２０１１年度夏学期　金曜２限　記号論理学Ｉ

○プリントの訂正 (2011/07/15)

まず、最終回の授業終了後、プリント No.8 に間違いが見つかりましたので、お伝えします。指摘してくださった方、ならびに、質問で気づかせてくださった方、ありがとうございました。

＊表：下から４行目：「充足可能」という概念は、モデルに依存しません。つまり、

（誤）φ が $\underline{M\text{ で}}$ 充足可能であるとは、あるモデル M が存在して、$v_M(\varphi)$ ＝Ｔとなることである。
（正）φ が充足可能であるとは、あるモデル M が存在して、$v_M(\varphi)$ ＝Ｔとなることである。

＊裏：意味論的タブローの規則のうち、３つに間違いがあります。（ごめんなさい！）正しくは、以下の通りです。

$\checkmark \neg(\chi \wedge \omega)$	$\checkmark \neg\forall\zeta\varphi(\zeta)$	$\checkmark \neg\exists\zeta\varphi(\zeta)$
／　＼	|	|
$\neg\chi$　　$\neg\omega$	$\exists\zeta\neg\varphi(\zeta)$	$\forall\zeta\neg\varphi(\zeta)$

＊この他、最上部の日付も間違っています。正しくは、2011/06/24 です。

○自然演繹による証明の補足 (2011/07/15)

授業最終回の最初に行った演習で、重要な例や難解な例については、ほぼ取り上げることができたと思いますが、難解なものについて、あと２つ補足をしておきます。３－５　’は、授業中に挙げた例題のリストにはなかったかもしれません。

・プリント No. 7リスト４番のうちの一つ：$\forall xAx \to B \ \vdash\ \exists x(Ax \to B)$

（ヒント）まず前提に→Ｅを適用するために $\forall xAx$ を仮定してみても、そのままではさかのぼれない。（$\forall$ Ｉの適用条件を満たさない。）そこで結論の否定を仮定して矛盾を導くことを目指す。前提に→Ｅを適用して出てくる B に→Ｉを適用して $Aa \to B$ を導いているが、このとき仮定のキャンセルは伴わないことに注意。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Aa]^1 \quad [\neg Aa]^2}{\times}}{B}}{Aa \to B}\;1}{\exists x(Ax \to B)} \quad [\neg\exists x(Ax \to B)]^3}{\times}}{\neg\neg Aa}\;2}{Aa}}{\forall xAx} \quad \forall xAx \to B}{B}}{Aa \to B}}{\exists x(Ax \to B)} \quad [\neg\exists x(Ax \to B)]^3}{\times}}{\neg\neg\exists x(Ax \to B)}\;3}{\exists x(Ax \to B)}
$$

・３－５ ：$P \to (Q \vee R)\ \vdash\ (P \to Q) \vee (P \to R)$

（ヒント）前提から→Ｅ、∨Ｅと進もうとしても、仮定の P がキャンセルできない。古典論理で証明することにして、結論の否定を仮定。$(P \to Q) \vee (P \to R)$ から $P \to Q$ にさかのぼり、さらにそれが矛盾規則を使って導出されることに気づけばＯＫ。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1 \quad [\neg P]^2}{\times}}{Q}}{P \to Q}\;1}{(P \to Q) \vee (P \to R)} \quad [\neg((P \to Q) \vee (P \to R))]^4}{\times}}{\neg\neg P}\;2}{P} \quad P \to (Q \vee R)}{Q \vee R} \quad \dfrac{\dfrac{[Q]^3}{P \to Q}}{(P \to Q) \vee (P \to R)} \quad \dfrac{\dfrac{[R]^3}{P \to R}}{(P \to Q) \vee (P \to R)}}{(P \to Q) \vee (P \to R)}\;3 \quad [\neg((P \to Q) \vee (P \to R))]^4}{\times}}{\neg\neg((P \to Q) \vee (P \to R))}\;4}{(P \to Q) \vee (P \to R)}
$$

※これらの証明はいずれも次のような構造を持っています。パースの法則や６－７、排中律の証明も（少々回り道を許せば）この形で書くことが可能です。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots\\ C\end{array}\quad [\neg C]}{\times}}{\neg\neg A}}{A}\\ \vdots\\ C\end{array}\quad [\neg C]}{\times}}{\neg\neg C}}{C}$$

命題論理の場合、この構造の証明の一部と、排中律の証明を用いることで、次のように同じ結論 C を導く別証明図が書けることがわかります。（述語論理の場合、∀Ｉなどの適用条件があるので、そのままではうまくいかない場合がありますが。）

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A\vee\neg A\end{array}\quad\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ C\end{array}\quad\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}$$

◯提出された解答について (2011/07/19)

最終回、授業で行った演習に立候補したにもかかわらず、板書の役が当たらなかった方には、当該の問題の解答をレポートとして提出していただきました。ほぼ問題なくできていましたし、答え合わせもすでに済んでいるのでとくに紹介する必要はないと思いますが、ひとつだけ。パースの法則の別証明を試みたものがありました。（排中律の別証明も含まれています。）

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)] \quad \dfrac{[A]}{A \vee \neg A}}{\times}\,*}{\neg A} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)] \quad \dfrac{[\neg A]}{A \vee \neg A}}{\times}\,*}{\neg\neg A}}{A}}{\times}\,*}{\neg\neg(A \vee \neg A)}}{A \vee \neg A} \quad [A] \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A] \quad [A]}{\times}\,*}{A \to B}\,! \quad [(A \to B) \to A]}{A}}{\dfrac{A}{((A \to B) \to A) \to A}}
$$

パースの法則は、A から→Ｉ規則１回で導けるので、$\neg A$ からも導くことができれば、排中律に∨Ｅを適用することで証明できる、というわけです。

なお、*をつけた規則（¬Ｅ）については、前提の左右が一貫して逆になっています。また、! をつけたところは、矛盾規則と→Ｉ規則に分けなければなりません。