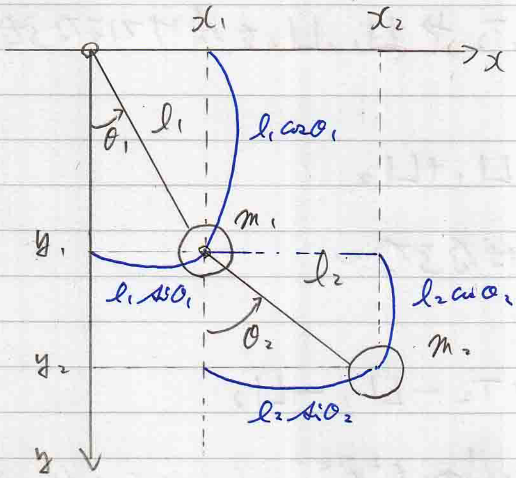
2007年度夏学期 力学 本試験 解答

第1問



(1) 便宜上 m_1 の位置座標を (x_1, y_1)
m_2 〃 (x_2, y_1)
とする

左図より

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \sin\theta_1 \\ l_1 \cos\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

(2) m_1 の速度を v_1
m_2 〃 v_2
とする

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \\ \dot{y}_1 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \\ \dot{y}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$v_1 = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2} = l_1 \dot{\theta}_1$$

$$v_2 = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2} = \sqrt{l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

以上から

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \left\{ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right\} \\ U_1 = m_1 g (l_1 - y_1) = m_1 g l_1 (1 - \cos\theta_1) \\ U_2 = m_2 g (l_1 + l_2 - y_2) = m_2 g \left\{ l_1 (1 - \cos\theta_1) + l_2 (1 - \cos\theta_2) \right\} \end{cases}$$

(3) まず注意すべきは.

系が互いに拘束されているってT₁,T₂やU₁,U₂を分けてはならない

すなわち

$$T = T_1 + T_2 \quad , \quad U = U_1 + U_2$$

として Lagurange 方程式を作らねばならない

ラグランジアン $L = T - U = T_1 + T_2 - U_1 - U_2$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$+ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1+m_2) g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2$$

ここでパラメータは θ_1, θ_2 の2つより2式立式する

Lagurange 方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}m_2\{2l_1^2\dot{\theta}_1 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)\}$$

$$= (m_1+m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = (m_1+m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$- m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= (m_1+m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 (\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\sin(\theta_2 - \theta_1))$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2} m_2 \times \left\{ 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \left(-\sin(\theta_2 - \theta_1) \right) \times (-1) \right\}$$
$$- m_1 g l_1 \sin\theta_1 - m_2 g l_1 \sin\theta_1$$
$$= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta_1$$

これより ① は

$$(m_1+m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \left(\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \right)$$
$$- m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m_1+m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + (m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \left\{ \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \right\}$$

//

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{1}{2} m_2 \left\{ 2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right\}$$
$$= m_2 l_2 \left\{ l_2 \dot{\theta}_2 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right\}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2 \left\{ l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - l_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} m_2 \times 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \left\{ -\sin(\theta_2 - \theta_1) \right\} - m_2 g l_2 \sin\theta_2$$
$$= -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2 g l_2 \sin\theta_2$$

これより ② は

$$m_2 l_2 \left\{ l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - l_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \right\}$$
$$+ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 g l_2 \sin\theta_2$$

$$\Longleftrightarrow m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \sin\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \{\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1-\theta_2) - \theta_1^2 \sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

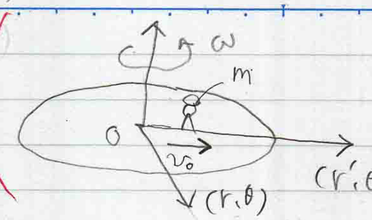
注　以上のLagurange方程式をいくらながめてても物理的な意味を見出すのは難しい。この2式を導出した後、この2階常微分方程式を連立の1階常微分方程式に変換することで、このLagurange方程式は2重振り子の運動の様子を見るための計算機シュミレーションなどに役立つものとなるのである。

第2問

赤い部分は( )の中も含めて、補足なので解答には書く必要なし

(1)

(



(r,θ) と (r',θ') の関係は

$$r = r', \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}' + \omega$$

)

Lagrangean は

$$L = T - U$$
$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r,\theta)$$
$$= \frac{1}{2}m\{\dot{r}'^2 + r'^2(\dot{\theta}' + \omega)^2\} - U(r',\theta')$$

Lagrange 方程式を計算すると.

・(r,θ) では

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial U}{\partial r} \\ m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

これくらいは覚えちゃえ

・(r',θ') では

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}'}\right) - \frac{\partial L}{\partial r'} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta'} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m(\ddot{r}' - r'\dot{\theta}'^2) = -\frac{\partial U}{\partial r'} + m\omega^2 r' + 2m\omega\dot{\theta}' r' \\ m\frac{1}{r'}\frac{d}{dt}(r'^2\dot{\theta}') = -\frac{1}{r'}\frac{\partial U}{\partial \theta'} - 2m\omega\dot{r}' \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

①,②を見比べると、円盤に固定された極座標系では、慣性系で働く力の他に
r'方向に $m\omega^2 r' + 2m\omega\dot{\theta}' r'$, θ'方向に $-2m\omega\dot{r}'$ の力が働く。
この歩く人は $\dot{r}' = v_0$, $\dot{\theta}' = 0$ で運動しているから

歩く方向に対して $\begin{cases} \text{正面に } m\omega^2 r' \\ \text{右側に } 2m\omega v_0 \end{cases}$ の大きさの力を受ける。 //

(①はいちいち計算すべきか微妙だけど、問題文にわざわざ慣性系(r,θ)って書いてあるから①も出しとけってことなんじゃん？)

(2)

(ア) $\mu\ddot{r} = \mu r\dot{\theta}^2 - \frac{dU(r)}{dr}$ ……①, $\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}) = 0$ ……② とする

$P_\theta = \mu r^2\dot{\theta}$ とすると、②より $\dot{P}_\theta = 0$ ゆえ $P_\theta = const$

よって $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{\mu r^2}$ ……………③ を①に代入して

$\mu\ddot{r} = -\frac{d}{dr}U'$ ただし U'(有効ポテンシャル) $= U + \frac{P_\theta^2}{2\mu}\cdot\frac{1}{r^2}$

両辺に $\frac{dr}{dt}$ を掛けると、

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}U'$ $\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U'\right) = 0$

$\therefore \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U' = E_{(一定)}$

(イ) これを $\dot{r}$ について解いて $\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U')}$ ……… ④

②,④より $\frac{dr}{d\theta} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\Big/\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{1}{a}r^2\sqrt{E-U'}$ ただし $a = \pm\frac{P_\theta}{\sqrt{2\mu}}$

変数分離して積分すると、 $a\int\frac{\frac{1}{r^2}}{\sqrt{E-U'}}dr = \int d\theta$ ……… ⑤

授業では一の場合をムシした。

ここで $U' = U + \frac{P_\theta^2}{2\mu}\cdot\frac{1}{r^2} = -Gm_1m_2\frac{1}{r} + a^2\frac{1}{r^2}$ だから

⑤の左辺 $= a\int\frac{\frac{1}{r^2}}{\sqrt{E + Gm_1m_2\frac{1}{r} - a^2\frac{1}{r^2}}}dr$

$\left[\frac{1}{r} = s \text{ とおくと、} r = \frac{1}{s}, \frac{dr}{ds} = -\frac{1}{s^2} \text{ だから}\right]$

$= -a\int\frac{1}{\sqrt{E + Gm_1m_2 s - a^2s^2}}ds = -a\int\frac{ds}{\sqrt{b^2 - a^2\left(s - \frac{Gm_1m_2}{2a^2}\right)^2}}$

$= -\frac{a}{b}\int\frac{ds}{\sqrt{1 - \left\{\frac{a}{b}\left(s - \frac{Gm_1m_2}{2a^2}\right)\right\}^2}}$ ただし $b = \sqrt{E + \left(\frac{Gm_1m_2}{2a}\right)^2}$

NO. 7

DATE . .

[ここで $\frac{a}{b}\left(s-\frac{Gm_1m_2}{2a^2}\right)=\sin u$ とおくと、$\frac{ds}{du}=\frac{b}{a}\cos u$]

$$=-\frac{a}{b}\int\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\frac{ds}{du}\cdot du=-\int du=-u+C_1 \text{(積分定数)}$$

$$=-\sin^{-1}\left\{\frac{a}{b}\left(\underset{\frac{1}{r}}{s}-\frac{Gm_1m_2}{2a^2}\right)\right\}+C_1$$

また、⑤の右辺 $=\theta+C_2$ (積分定数)

よって⑤は $\sin^{-1}\left\{\frac{a}{b}\left(\frac{1}{r}-\frac{Gm_1m_2}{2a^2}\right)\right\}=-(\theta+C)$ ただし $C=C_2-C_1$

よって $\frac{a}{b}\left(\frac{1}{r}-\frac{Gm_1m_2}{2a^2}\right)=-\sin(\theta+C)$

$$\therefore \frac{1}{r}=\frac{Gm_1m_2}{2a^2}\left(1-\frac{2ab}{Gm_1m_2}\sin(\theta+C)\right)$$

ここで $P=\frac{2a^2}{Gm_1m_2}$, $e=\left|\frac{2ab}{Gm_1m_2}\right|=\sqrt{1+\left(\frac{2a}{Gm_1m_2}\right)^2E}$ とおいて、

aの符号の問題をここでゴマかす。

θの設定を調節して、

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}(1+e\cos\theta) \quad \therefore \quad \underline{r=\frac{p}{1+e\cos\theta}}$$

これが求める軌道の式である。

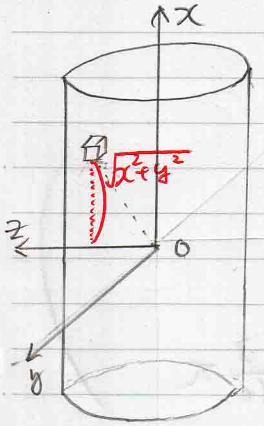
これは二次曲線の極座標表示だから、これが楕円になる条件は

$0\leq$ 離心率 $e<1$ ⇔ $\underline{E<0}$

特に真円となるのは、$e=0$ つまり $\underline{E=-\left(\frac{Gm_1m_2}{2a}\right)^2=\left(\frac{Gm_1m_2}{P\theta}\right)^2\mu}$ のとき。

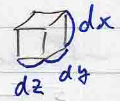
(授業では軌道の式を、極座標から直交座標に直して、軌道の概形の場合分けをしたが、二次曲線の知識があるものとして上のように解答をつくった方が楽。)

第3問



(1) 左図のように円柱の重心に原点をとった座標を導入する

円柱の微小部分は



$x: -\frac{L}{2} \sim \frac{L}{2}$

$y: -\sqrt{R^2-z^2} \sim \sqrt{R^2-z^2}$

$z: -R \sim R$

であるから 慣性moment I_G は

$$I_G = \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \rho \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \left[\frac{1}{3}x^3 + y^2 x\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy\, dz$$

$$= \rho \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \left(\frac{L^3}{12} + L y^2\right) dy\, dz$$

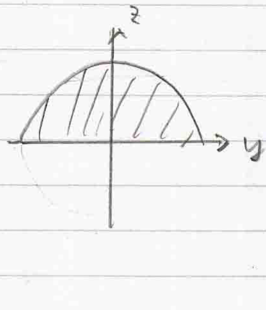
$$= \rho \int_{-R}^{R} \left[\frac{L^3}{12} y + \frac{1}{3} L y^3\right]_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dz$$

$$= \rho \int_{-R}^{R} \left(\frac{L^3}{6}\sqrt{R^2-z^2} + \frac{2}{3} L (R^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\right) dz$$

$$= \frac{1}{6}\rho L^3 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-z^2}\, dz + \frac{2}{3}\rho L \int_{-R}^{R} (R^2-z^2)^{\frac{3}{2}} dz$$

ここで

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-z^2}\, dz = \frac{\pi}{2} R^2$$



$$\int_{-R}^{R}(R^2-z^2)^{\frac{3}{2}}dz \underset{z=R\sin\theta}{=} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} R^4\cos^4\theta\, d\theta$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで}\quad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\, d\theta \text{ とおくと一般に} \\ \quad J_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}J_n \quad \text{だから} \\ \quad J_4=\frac{3}{4}J_2=\frac{3}{4}\frac{1}{2}J_0=\frac{3}{16}\pi \end{array}\right)$$

$$= 2\times\frac{3}{16}\pi=\frac{3}{8}\pi$$

よって $I_G=\frac{\pi}{12}\rho R^2L^3+\frac{\pi}{4}\rho R^4L$

$$=\frac{M}{\pi R^2L}\left(\frac{\pi}{12}R^2L^3+\frac{\pi}{4}R^4L\right)$$

$$=\underline{M\left(\frac{1}{12}L^2+\frac{1}{4}R^2\right)}_{\text{//}}$$

(2) 慣性moment の定理1を用いて.

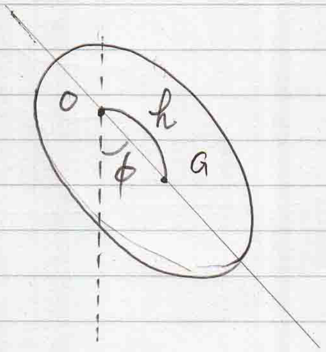
重心から $\frac{L}{2}$ 平行移動だから.

$$I'=I_G+M\times\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$=M\left(\frac{1}{12}L^2+\frac{1}{4}R^2\right)+M\cdot\frac{L^2}{4}$$

$$=\underline{M\left(\frac{1}{3}L^2+\frac{1}{4}R^2\right)}_{\text{//}}$$

(3) 一般に剛体振り子は軸 O まわりの回転を考えるとき.



$$I\ddot{\phi} = -Mgh\sin\phi$$

$|\phi| \ll 1$ のとき.

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{Mgh}{I}\phi \text{ より}$$

周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}}$ と近似できる.

さて円柱の剛体振り子のときでは

$I_G = Mk_G^2$ (k_Gは回転半径) とおけば 定理1より

$$I' = Mk_G^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = M\left(k_G^2 + \frac{L^2}{4}\right)$$

ところが (1) では $h = 0$ であり.

そもそも剛体振り子は静止したまま動かない

よって周期 T_G は存在しない

一方 (2) は $h = \frac{L}{2}$ であり

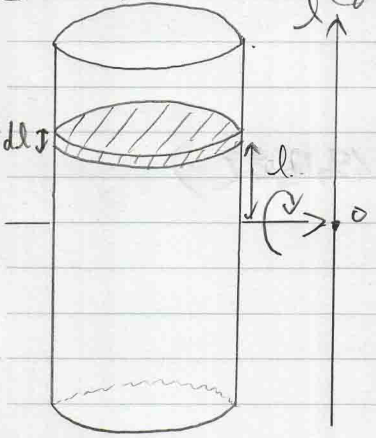
$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{Mg\cdot\frac{L}{2}}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{M\left(k_G^2+\frac{L^2}{4}\right)}{\frac{1}{2}MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{2k_G^2+\frac{L^2}{2}}{gL}}$$

※ 結論としては講義プリントに書いてあるように周期 T は h に依存性があるということ.

第3問 (1) の別解.

(fig 1)



(fig 1)のような薄い円板の慣性moment dI を求めてそれを全体積について積分するという方針で求める.

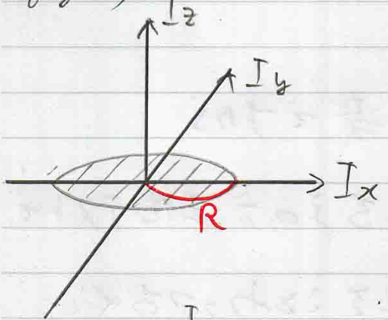
まず薄い円板の慣性moment I_z を求める

(fig 3)の斜線部のような円環について考えて

r で積分すればよい。円板の質量を m とすると

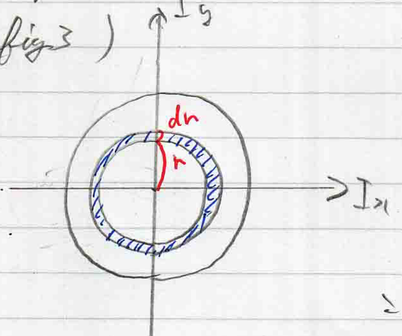
$$I_z = \int_{r=0}^{r=R} \underbrace{\underbrace{\frac{m}{\pi R^2}}_{\text{面密度}}\left\{\pi(r+dr)^2-\pi r^2\right\}}_{\text{微小部分の質量}} \times \underbrace{r^2}_{\text{キョリ}}$$

(fig 2)



$$= \frac{m}{R^2}\int_0^R \left\{2r^3 dr + r^2 (dr)^2\right\}$$

(fig 3)



$$= \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr \quad (\because (dr)^2 \text{の項は無視できる})$$

$$= \frac{1}{2}mR^2$$

ここで定理2より $I_z = I_x + I_y$

明らかに $I_x = I_y$ なので

$$I_x = \frac{1}{4}mR^2$$

また $m = M\frac{dl}{L}$ であり 定理1を用いて

$$dI = \frac{1}{4}M\frac{dl}{L}R^2 + M\frac{dl}{L}l^2$$

NO.

DATE

よって

$$I_G = \int_{l=-\frac{L}{2}}^{l=\frac{L}{2}} \left(\frac{MR^2}{4L} + \frac{Ml^2}{L} \right) dl$$

$$= \frac{2M}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{R^2}{4} + l^2 \right) dl \qquad (\because 偶関数)$$

$$= \frac{2M}{L} \left[\frac{R^2}{4} l + \frac{1}{3} l^3 \right]_0^{\frac{L}{2}}$$

$$= \underline{M \left(\frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{12} L^2 \right)}。$$

補足　別解の方が計算がはるかに楽ですが定理を2つ使っているので、こちらの方法をテストで使う人は定理を使ったことをことわっておくべきです。