、(1)より

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

よって、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ は定数である。 □

また、その値は 0 …（答）

問３　$f(x,y,z)$はR^3で微分可能であり、$f(0,0,0)=0$なので、

$$f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)y+\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)z+\varepsilon(x,y,z)$$

$$\text{with} \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\varepsilon(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$$

と書ける。

よって、x,y,zをそれぞれtx,ty,tzに置き換えたものと全体をt倍したものを比較すると、$f(tx,ty,tz)=tf(x,y,z)$より、

$$\varepsilon(tx,ty,tz)=t\varepsilon(x,y,z)$$

よって、$\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\varepsilon(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$より、$x,y,z$を固定して

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon(tx,ty,tz)}{\sqrt{(tx)^2+(ty)^2+(tz)^2}}=0$$

が必要なので、先の結果より

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{|t|}\frac{\varepsilon(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$$

が必要である。

よって、このとき$\dfrac{t}{|t|}$が 0 に収束しないことから、任意のx,y,zに対し

$$\frac{\varepsilon(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$$

すなわち$\varepsilon(x,y,z)=0$が必要である。

よって、$a=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0), b=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0,0), c=\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)$とおくことにより

題意は示された。　□

問４

(1) $\left(\log(1+x)\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$より、

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad \cdots \text{（答）}$$

また、$x>-1$であるので$r\leq 1$であり、$0<\theta<1$として

$|x|<1$で剰余項$\dfrac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}(1-\theta)^n x^{n+1}$に対して

$$\left|\frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}(1-\theta)^n x^{n+1}\right| = \left|\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \frac{x^{n+1}}{1+\theta x}\right|$$

$$< \left|\left(\frac{1-\theta}{1-\theta}\right)^n \frac{1}{1-|x|}\right| |x|^{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{as n} \longrightarrow \infty$$

であるので、$r = 1$ … （答）

(2) $\left(\log\frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$ より、

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1} \quad \cdots \text{（答）}$$

また、$-1 < x < 1$ より $r \leq 1$ であり、$0 < \theta < 1$ として

$|x| < 1$ で剰余項 $\left(\frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}}\right)(1-\theta)^n x^{n+1}$ に対して

$$\left|\left(\frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}}\right)(1-\theta)^n x^{n+1}\right|$$

$$< 2\left|\frac{x^{n+1}}{1-|x|}\right| \longrightarrow 0 \quad \text{as n} \longrightarrow \infty$$

であるので、$r = 1$ … （答）

(3) (2)より、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\frac{1+x}{1-x} - 2\sin x}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{2x + \frac{2}{3}x^3 - 2\left(x - \frac{1}{3!}x^3\right) + o(x^3)}{x^n}$$

$$= \lim_{x\to 0} x^{3-n}\big(1 + o(1)\big)$$

であるので、求める答えは

$n = 3$, そのときの極限は 1 … （答）

問５ $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2 - 1 - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0\end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), (1,1)$

であるので、極致は存在するならばこの二つに含まれる。

また、$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ より、

$H = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ について考えると、

$(x,y)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$のとき、

　$|H|=-8<0$ より saddle point

$(x,y)=(1,1)$のとき、

　$6\times 1>0, |H|=8>0$ より極小

であるので、求める極値は$f(1,1)=-1$　… (答)

数学 I_A 夏学期試験　理科１類 10–15 組　（担当　上村）
2008 年 9 月 1 日（月） 10:55–12:25
両面解答用紙１枚　計算用紙１枚

（注） 教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問１　次の命題は正しいか？正しければ証明し誤りならば反例を挙げよ．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，$\limsup_{n\to\infty} a_n$，$\limsup_{n\to\infty} b_n$ が存在すれば $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$ である．

(2) $\boldsymbol{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ が，$\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$（実数全体から原点を除いた集合）における C^1 級関数で $\lim_{x\to+0} f'(x)$ および $\lim_{x\to-0} f'(x)$ の両方が存在して一致すれば $f(x)$ は $\boldsymbol{R}$（実数全体）における C^1 級関数である．

問２　次の (1)，(2) を証明せよ．

(1) $u(t)$ を $t>0$ における C^1 級関数とするとき，$u(t)$ が定数 C により $u(t)=Ct$ と書けるためには，u が $t\frac{du}{dt}=u$ をみたすことが必要十分である．

(2) z を $\{(x,y)\,|\,x,y>0\}$ における C^1 級関数とするとき，$z(x,y)$ が $s>0$ における C^1 級 $f(s)$ により $z=yf(\frac{y}{x})$ と書けるためには，z が $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ をみたすことが必要十分である．

問３　$t,x>0$ に対し $u=\sqrt{t}\,e^{\frac{x^2}{4t}}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\lim_{t\to+0} u(x,t)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を求めよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ を求めよ．

問４　(1) $\log(2+x)$ の $x=0$ を中心とする Taylor 展開を求めよ．また，その展開が成り立つ x の範囲を記せ．

(2) $x\to 0$ のとき

$$\log(2+\sin x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k + o(x^4)$$

となるように定数 a_0，a_1，a_2，a_3，a_4 の値を求めよ．

問５　関数 $f(x,y)=x^4-4xy+2y^2$ の極値を求めよ．

Date . . No.

2008年 略解

1 (1) 反例: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 1 - \frac{1}{n}$

$\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = 1$ だが. $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 1$

(2) 証明: $x=0$ で $f'(x)$ は連続なので正しい

2 わかりませんでした…

3 (1) $t = \frac{1}{s}$ として. $\lim_{t\to+0} u(x,t) = e^{\frac{x^2}{2}} \lim_{s\to+\infty} \sqrt{\frac{e^s}{s}} \underset{\text{ロピタル}}{=} \infty$

(2) $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{\frac{x^2}{4t}}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\left(-\frac{x^2}{4t^2}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{t}}{2t} x e^{\frac{x^2}{4t}}\right)$

$= e^{\frac{x^2}{4t}}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\frac{x^2}{4t^2} + \frac{\sqrt{t}}{2t} + \frac{\sqrt{t}}{2t} x \frac{x}{2t}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{x^2}{4t}}$

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$

$= e^{\frac{x^2}{4t}}\left(-\frac{1}{2t\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{x^2}{4t^2}\right)\right)$

$+ e^{\frac{x^2}{4t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{\sqrt{t}}{2t} + \frac{\sqrt{t}}{2t}x\frac{x}{2t}\right)\frac{1}{\sqrt{t}}$

$= 0$

4 (1) $\left(\log(2+x)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2+x)^n}$

$\therefore \log(2+x) = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} x^n$

$2+x > 0$ より $r \leq 2$

$R_{n+1} = \frac{(-1)^n}{2+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{2+\theta x}\right)^n x^{n+1}$

$|x| < 2$ のとき

$|R_{n+1}| = \left|\frac{1}{2+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{2+\theta x}\right)^n x^{n+1}\right| < \left|\frac{x}{2+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{2-2\theta}\right)^n x^n\right|$

$= \frac{|x|}{2-|x|}\left|\left(\frac{x}{2}\right)^n\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\therefore r = 2$

(2) $\log(2+x) = \log 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{3}{192}x^4 + o(x^4)$

この x を $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ として 4次以下の項を整理

$a_0 = \log 2$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{8}$, $a_3 = -\frac{1}{24}$, $a_4 = \frac{5}{192}$

(あまり自信ないです…)

5 $x = y = \pm 1$ で極小値 -1

数学 I_A 夏学期試験　理科 1 類 10–15 組　（担当　上村）
2009 年 9 月 1 日（火）10:55–12:25
解答冊子 1 部（2 枚組）　計算用紙 1 枚

（注）教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問1　$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を上に有界な数列とするとき，次の命題は正しいか？正しければ証明し誤りならば反例を挙げよ．

(1) $\sup\limits_n (a_n b_n) = \sup\limits_n a_n \cdot \sup\limits_n b_n$

(2) $\sup\limits_n \max\{a_n, b_n\} = \max\{\sup\limits_n a_n\,,\ \sup\limits_n b_n\}$

問2　$z = z(x,y)$ が $\boldsymbol{R}^2$ 上の C^2 級関数で $xf(z) + g(z) = y$ なる関係式を満たしている（ただし，f, g は $\boldsymbol{R}$ 上の C^1 級関数とする）とき

(1) z は $z_x + f(z) z_y = 0$ を満たすことを示せ．ただし，ここで z_x, z_y は $z = z(x,y)$ の偏導関数を表す．

(2) z は ${z_y}^2 z_{xx} - 2 z_x z_y z_{xy} + {z_x}^2 z_{yy} = 0$ を満たすことを示せ．ただし，ここで z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} は $z = z(x,y)$ の 2 階の偏導関数を表す．

問3　$\boldsymbol{R}^2$ 上の微分可能な関数 $f(x,y)$ に対し $\boldsymbol{R}^3$ 上の関数 $F(u,v,w)$ を $F(u,v,w) = f\left(-\frac{1}{2}\, u\, e^{-w} + v\, e^{w}, u\, e^{-w}\right)$ で定めるとき，次の問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ が $(x+y)\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ をみたすとき，$F(u,v,w)$ は w に依らないことを示せ．

(2) $F(u,v,w)$ が u に依らないとき，$\frac{\partial f}{\partial y}$ は $\frac{\partial f}{\partial x}$ の定数倍であることを示し，その定数の値を求めよ．

問4　(1) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ の $x=1$ を中心とする Taylor 展開を求めよ．また，その展開が $|x-1| < r$ で成り立つような正数 r の上限を記せ．

(2) $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ の $x=1$ を中心とする Taylor 展開を求めよ．また，その展開が $|x-1| < r$ で成り立つような正数 r の上限を記せ．

(3) 上の (2) の結果を利用して，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} \left(\frac{3}{8}\right)^n$ の値を求めよ．ただし，ここで $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$, $1!! = 1$, $(-1)!! = 1$ である．

問5　関数 $f(x,y) = y(x^2 - x + y^2)$ の極値を求めよ．

No. Date

2009年略解

1 (1) 反例： $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 1 - \frac{1}{n}$

(2) 正しい (証明はわかりません…)

2 (1) x, yで偏微分して,

$$\begin{cases} f + x f_z z_x + g_z z_x = 0 & \text{—①} \\ x f_z z_y + g_z z_y = 1 & \text{—②} \end{cases}$$

① × z_y より $f z_y + (x f_z + g_z) z_x z_y = 0$

② ⟺ $z_y (x f_z + g_z) = 1$

$\therefore \ f z_y + z_x = 0$

(2) (1)の答えをx, yで偏微分して

$$f_z z_x z_y + f z_{yx} + z_{xx} = 0 \quad \text{—③}$$

$$f_z z_y \cdot z_y + f z_{yy} + z_{yx} = 0 \quad \text{—④}$$

③ × $z_y z_y$ − ④ × $z_x z_y$ より.

$$f z_{yx} z_y^2 + z_{xx} z_y z_x - z_{yy} z_x z_y - z_{yx} z_y z_x = 0$$

$z_{xy} = z_{yx}$, $f z_y + z_x = 0$ を用いて整理して与式を得る.

3 (1) $\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}$

$= \frac{\partial f}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial f}{\partial y} y = 0$ //

(2) $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}e^{-w}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} e^{-w} = 0$

$\therefore \ \frac{\partial f}{\partial y} = \boxed{\frac{1}{2}} \frac{\partial f}{\partial x}$ //

4 (1) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2n-1)!! \ x^{-\frac{1}{2}+n}$

$\therefore \ \frac{1}{\sqrt{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2n-1)!! \frac{1}{n!} (x-1)^n$

$x - 1 = X$ とし, $f(X) = \frac{1}{\sqrt{X+1}} \left(= \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ とすると.

$f^{(n)}(X) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2n-1)!! \ (X+1)^{-n+\frac{1}{2}}$

よって $X = 0$における テイラー展開は, $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(2n-1)!!}{n!} X^n$

$\therefore \ \frac{1}{\sqrt{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2n-1)!! \frac{1}{n!} (x-1)^n$

いま $0 < x \Leftrightarrow X > -1$ より, $r \leq 1$

$$|R_{n+1}| = \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{(2n+1)!!}{n!} (1+\theta X)^{-n-\frac{3}{2}} (1-\theta)^n X^{n+1} \right|$$

$$\leq \left(\left|\frac{1-\theta}{1+\theta X}\right|\right)^n \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1} \ n!} \left|\frac{X^{n+1}}{(1+\theta X)^{\frac{3}{2}}}\right|$$

$$< \quad 1 \quad \text{〃} \quad |X|^{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

4(1)続き $\quad \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}\, n!} = \left(\frac{2n+1}{2n}\right)\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

よって. $r=1$

(2) $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(n-1)!}(x-1)^n$, $r=1$ ((1)と同様)

(3) (2)で $x=\frac{1}{4}$ として.

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}}-\sqrt{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\frac{(2n-3)!!}{(n-1)!}$$

$$\frac{2}{\cancel{4}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(n-1)!!}$$

5. $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ で極小値 $-\frac{\sqrt{3}}{36}$
$x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ で極大値 $\frac{\sqrt{3}}{36}$

2006年度 (答えのみ)

4 (1) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{(2n-3)!!}{2^n\cdot n!}x^n$, $r=1$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}a^n x^n$, $r=\left|\frac{1}{a}\right|$ (?)

(3) $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{3}{4}$