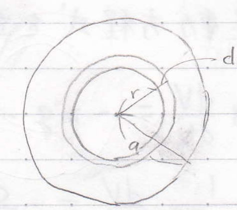
力学　H.20　鈴木真二

問題 1

1) 面密度 ρ_1 は $\rho_1 = \frac{m}{\pi a^2}$



慣性モーメントは（質量）×（キョリ）^{2} だから

$$I_1 = \int_0^a r^2 \times 2\pi r dr \times \rho_1$$

$$= \frac{2m}{a^2}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{2}ma^2$$

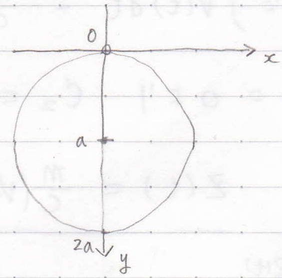
2) 平行軸の定理

（支持点を原点、重心を (X_c, Y_c)、重心まわりの慣性モーメント I_c とすると、支持点まわりの慣性モーメント I は

$$I = (X_c^2 + Y_c^2)m + I_c^2$$）

より、求める慣性モーメント I_2 は

$$I_2 = (0^2 + a^2)m + I_1 = \frac{3}{2}ma^2$$



3) 求める慣性モーメント I_3 は

$$I_3 = I_2 - (\text{穴の分の慣性モーメント})$$

$$= \frac{3}{2}ma^2 - \left\{ \left(0^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\frac{m}{4} + \frac{2m}{a^2}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{\frac{a}{2}} \right\}$$

$$= \frac{21}{16}m \cdot a^2$$

問題2

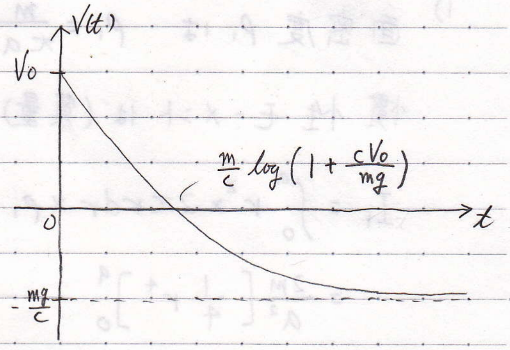
1) 運動方程式を立てると.

$$m\frac{dV}{dt} = -mg - cV = -c\left(V + \frac{mg}{c}\right)$$

$$\frac{1}{V+\frac{mg}{c}}\frac{dV}{dt} = -\frac{c}{m}$$ で両辺tで積分

$$\log\left|V + \frac{mg}{c}\right| = -\frac{c}{m}t$$

よって $V = C_1 e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}$



$V(0) = V_0$ より $C_1 = V_0 + \frac{mg}{c}$

$$V(t) = \left(V_0 + \frac{mg}{c}\right)e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}$$

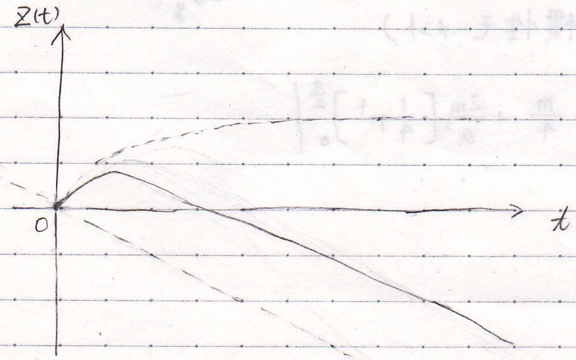
2) 終端速度 V_t は

$$V_t = \lim_{t\to\infty} V(t) = -\frac{mg}{c}$$

3) $$Z(t) = \int V(t)\,dt = -\frac{m}{c}\left(V_0 + \frac{mg}{c}\right)e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}t + C_2$$

$Z(0) = 0$ より $C_2 = \frac{m}{c}\left(V_0 + \frac{mg}{c}\right)$

よって $$Z(t) = \frac{m}{c}\left(V_0 + \frac{mg}{c}\right)\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) - \frac{mg}{c}t$$



問題3

1)

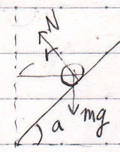
2) H19 の 問題 4 と同じ

No.

Date

問題4

1) 力のつりあいの式より

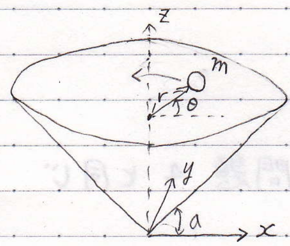


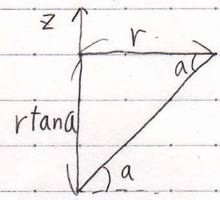
$$m\frac{v^2}{r} = N\sin a$$

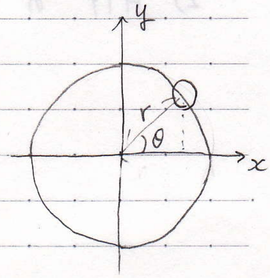
$$N\cos a = mg$$

よって質点の速度 $\underline{v = \sqrt{gr\tan a}}$ //

2) 図より







$$x(t) = r(t)\,\underline{\cos\theta(t)} \ //$$

$$y(t) = r(t)\,\underline{\sin\theta(t)} \ //$$

$$z(t) = r(t)\,\underline{\tan a} \ //$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{2}m\left\{\frac{1}{\cos^2 a}\,r'(t)^2 + (r(t)\theta'(t))^2\right\}} \ //$$

$$V = \underline{mg\,r(t)\tan a} \ //$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial r'(t)}\right) - \frac{\partial L}{\partial r(t)} = \underline{\frac{m}{\cos^2 a}r''(t) - m r(t)\theta'(t)^2 - mg\tan a} = 0 \quad -①$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta'(t)}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta(t)} = \underline{m\,r(t)^2\theta'(t)} = 0 \quad (角運動量保存則)$$

単位質量あたりの角運動量を $h = r(t)^2\theta'(t)$ とおき、①式の $\theta'(t)$ を消去すると.

$$\underline{m r''(t) = \frac{m h^2\cos^2 a}{r(t)^3} + mg\sin a\cos a}$$

問題4 つづき

$r(0)=l$, $r'(0)=v(0)=0$ から $r(t)=R$, $r'(t)=v(t)=V$ まで前の式を積分すると、

$$(\text{左辺の積分}) = m\int_l^R \frac{dv}{dt}dr = m\int_0^V \frac{dr}{dt}dv = \frac{1}{2}mV^2$$

$$(\text{右辺の積分}) = \int_l^R \left\{\frac{mh^2\cos^2 a}{r^3} + mg\sin a\cos a\right\}dr$$

$$= \left[-\frac{mh^2\cos^2 a}{2r^2} + mgr\sin a\cos a\right]_l^R$$

$$= \frac{mh^2\cos^2 a}{2}\left(\frac{1}{l^2}-\frac{1}{R^2}\right) + mg(R-l)\sin a\cos a$$

3) 半径が平衡の状態より小さければ、角運動保存則より回転の速度が速くなり、遠心力が大きくなり、斜面上向きの力を受けて上昇し、rは大きくなる。半径が大きければ同様に速度が遅くなり、遠心力が小さくなり、斜面下向きの力を受けて下降し、rは小さくなる。これにより、質点はr_{min}とr_{max}の間を変化する。

問題5

フィギュアスケートの選手がスピンをする際、腕を伸ばすと回転が遅くなり、腕を縮めると回転が速くなる。