数学 II　第 1 学期期末試験 (2011 年 9 月 1 日 (木曜日) 2 限 10:55-12:25)

理科 I 類 1 年 13-15 組,28-30 組 (担当・関口)

持ち込み:不可

解答用紙: 1 枚, 問題用紙: 1 枚, 計算用紙: 1 枚

○ 問題は 5 問あります.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 17 & 19 & 0 \\ 25 & 28 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の逆行列を求めよ.

(証明は (2) で述べるものとし，まず，解答のみを記述してください.)

(2) (1) の証明を与えよ.

2. 6 次行列 A の (i,j) 成分を a_{ij} と表すことにする.

(1) $\det A$ の展開式の次の形の項における $\bullet$ に入る数は何か. (この問題については解答のみで良い.)

$$a_{43}a_{52}a_{34}a_{1\bullet}a_{61}a_{26}$$

(2) $\det A$ の定義式で (1) で与えられる項の符号を求めよ. (証明は (3) で述べるものとし，まず，解答のみを記述してください.)

(3) 行列式の定義を述べ，それに基づいて (2) で述べた自分の解答を論証せよ.

3. $\mathcal{P}_n$ を n 次以下の実係数多項式からなる線形空間とする.

$$\mathcal{P}_n = \{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n : a_j \in \mathbb{R}(j = 0, \cdots, n)\}$$

(1) $\mathcal{P}_3$ は何次元か. 解答の際は，その結論に至った理由も合わせて述べよ.

(2) $\mathcal{P}_3$ に属する多項式 $f(x)$ に対して $(Tf)(x)$ という多項式を以下の積分で定義する.

$$(Tf)(x) = \int_{-1}^{1} (x-t)^2 f(t)dt$$

このとき，線形写像 T の核 $(\mathrm{Ker}\, T)$ の次元を求めよ.

(証明は (3) で述べるものとし，まず，解答のみを記述してください.)

(3) (2) で述べた自分の解答を論証せよ.

4. 未知数を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とする斉次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解の自由度と，ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の線形独立性について以下の問 (1),(2),(3) に答えよ.

ここで，A は n 個の l 次の数ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を横に並べた l 行 n 列の行列とする. すなわち，

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

とおいた行列とする．また n, l は 3 以上の自然数とする．

(1) 以下の文章のうち正しいものを選べ．

(イ) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解の自由度が真に正であるとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は線形独立である．

(ロ) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解の自由度が真に正であるとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は線形従属である．

(ハ) (イ) も (ロ) も正しくない．

(2) (イ) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解の自由度が 0 であるとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は線形独立である．

(ロ) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解の自由度が 0 であるとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は線形従属である．

(ハ) (イ) も (ロ) も正しくない．

(3) (1),(2) の証明を与えよ．

5. 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．

(1) A の余因子行列の階数 (ランク) を求めよ．

(2) (1) の解答の論証を与えよ．(解答では，論証に必要な，余因子行列の一般的性質 (たとえば，積 $A\tilde{A}$ の公式) を明快に述べた上で，説明すること．)

注．証明では「明らか」,「定理から分かる．」のみの解答より,「ここまでは証明できたが，この先は○○かどうかが分からないので，証明を進めることができない．」など,「どこまで分かっていて，どこから分からないのか」を明確にしてあるものの方を高く評価します．

===問題はここまでです．===

解答

1. (1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 476 & -475 \\ 0 & -475 & 476 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\det A \overset{\text{1 行目に}}{\underset{\text{関して展開}}{=\!=\!=}} (-1)\begin{vmatrix} 17 & 19 \\ 25 & 28 \end{vmatrix} = -(17 \cdot 28 - 19 \cdot 25) = -476 + 475 = -1$

また，A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めると，

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -476 & 475 \\ 0 & 475 & -476 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ここで，$A\tilde{A} = (\det A)E$ より，$A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}}{\det A}$ だから，

$A^{-1} = \dfrac{-1}{\tilde{A}} = -\begin{pmatrix} 0 & -476 & 475 \\ 0 & 475 & -476 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 476 & -475 \\ 0 & -475 & 476 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ∎

2. (1) 5

(2) $+$

(3) A の行列式は，次式で定義される．

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_6} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(6)6}$$

よって，(1) で与えられる項の符号は，$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおいたときの，$\operatorname{sgn} \sigma$ である．

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

となることにより，σ は偶置換であることが分かる．すなわち $\operatorname{sgn} \sigma = 1$ となり，(1) で与えられる項の符号は $+$ である． ∎

3. (1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ とおくと，$\mathcal{P}_3 = \{\boldsymbol{xa} : \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^4\}$ となる．

ここで，$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{a} = a_0\boldsymbol{e_1} + a_1\boldsymbol{e_2} + a_2\boldsymbol{e_3} + a_3\boldsymbol{e_4}$ と表すことができるから，$\begin{pmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}(a_0\boldsymbol{e_1} + a_1\boldsymbol{e_2} + a_2\boldsymbol{e_3} + a_3\boldsymbol{e_4}) = a_0\boldsymbol{xe_1} + a_1\boldsymbol{xe_2} + a_2\boldsymbol{xe_3} + a_3\boldsymbol{xe_4}$ となる．

以上より，$\boldsymbol{xe_1}, \boldsymbol{xe_2}, \boldsymbol{xe_3}, \boldsymbol{xe_4}$ は線形独立で，$\mathcal{P}_3$ の任意の元はこれらの線形結合で表される．

ゆえに，$< \boldsymbol{xe_1}, \boldsymbol{xe_2}, \boldsymbol{xe_3}, \boldsymbol{xe_4} >$ は $\mathcal{P}_3$ の基底であるから，$\mathcal{P}_3$ は 4 次元. ∎

(2) 1 次元

(3) $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 (a_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2, 3)$ とおく.

$$
\begin{aligned}
(Tf)(x) &= \int_{-1}^{1} (x-t)^2 f(t)dt = \int_{-1}^{1} (x^2 - 2xt + t^2)(a_0t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3)dt \\
&= \int_{-1}^{1} \{a_0t^5 + (a_1 - 2a_0x)t^4 + (a_2 - 2a_1x + a_0x^2)t^3 \\
&\qquad\qquad + (a_3 - 2a_2x + a_1x^2)t^2 + (a_2x^2 - 2a_3x)t + a_3x^2\}dt \\
&= 2\int_{0}^{1} \{(a_1 - 2a_0x)t^4 + (a_3 - 2a_2x + a_1x^2)t^2 + a_3x^2\}dt \\
&= 2\{\frac{1}{5}(a_1 - 2a_0x) + \frac{1}{3}(a_3 - 2a_2x + a_1x^2) + a_3x^2\} \\
&= 2\{(\frac{1}{3}a_1 + a_3)x^2 - 2(\frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{3}a_2)x + (\frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{3}a_3)\}
\end{aligned}
$$

ここで，$(Tf)(x) = 0$ が恒等的に成り立つとき，$\frac{1}{3}a_1 + a_3 = 0, \frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = 0, \frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{3}a_3 = 0$

すなわち，$a_1 = a_3 = 0, 3a_1 + 5a_2 = 0$.

このことから，$\mathrm{Ker}\, T$ の任意の元は，$s\boldsymbol{x}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} (s \in \mathbb{R})$ と表せる.

以上より，$< \boldsymbol{x}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} >$ は $\mathrm{Ker}\, T$ の基底であるから，$\mathrm{Ker}\, T$ は 1 次元. ∎

4. (1) (ロ)

(2) (イ)

(3) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が線形独立のとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$，すなわち $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$ の解は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$，すなわち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ のただ一つであるから，解の自由度は 0 である.

よって，「$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が線形独立であるとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解の自由度は 0 である.」の対偶である (1) の (ロ) も成立する.

次に，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が線形従属のとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$，すなわち $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$ の解に，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$，すなわち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ ではないものが存在する.

ここで，「解の自由度が $0 \Longleftrightarrow$ 解はただ一つ存在する」であるから，「解の自由度が正 $\Longleftrightarrow$ 解は二つ以上存在する」となる.

以上より，このとき解の自由度は真に正である.

よって，「$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が線形従属であるとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解の自由度は真に正である.」の対偶である (2) の (イ) も成立する. ∎

4. (1) 5

(2) A の余因子行列 $\tilde{A}$ に関して，$A\tilde{A} = (\det A)E \cdots (*)$ が成立する.

ここで，計算により $\mathrm{rank}\, A = 5$ と求められるから，A は正則行列で逆行列 A^{-1} が存在する.

$(*)$ の両辺に左から A^{-1} を掛けることにより，$\tilde{A} = (\det A)A^{-1}$ が得られる.

$(\det A)A^{-1}$ は基本変形を施すことで A^{-1} に変形できるから，$\operatorname{rank}\tilde{A} = \operatorname{rank} A^{-1}$ となる．
A^{-1} には逆行列 A が存在するので，正則行列であるから，$\operatorname{rank} A^{-1} = 5$.
ゆえに，$\operatorname{rank}\tilde{A} = 5$ $\blacksquare$