②

数　学　①［数学ＩＡ　数学ＩＢ］

（100点 90分）

このシケプリには，**「数学ＩＢ」**の内容を掲載していますが，一部**「数学ＩＡ」**の勉強に流用できる部分もあります。勉強する科目を間違えないように選択しなさい。

Ｉ　注　意　事　項

1　**試験開始の合図があるまでに，このシケプリの中を見なさい。**

2　出題科目，ページ及び選択方法は，下表のとおりです。

出　題　科　目	ペ　ー　ジ	選　　　択　　　方　　　法
数　学　Ｉ　Ａ	2～22	UTask-Webから解答する科目の履修登録を行い，履修しなさい。
数　学　Ｉ　Ｂ	2～22	

3　試験勉強中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁に気付いた場合は，自分で再印刷しなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入しなさい。**

①　**学生証番号欄**

学生証番号（数字及び英字）を**記入**しなさい。

②　**氏名欄，科類欄**

氏名及び**科類**（理科一類）を**記入**しなさい。

③　**語学符号欄**

履修している第二外国語に応じた**符号**（英字）を**記入**しなさい。

5　シケプリの余白等は適宜使用してよいし，どのページも切り離して使用してよい。

6　試験終了後，シケプリは燃やしなさい。

II　勉　強　上　の　注　意

1　このシケプリには，演習問題は掲載されていません。数学ＩＢ演習に出席していない人は，下記URLから授業資料をダウンロードしなさい。

http://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/

2　**このシケプリは，必要最低限の知識しか掲載していません。**少なくとも，このシケプリの内容だけはきちんと把握したうえで試験を受験しなさい。

3　このシケプリは，「社会科学　数学Ｉ」の内容にも対応していますが，そこで扱われる内容のうち，「高校数学III・Ｃ」に当てはまる部分は扱いません。各自で勉強しなさい。

1 はじめに

Introduction

イントロダクション（はじめに）のイントロダクションに何を書けばいいのか……。とりあえず、この章の目標は一年間の数学IBの講義内容を概観することです。夏学期のシケプリや授業ノートを手元に置いておくと便利かと思われます。

「授業出てなかったけどor寝てたけどどんなことやってたのかなー」とか「勉強に入る前に知識を整理しておこう」なんて人向けです。本当に時間ない人は読まなくてもよいかもしれませんが、読めば以降のシケプリを理解する助けになるように書いているつもりなのでできるだけ読んでほしいところです。あと、この章のモットーはみなさんに冬学期の数学の内容をたたき込むための土台を整備することにありますので、一部を除いて基本的に数式は出しません。具体的内容は各章を参照のこと。この章の内容は講義順、すなわち時系列順ではなくシケ対基準で適当にジャンル分けして並べたものになっています。ご注意を。

Description

1．微分

高校時代と同様に微分を定義。これは一応式を出しておこう。

微分可能な関数 f の微分は次式により定義される。

$$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

図形的意味も高校のころと同様、関数のグラフの接線の傾きである。

その接線は、微分した点の十分近くでは元の曲線（関数）の近似式になっていることも留意しておこう（高校数学）。

多変数関数の場合には、ある一つの変数に注目した**偏微分と**、微分した点の近傍でその関数を一次近似する**全微分**があった。１変数関数の場合にはこの二つを表すものはほぼ同じだったが一般の場合にはそうではないということだ（夏シケプリ５章）。

像も多変数になる場合には、それぞれの像についての全微分をベクトルにした**ヤコビ行列**として一般化された（冬学期）。ヤコビ行列は全微分の一般化なんだよ！

２．テイラーの定理

あるときテイラーは考えた。「一般の関数が多項式で近似できたらすごくね？」と。では、仮にそのようなことができるとしたらその多項式はどんな姿になるだろうか考えてみた。

素直に式を立てるとこうなる。

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$$

ここでテイラーは $x=0$ の代入と両辺の微分を繰り返していけば係数が決定できると気付いたのだ。係数の決定、すなわち近似した結果の推定ができたテイラーは喜んで**テイラーの定理**を証明しましたとさ。めでたしめでたし（夏シケプリ３章）。

で、これを∞回行ったと考えるのが**テイラー展開**である（夏シケプリ３章）。

多変数関数の場合にも今と同様の推論が成り立ち、**多変数関数に関するテイラーの定理**もまた成り立つ。テイラー展開も同様（冬学期）。

３．極値判定・最大最小

一変数関数の極値判定で導関数・第二次導関数を調べたように、多変数関数で極値判定をする際も同様のことをする。

極値を取る点の候補は**臨界点**、すなわち各偏導関数の値が０になる点のことである。そして、そこが実際にどうなるか調べるには第二次偏導関数を並べて作った**ヘッセ行列**を調べればよい（夏シケプリ６章）。

有界閉集合（大ざっぱに言うと、無限に広がってなくて境界上を含む領域のこと。）上で定義された関数には必ず最大値と最小値があり、最大値、最小値を取りうるのは**有界閉集合の境界か臨界点**に限られる（夏シケプリ７章）。

これに式であらわされた拘束条件が加わった場合に、臨界点にあたる場所を求める手法が**ラグランジュの未定乗数法**である（冬学期）。

４．級数とその収束

級数の収束・発散を調べる方法として、級数を等比級数と見立てて考える方法がある。具体的には、**ダランベールの収束判定法・コーシーの収束判定法**が挙げられる。

　数を列にして並べれば数列と呼ばれるように、関数を列にして並べれば**関数列**と呼ばれる。

　数列にも極限があるように、関数列にも極限がある。数列と同様に、関数列がある一定の関数に近づいていけばそれは収束していると言えるが、数列と違うのは、収束の仕方にもいろいろあるということである。

　関数の変数を固定した数列を考え、それが収束するするならば関数列は**各点収束（点別収束）**するという。

　各点収束では収束した関数の連続性などは保証されないが、**一様収束**（ここでは詳しくは述べない）する場合には連続性が保証される。

　数列に対して各項の総和として級数というものを考えたが、関数列に対しても同様のことができ、関数列の各項の総和を**関数項級数**という。

　この関数項級数の一種として**べき級数**が存在する。

べき級数の形。前ページでも見たような式。

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$$

　前ページで見たというのも当然、**テイラー展開はべき級数**であるからだ。

　べき級数はその特徴として、べき級数が収束する範囲（**収束半径**）内では**項別に微積分できる**というものがある（もちろんテイラー展開も）。

　（この節の内容は全部冬学期だが、収束判定法は夏シケプリ８章で少しだけ解説。）

５．積分

　高校時代において積分は原始関数を求めることであり、それをもとに求めた定積分はグラフと軸の作る面積とされた。しかし本当であろうか？

　講義で扱った**リーマン積分**とは、この面積に注目して積分を定義する方法である。積分区間を細かく分割して細長い長方形をたくさん作り、これの面積の総和（**リーマン和**）を積分にしようというアイデアである。

　このように定義したリーマン積分もきちんと**微積分学の基本定理**（下記）が成り立ち、高校までと同様の積分ができる（夏学期の内容だけど冬学期の試験範囲）。

任意の連続関数 f に対し

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$

で定義される原始関数 F が存在し、

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

が成り立つ。

多変数関数に対してもリーマン積分は定義できる。たとえば２変数関数ならば、定義上は積分する領域上にある微小区間（長方形・正方形）からできる直方体の総和（リーマン和）がリーマン積分となる（冬学期）。

東大入試に頻出の求積問題を解く際に使った「断面積を積分する」という技術がある。これの正当性を保証する定理として**フビニの定理**が存在する。「断面積を積分する」行為は講義では**反復積分**、または**逐次積分**という語で呼ばれた（冬学期）。

難しい積分をする際の重要テクニックとして置換積分を高校時代に学習したが、重積分においても置換積分があり、一般的に**変数変換**と呼ばれる（冬学期）。

超特急で１年間の数学IBの講義内容を振り返ってみました。まあこんなもんでしょう。このシケプリでは、このうち夏学期版シケプリで扱わなかったところを解説していきたいと思います。

2

ヤコビ行列

Introduction

ヤコビ行列、と聞けば「また新しい概念の登場か……」とうんざりする人もいるかもしれない。案ずるなかれ。ヤコビ行列は、「（一変数関数の）微分」→「全微分」→「ヤコビ行列」という流れで自然に行われる一般化なのだ。ていうか、**全微分をベクトルにして縦にならべただけ**なんだよね。

重積分の変数変換の際にもう一度顔を出すので、忘れないようにしておきたい。

Description

たとえば、次のような $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 写像を定め、それを１次式で近似することを考えてみよう。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(s,t) \\ g(s,t) \end{pmatrix}$$

全体でみると、２変数s,tがx,yに移る写像であるのだが、ここでx,yを個別に見れば、これは夏学期に扱った多変数関数であると分かる。これらを点 (s_0, t_0) で全微分してみると以下のようになる。

$$x' = f(s_0,t_0) + \frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t_0)\cdot(s-s_0) + \frac{\partial f}{\partial t}(s_0,t_0)\cdot(t-t_0)$$
$$y' = g(s_0,t_0) + \frac{\partial g}{\partial s}(s_0,t_0)\cdot(s-s_0) + \frac{\partial g}{\partial t}(s_0,t_0)\cdot(t-t_0)$$

そして、これをよく見ると、もしくはよく線形代数を勉強した人がこれを見ると、この式は次のように書きかえられるわけだ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(s_0, t_0) \\ g(s_0, t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial s}(s_0, t_0) & \dfrac{\partial f}{\partial t}(s_0, t_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial s}(s_0, t_0) & \dfrac{\partial g}{\partial t}(s_0, t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s - s_0 \\ t - t_0 \end{pmatrix}$$

この式の形に注目すると、s,tからx,yに移る一次写像である。これこそが求めたかった近似式である（超展開でごめん）。そして、この真ん中にある行列のことを世の人は**ヤコビ行列**と呼ぶのだ。

上の場合のヤコビ行列は次のようにあらわされる。

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(s_0, t_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial s}(s_0, t_0) & \dfrac{\partial f}{\partial t}(s_0, t_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial s}(s_0, t_0) & \dfrac{\partial g}{\partial t}(s_0, t_0) \end{pmatrix}$$

変数が増えたり、像が増えたりすればヤコビ行列はそれに合わせて大きさが変わるのは今の議論を変数の個数を変えてやってみればすぐに分かるであろう。

Introductionにおいて、ヤコビ行列は全微分の一般化と書いたが、これもすぐに確かめることができる。全微分の式はヤコビ行列を使って書きなおすことができるのだ。

$$x' = f(s_0, t_0) + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial s}(s_0, t_0) & \dfrac{\partial f}{\partial t}(s_0, t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s - s_0 \\ t - t_0 \end{pmatrix}$$

はい、この通り。

次数の大きなのヤコビ行列についてはあまり深追いせず、元の写像が合成写像だったらどうするのかという話だけしておく。つまり合成関数の微分の仕方。

結論を言えば、行列をどんどん掛け算するだけである。では表現を確認してみよう。

写像HをG・Fの合成写像とすると、点aにおけるヤコビ行列は次のようになる。

$$\mathbf{J}_{\mathbf{H}}(\mathbf{a}) = \mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\mathbf{F}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{a})$$

aにおけるFのヤコビ行列と、aのFによる移り先であるF(a)でのGのヤコビ行列の積、ということである。

3

テイラーの定理（２）

Introduction

一変数関数のテイラーの定理においてテイラー多項式の姿を検討する際、関数が多項式で近似できるならこんな風におけるよねーとおいた等式をどんどん微分したことは覚えているだろうか。忘れた人はこのシケプリの３ページを見るとよい。

これと同じことが多変数関数でも可能なのだ、というのがこの章の主張。一変数とはやや勝手が違う部分について補足しつつそのことを確かめていこう。

タイトルを「多変数関数のテイラーの定理」としなかったのは長すぎておさまらなかったから。（2）というのは、夏学期版の続きという意味。

Description

２変数関数が多項式に化けるとしたら、どんな等式が成り立つだろうか？

このようになることが期待される。一変数の時と同様だ。

$$f(x,y)=\sum_{0\le l+m\le n} c_{l,m}x^l y^m$$

ここで、「ああ微分して０代入すりゃいいんだろ」と早合点してやってみると多変数関数に返り討ちにあう。

試しに、l=2,m=1のときの係数を考えてみよう。まずx,x,yの順で偏微分してると、

$$c_{2,1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(0,0)$$

つぎに、y,x,xの順で偏微分するとどうなるだろうか。

$$c_{2,1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0)$$

おっと！　係数cが一通りに定まらないではないか。
とここでこのような問題を解決する神定理が天から降ってくる。シケプリだし。

> C^r 級関数のr次以下の偏導関数は偏微分する関数の順序によらない。
>
> どの変数で何回偏微分するかのみに依存する。

つまり、fが C^3 級以上ならば、次式が成り立つということだ。

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

これならば、十分滑らかなfな対しcを一意に定めることができよう。つまり、

> こういうこと。
>
> $$f(x,y)=\sum_{0\le l+m\le n}\frac{1}{l!\cdot m!}\cdot\frac{\partial^{l+m} f}{\partial x^l \partial y^m}x^l y^m$$

そしてこれが本当に正しくて、剰余項がどのようになるかまでに言及したのが「**多変数関数に関するテイラーの定理**」である。もちろん証明略。原点まわり以外での話も一般化して書いちゃう。ただし２変数関数。分かりにくいところは１変数との類推で。

> C^{n+1} 級関数fに対し、テイラー近似多項式を
>
> $$P_n(x,y)=\sum_{0\le l+m\le n}\frac{1}{l!\cdot m!}\cdot\frac{\partial^{l+m} f}{\partial x^l \partial y^m}(a,b)\cdot(x-a)^l(y-b)^m$$
>
> とすると、次式を満たすθ（0<|θ|<1）が存在する（右辺は剰余項）。
>
> $$f(x,y)-P_n(x,y)=\sum_{l+m=n+1}\frac{1}{l!\cdot m!}\cdot\frac{\partial^{l+m} f}{\partial x^l \partial y^m}(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b))\cdot(x-a)^l(y-b)^m$$

$(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b))$ というのは (a,b) と (x,y) を結ぶ線分上の点という意味である。ちなみに、剰余項の評価は次のようになる。

> $$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-P_n(x,y)}{\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)^n}=0$$

4

ラグランジュの未定乗数法

Introduction

夏学期に多変数関数の最大値・最小値の求め方を学んだ。しかし、これは変数が定義域上を自由に動ける場合にしか使えない。では、「自由に動けない」とはどういうことであろうか。これは言い換えれば拘束条件があるということである。

この章では、拘束条件がある場合における臨界点の求め方、すなわちラグランジュの未定乗数法について解説する。

時間ない人は１３ページの結果だけ見ると幸せになれるよ！

Description

説明のために２変数関数を用いるが、以下の議論は一般のn変数の場合でも通用する（はず）である。

有界閉集合D上で定義された関数 $f(x,y)$ の最大値・最小値は、拘束条件がなければ夏学期版シケプリ７章にあるように

・Dの境界上の点

・ $f(x,y)$ の臨界点

のいずれかに最大値・最小値を取る点があるということが分かっている。

では、 $g(x,y)=0$ という形式であらわされる拘束条件があったときの臨界点はどうなるだろうか。

$g(x,y)=0$ の姿に応じて考えてみよう。

まずは、 $g(x,y)=0$ が $y=h(x)$ もしくは $x=i(y)$ と具体的に書きなおすことができる場合。

これはとても簡単である。この式を代入してしまえばもとの $f(x,y)$ は**拘束条件のない**１変数関数になるからである。拘束条件がなければ、夏学期版シケプリ６章にあるように臨界点さえ求めてしまえばよいこととなる。

では、ここからが本題なのだが $g(x,y)=0$ を書きなおすのが難しい場合はどうすればよいだろうか。目標としては、この場合でも上と同じような流れに乗せて、**臨界点に当たる部分を知りたい**のである。

とここでまたもや神定理降臨。こんなときに役立つ陰関数定理である。

> $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ であるとき、点 (x_0,y_0) の近傍において次式をみたす $\varphi(x)$ が存在する。
>
> $$y=\varphi(x)$$

つまり、偏導関数が0でなければ必ずその変数について解くことができるということだ。ただし、陰関数定理は $\varphi(x)$ の姿については言及しない。

陰関数定理から、臨界点でなければ必ずいずれかの変数について解くことができると言うことも分かる。

以下では $g(x,y)$ の臨界点でない部分についてのみ考える（なので、後述のラグランジュの未定乗数法では拘束条件を表す式が臨界点となっている場合を個別に調べる必要がある）。

$\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)\neq 0$ 　とすると、陰関数定理から $y=\varphi(x)$ となる $\varphi(x)$ が存在する。

これを実際に $f(x,y)$ に代入した $f(x,\varphi(x))$ という１変数関数の臨界点を求めればよいことになる。早速導関数を計算してみよう。偏微分の連鎖律（夏学期版シケプリ５章）を用いていることに注意。

$$\left(f(x,\varphi(x))\right)'=\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

これがその結果だが、 $\varphi'(x)$ がどうなっているのかは分からない。ではこれを求めてみよう。 $g(x,\varphi(x))=0$ の両辺をxで偏微分することにより、以下の式を得る。

$$\varphi'(x)=-\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,\varphi(x))}$$

これをもとの式に代入したのが導関数であるから、臨界点、すなわちこれが0になる点をはじめの拘束条件のもとで求めればよいことになる。つまり、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)}=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

この連立方程式の解が、 $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)\neq 0$ のときの求める臨界点ということになる。

これだけだと $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0$ の場合を見落としてしまうので、これを回収するために $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ の場合についても同様の処理を行って、同様の連立方程式を得る。

それぞれの連立方程式を解いてもよいだが、もっと変数の数が多くなるとそれだけ現れる連立方程式の数も増えて困難になる。そこで考え出されたのが**ラグランジュの未定乗数法**である。

$$\lambda=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)}$$

上に出てきた連立方程式に対し、上の式で定まる新たな変数λを考えれば、元の方程式は次のように書きかえることができる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\lambda\cdot\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\lambda\cdot\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

実はこの連立方程式は、はじめに現れた各連立方程式の解を過不足なく求めることができるのだ。暇のある人は確かめてみるとよい。

そしてこれが最後の決め手なのだが、この連立方程式を解くと言うことは下記の新しく定義した関数の拘束条件がないときの臨界点を求めることに他ならないのだ。

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\cdot g(x,y)$$

この関数の臨界点を求めよ、と主張するのが**ラグランジュの未定乗数法**なのだ。

有界閉集合D上で定義された $f(x,y)$ の、 $g(x,y)=0$ のもとでの最大値・最小値を取りうる点は以下に限られる。

- Dの境界上の点
- $g(x,y)$ の臨界点
- 以下のように定義される関数Fの臨界点

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\cdot g(x,y)$$

上がこの章での議論をまとめた結果、ラグランジュの未定乗数法と呼ばれるものである。なお、ラグランジュの未定乗数法は２変数関数に限らず、一般のn変数関数に対しても使うことができることに注意しよう（今までの議論は一般の場合に容易に拡張できる）。

5

級数の収束

Introduction

このシケプリの５章と６章の究極目標はべき級数（特にテイラー展開）の性質を理解することにある。少なくとも講義でここに対応する部分の目標はそれであるように見えた。

この章では、その途中で扱った収束判定法などのおいしい部分だけを扱っていこうと思う。基本的には公式の羅列、すなわち夏学期版シケプリみたいな感じになる。

Description

$0 \le a_n \le b_n$ で、

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するならば、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する。

「上に有界な単調増加な数列は収束する」という定理の応用のようなものである。

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の収束が有界性を示し、各項が正であることが単調増加性を示している。

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという。

絶対収束する、というのは「絶対、必ず」という意味ではなく「絶対値が」という意味。まあ次に示す定理で、「前者の意味もありっちゃありかな」という気にはなるが。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

ちょっと考えれば当たり前のような気もするが（もともとマイナスだったのを全部プラスにしてしまっても収束するのだから……ということ）、重要な定理である。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束はしても絶対収束はしないとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は条件収束すると言う。

これはもともとの級数は収束するけど絶対値を取ってしまうと収束しないような微妙な場合を意味する。これが大事かといわれると微妙。

最後は収束判定法。夏学期版との相違点はそれぞれの判定法に名前がついたこと。

ダランベールの収束判定法

数列 a_n が以下の条件のいずれかを満たすとき、その級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する。

（1）十分大きいすべてのnに対し、 $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$

（2） $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$

（1）よりも（2）が大事。というか、普通ダランベールの収束判定法といえば（2）だけのことを指す。級数を等比級数に見立てて、「公比」に相当するパラメータを見て収束・発散を調べている。

コーシーの収束判定法

数列 a_n が以下の条件のいずれかを満たすとき、その級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する。

（1）十分大きいすべてのnに対し、 $\sqrt[n]{a_n} < 1$

（2） $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$

ダランベールとは「公比」に相当するパラメータの取り方が違うだけ。これもやはり普通は（2）を用いる。

6 関数列とその級数

Introduction

関数列とは、数列の項に当たる部分が関数に変わったものである。これは実例を見てもらった方が早いので、あとでそれを示す。

この章では関数列の収束に関する議論と、各項の和である関数項級数の性質、特にべき級数について詳しく見ていく。時間がない人はべき級数のところだけ見るとよい。

Description

関数列とは、読んで字のごとく関数を列にして並べたものである。たとえば、

$$e^x, 2e^{2x}, \cdots, ne^{nx}, \cdots$$

といったものがあげられる。他にもいろいろあるがそこは皆様の想像力に期待して省略する。

関数列に対しても、数列と同様に極限を考えることができる。では行ってみよう。まずは点別収束から。

関数列の変数にある実数（たとえば x_0 など）を代入すると、関数列は数列になる。この数列が収束するとき、関数列は x_0 で**点別収束**するという。**各点収束**という言い方もあるらしいので覚えておいて損はない。

それぞれの点での微分係数を集めてきて導関数を作ったのと同じ要領で各点収束した極限値を集めてきて１つの関数を定義することができる。すなわち、関数列 $\{f_n\}$ に対し、次のようにして $f(x)$ を定義できる。

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

次は一様収束。これは各点収束する関数列に対して定義した $f(x)$ に関する性質。

> 次の２条件を満たす数列が存在すれば、 $\{f_n\}$ は区間I上で $f(x)$ に一様収束する。
>
> （１）区間I上のすべてのxに対し、 $|f(x)-f_n(x)| \le a_n$
>
> （２） $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

実はこれは定義ではないが、こちらの方が分かりやすいのでこれを採用した。

関数列の各項には収束する先の関数との差があるはずだが、その差はある程度の範囲に収まるはずである。この値が a_n である。そして、この a_n が０に収束すれば一様収束であるということ。 $f(x)\pm a_n$ の２曲線で $f_n(x)$ を挟み撃ちする感じと言えばよいだろうか。

なぜ一様収束の話をしたかといえば、下のような性質が成り立つからである。

> $\{f_n\}$ の各項が連続で、また、 $f(x)$ に一様収束しているとき、 $f(x)$ は連続である。

つまり、一様収束は連続性を保証する、ということだ。

この $f(x)$ の性質をさらに詳しく見てみよう。と言っても結果だけ。

結果を述べるのに便利な性質として広義一様収束を定義しておく。

> $\{f_n\}$ がI上で $f(x)$ に広義一様収束するとは、
> どのようにI上の有界閉区間を取っても $\{f_n\}$ がその区間で一様収束するということ。

では積分の性質。極限操作と積分の順序交換が可能。

> $\{f_n\}$ の各項が連続で、I上で $f(x)$ に広義一様収束しているとき、
>
> $a,b \in I$ に対して次式が成り立つ。
>
> $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

そして微分。これも極限操作との順序交換の話。条件が積分と違うことに注意。

> $\{f_n\}$ の各項がI上で次の３条件を満たすとする。
> （１） C^1 級である。　（２）点別収束する。　（３）広義一様収束する。
>
> このとき、 $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は C^1 級で、次式が成り立つ。
>
> $$f'(x)=\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

18●関数列とのその級数

では、次に関数項級数について考えてみよう。関数列 $\{f_n\}$ を、別の関数列 $\{g_n\}$ を用いて次にように定義してみる。

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$$

これを関数項級数という。これも関数列の一種と言えるので、今まで同様に点別・一様・広義一様収束を定義できる。この辺はあんまり大事じゃないのでさらっと流す。

そして、当シケプリ５章に対応する形で「一様絶対収束」「広義一様絶対収束」も定義できる。すなわち、

$$\sum_{k=0}^{n} |g_k(x)| \text{ が（広義）一様収束} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \text{ が（広義）一様絶対収束}$$

ということ。

で今までこの章で延々とどうでもよい話をしてきたわけだが、ついに**試験にも出そうな分野**の解説に移ることができる。その名も、べき級数。

べき級数とは、平たく言えば多項式みたいな姿をした関数項級数のことである。

> 次のような形の関数項級数を「べき級数」という。
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

べき級数の収束・発散の判定は実に容易である。

> べき級数は**収束半径** r を持っており、これを用いて次のように収束判定できる。
>
> $|x| < r \Rightarrow$ べき級数は一様絶対収束（開区間 $(-r, r)$ 上で一様絶対収束。）
>
> $|x| > r \Rightarrow$ べき級数は収束しない。
>
> (xが収束半径上のときは個別に判定する必要がある)

> べき級数の収束半径 r は次のようにして求めることができる。
>
> （１） $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{r} \qquad (a_n \neq 0)$
>
> （２） $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{r}$

後者の定理はべき級数をたんなる級数とみて、ダランベールもしくはコーシーの収束判定法を適用しても確認することができる。

最後に、べき級数として定義される関数の性質。これはこの章で一番大事。

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を、収束半径 r のべき級数とする。
開区間 $(-r,r)$ 上の関数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を考える。

（１） $f(x)$ は $(-r,r)$ 上の連続関数である。

（２） $f(x)$ は積分可能。すなわち、

$g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ と定義すると $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ となり、

このべき級数の収束半径もまた r である。

（３） $f(x)$ は微分可能。すなわち、

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ の収束半径も r で、 $f'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ が成立する。

（２）（３）は、先に各項の積分・微分を実行しても構わないということを主張している。このことを特に**「べき級数は項別に微分・積分が可能である」**と言ったりする。

最後になぜこのことが重要かのお話。夏学期に登場した１変数関数のテイラー展開はべき級数そのものであり、したがって当然それに対する微積分にも上記の事項が成り立つのだ。微積分を介してさまざまな関数のテイラー展開を求めることもできるし、積分値の近似計算などにも使えるテクニックである。

7 リーマン積分

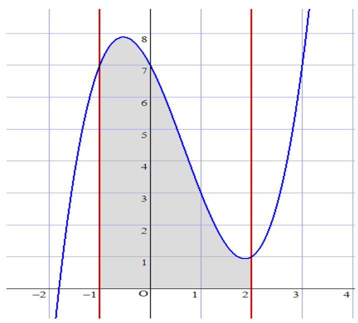
Introduction

リーマン積分と聞くと、「積分にもバリエーションがあるのか！」と驚き竦み上がる方もいらっしゃるかもしれない。ご安心あれ。リーマン積分は高校のころの積分とほとんど同じなのだ。相違点は、高校の積分は「面積の定義が空から降ってきた」のに対してリーマン積分は「面積をもとに積分を定義した」ということだ。

この章では、リーマン積分の基本的な考え方を説明する。

Description

説明のため１変数関数を用いる。２変数以上の関数は８章「重積分」で扱う。リーマン積分の「考え方」が分かれば２変数以上になってもすぐに応用することができよう。



I上で定義された関数 $f(x)$ とx軸と $x=a$ と $x=b$ が囲む部分の面積を求めたい（たとえば右図の灰色部分）。

そこで、区間 $[a,b]$ を細かく分割していくことを考える（この分割は均等でなくてよい）。

分割して得られたそれぞれの区間に対し、区間上のある１点（どこでもよい。その区間の代表値と考えればよい。）について関数の値を取り、それと区間の幅をかけるとその部分を長方形に近似した面積が得られる。各区間について得られたこの面積の総和を**リーマン和**と呼ぶ。

分割が有限である限りはリーマン和は求める積分の近似値にすぎないが、分割をどんどんを細かくしていくとリーマン和は積分値に近づいてゆく。

そこで、各区間の幅のうち最も大きいものを d として、 $d \to 0$ という極限操作をすれば積分値、すなわち面積が求まるだろうというのがリーマン積分である。

このとき、多くの関数はどのように分割を取っても $d \to 0$ としたときのリーマン和の極限値は一定値となり、この値を**リーマン積分**と呼び、以下のように書く。

$$\int_a^b f(x)dx$$

分割の取り方によって極限値が変わるような場合はリーマン積分が定義できないが、そのような関数はなかなかないうえに試験には出題されないので安心されたい。

リーマン積分は次の性質を持つ。

> リーマン積分可能な関数 $f(x)$ $g(x)$ について次の事柄が成り立つ。
>
> （1）積分区間をつなげることができる。
>
> $$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$
>
> （2）積分区間での大小関係が分かっていれば、リーマン積分の大小関係も分かる。
>
> 定義域上で常に $f(x) \leq g(x)$ ならば、 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
>
> （3）定数関数のリーマン積分は以下のようになる。
>
> 実数Aに対し、 $\int_a^b Adx = A(b-a)$
>
> （4）リーマン積分は線形性を持つ。
>
> $$A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx = \int_a^b A \cdot f(x) + B \cdot g(x)dx$$

これはリーマン積分の定義から分かることである。証明の必要はあるけど。

さらに、区間が逆転した場合のリーマン積分を定義しておく。次のページで使う。定義の中身は高校までと同じ。

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

では、先ほどの性質を使って一般の関数の積分値を大ざっぱに評価してみよう。

ある関数の積分区間内での最小値をm、最大値をMとしてこれらを定数関数とみなすと、積分区間内で次式が成り立つ。

$$m \le f(x) \le M$$

したがって、性質（2）からリーマン積分は次のように評価できる。

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x) dx \le \int_a^b M dx$$

両端は定数関数のリーマン積分であり計算できるから、結果として次式を得る。

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) dx \le M$$

もとの $f(x)$ が連続関数であるとすれば、当然定義域上すべての点で $f(x)$ はm以上M以下であって、どこかの点 $x = c$ で

ある $c \in [a,b]$ に対して、 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x) dx = f(c)$

となっていなければならない。これを**積分の平均値の定理**という。

と、伏線を張り終わったところで微分と積分の関係について考えてみる。
連続関数 $f(x)$ に対し、 $F(x)$ を次のように定義する。

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$F(x)$ が原始関数かどうかはまだ分からないことに留意。これから証明するけど。

$F(x)$ を定義にしたがって微分してみると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(x) dx \\
&= \lim_{h \to 0} f(c) \qquad\qquad c \in [x, x+h] \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

３行目の極限操作では c の動きに注意。
これで微分が積分の逆計算だということが分かった（ような気になれる）。

そして、これが**微積分学の基本定理**である。

任意の連続関数 f に対し

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

で定義される原始関数 F が存在し、

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つ。 [65]

これが成り立つので、リーマン積分の計算においては**高校までと同様の方法でできる**と言うことが分かった。部分積分や置換積分はこの定理の系である（らしい）からだ。 [68]

8 重積分

Introduction

ついにこのシケプリも最終章である。さみしい？　うれしい……ああそうですか。

この章で扱うのは悪名高き（？）重積分である。実際、期末試験ではほぼ確実に重積分の計算問題が出ると言ってよいので極めて重要である。

この章では、「重積分なんて偉そうな名前がついてるけど、実はやってることは高校とほぼ同じなんだよね」ということを示す**フビニの定理**と、高校時代ではどうにもならなかった積分に対しては**変数変換**を咬ませればなんとかなるということを見ていく。最後に、**パップス・ギュルダンの定理**という神定理を確認して終わり。

Description

さて、重積分という語は一体何を表すだろうか。実は単に「２変数以上の関数の積分」を指す語にすぎないのだ。

というわけで、リーマン積分の定義にしたがって重積分を見ていこう。話を簡単にする、というか人間の想像力でも何とかなるように２変数関数について考えてみる。

１変数関数の積分区間は直線であったから、当然それを分割すると線分である。では、２変数関数だとどうなるだろうか。積分範囲は平面なので、その分割は矩形（長方形・正方形）となるのだ（リーマン積分は分割の幅が一定でなくてよいので、長方形があってもよい）。

そして、その分割された範囲のなかから代表値を一つ取りだし、その部分の直方体の体積を求める。その体積の積分区間における総和をリーマン和と呼ぶ。

分割の大きさをどんどん小さくすればリーマン和は体積に近づいてゆき、分割の大きさの最大値を０にしたときのリーマン和の極限値をその関数のリーマン積分という。

３変数関数以上でも概略は一緒である。３変数関数だと、電磁気学で登場する電荷密度の積分がまさにこれである。

さて、２変数関数のリーマン積分が結局何をしているかといえば、体積を求めているのである。……そう、積分で体積を求めることは東大**入試**対策でさんざんやったではないか。高校生がどのように求積問題を解くか、その流れをいったん思い出してみよう。

まず、平面 $y=y_0$ で立体を切断し、その断面積を求めるために x で積分する。

その断面積は y_0 すなわち y の関数であるから、今度はそれを y で積分する。

計算操作を見てみれば、これはもとの関数を x だけについて積分した後 y だけについて積分している（偏微分の逆計算と思えばよい）。

はい、**これが重積分です。**

思わず「です・ます調」になってしまうような急展開で申し訳ないが、シケ対が勝手にそう言っているのではなく、これこそが**フビニの定理の主張**なのだ。……ちなみに、フビニの定理は連続関数でないと使えないとかちょっとした条件がつくが、計算問題を解くうえでは全く気にする必要はない。普通にこの**反復積分**ができるような問題しか出ない。

ちょっと注意を喚起しておくことがあるならば、先に積分する変数の積分区間が後で積分する変数の関数になることがあると言うこと。これは式を見てもらった方が早い。

上の例でいうと、断面積が $\int_{c(y)}^{d(y)} f(x)dx$ という形で書かれるということだ。

どちらにせよ断面積が y の関数になることに注意しておこう。

この場合、体積は $\int_{y_0}^{y_1}\left(\int_{c(y)}^{d(y)} f(x)dx\right)dy$ となるが、

この式は $\int_{y_0}^{y_1} dy\int_{c(y)}^{d(y)} f(x,y)dx$ と書くこともできる。これは覚えておこう。

ちなみに、フビニの定理は２変数関数に限らずn変数の場合に通用する定理である。

次は実際に面積・体積を求める際によく使う式。式の主張は当たり前だが、知らなければこれを使って立式するのは無理なんじゃないか、という類のものなので紹介する。

アイデアはすごく単純で、求める部分を定義域にして定数関数 1 を積分すればよいというだけのこと。

$$S=\int_D 1dxdy \qquad V=\int_D 1dxdydz$$

S,Vがそれぞれ面積・体積で、Dは求める図形（平面・立体）だ。この式はこれ単体ではなく、後述の変数変換と組み合わせて使用することが多い。

ではその変数変換のやり方を紹介しよう。まずは定理から。

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c(u,v) \\ d(u,v) \end{pmatrix}$ という写像を用いて変数変換すると、重積分は次のようになる。

$$\int_D f(x,y)dxdy=\int_E f(c(u,v),d(u,v))\cdot|\det \mathbf{J}|dudv$$

ただし、Jは写像のヤコビ行列であり、 $\mathbf{J}=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ である。

変数変換により積分範囲が変わるのに注意せよ。そこは1変数のときと同じ。

これは具体例を使った方が分かりやすい。２変数関数の積分で直交座標系を極座標系に変換してみよう。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J}=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad |\det \mathbf{J}|=|r|$$

これをほいほいっと上の式に代入するだけでよい。たとえばこれで半径 r_0 の半球の体積を求めてみよう。この場合、

$$f(x,y)=\sqrt{{r_0}^2-x^2-y^2} \qquad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le {r_0}^2\}$$

となり、素直に計算すれば積分区間にも被積分関数にもルートが現れて極めて面倒である。しかし、変数変換を咬ませればほらこの通り！

$$\int_D f(x,y)dxdy=\int_E \sqrt{{r_0}^2-r^2}\cdot|r|drd\theta$$

$$E=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le r_0, 0\le\theta\le 2\pi\}$$

r が正なので絶対値記号をはずせて、後はこれを反復積分するだけである。

$$
\begin{aligned}
\int_E \sqrt{1-r^2}\cdot|r|drd\theta &= \int_0^{r_0} dr \int_0^{2\pi} r\sqrt{{r_0}^2 - r^2}\,d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{r_0} r\sqrt{{r_0}^2 - r^2}\,dr \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\left(\sqrt{{r_0}^2 - r^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{{r_0}^2 - r^2}\right)' dr \\
&= 2\pi\left[-\frac{1}{3}\left(\sqrt{{r_0}^2 - r^2}\right)^3\right]_0^{r_0} \\
&= \frac{2\pi {r_0}^3}{3}
\end{aligned}
$$

正しい結論を得ることができた。

以下に頻出の変数変換とそのヤコビ行列の行列式（ヤコビアン）を示す。

（1）２変数関数　直交座標　→　極座標

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \qquad |\det \mathbf{J}| = |r|$$

（2）３変数関数　直交座標　→　円筒座標

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ s \end{pmatrix} \qquad |\det \mathbf{J}| = |r|$$

（3）３変数関数　直交座標　→　極座標

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad |\det \mathbf{J}| = |r^2\sin\theta|$$

その他の変数変換の必要に迫られた時は自分で頑張って計算しよう。具体的な方法は数学Ⅱに譲る（サラスの公式とか余因子展開とか）。

実はさっきの例題も変数変換（３）を使いつつ定数関数 1 を積分すればあんな技巧的な積分をせずとも答えが出る。練習を兼ねてやってみよう。

最後は重積分の応用としてパップス・ギュルダンの定理を紹介する。結果が中学生でも理解できる素晴らしい定理である。証明には変数変換とかを用いるが略。

回転体の体積は、（回転する「板」の重心の移動距離）×（「板」の面積）　である。 [85]

この定理は積分形で表示することができる。

回転させる図形をDとすると、その図形の重心の x 座標は

$$\frac{\int_D x\,dx\,dy}{\int_D dx\,dy}$$

で与えられるので（ちなみに y 座標などでも同様）、
z 軸で回転したときの回転体の体積は以下のようになる。 [90]

$$2\pi\cdot\frac{\int_D xdxdy}{\int_D dxdy}\cdot\int_D dxdy = 2\pi\int_D xdxdy$$

この定理を積分形や上の中学生形で用いれば回転体の体積がとても早く求まる。授業でも扱ったので覚えておくとよい。 [93]

[60]

9
あとがき

Introduction

あとがきとは、筆者の趣味である。

Description

みなさまここまでの読了お疲れ様です。数学IBシケ対です。

今回はデザインに注力しました。Wordでは満足できず、Publisherというソフトを使って編集しています。どうですか？　Campus Wideにそっくりでしょう。表紙にはセンター試験数学のデザインを採用しています。実はこれ作るのに２時間かかっています。一応言っておきますが、**「力入れるところが違う！」は褒め言葉です**。息抜きと称して奥付けとかまで作りました。……とまあこのように、このシケプリには無駄なページがここを合わせて３ページありますので、地球にやさしい皆さんは**２ページから２８ページまで**だけを印刷することをお勧めします。

さて、では試験の話をば。今学期の授業と夏学期の試験の傾向を見れば大体何が出るかは予想できそうな感じでしたね。というわけで**ラグランジュの未定乗数法**や**重積分**をしっかり勉強すれば幸せになれると思います。逆に出なさそうなのは関数列の収束のあたりの話です。時間がない人は捨てるのもありかと思います。責任は取りませんが。

あと、今回IB演習の提出日は試験と同じ日ですので注意してください。問題数は５１問です。提出先は夏学期と同じく数理科学研究科棟です。お忘れなく！

それでは、みなさまのご健闘をお祈りいたします。

数学IBシケ対

著 者 略 歴

数学IB　シケ対（すうがくいちびー　しけたい）

1991年京都府生まれ。2009年東京大学教養学部理科一類入学。理科一類26組に所属し、クラスの数学IBシケ対として神シケプリを量産する。おもな著作に「期末試験対策　数学（IB）」など。

Mathematics IB Shikepuri

2010年2月6日　　初版

著　　者　数学IB　シケ対

発 行 所　2009年度東京大学教養学部理科一類26組

代 表 者　シケ長

印　刷　みなさまのプリンター

製　本　してくれる人がいたらいいなあ