プリントNo．1（2011/04/15）

○ 命題論理の言語

1．語彙 (vocabulary)

・論理記号

論理演算子（論理結合子）：$\wedge$　$\vee$　$\rightarrow$　$\neg$

括弧：(　)

・非論理記号

命題記号：英大文字 A、‥、Z と、それらに添え字をつけたもの

および　×

2．論理式 (well-formed formula : wff) の形成規則 (formation rules)

命題論理の論理式は次の形成規則によって定義される記号の列である。

（1）どの命題記号も論理式である。

（2）φ、ψ が論理式のとき、$(\varphi \wedge \psi)$ は論理式である。

（3）φ、ψ が論理式のとき、$(\varphi \vee \psi)$ は論理式である。

（4）φ、ψ が論理式のとき、$(\varphi \rightarrow \psi)$ は論理式である。

（5）φ が論理式のとき、$\neg\varphi$ は論理式である。

（6）以上の各項によって論理式と認められるもののみが論理式である。

○ 命題論理の推論規則 (inference rules)

1．連言 (conjunction)

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge \mathrm{I}) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge \mathrm{E}1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge \mathrm{E}2)$$

2．選言 (disjunction)

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee \mathrm{I}1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee \mathrm{I}2) \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c}[\varphi] \\ \vdots \\ \omega\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi] \\ \vdots \\ \omega\end{array}}{\omega}\ (\vee \mathrm{E})$$

3．条件法 (conditional)

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\ (\rightarrow \mathrm{I}) \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}\ (\rightarrow \mathrm{E})$$

4．否定 (negation)

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \times\end{array}}{\neg \varphi}\ (\neg \mathrm{I}) \qquad \frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\times}\ (\neg \mathrm{E})$$

$$\frac{\times}{\varphi}\ (\text{矛盾規則}\quad \text{absurdity rule})$$

$$\frac{\neg\neg \varphi}{\varphi}\ (\text{二重否定除去規則}\quad \text{double negation rule})$$

(注意) $\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{array}$ の形の部分は、論理式βへと至る推論規則の連鎖で置き換えられなければならない。そのとき、αを仮定（仮に前提）してもよい。また、[ ] は、当該の規則の適用が終わった後で仮定αがキャンセルされ、前提として考える必要がなくなることを示す。

☆参考文献

前原昭二著『記号論理入門』、日本評論社、１９６７&２００５．
テニント著『自然演繹の論理学』、八千代出版、１９８１．
ノルト&ロハティン著『現代論理学 (I)』、オーム社、１９９４．
野矢茂樹著『論理学』、東京大学出版会、１９９４．

プリントＮｏ．２（2011/05/13）

※前回の演習から

２－３’: $((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \vdash (P \vee (Q \wedge R))$

$$\dfrac{\dfrac{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)}{P \vee Q} \quad \dfrac{[P]^2}{P \vee (Q \wedge R)} \quad \dfrac{\dfrac{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)}{P \vee R} \quad \dfrac{[P]^1}{P \vee (Q \wedge R)} \quad \dfrac{\dfrac{[Q]^2 \quad [R]^1}{Q \wedge R}}{P \vee (Q \wedge R)}}{P \vee (Q \wedge R)}\,1}{P \vee (Q \wedge R)}\,2$$

３－７：$P \to (Q \to R) \vdash (P \to Q) \to (P \to R)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1 \quad [P \to Q]^2}{Q} \quad \dfrac{[P]^1 \quad P \to (Q \to R)}{Q \to R}}{R}}{P \to R}\,1}{(P \to Q) \to (P \to R)}\,2$$

※前提のない証明

- 前提なしで証明できる結論の論理式のことを、証明可能な論理式と呼ぶ。例えば、$(P \wedge Q) \to P$ は証明可能な論理式である。
- 一般に、$\varphi \vdash \psi \Leftrightarrow\ \vdash \varphi \to \psi$ が成り立つ。(→Ｉ、→Ｅ規則を考えよ。)

※単純すぎてわかりにくい？証明の例

１－４：$P \vdash P \wedge P$

$$\dfrac{P \quad P}{P \wedge P}$$

２－６：$P \vee P \vdash P$

$$\dfrac{P \vee P \quad [P] \quad [P]}{P}$$

２－９：$P, Q \vdash Q \vee P$

$$\dfrac{P}{Q \vee P}$$

３－９：$\vdash P \to P$

$$\dfrac{[P]}{P \to P}$$

３－１０：$Q \vdash P \to P$

$$\dfrac{[P]}{P \to P}$$

３－１１：$Q \vdash P \to Q$

$$\dfrac{Q}{P \to Q}$$

○ ３つの命題論理体系

- 最小命題論理 (minimal propositional logic)：
  １０個の推論規則 (∧I、∧E１、∧E２、∨I１、∨I２、∨E、→I、→E、¬I、¬E) からなる体系

- 直観主義命題論理 (intuitionistic propositional logic)：
  最小命題論理の推論規則＋矛盾規則からなる体系

- 古典命題論理 (classical propositional logic)：
  直観主義命題論理の推論規則＋二重否定除去規則からなる体系

☆必要に応じ、各々の体系での証明可能性を区別して、$\vdash_M$、$\vdash_I$、$\vdash_C$ と表わすことにしよう。最小論理で証明できる論理式は、すべて直観主義論理で証明でき、直観主義論理で証明できる論理式は、すべて古典論理で証明できる。すなわち、$\vdash_M \varphi \Rightarrow \vdash_I \varphi$、$\vdash_I \varphi \Rightarrow \vdash_C \varphi$

○ 体系を特徴づける規則同士の関係

最小論理において、
・排中律 $(\varphi \vee \neg\varphi)$ は二重否定除去規則を用いて証明可能
・矛盾規則は二重否定除去規則によって正当化可能
・二重否定除去規則は排中律＋矛盾規則によって正当化可能

さらに、
・矛盾規則は最小論理では正当化不可能
・排中律は直観主義論理では証明不可能

☆参考文献（追加）

金子洋之著『記号論理入門』、産業図書、１９９５．
戸田山和久著『論理学をつくる』、名古屋大学出版会、２０００．

プリントＮｏ．３ (2011/05/13)

○ 証明できる論理式の例

	証明できる論理式	慣用的名称	備考
1	$A \leftrightarrow A$	同一律	
2	$A \vee \neg A$	排中律	古
3	$\neg(A \wedge \neg A)$	矛盾律	
4	$\neg\neg A \leftrightarrow A$	二重否定律	→ 古
5	$(A \wedge A) \leftrightarrow A$ $(A \vee A) \leftrightarrow A$	巾等律	
6	$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$ $(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$	交換律	
7	$(A \wedge (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ $(A \vee (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$	結合律	
8	$(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ $(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C))$	分配律	
9	$(A \wedge (A \vee B)) \leftrightarrow A$ $(A \vee (A \wedge B)) \leftrightarrow A$	吸収律	
10	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	ド・モルガンの法則	→ 古
11	$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	対偶律	← 古
12	$(\neg A \wedge (A \vee B)) \to B$	選言的三段論法	直
13	$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$	推移律	
14	$(A \wedge (A \to B)) \to B$	肯定式	
15	$(\neg B \wedge (A \to B)) \to \neg A$	否定式	
16	$A \to (A \vee B)$ $B \to (A \vee B)$	拡大律（付加律）	
17	$(A \wedge B) \to A$ $(A \wedge B) \to B$	縮小律	
18	$(A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)$	移入律	
19	$((A \wedge B) \to C) \to (A \to (B \to C))$	移出律	
20	$((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$	構成的両刀論法	
21	$A \to (B \to A)$	添加律	
22	$\neg A \to (A \to B)$		
23	$((A \to B) \to A) \to A$	パースの法則	古
24	$A \to (B \to (A \wedge B))$		
25	$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ $(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$		→ 古 ← 直 ← 古
26	$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (B \to (A \to C))$	入れ替え律	
27	$(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$	合成律	

[戸田山『論理学をつくる』より一部改変]

（注意） $\varphi \leftrightarrow \psi$ は $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ の略記法であり、次のことが成り立つ。

$\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ⇔ $\vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ （略記法）
⇔ $\vdash \varphi \to \psi$ かつ $\vdash \psi \to \varphi$ （連言に関する推論規則による）
⇔ $\varphi \vdash \psi$ かつ $\psi \vdash \varphi$ （条件法に関する推論規則による）

○ 読み替え定理と置き換え定理

- 読み替え定理：証明可能な論理式の中の英大文字を任意の論理式に読み替えても、また証明可能な論理式が得られる。（なぜか？）

- 置き換え定理：$\vdash A \leftrightarrow B$ となる論理式 A、B が与えられたとき、任意の論理式 φ の中の A の現れのうち任意個を B に置き換えてできる論理式を φ' とすると、$\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ が成立する。

（参考）置き換え定理の証明：φ の構成に関する帰納法で証明する。

＜１＞φ が論理演算子を含まないとき、φ は A そのものか、A を含まないかのどちらかである。φ が A のとき、φ' は A か B であるから、いずれにせよ $\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi'$。$\varphi$ が A を含まないとき φ' は φ と同じだから、$\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi'$

＜２＞φ が $\chi\wedge\omega$ の形のとき、φ' は、$\chi'\wedge\omega'$ の形をしている。ここで、帰納法の仮定より、$\vdash\chi\leftrightarrow\chi'$、$\vdash\omega\leftrightarrow\omega'$ としてよい。このとき、

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\chi\wedge\omega}{\chi}\quad\dfrac{\vdots}{\chi\to\chi'}}{\chi'}\qquad\dfrac{\dfrac{\chi\wedge\omega}{\omega}\quad\dfrac{\vdots}{\omega\to\omega'}}{\omega'}}{\chi'\wedge\omega'}$$

より、$\chi\wedge\omega\vdash\chi'\wedge\omega'$。同様に $\chi'\wedge\omega'\vdash\chi\wedge\omega$。よって $\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi'$。

＜３＞φ が $\chi\vee\omega$ の形のとき、φ' は、$\chi'\vee\omega'$ の形をしている。ここで、帰納法の仮定より、$\vdash\chi\leftrightarrow\chi'$、$\vdash\omega\leftrightarrow\omega'$ としてよい。このとき、

$$\dfrac{\chi\vee\omega\qquad\dfrac{\dfrac{[\chi]\quad\dfrac{\vdots}{\chi\to\chi'}}{\chi'}}{\chi'\vee\omega'}\qquad\dfrac{\dfrac{[\omega]\quad\dfrac{\vdots}{\omega\to\omega'}}{\omega'}}{\chi'\vee\omega'}}{\chi'\vee\omega'}$$

より、$\chi\vee\omega\vdash\chi'\vee\omega'$。同様に $\chi'\vee\omega'\vdash\chi\vee\omega$。よって $\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi'$。

＜４＞φ が $\chi\to\omega$ の形のとき、φ' は、$\chi'\to\omega'$ の形をしている。ここで、帰納法の仮定より、$\vdash\chi\leftrightarrow\chi'$、$\vdash\omega\leftrightarrow\omega'$ としてよい。このとき、

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\chi']\quad\dfrac{\vdots}{\chi'\to\chi}}{\chi}\qquad\chi\to\omega}{\omega}\qquad\dfrac{\vdots}{\omega\to\omega'}}{\omega'}}{\chi'\to\omega'}$$

より、$\chi\to\omega\vdash\chi'\to\omega'$。同様 $\chi'\to\omega'\vdash\chi\to\omega$。よって $\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi'$。

＜５＞φ が $\neg\chi$ の形のとき、φ' は、$\neg\chi'$ の形をしている。ここで、帰納法の仮定より、$\vdash\chi\leftrightarrow\chi'$ としてよい。このとき、

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\chi']\quad\dfrac{\vdots}{\chi'\to\chi}}{\chi}\qquad\neg\chi}{\times}}{\neg\chi'}$$

より、$\neg\chi\vdash\neg\chi'$。同様に $\neg\chi'\vdash\neg\chi$。よって $\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi'$。

以上、＜１＞から＜５＞によって、任意の φ について、$\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi'$。

プリントＮｏ．４ (2011/05/27)

○ 古典命題論理の標準的意味論

- 命題論理の各論理式が、Ｔ（真)、Ｆ（偽）の２つの真理値のいずれかを持つ、と考える。[二値原理にもとづく] ×以外のすべての命題記号に対して、真理値Ｔか真理値Ｆを対応させる関数を真理値割り当てと呼び、v で表わす。

- 真理値割り当て v が与えられた時、その定義域を論理式全体の集合に拡張することを考え、拡張してできる新たな関数を v_T とする。任意の論理式に対する v_T の値は、以下のように定める。

  １．Ｐが×以外の命題記号のとき、$v_T(P) = v(P)$ とする。
  また、$v_T(\times) =$ Ｆとする。

  ２．φ、ψ を任意の論理式としたとき、$v_T(\varphi \wedge \psi)$、$v_T(\varphi \vee \psi)$、$v_T(\varphi \rightarrow \psi)$ は、$v_T(\varphi)$、$v_T(\psi)$ に応じて、以下のように定める。

$v_T(\varphi)$	$v_T(\psi)$	$v_T(\varphi \wedge \psi)$	$v_T(\varphi \vee \psi)$	$v_T(\varphi \rightarrow \psi)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

  ３．φ を任意の論理式としたとき $v_T(\neg\varphi)$ は、$v_T(\varphi)$ に応じて、以下のように定める。

$v_T(\varphi)$	$v_T(\neg\varphi)$
T	F
F	T

  このとき各論理演算子には、真理値の対から真理値への関数（否定については、真理値から真理値への関数）が対応している。これらの関数のことを真理関数と呼び、それぞれが、対応する論理演算子の意味を与えていると考える。[真理関数的意味論]

- φ に含まれる×以外の命題記号の各々がもつ真理値の可能なすべての組み合わせに対して、$v_T(\varphi)$ がつねにＴとなるとき、φ をトートロジー（あるいは恒真式、論理的真理など）という。

- 任意の論理式 φ について、×以外の命題記号の各々が持ちうる真理値のすべての組み合わせに対する真理値を計算し、表にまとめたものを真理表と呼ぶ。とくに、真理表を書くことによって、φ がトートロジーであるか否かを決定することができる。このような手続きのことを決定手続きと呼ぶ。（論理式の証明の手続きと比較せよ。）

○ 命題論理の性質

- 命題論理の無矛盾性：
  各命題論理体系は無矛盾である。すなわち、×が証明されることはない。

- 命題論理の健全性：
  各命題論理体系は、真理関数的意味論に関して健全である。すなわち、任意の論理式φについて、$\vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi$がトートロジー

- 古典命題論理の完全性：
  古典命題論理体系は、真理関数的意味論に関して完全である。すなわち、任意の論理式φについて、φがトートロジー $\Rightarrow \quad \vdash_C \varphi$

(参考) 命題論理の健全性証明：

古典命題論理について示せば十分である。少し一般化して、前提の論理式の真理値がすべてTであるような証明の結論の真理値はTであることを示す。証明における規則の適用の数（推論線の本数）をｎとし、ｎに関する帰納法で証明する。

- ｎ＝０のときとして、前提をそのまま結論する場合、すなわち、証明の前提である論理式が、結論でもある場合を含めておく。このとき、その論理式の真理値はT。
- ｎ≦ｋのとき、前提の論理式の真理値がすべてTであるような証明の結論の真理値はTであると仮定し、ｎ＝ｋ＋１のときについて考える。すなわち、(ｋ＋１) 本の推論線を含む証明において、前提の論理式の真理値がすべてTであるとし、結論の真理値がTであることを示す。最後に適用される推論規則によって場合分けを行う。

  - $\wedge$Ｉの場合、帰納法の仮定よりφ、ψがT。このとき、$\varphi \wedge \psi$はT。
  - $\wedge$Ｅ１の場合、帰納法の仮定より$\varphi \wedge \psi$がT。このとき、φはT。
  - $\wedge$Ｅ２の場合、$\wedge$Ｅ１の場合と同様。
  - $\vee$Ｉ１の場合、帰納法の仮定よりφがT。このとき、$\varphi \vee \psi$はT。
  - $\vee$Ｉ２の場合、$\vee$Ｉ１の場合と同様。
  - $\vee$Ｅの場合、帰納法の仮定より$\varphi \vee \psi$はT。したがってφかψの少なくとも一方はT。φがTとすると、このときφからωへの証明に帰納法の仮定を適用できてωはT。ψがTのときも同様。
  - $\rightarrow$Ｉの場合、φがFなら$\varphi \rightarrow \psi$はT、φがTならφからψへの証明に帰納法の仮定が適用できてψはT、したがってこのときも$\varphi \rightarrow \psi$はT。
  - $\rightarrow$Ｅの場合、帰納法の仮定よりφ、$\varphi \rightarrow \psi$がT。このとき、ψはT。
  - $\neg$Ｉの場合、φがTとすると、φから×への証明に帰納法の仮定が適用できて×がTとなり不合理。よってφはFとしてよい。このとき$\neg \varphi$はT。
  - $\neg$Ｅの場合、帰納法の仮定よりφ、$\neg \varphi$がともにT。これは起こりえない。
  - 矛盾規則の場合、×はFだから、帰納法の仮定より、これは起こりえない。
  - 二重否定除去規則の場合、帰納法の仮定より$\neg\neg \varphi$がT．このとき、φはT。

  したがって、ｎ＝ｋ＋１のとき、前提の論理式の真理値がすべてTであるような証明の結論の真理値はTである。

- 帰納法により、すべての証明について、前提の論理式の真理値がすべてTである場合、結論の真理値はTである。特別な場合として、前提がない証明については、結論の真理値は必ずTである。すなわち、任意の論理式φについて、$\vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi$がトートロジー

プリントＮｏ．５ (2011/06/03)

○ 述語論理へのイントロダクション

＊命題論理の限界と述語論理への拡張

次の２つの論証を比較せよ。

（１） 外は雨か雪が降っているはずだ。
でも雨ではない。
だからきっと雪にちがいない。

（２） 人間はみないずれ死ぬ運命にある。
ソクラテスは人間である。
したがってソクラテスもいずれ死ぬ運命にある。

＊定項と述語記号

固有名：ものを指し示す語 ⇒ 定項：英小文字ａからｔまで
述語 ：ものの性質、もの同士の関係を表す語 ⇒ 述語記号：英大文字

（例） ソクラテスは人間である
⇒

（例） プラトンはアリストテレスの先生である
⇒

＊量化子と変項

「すべての…について」 ⇒ 普遍（全称）量化子：∀
「ある…が存在して 」 ⇒ 存在量化子：∃
（いわば、不特定なものを指し示す語） ⇒ 変項：英小文字ｕからｚまで

（例） 人間はみないずれ死ぬ運命にある
⇒すべての人間はいずれ死ぬ運命にある
⇒すべてのｘについて、ｘが人間である ＿＿＿ ｘはいずれ死ぬ運命にある
⇒

（例） 政治家の中には芸人であったものもいる
⇒ある政治家は芸人であった
⇒あるｘが存在して、ｘは政治家であり ＿＿＿ ｘは芸人であった
⇒

☆ 例題：述語論理による形式化

定項と述語記号として次のものを用いて、以下の各言明を形式化せよ。

a：エイブ　b：ビーティー　Ax：x は赤ん坊である
Nx：x はよく泣く　Wx：x はよく笑う　Sx：x はよく育つ
Txy：x は y のともだちである　Lxy：x は y を愛している

1. エイブは赤ん坊である。
2. エイブはよく泣く赤ん坊である。
3. エイブもビーティーもよく泣く。
4. 赤ん坊はみんなよく泣く。
5. よく笑うものもいる。
6. よく笑う赤ん坊もいる。
7. よく泣く赤ん坊はよく笑い、よく育つ。
8. よく笑うものがみなよく泣くとは限らない。
9. よく笑うものがよく泣くことはない。
10. よく育つのはよく泣くものに限る。
11. ビーティーはエイブのともだちである。
12. エイブにはともだちがいる。
13. エイブのともだちはみんなよく笑う。
14. よく泣く赤ん坊のともだちはみんなよく泣く。
15. みんなが自分自身を愛しているわけではない。
16. みんながみんなを愛している。
17. すべてのものを愛しているような、あるものが存在する。
18. どんなものも、なんらかのものを愛している。
19. エイブはビーティーのともだちを愛している。
20. ともだちのともだちはみなともだちだ。

プリントNo．6（11/06/10）

○ 述語論理の言語

1．語彙

・論理記号

論理演算子（論理結合子）：$\wedge$　$\vee$　$\rightarrow$　$\neg$

量化子：$\forall$　$\exists$

括弧：(　)

・非論理記号

述語記号：英大文字 A、・・、Z（添え字つきも可）および×

各述語記号は、項数 (0,1,2, ・・) を持つ。×の項数は０。

定項：英小文字 a、・・、t（添え字つきも可）

変項：英小文字 u、・・、z（添え字つきも可）

2．論理式の形成規則

・述語論理の論理式は次の形成規則によって定義される記号の列である。

（１）ｎ項述語記号に続けてｎ個の定項が並ぶものは論理式である。

（２）φ、ψ が論理式のとき、$(\varphi \wedge \psi)$ は論理式である。

（３）φ、ψ が論理式のとき、$(\varphi \vee \psi)$ は論理式である。

（４）φ、ψ が論理式のとき、$(\varphi \rightarrow \psi)$ は論理式である。

（５）φ が論理式のとき、$\neg\varphi$ は論理式である。

（６）φ が定項 α を含む論理式、ζ が φ に含まれない変項のとき、φ の中に現れる１個以上の α を ζ に書き換えることによって φ から生じる表現を φ' とすると、$\forall\zeta\varphi'$ は論理式である。

（７）φ が定項 α を含む論理式、ζ が φ に含まれない変項のとき、φ の中に現れる１個以上の α を ζ に書き換えることによって φ から生じる表現を φ' とすると、$\exists\zeta\varphi'$ は論理式である。

（８）以上の各項によって論理式と認められるもののみが論理式である。

○ 述語論理の推論規則

０．命題論理の推論規則

∧Ｉ、∧Ｅ１、∧Ｅ２、∨Ｉ１、∨Ｉ２、∨Ｅ、→Ｉ、→Ｅ、¬Ｉ、¬Ｅ
＋矛盾規則
＋二重否定除去規則

これらに、新たに４つの推論規則が加わる。以下、定項 α を含む論理式を $\varphi(\alpha)$ と表し、$\varphi(\alpha)$ の中に現れる１個以上の α を $\varphi(\alpha)$ に含まれない変項 ζ に書き換えることによって $\varphi(\alpha)$ から生じる表現を $\varphi(\zeta)$ と表すことにする。

１．普遍量化

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\forall\zeta\varphi(\zeta)}\ (\forall\mathrm{I}) \qquad\qquad \frac{\forall\zeta\varphi(\zeta)}{\varphi(\alpha)}\ (\forall\mathrm{E})$$

∀Ｉに関する条件：α は、$\varphi(\zeta)$ にも、また、前提や、規則が適用される際に有効な（すなわち、それまでにキャンセルされていない）仮定の中にも含まれていない定項でなくてはならない。

２．存在量化

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\exists\zeta\varphi(\zeta)}\ (\exists\mathrm{I}) \qquad\qquad \frac{\exists\zeta\varphi(\zeta) \qquad \begin{array}{c}[\varphi(\alpha)]\\ \vdots \\ \omega\end{array}}{\omega}\ (\exists\mathrm{E})$$

∃Ｅに関する条件：α は、$\varphi(\zeta)$ にも、ω にも、また、前提や、規則が適用される際に有効な（すなわち、それまでにキャンセルされていない）仮定の中にも含まれていない定項でなくてはならない。

プリントＮｏ．７（2011/06/17）

○証明できる論理式の例（追加）

	証明できる論理式	備考
1	$\forall xAx \leftrightarrow \forall yAy$ $\exists xAx \leftrightarrow \exists yAy$	
2	$\forall x(Ax \wedge Bx) \leftrightarrow (\forall xAx \wedge \forall xBx)$ $\exists x(Ax \wedge Bx) \rightarrow (\exists xAx \wedge \exists xBx)$ $(\forall xAx \vee \forall xBx) \rightarrow \forall x(Ax \vee Bx)$ $\exists x(Ax \vee Bx) \leftrightarrow (\exists xAx \vee \exists xBx)$	 一方向だけ 一方向だけ
3	$\forall x(A \wedge Bx) \leftrightarrow (A \wedge \forall xBx)$ $\exists x(A \wedge Bx) \leftrightarrow (A \wedge \exists xBx)$ $\forall x(A \vee Bx) \leftrightarrow (A \vee \forall xBx)$ $\exists x(A \vee Bx) \leftrightarrow (A \vee \exists xBx)$	
4	$\forall x(A \rightarrow Bx) \leftrightarrow (A \rightarrow \forall xBx)$ $\exists x(A \rightarrow Bx) \leftrightarrow (A \rightarrow \exists xBx)$ $\forall x(Ax \rightarrow B) \leftrightarrow (\exists xAx \rightarrow B)$ $\exists x(Ax \rightarrow B) \leftrightarrow (\forall xAx \rightarrow B)$	
5	$\neg\forall xAx \leftrightarrow \exists x\neg Ax$ $\neg\exists xAx \leftrightarrow \forall x\neg Ax$	ド・モルガンの法則 〃
6	$\neg\forall x(Ax \rightarrow Bx) \leftrightarrow \exists x(Ax \wedge \neg Bx)$ $\neg\exists x(Ax \wedge Bx) \leftrightarrow \forall x(Ax \rightarrow \neg Bx)$	
7	$\forall x\forall yAxy \leftrightarrow \forall y\forall xAxy$ $\exists x\exists yAxy \leftrightarrow \exists y\exists xAxy$	
8	$\exists x\forall yAxy \rightarrow \forall y\exists xAxy$	一方向だけ

（参考）伝統的論理学における三段論法

＜命題の型＞　　Ａ：すべてのＳはＰである
Ｅ：すべてのＳはＰでない（いかなるＳもＰでない）
Ｉ：あるＳはＰである
Ｏ：あるＳはＰでない

＊二つの前提（大前提、小前提）から結論を導く妥当な論証の形式は？

Ｍ－Ｐ Ｓ－Ｍ ∴Ｓ－Ｐ （第１格）	Ｐ－Ｍ Ｓ－Ｍ ∴Ｓ－Ｐ （第２格）	Ｍ－Ｐ Ｍ－Ｓ ∴Ｓ－Ｐ （第３格）	Ｐ－Ｍ Ｍ－Ｓ ∴Ｓ－Ｐ （第４格）
Barbara **Celarent** **Darii** **Ferio**	**Cesare** **Camestres** **Festino** **Baroco**	**Darapti** **Disamis** **Datisi** **Felapton** **Bocardo** **Ferison**	**Bramantip** **Camenes** **Dimaris** **Fesapo** **Fresison**

例：Ｆ<u>ｅ</u>ｒ<u>ｉ</u> <u>ｏ</u>　‥　第１格でＥ－Ｉ－Ｏ

いかなるＭもＰでない（Ｅ）　　いかなる人間も無機物でない
あるＳはＭである（Ｉ）　　ある学生は人間である
∴あるＳはＰでない（Ｏ）　　∴ある学生は無機物でない

○読み替え定理と置き換え定理の拡張

- 読み替え定理：証明可能な論理式（定項を含まないとして一般性を失わない）の中のn項述語記号とそれに続くn個の変項の組み合わせ $A\zeta_1\zeta_2..\zeta_n$ を、表現 $\varphi(\zeta_1,\zeta_2,..,\zeta_n)$ で読み替えても、証明可能な論理式が得られる。ただし、$\varphi(\zeta_1,\zeta_2,..,\zeta_n)$ は、n種類の定項 α_1、α_2、‥ α_n を含む論理式 $\varphi(\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_n)$ において各定項 α_i を $\varphi(\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_n)$ に含まれない変項 ζ_i に書き換えることで生じる表現である。

- 置き換え定理：$\vdash A \leftrightarrow B$ となる論理式 A、B が与えられたとき、A、B に含まれる定項のうち0種類以上を、それぞれ変項に書き換えて生じる表現を、$A\xi$、$B\xi$ とする。（同じ定項の現れは、すべて同じ変項で書き換える。）このとき、任意の論理式 φ の中の $A\xi$ の現れのうち0個以上を $B\xi$ に置き換えて生じる論理式を φ' とすると、$\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi$' が成立する。

（参考）置き換え定理の証明： φ の構成に関する帰納法で証明する。

＜１＞ φ が論理演算子も量化子も含まないとき、φ は A そのものか、A を含まないかのどちらかである。φ が A のとき、φ' は A か B であるから、いずれにせよ $\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi$'。$\varphi$ が A を含まないとき φ' は φ と同じだから、$\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi$'。

＜２＞－＜５＞ φ が $\chi\wedge\omega$ の形のとき、$\chi\vee\omega$ の形のとき、$\chi\rightarrow\omega$ の形のとき、および $\neg\chi$ の形のときについては、命題論理のときと同様に、$\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi$'。

＜６＞ φ が $\forall\zeta\chi(\zeta)$ の形のとき、φ' は、$\forall\zeta\chi(\zeta)$' の形をしている。ここで、$\chi(\zeta)$、$\chi(\zeta)$' の中の変項 ζ を $\chi(\zeta)$ に現れない任意の定項 α で置き換えてできる式を $\chi(\alpha)$、$\chi(\alpha)$' とすれば、帰納法の仮定より、$\vdash\chi(\alpha)\leftrightarrow\chi(\alpha)$' としてよい。このとき、

$$\dfrac{\dfrac{\forall\zeta\chi(\zeta)}{\chi(\alpha)} \quad \dfrac{\vdots}{\chi(\alpha)\rightarrow\chi(\alpha)'}}{\dfrac{\chi(\alpha)'}{\forall\zeta\chi(\zeta)'}}$$

より、$\forall\zeta\chi(\zeta)\vdash\forall\zeta\chi(\zeta)$'。同様に $\forall\zeta\chi(\zeta)'\vdash\forall\zeta\chi(\zeta)$。よって $\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi$'。

＜７＞ φ が $\exists\zeta\chi(\zeta)$ の形のとき、φ' は、$\exists\zeta\chi(\zeta)$' の形をしている。ここで、$\chi(\zeta)$、$\chi(\zeta)$' の中の変項 ζ を $\chi(\zeta)$ に現れない任意の定項 α で置き換えてできる式を $\chi(\alpha)$、$\chi(\alpha)$' とすれば、帰納法の仮定より、$\vdash\chi(\alpha)\leftrightarrow\chi(\alpha)$' としてよい。このとき、

$$\dfrac{\exists\zeta\chi(\zeta) \qquad \dfrac{\dfrac{[\chi(\alpha)] \quad \dfrac{\vdots}{\chi(\alpha)\rightarrow\chi(\alpha)'}}{\chi(\alpha)'}}{\exists\zeta\chi(\zeta)'}}{\exists\zeta\chi(\zeta)'}$$

より、$\exists\zeta\chi(\zeta)\vdash\exists\zeta\chi(\zeta)$'。同様に $\exists\zeta\chi(\zeta)'\vdash\exists\zeta\chi(\zeta)$。よって $\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi$'。

以上、＜１＞から＜７＞によって、任意の φ について、$\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi$'。

○ 古典述語論理の標準的意味論

- 述語論理の標準的意味論もまた、命題論理の真理関数的意味論と同様、二値原理にもとづいている。

- モデル M とは、組 (D, v) のことである。D は定項が指し示しうる個体全体の集合（考察中の世界のすべてのものの集合）であり、個体領域（または論議領域）と呼ぶ。v は、定項にどの個体を割り当て、述語記号にどのような個体の集合を割り当てるかを定める関数であり、付値関数と呼ぶ。なお、０項述語記号には、v によって、真理値T、Fのどちらかが割り当てられる。

- モデル M において、任意の論理式に対して真理値を対応させる関数 v_M が次のように帰納的に定義される。

  1. $v_M(Aa_1a_2..a_n) = \mathrm{T} \quad \Leftrightarrow \quad (v(a_1), v(a_2), .., v(a_n)) \in D^n$ が、$v(A)$ の要素である。ただし、A が０項述語記号のとき、$v_M(A) = v(A)$
  2. $v_M(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{T} \quad \Leftrightarrow \quad v_M(\varphi) = \mathrm{T}$ かつ $v_M(\psi) = \mathrm{T}$
  3. $v_M(\varphi \vee \psi) = \mathrm{T} \quad \Leftrightarrow \quad v_M(\varphi) = \mathrm{T}$ または $v_M(\psi) = \mathrm{T}$
  4. $v_M(\varphi \to \psi) = \mathrm{T} \quad \Leftrightarrow \quad v_M(\varphi) = \mathrm{F}$ または $v_M(\psi) = \mathrm{T}$
  5. $v_M(\neg\varphi) = \mathrm{T} \quad \Leftrightarrow \quad v_M(\varphi) = \mathrm{F}$
  6. $v_M(\forall\zeta\varphi(\zeta)) = \mathrm{T} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\zeta)$ に含まれていない定項の一つを α としたとき、M のすべての α 変種 M/α について、$v_{M/\alpha}(\varphi(\alpha)) = \mathrm{T}$
  7. $v_M(\exists\zeta\varphi(\zeta)) = \mathrm{T} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\zeta)$ に含まれていない定項の一つを α としたとき、M のある α 変種 M/α が存在して、$v_{M/\alpha}(\varphi(\alpha)) = \mathrm{T}$

  ＊モデル M の α 変種 M/α とは、M における個体領域 D はそのままで、付値関数 v を、定項 α に割り当てる個体以外は v と同じであるような付値関数（v もそのひとつである）で置き換えてできるモデルである。

- φ が充足可能であるとは、あるモデル M が存在して、$v_M(\varphi) = \mathrm{T}$ となることである。

- φ が妥当であるとは、すべてのモデル M に対して、$v_M(\varphi) = \mathrm{T}$ となることである。

○ 述語論理の性質

- 述語論理の無矛盾性：各述語論理体系は、無矛盾である。
- 述語論理の健全性：各述語論理体系は、健全である。
  すなわち、任意の論理式φについて、$\vdash\varphi \quad\Rightarrow\quad \varphi$は妥当
- 古典述語論理の完全性：古典述語論理体系は、完全である。
  すなわち、任意の論理式φについて、φは妥当 $\Rightarrow\quad \vdash_C \varphi$

（参考）意味論的タブロー（分析タブロー、真理の木）

・一般に、論理式φの否定が充足不可能であれば、φは妥当である。（なぜか？）
また、充足可能であれば、φは妥当ではない。（反証モデルが存在する。）

・論理式を以下のような規則にしたがって変形していくことによって、
充足不可能かどうかを調べることができる。［意味論的タブローの方法］

<意味論的タブローの規則>
・「｜」は、上の論理式を含むすべての経路の先に、下の論理式（ないし「閉」）を書くことを表す。
・「／　＼」は、上の論理式を含むすべての経路を分岐させたのち、その先にそれぞれ下の論理式を書くことを表わす。
・「√」は一度適用したら、同じ論理式には二度と適用しないことを示す。
・すべての経路上に「閉」が現れたら、最初の論理式が充足不可能である。「閉」が現れえない経路がある場合は、最初の論理式は充足可能であり、その経路上の論理式から反証モデルが構成できる。

$$\begin{array}{c}\surd\ \chi\wedge\omega\\ |\\ \chi\\ \omega\end{array}\qquad
\begin{array}{c}\surd\ \neg(\chi\wedge\omega)\\ /\quad\backslash\\ \neg\chi\qquad\neg\omega\end{array}\qquad
\begin{array}{c}\surd\ \chi\vee\omega\\ /\quad\backslash\\ \chi\qquad\omega\end{array}\qquad
\begin{array}{c}\surd\ \neg(\chi\vee\omega)\\ |\\ \neg\chi\\ \neg\omega\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\surd\ \chi\to\omega\\ /\quad\backslash\\ \neg\chi\qquad\omega\end{array}\qquad
\begin{array}{c}\surd\ \neg(\chi\to\omega)\\ |\\ \chi\\ \neg\omega\end{array}\qquad
\begin{array}{c}\surd\ \neg\neg\chi\\ |\\ \chi\end{array}\qquad
\begin{array}{c}\chi\\ \neg\chi\\ |\\ \text{閉}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\forall\zeta\varphi(\zeta)\\ |\\ \varphi(\alpha)\end{array}\qquad
\begin{array}{c}\surd\ \neg\forall\zeta\varphi(\zeta)\\ |\\ \exists\zeta\neg\varphi(\zeta)\end{array}\qquad
\begin{array}{c}\surd\ \exists\zeta\varphi(\zeta)\\ |\\ \varphi(\alpha)\end{array}\qquad
\begin{array}{c}\surd\ \neg\exists\zeta\varphi(\zeta)\\ |\\ \forall\zeta\neg\varphi(\zeta)\end{array}$$

αは経路上既出の定項があれば、その定項。なければ、任意の定項。

αは経路上未出の定項

・意味論的タブローの方法は、単項古典述語論理（述語記号を０項及び単項述語記号のみに制限した体系）における論理式の妥当性については、決定手続きとなる。ただし、一般の古典述語論理については、この方法では、妥当かどうか決定不可能な論理式が存在する。（例：$\forall x\exists yPxy \to Paa$）

・実は、古典述語論理体系は決定可能ではない。すなわち、どのような方法によっても、妥当かどうかを決定することができない場合がある。

プリントNo. 9 (11/07/08)

○ 述語論理の拡張（1）ーさらなる表現力をめざして

1. 同一性 (identity) を伴う述語論理

・2項の述語「…は〜と同一である」を意味する特別な述語記号‘＝’を導入する。’$= ab$’と書くかわりに通常‘$a = b$’と書く。

・推論規則

$$\frac{}{\alpha = \alpha}\ (=\mathrm{I}) \qquad \frac{\varphi(\alpha) \quad \alpha = \beta}{\varphi(\beta)}\ (=\mathrm{E})$$

ただし、$\varphi(\alpha)$ は定項 α を含む論理式を表し、$\varphi(\alpha)$ の中の1個以上の α を定項 β で置き換えてできる表現を $\varphi(\beta)$ とする。

例文：

「イチローは鈴木一朗だ」: $i = s$　cf.「イチローは野球選手だ」

「お岩さんは存在する」: $\exists x x = o$　cf.「お化けは存在する」

「ちょうど二つのものが存在する」: $\exists x \exists y(\neg x = y \wedge \forall z(z = x \vee z = y))$

＊確定記述 (definite description)

「源氏物語の著者は女性である」: $\exists x((Cxg \wedge \forall y(Cyg \rightarrow x = y)) \wedge Jx)$
　cf.「源氏物語の読者はみな女性である」

2. 関数記号 (function symbol) を伴う述語論理

・1個以上の個体指示表現から、新しい個体指示表現を作り出す記号、関数記号が導入される。関数記号は f、g などの小文字で表す。例えば、a が定項「タケシ」、f が「…の父親」を意味する関数記号であるとすると、$f(a)$ は「タケシの父親」、$f(f(a))$ は「タケシの父親の父親」等となる。（この f は単項関数記号。二項関数記号の例は下を見よ。）論理式の形成規則や推論規則が関数記号を含む式を扱うものに変更される。

例文：

「ある人の父方の祖父が近視ならば、その人も必ず近視である（論議領域：人の集合)」: $\forall x(Kf(f(x)) \rightarrow Kx)$

「任意の2点 x、y に対して、それらの中間の点 z が存在する（論議領域：点の集合)」: $\forall x \forall y \exists z\ z = m(x, y)$

3. 高階論理 (higher-order logic)

・[2 階論理 (second-order logic)] 個体を表す（1階の）変項 x、y、…以外に、性質や関係を表し述語記号に置き換わる（2階の）変項 X、Y、…が導入される。$\forall X\varphi$、$\exists X\varphi$ という形の式が新たに論理式として認められることになる。$\forall$、$\exists$ の意味は1階の場合と同様、「すべての〜について」、「ある〜が存在して」であり、対応する推論規則が付け加わる。

例文：

「ジュンイチロウとナオトは同じ性質を持っている」: $\exists X(Xj \wedge Xn)$

「2つのもの x、y が全く同じ諸性質を持っているとき、x と y は同一である（不可識別者同一の原理）」: $\forall x \forall y(\forall X(Xx \leftrightarrow Xy) \to x = y)$

・[タイプ理論 (the theory of types)] さらに3階、4階・・、n 階・・の変項や量化子、それらに関する推論規則等が付け加わった論理体系をタイプ理論という。

4. 様相論理 (modal logic)

・[真理様相論理 (alethic modal logic)] 論理式の先頭にくっついて、新しい論理式を作り出すオペレータ‘$\Box$’、‘$\Diamond$’が導入される。$\Box\varphi$、$\Diamond\varphi$ という形の式が新たに論理式として認められることになる。‘$\Box\varphi$’は「φ が必然的 (*necessary*) である」、‘$\Diamond\varphi$’は「φ が可能 (*possible*) である」という意味であり、対応する公理や推論規則が付け加わる。

例文：

「日本が優勝しないこともありうる」: $\Diamond\neg Yn$

「もしイングランドが不調ならば、日本が優勝することは必然的である」: $Fe \to \Box Yn$

＊様相オペレータの諸性質：

$\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$　　　$\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \Box\varphi$

$K : \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$　　　$T : \Box\varphi \to \varphi$

$4 : \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$　　　$5 : \Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

…いずれを公理として認めるかによって、異なる体系が考えられる。

＊様相論理のモデル：可能世界意味論 (possible world semantics)

・[さまざまな様相論理] 必然性、可能性と類似したさまざまなオペレータをもつ論理体系が考えられている：義務論理 (deontic logic) [O と P]、時制論理 (tense logic) [F と P]、認識論理 (epistemic logic) [K]、信念論理 (doxastic logic) [B] など。

プリントNo．１０ (11/07/08)

○ 述語論理の拡張（２）ー論理から理論へ

* 論理の主題中立性、理論の公理（算術、幾何、物理、諸科学、日常の文脈における理論…）

* 理論の例：算術

· 特別な定項：0

· 特別な関数記号：s $+$ $\cdot$
（s は「…のすぐ次の自然数」を表す関数記号である。この s の使用に際しては括弧を省略することが多い。すなわち、$s0, ss0, sss0\ldots$ は $1,2,3\ldots$ を表すことになる。また、$+(a,b)$ のことを $(a+b)$、$+(a\cdot b)$ のことを $(a\cdot b)$、と書く。）

· ６つの公理と１つの公理図式：

A1 $\forall x \neg 0 = sx$

A2 $\forall x \forall y(sx = sy \to x = y)$

A3 $\forall x(x+0) = x$

A4 $\forall x \forall y(x + sy) = s(x+y)$

A5 $\forall x(x \cdot 0) = 0$

A6 $\forall x \forall y(x \cdot sy) = ((x \cdot y) + x)$

A7 $(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(sx))) \to \forall x \varphi(x)$
ただし、$\varphi(x)$、$\varphi(sx)$ はそれぞれ、定項‘０’を含む論理式 $\varphi(0)$ に対して、その中の‘０’の一つ以上の現れを、$\varphi(0)$ に含まれていない変項 x および項 sx で置き換えたものである。

· 定義による新たな概念の導入：
たとえば、大小関係に関する述語は、以下のように定義できる：
$x < y =_{df} \exists z(\neg 0 = z \wedge (x + z = y))$
$x \leq y =_{df} x < y \vee x = y$
$x > y =_{df} y < x$
$x \geq y =_{df} y \leqq x$

例文：「最大の自然数は存在しない」：
$\neg \exists x(Nx \wedge \forall y(Ny \to y \leq x))$
（あるいは、論議領域を自然数として、$\neg \exists x \forall y y \leq x$）

* 不完全性定理：算術を含む任意の理論 T について、T が無矛盾であるならば、ある論理式 G_T が存在して、G_T も $\neg G_T$ も T において証明可能ではない。

★例：１＋１＝２の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\forall y(x+sy)=s(x+y)}{\forall y(s0+sy)=s(s0+y)}}{(s0+s0)=s(s0+0)} \qquad \dfrac{\forall x(x+0)=x}{s0+0=s0}}{(s0+s0)=ss0}$$

★例：加法の交換法則の証明（ノルト&ロハティン著『現代論理学 (II)』pp.147-8)

例題 4.17

加法の交換法則を形式的算術の定理として証明せよ．

$\vdash \forall y \forall x(x+y)=(y+x)$

解 やはり，'y' についての数学的帰納法を用いる．

1	$\forall x\ (x+0)=x$	A 3
2	$(a+0)=a$	1 UE
3	$\forall x(0+x)=x$	TI 10.15
4	$(0+a)=a$	3 UE
5	$(a+0)=(0+a)$	2, 4 = E
6	$\forall x\ (x+0)=(0+x)$	5 UI
7	$\forall x\ (x+b)=(b+x)$	H (CP)
8	$(a+b)=(b+a)$	7 UE
9	$s\ (a+b)=s\ (a+b)$	= I
10	$s\ (a+b)=s\ (b+a)$	8, 9 = E
11	$\forall x \forall y\ (x+sy)=s\ (x+y)$	A 4
12	$\forall y\ (a+sy)=s\ (a+y)$	11 UE
13	$(a+sb)=s\ (a+b)$	12 UE
14	$\forall y \forall x\ (sx+y)=s\ (x+y)$	TI 10.16
15	$\forall x\ (sx+a)=s\ (x+a)$	14 UE
16	$(sb+a)=s\ (b+a)$	15 UE
17	$(a+sb)=s\ (b+a)$	10, 13 = E
18	$(a+sb)=(sb+a)$	16, 17 = E
19	$\forall x\ (x+sb)=(sb+x)$	18 UI
20	$\forall x\ (x+b)=(b+x) \rightarrow \forall x\ (x+sb)=(sb+x)$	7 − 19 CP
21	$\forall y\ (\forall x\ (x+y)=(y+x) \rightarrow \forall x\ (x+sy)=(sy+x))$	20 UI
22	$\forall y \forall x\ (x+y)=(y+x)$	6, 21 I

☆参考文献など

丹治信春著『タブローの方法による論理学入門』、朝倉書店、１９９９.

ジェフリー著『形式論理学－その展望と限界』、産業図書、１９９５.

ノルト&ロハティン著『現代論理学 (II)』、オーム社、１９９６.

前原昭二著『数学基礎論入門』、朝倉書店、２００６.

http://www.246.ne.jp/~hir/20110701/ans.pdf、(または ans.jpg、ans.doc)