2005 年度冬学期　物理学 A(電磁気学)(金曜 1 限、遠山満教官担当)

試験対策プリント!!

理科一類 19 組シケ対　電磁気学 A 担当　斉藤 翔平

前書き

今回は僕にとって 3 回目のシケプリ作りとなりました．1 回目は，講義資料の不要な部分を省き，必要な部分にはより詳しく解説を加えたシケプリ (割と好評)．2 回目は，内容のつながりが見えやすいように全講義内容を 1 枚の用紙の片面に収めたシケプリ (不評)．そして今回は，講義内容の解説は簡素に済ませ，代わりに演習問題を充実させたシケプリを作りました．

掲載されている演習問題の中には，期末試験に出題される可能性が低い設問も含まれています．そのような設問の問題番号の横には，水曜 5 限の某授業を彷彿とさせるスペードマーク ♠ を付けてあります．試験まで日がありませんので，余裕がない方は ♠ の付いていない設問だけを解いてください．それでもおそらく優は来ます．なお，スペードマークが 2 つ付いている設問は，森○教官でない限り出題されません．少なくとも遠山教官では．

注意点としましては，実際の試験には関数のグラフを描く問題が出題されますので，関数を求めたらその都度グラフを描く練習をしておいてください．

なお，このシケプリについて不明な点がありましたらお答えしますので，mast-vuyut133@ezweb.ne.jp までお尋ねください．

それでは，8 組に負けずにみんなで優を取りに行きましょう．

試験日時：2 月 9 日 (木)15:00〜16:30
試験教室：1102 教室

I　静電場

クーロンの法則

点電荷 Q_1が点電荷 Q_2から受ける力$\vec{F}$は,

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\hat{r}$$

ε_0: 真空の誘電率
r：２つの点電荷の間の距離
$\hat{r}$: $Q_2 \to Q_1$の向きの単位ベクトル

電場

電場：1 クーロンの電荷に働く力
電場$\vec{E}$中の電荷 q に働く力$\vec{F}$は,

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

クーロンの法則より，点電荷 Q から距離 r 離れた点Rにおける電場$\vec{E}$は,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \qquad \hat{r}: Q \to \mathrm{R}\text{の向きの単位ベクトル}$$

電荷が連続して存在する場合は，電荷が存在する全空間で（線電荷であれば長さで，面電荷であれば面積で，立体電荷であれば体積で）積分すればよい．

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho}{r^2}\hat{r}dV \qquad \rho\text{: 電荷密度}$$

ガウスの法則

任意の閉曲面 S の内部に存在する総電荷が Q であるとき, S を貫く電場の垂直成分 E_nの総和は,

$$\int_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

電場が常に同じ大きさで S を垂直に貫くように S を選ぶと $ES = \dfrac{1}{\varepsilon_0}Q$ より

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

電位

電位：1 クーロンの電荷が持つ位置エネルギー
点$\vec{r}_A$を電位の基準としたとき，点$\vec{r}$における電位ϕは,

$$\phi = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

電場$\vec{E}$が$\vec{r}$と平行であれば,

$$\phi = -\int_{r_A}^{r} Edr \quad \Leftrightarrow \quad E = -\frac{d\phi}{dr}$$

電気双極子

２つの点電荷 $+Q$, $-Q$ が距離 d だけ離れて連結されているとき，電気双極子モーメント$\vec{p}$は,

$$\vec{p} = Q\vec{d} \qquad \vec{d}\text{: } -Q\text{ を基準とした }+Q\text{ の位置ベクトル}$$

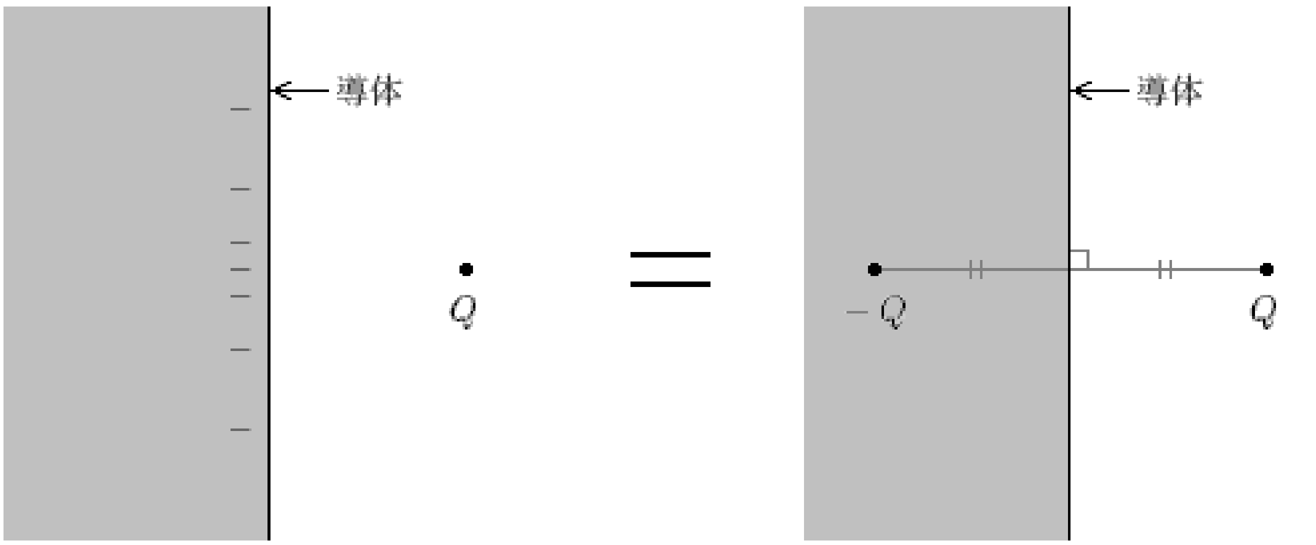
導体

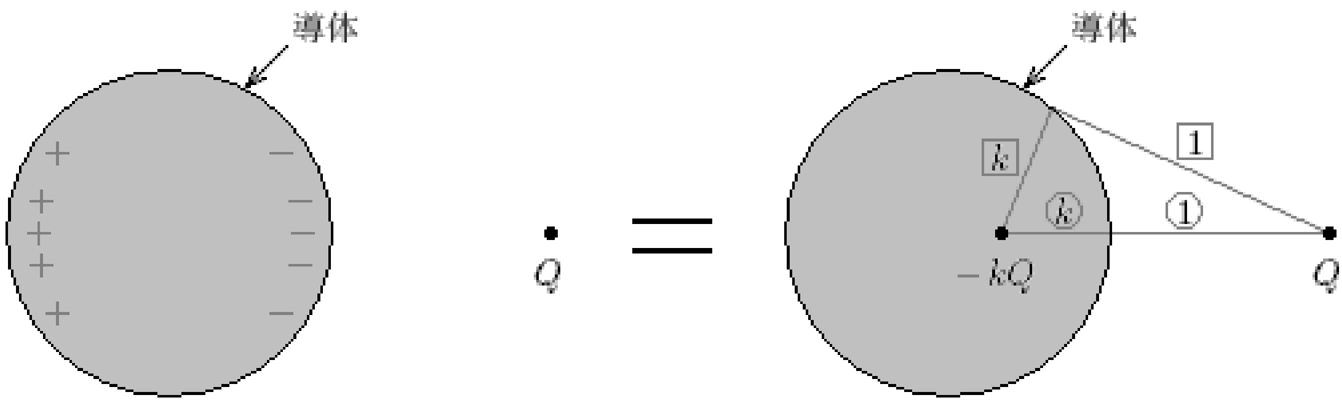
導体の性質

- 導体の内部では$\vec{E}=\vec{0}$.
- 導体の表面及び内部は等電位.
- 電場は導体の表面に垂直.
- 導体の内部に電荷は存在しない.
- 電場中の導体の表面には電荷が現れる．(静電誘導)
- その電荷が作る電場によって，電場中の導体に囲まれた空間の電場は打ち消される．(静電遮蔽)

鏡像法 (導体があるときに電場，電位を求める方法)

空間内に電荷 Q と導体が存在するとする．
導体の表面が平面である場合，導体面に対して Q と対称な位置に電荷 $-Q$ が存在するとして，電場と電位を求める．
導体が円形または球形である場合, Q と $-kQ$ で導体面がアポロニウスの円になるような位置に電荷 $-kQ$ が存在するとして，電場と電位を求める．ただし, k は円周上の任意の点からの Q までの距離に対する $-kQ$ までの距離の比 (<1) である．





演習問題

問 1

無限に長い直線上に電荷が線密度λで分布している．電場$\vec{E}$の大きさと直線からの距離が 1 である点を基準とした電位ϕを，直線からの距離 r の関数として求めよ．

問 2

無限に広い平面上に電荷が面密度σで分布している．電場$\vec{E}$の大きさと平面を基準とした電位ϕを，平面からの距離 h の関数として求めよ．

問 3

半径 a の球の表面上に電荷 Q が一様に分布している．電場$\vec{E}$の大きさと無限遠を基準とした電位ϕを，中心からの距離 r の関数として求めよ．

問 4

厚さ a の無限に広い板の内部に電荷が密度ρで分布している．この板の中心を $z=0$ とするとき，電場$\vec{E}$の大きさと $z=0$ を基準とした電位ϕを, z の関数として求めよ．

問 5

半径 a の球の内部に電荷 Q が一様に分布している．電場$\vec{E}$の大きさと無限遠を基準とした電位ϕを，中心からの距離 r の関数として求めよ．

問 6

中心を共有する半径 a および $b(a<b)$ の二つの球形の極板からなるコンデンサーがある．半径 a の極板には電荷 Q が一様に分布し，半径 b の極板には電荷 $-Q$ が一様に分布している．以下の問題に答えよ．

(1) 電場$\vec{E}$の大きさと無限遠を基準とした電位ϕを，中心からの距離 r の関数として求めよ．

(2) $Q=CV$ の関係から，コンデンサーの容量 C を求めよ．ただし V はコンデンサーの電圧$\phi(a)-\phi(b)$である．

(3) $d=b-a$ を一定にしたまま $b\to\infty$ とすると, C が平行版コンデンサーの容量 $C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$に近づくことを示せ．

(4) コンデンサーに蓄えられるエネルギー $U=\dfrac{Q^2}{2C}$が $\displaystyle\int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 dV$ に等しいことを示せ．ただし V は全空間の体積である．

問 7

軸を共有する断面の半径が a および $b(a<b)$ である二つの円筒形の極板からなるコンデンサーがある．断面の半径が a である極板には電荷 Q が一様に分布し，断面の半径が b である極板には電荷 $-Q$ が一様に分布している．以下の問題に答えよ．

(1) 電場$\vec{E}$の大きさと無限遠を基準とした電位ϕを，軸からの距離 r の関数として求めよ．

(2) $Q=CV$ の関係から，コンデンサーの容量 C を求めよ．ただし V はコンデンサーの電圧$\phi(a)-\phi(b)$である．

(3) $d=b-a$ を一定にしたまま $b\to\infty$ とすると, C が平行版コンデンサーの容量 $C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$に近づくことを示せ. $x\ll 1$ における近似式 $\ln(1+x) \quad x$ を用いてもよい．

(4) コンデンサーに蓄えられるエネルギー $U=\dfrac{Q^2}{2C}$が $\displaystyle\int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 dV$ に等しいことを示せ．ただし V は全空間の体積である．

$\boxed{問 8}$ ♠♠

電気双極子モーメントが$\vec{p}$である電気双極子の中心から十分離れた$\vec{r}$の位置における無限遠を基準とした電位$\phi(\vec{r})$ と電場$\vec{E}(\vec{r})$ を求めよ.

$\boxed{問 9}$ ♠

電気双極子モーメントが$\vec{p}$である電気双極子が一様な電場$\vec{E}$から受ける力のモーメント$\vec{N}$と，電場中の電気双極子の位置エネルギー U を求めよ.

$\boxed{問 10}$ ♠

第 2 象限から第 4 象限までの全ての点が導体である平面上の点 $(2, 1)$ に電荷 q があるとき，点 $(2, 4)$ における電位ϕを求めよ.

$\boxed{問 11}$ ♠

平面上に, 原点を中心とする半径 a の円形の導体がある．この平面上の点 $(2a, 0)$ に電荷 q があるとき, 点 $(0, r)$ における電位$\phi(r)$ を求めよ.

問 1

無限に長い直線上に電荷が線密度λで分布している．電場$\vec{E}$の大きさと直線からの距離が 1 である点を基準とした電位ϕを，直線からの距離 r の関数として求めよ．

解答

解 1：クーロンの法則による解法

x 軸上に電荷が分布しているものとして，点 R $(0, r)$ とする．
x〜$x+dx$ の範囲にある電荷はλdx であり，その電荷から R までの距離の 2 乗は x^2+r^2なので，クーロンの法則よりその電荷による R における電場の大きさ dE は,

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{x^2+r^2}$$

である．
ところが, x〜$x+dx$ における電荷によって作られる電場と $-x-dx$〜$-x$ における電荷によって作られる電場は互いに x 成分を打ち消し合うので，電場の向きは x 軸に垂直になる．
そこで, dE の x 軸に垂直な成分 dE_nを考えると,

$$dE_n = \frac{r}{\sqrt{x^2+r^2}}dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{\sqrt{x^2+r^2}}\frac{\lambda dx}{x^2+r^2}$$

であるため，求める電場 $E(r)$ は,

$$E(r) = \int dE_n = \frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

となる．
また，R における電位$\phi(r)$ は,

$$\phi(r) = -\int_1^r E(r)dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_1^r \frac{1}{r}dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r$$

となる．

解 2：ガウスの法則による解法

閉曲面 S として，底面の半径 r，高さ l で，軸が電荷と重なるような円柱を考える．
S の内部に含まれる電荷は $l\lambda$であり，電場の向きは S の底面に平行で側面に垂直なので，ガウスの法則より,

$$\int_S E_n dS = \int_{\text{底面}} E_n dS + \int_{\text{側面}} E_n dS = 0 + E(r)\times 2\pi rl = \frac{1}{\varepsilon}l\lambda$$

$$\therefore \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

となる．
電位$\phi(r)$ については解 1 と同様.

問 2

無限に広い平面上に電荷が面密度σで分布している．電場$\vec{E}$の大きさと平面を基準とした電位ϕを，平面からの距離 h の関数として求めよ．

解答

解１：問１を利用した解法

xy 平面上に電荷が分布しているものとして，点H $(0, 0, h)$ とする．
x〜$x + dx(-\infty < y < \infty)$ の範囲にある電荷 (細長い帯状の電荷) はσdx であり，その電荷からHまでの距離は$\sqrt{x^2 + h^2}$なので，問１よりその電荷によるHにおける電場の大きさ dE は,

$$dE = \frac{\sigma dx}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + h^2}}$$

である．
ところが, x〜$x + dx$ における電荷によって作られる電場と $-x - dx$〜$-x$ における電荷によって作られる電場は互いに平面に平行な成分を打ち消し合うので，電場は xy 平面に垂直な向きになる．
そこで, dE の xy 平面に垂直な成分 dE_nを考えると,

$$dE_n = \frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}}dE = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}}\frac{\sigma dx}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

であるため，求める電場 $E(h)$ は,

$$E(h) = \int dE_n = \frac{\sigma h}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{h^2 + x^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

となる．
また，Hにおける電位$\phi(h)$ は,

$$\phi(h) = -\int_0^h E(h)dh = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^h dh = -\frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}$$

となる．

解２：問１を利用しない解法

閉曲面 S として，底面積 A，高さ $2h$ で，底面が電荷と平行で軸が電荷と直交するような角柱または円柱を考える．
S の内部に含まれる電荷は $A\sigma$であり，電場の向きは S の底面に垂直で側面に平行であるため，ガウスの法則より,

$$\int_S E_n dS = \int_{\text{底面}} E_n dS + \int_{\text{側面}} E_n dS = E(h) \times 2A + 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}l\lambda$$

$$\therefore \quad E(h) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

となる．
電位$\phi(h)$ については解１と同様.

$\boxed{\text{問 3}}$

半径 a の球の表面上に電荷 Q が一様に分布している．電場$\vec{E}$の大きさと無限遠を基準とした電位ϕを，中心からの距離 r の関数として求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

閉曲面 S として，球面電荷と中心が同じ半径 r の球面を考える．
ガウスの法則より，

$$\int_S E_n dS = E(r) \times 4\pi r^2 = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0} Q & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore \quad E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases}$$

$$\phi(r) = -\int_\infty^r E(r) dr = \begin{cases} -\displaystyle\int_\infty^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr - \int_a^r 0 dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} & (r < a) \\ -\displaystyle\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$

$\boxed{\text{問 4}}$

厚さ a の無限に広い板の内部に電荷が密度ρで分布している．この板の中心を $z = 0$ とするとき，電場$\vec{E}$の大きさと $z = 0$ を基準とした電位ϕを，z の関数として求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

閉曲面 S として，底面積 A，高さ $2|z|$ で，底面が電荷の面と平行で軸が電荷の面と直交するような角柱または円柱を考える．
$z < a/2$ のとき S の内部に含まれる電荷は $2A\rho z$, $z > a/2$ のとき S の内部に含まれる電荷は $Aa\rho$であり，電場の向きは S の底面に垂直で側面に平行であるため，ガウスの法則より，

$$\int_S E_n dS = \int_{\text{底面}} E_n dS + \int_{\text{側面}} E_n dS = E(h) \times 2A + 0 = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_0} 2A\rho z & (|z| < \dfrac{a}{2}) \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0} Aa\rho & (|z| > \dfrac{a}{2}) \end{cases}$$

$$\therefore \quad E(z) = \begin{cases} \dfrac{\rho z}{\varepsilon_0} & (|z| < \dfrac{a}{2}) \\ \dfrac{a\rho}{2\varepsilon_0} & (|z| > \dfrac{a}{2}) \end{cases}$$

$$\phi(z) = -\int_0^z E(z) dz = \begin{cases} -\displaystyle\int_0^z \frac{\rho z}{\varepsilon_0} dz = -\frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0} & (|z| < \dfrac{a}{2}) \\ -\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\rho z}{\varepsilon_0} dz - \int_{\frac{a}{2}}^z \frac{a\rho}{2\varepsilon_0} dz = \frac{a^2\rho}{8\varepsilon_0} - \frac{a\rho z}{2\varepsilon_0} & (|z| > \dfrac{a}{2}) \end{cases}$$

問 5

半径 a の球の内部に電荷 Q が一様に分布している．電場$\vec{E}$の大きさと無限遠を基準とした電位ϕを，中心からの距離 r の関数として求めよ．

解答

閉曲面 S として，電荷 Q と中心が同じ半径 r の球面を考える．
ガウスの法則より，

$$\int_S E_n dS = E(r) \times 4\pi r^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{r^3}{a^3}Q & (r < a) \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}Q & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore \quad E(r) = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases}$$

$$\phi(r) = -\int_\infty^r E(r)dr = \begin{cases} -\displaystyle\int_\infty^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr - \int_a^r \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}dr = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a^3}(3a^2 - r^2) & (r < a) \\ -\displaystyle\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$

問 6

中心を共有する半径 a および $b(a<b)$ の二つの球形の極板からなるコンデンサーがある．半径 a の極板には電荷 Q が一様に分布し，半径 b の極板には電荷 $-Q$ が一様に分布している．以下の問題に答えよ．

(1) 電場$\vec{E}$の大きさと無限遠を基準とした電位ϕを，中心からの距離 r の関数として求めよ．

(2) $Q=CV$ の関係から，コンデンサーの容量 C を求めよ．ただし V はコンデンサーの電圧$\phi(a)-\phi(b)$ である．

(3) $d=b-a$ を一定にしたまま $b\to\infty$ とすると, C が平行版コンデンサーの容量 $C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ に近づくことを示せ．

(4) コンデンサーに蓄えられるエネルギー $U=\dfrac{Q^2}{2C}$ が $\displaystyle\int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 dV$ に等しいことを示せ．ただし V は全空間の体積である．

解答

(1) 閉曲面 S として，半径が r で両極板に中心が一致する球を考える．
ガウスの法則より，

$$\int_S E_n dS = 0 + E(r)\times 4\pi r^2 = \begin{cases} 0 & (r<a,\, b<r) \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}Q & (a<r<b) \end{cases}$$

$$\therefore \quad E(r) = \begin{cases} 0 & (r<a,\, b<r) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (a<r<b) \end{cases}$$

$$\phi(r) = -\int_\infty^r E(r)dr = \begin{cases} -\displaystyle\int_\infty^b 0dr - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr - \int_a^r 0dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) & (r<a) \\ -\displaystyle\int_\infty^b 0dr - \int_b^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right) & (a<r<b) \\ -\displaystyle\int_\infty^r 0dr = 0 & (b<r) \end{cases}$$

(2) $V=\phi(a)-\phi(b)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$ より，

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{Q}{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}=\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

(3) $b\to\infty$ のとき $a \quad b$ となるので，

$$C \quad \frac{4\pi\varepsilon_0 b^2}{d}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

(4)
$$\int_a^b \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 dV = \int_a^b \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \times \frac{4}{3}\pi\{(r+dr)^3-r^3\}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r^2}dr$$

$$= \frac{Q^2(b-a)}{4\pi\varepsilon_0 ab}$$

$$= \frac{Q^2}{2C}$$

問 7

軸を共有する断面の半径が a および $b(a < b)$ である二つの円筒形の極板からなるコンデンサーがある．断面の半径が a である極板には電荷 Q が一様に分布し，断面の半径が b である極板には電荷 $-Q$ が一様に分布している．以下の問題に答えよ．

(1) 電場 $\vec{E}$ の大きさと無限遠を基準とした電位 ϕ を，軸からの距離 r の関数として求めよ．

(2) $Q = CV$ の関係から，コンデンサーの容量 C を求めよ．ただし V はコンデンサーの電圧 $\phi(a) - \phi(b)$ である．

(3) $d = b - a$ を一定にしたまま $b \to \infty$ とすると, C が平行版コンデンサーの容量 $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ に近づくことを示せ. $x \ll 1$ における近似式 $\ln(1+x) \quad x$ を用いてもよい.

(4) コンデンサーに蓄えられるエネルギー $U = \dfrac{Q^2}{2C}$ が $\displaystyle\int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 dV$ に等しいことを示せ．ただし V は全空間の体積である．

解答

(1) 閉曲面 S として，底面の半径が r，高さが l で両極板に軸が一致する円柱を考える．
ガウスの法則より，

$$\int_S E_n dS = \int_{\text{底面}} E_n dS + \int_{\text{側面}} E_n dS = 0 + E(r) \times 2\pi r l = \begin{cases} 0 & (r < a,\, b < r) \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0} Q & (a < r < b) \end{cases}$$

$$\therefore \quad E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a,\, b < r) \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l} & (a < r < b) \end{cases}$$

$$\phi(r) = -\int_\infty^r E(r)dr = \begin{cases} -\displaystyle\int_\infty^b 0dr - \int_b^a \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}dr - \int_a^r 0dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a} & (r < a) \\ -\displaystyle\int_\infty^b 0dr - \int_b^r \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{r} & (a < r < b) \\ -\displaystyle\int_\infty^r 0dr = 0 & (b < r) \end{cases}$$

(2) $V = \phi(a) - \phi(b) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\dfrac{b}{a}$ より，

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\dfrac{b}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{b}{a}}$$

(3) $\dfrac{b}{a} = 1 + \dfrac{d}{a}$ より，

$$\ln\frac{b}{a} = \ln(1 + \frac{d}{a}) \quad \frac{d}{a}$$

$$\therefore \quad C \quad \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{d/a} = \frac{\varepsilon_0 \times 2\pi a l}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

(4) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 dV = \int_a^b \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}\right)^2 \times \pi\{(r+dr)^2 - r^2\}l = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_a^b \frac{1}{r}dr = \frac{Q^2 \ln\dfrac{b}{a}}{4\pi\varepsilon_0 l} = \frac{Q^2}{2C}$

問 8 ♠♠

電気双極子モーメントが$\vec{p}$である電気双極子の中心から十分離れた$\vec{r}$の位置における無限遠を基準とした電位$\phi(\vec{r})$ と電場$\vec{E}(\vec{r})$ を求めよ.

解答

電気双極子の両端を$\mathrm{Q}_1(q)$，$\mathrm{Q}_2(-q)$，中心をP，中心から$\vec{r}$の位置にある点をRとする.
$\mathrm{Q}_1\mathrm{R} = r_1$，$\mathrm{Q}_2\mathrm{R} = r_2$，$\mathrm{P}\mathrm{R} = r, \angle \mathrm{Q}_1\mathrm{P}\mathrm{R} = \theta$とすると,

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

であるが, r が電気双極子の大きさ d に比べて十分大きければ, $r_1 \quad r - \frac{d}{2}\cos\theta$, $r_2 \quad r + \frac{d}{2}\cos\theta$と近似できるので,

$$\phi(r) = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \quad \frac{d\cos\theta}{r^2 - d^2\cos^2\theta} \quad \frac{d\cos\theta}{r^2}$$

$$\therefore \quad \phi(r) \quad \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dqr\cos\theta}{r^3} \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と置くと, $\vec{p}\cdot\vec{r} = p_x x + p_y y + p_z z$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$より,

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{p}\cdot\vec{r} = \frac{\partial}{\partial x}(p_x x + p_y y + p_z z) = p_x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = -3x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} = -3\frac{x}{r^5}$$

であるから,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial x}\vec{p}\cdot\vec{r} + \vec{p}\cdot\vec{r}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^3} = \frac{p_x}{r^3} - 3\vec{p}\cdot\vec{r}\frac{x}{r^5} = \frac{1}{r^3}\left(p_x - 3\vec{p}\cdot\vec{r}\frac{x}{r^2}\right)$$

同様に,

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3}\left(p_y - 3\vec{p}\cdot\vec{r}\frac{y}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3}\left(p_z - 3\vec{p}\cdot\vec{r}\frac{z}{r^2}\right)$$

$$\therefore \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} 3\vec{p}\cdot\vec{r}\frac{x}{r^2} - p_x \\ 3\vec{p}\cdot\vec{r}\frac{y}{r^2} - p_y \\ 3\vec{p}\cdot\vec{r}\frac{z}{r^2} - p_z \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\vec{p}\cdot\vec{r}\frac{\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right) \quad \left(= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p})\right)$$

$\boxed{\text{問 9}}$ ♠

電気双極子モーメントが$\vec{p}$である電気双極子が一様な電場$\vec{E}$から受ける力のモーメント$\vec{N}$と，電場中の電気双極子の位置エネルギー U を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

$\vec{p}=Q\vec{d}$とすると，

$\vec{N}=\vec{d}\times Q\vec{E}=\vec{p}\times\vec{E}$

$\vec{p}\perp\vec{E}$である状態を位置エネルギーの基準とし，電気双極子が角度θだけ回転したとすると，電気双極子が電場からされた仕事 W は,

$$W=\frac{d}{2}\cos\theta\times QE\times 2=QdE\cos\theta=\vec{p}\cdot\vec{E}$$

$\therefore\quad U=-\vec{p}\cdot\vec{E}$

$\boxed{\text{問 10}}$ ♠

第 2 象限から第 4 象限までの全ての点が導体である平面上の点 $(2,1)$ に電荷 q があるとき，点 $(2,4)$ における無限遠を基準とした電位ϕを求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

鏡像法により，点 $(-2,-1)$ に電荷 q，点 $(-2,1)$, $(2,-1)$ に電荷 $-q$ が存在するとみなす．
$(2,1)$, $(-2,-1)$, $(-2,1)$, $(2,-1)$ から $(2,4)$ までの距離はそれぞれ $3,\sqrt{41},5,5$ なので,

$$\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{41}}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{41}}-\frac{1}{15}\right)$$

$\boxed{\text{問 11}}$ ♠

平面上に，原点を中心とする半径 a の円形の導体がある．この平面上の点 $(2a,0)$ に電荷 q があるとき，点 $(0,r)$ における無限遠を基準とした電位$\phi(r)$ を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

鏡像法により，点 $\left(\frac{a}{2},0\right)$ に電荷 $-\frac{q}{2}$が存在するとみなす．
$(2a,0)$, $\left(\frac{a}{2},0\right)$ までの距離はそれぞれ$\sqrt{4a^2+r^2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4r^2}$なので,

$$\phi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{4a^2+r^2}}-\frac{\frac{q}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4r^2}}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{4a^2+r^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+4r^2}}\right)$$

II　静磁場

ビオ・サバールの法則

磁場：1A の電流 1m に働く力
電流 I の微小部分 $d\vec{l}$からの距離 r 離れた点Rにおける磁場$\vec{B}$は,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

μ_0: 真空の透磁率
$\hat{r}$: $dl\rightarrow$ Rの向きの単位ベクトル

電流 I によるRにおける磁場を計算するには, $d\vec{B}$を l で積分すればよい.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

アンペールの法則

任意の閉曲線 C の内側を通過する総電流が I であるとき, C と交わる磁場の C の方向成分$\vec{B}\cdot d\vec{l}$の総和は,

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

同じ大きさの磁場と常に同じ向きになるように C を選ぶと $Bl = \mu_0 I$(l は C の 1 周分の長さ) より

$$B = \frac{\mu_0 I}{l}$$

ローレンツ力

磁場中を運動する電荷には，磁場と運動方向と垂直な力が働く.
磁場$\vec{B}$中を速度$\vec{v}$で運動する電荷 q に働く力$\vec{F}$は,

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

電流に働く力

導体中を電流として移動する電荷にはローレンツ力が働くため，磁場中の電流には磁場と電流に垂直な力が働く.
磁場$\vec{B}$中で電流 I の微小部分 $d\vec{l}$に働く力$\vec{F}$は,

$$\vec{F} = Id\vec{l}\times\vec{B}$$

回路の磁気 (双極子) モーメント$\vec{\mu}$

$$\vec{\mu} = IS\hat{n}$$

S：回路の面積
$\hat{n}$: 回路の法線ベクトル (単位ベクトル)

磁場$\vec{B}$中の回路が受ける力のモーメント$\vec{N}$は,

$$\vec{N} = \vec{\mu}\times\vec{B}$$

演習問題

問 1

無限に長い直線上を電流 I が流れている．磁場$\vec{B}$の大きさを直線からの距離 a の関数として求めよ．

問 2

無限に広い平面上を面電流密度 K の電流が流れている．磁場$\vec{B}$の大きさを平面からの距離 h の関数として求めよ．

問 3

原点を中心として xy 平面上を半径 a の円周上を電流 I が流れている. z 軸上の磁場$\vec{B}$の大きさを z の関数として求めよ．

問 4

断面が半径 a の円形である単位長さあたりの巻数 n のソレノイドを電流 I が流れている．ソレノイドの中心の磁場$\vec{B}$の大きさを求めよ．

問 5

断面の半径が a である円筒面上を電流 I が流れている．磁場$\vec{B}$の大きさを軸からの距離 r の関数として求めよ．

問 6

厚さ h の無限に広い板の内部を電流密度 j_0の電流が流れている．この板の中心を $z=0$ とするとき，磁場$\vec{B}$の大きさを z の関数として求めよ．

問 7

底面の半径が a である円柱の内部を電流 I が流れている．磁場$\vec{B}$の大きさを軸からの距離 r の関数として求めよ．

問 8

質量 m，電荷 q をもつ粒子を磁場$\vec{B}$のかかったサイクロトロンで加速する．サイクロトロンにかける交流電圧の周期 T を求めよ．

問 9

$a \times b$ の長方形の周上を電流 I が流れている．この長方形の法線ベクトル$\hat{n}$が磁場$\vec{B}$と角度θをなすとき，電流が磁場から受ける力のモーメント$\vec{N}$の大きさを求めよ．

問 10

半径 a の円形回路を電流 I が流れている．回路の法線と角度θをなすように磁場$\vec{B}$をかけたとき，回路が磁場から受ける力のモーメント$\vec{N}$の大きさを求めよ．

問 11

半径 a の円周上を質量 m，電荷 q を持つ粒子が角運動量$\vec{L}$で運動している．磁気双極子モーメント$\vec{\mu}$を求めよ．

$\boxed{\text{問 1}}$

無限に長い直線上を電流 I が流れている．磁場$\vec{B}$の大きさを直線からの距離 a の関数として求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

解１：ビオ・サバールの法則による解法

x 軸上を電流が流れているものとして，点A $(0, a)$ とする．
x〜$x + dx$ の範囲の微小電流は Idx，微小電流からAまでの距離は$\sqrt{x^2+a^2}$，電流のベクトルと位置ベクトルのなす角をθとすると $\sin\theta = \dfrac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$なので，ビオ・サバールの法則よりその微小電流によるAにおける磁場の大きさは,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idx}{x^2+a^2} \times \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

であるため，求める磁場 $B(a)$ は,

$$B(a) = \int dB = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

解２：アンペールの法則による解法

閉曲線 C として，電流を中心とする半径 a の円を考える．
C の内側を通る電流は I であり，磁場の向きは C と一致するので，アンペールの法則より,

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = B(a) \times 2\pi a = \mu_0 I$$

$$\therefore \quad B(a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

$\boxed{\text{問 2}}$

無限に広い平面上を面電流密度 K の電流が流れている．磁場$\vec{B}$の大きさを平面からの距離 h の関数として求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

解１：問１を利用した解法

xy 平面上を y 方向に電流が流れているものとして，点H $(0,0,h)$ とする．
問１より, x〜$x+dx$ の範囲を流れる電流は Kdx で，電流からAまでの距離は$\sqrt{x^2+h^2}$なので，問１よりその部分の電流によるHにおける磁場の大きさは,

$$dB = \frac{\mu_0 K dx}{2\pi\sqrt{x^2+h^2}}$$

であるが, x〜$x+dx$ の範囲を流れる電流と $-x-dx$〜$-x$ の範囲を流れる電流で磁場の z 成分を打ち消し合うため, dB の x 成分 dB_xを考えると,

$$dB_x = \frac{\mu_0 K dx}{2\pi\sqrt{x^2+h^2}} \times \frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

であるため，求める磁場 $B(h)$ は,

$$B(h) = \int dB_x = \frac{\mu_0 K h}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+h^2} = \frac{\mu_0 K}{2}$$

解２：問１を利用しない解法

閉曲線 C として, $2h \times a$ の長方形を考える．
ただし長さ $2h$ の辺は電流に垂直で中点で電流と交わっており，長さ a の辺は磁場に平行であるとする．
C の内側を通る電流は Ka なので，アンペールの法則より,

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = B(h)\times 2a = \mu_0 K a$$

$$\therefore \quad B(h) = \frac{\mu_0 K}{2}$$

問 3

原点を中心として xy 平面上を半径 a の円周上を電流 I が流れている. z 軸上の磁場$\vec{B}$の大きさを z の関数として求めよ.

解答

微小電流 Idl によって点 Z $(0,0,z)$ にできる磁場の大きさは，ビオ・サバールの法則より

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{a^2+z^2}$$

ところが，一周分の電流によって磁場の x 成分と y 成分は全て打ち消されてしまうため, dB の z 成分 dB_z を考えると,

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{a^2+z^2} \times \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$\therefore \quad B(z) = \oint_l dB = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi a}\frac{dl}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\frac{2\pi a}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 Ia^2}{2}\frac{1}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2a}\left\{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{2}}$$

問 4

断面が半径 a の円形である単位長さあたりの巻数 n のソレノイドを電流 I が流れている．ソレノイドの中心の磁場$\vec{B}$の大きさを求めよ.

解答

解１：問３を利用した解法

ソレノイドの中心が z 軸上にあるとする.
z〜$z+dz$ の範囲には円電流が ndz 周存在するため，その部分による微小磁場の大きさは問３より

$$dB = \frac{\mu_0 Ia^2}{2}\frac{ndz}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \quad B = \int dB = \frac{\mu_0 Ia^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ndz}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \mu_0 nI$$

解２：問３を利用しない解法

閉曲線 C として，一辺がソレノイドの中心に一致する長方形を考える.
その辺の長さを a とすると, C の内側を通る電流は anI なので，アンペールの法則より,

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\times a = \mu_0 anI$$

$$\therefore \quad B = \mu_0 nI$$

問 5

断面の半径が a である円筒面上を電流 I が流れている．磁場 $\vec{B}$ の大きさを軸からの距離 r の関数として求めよ．

解答

閉曲線 C として，中心が円筒の軸に一致する半径 r の円を考える．
$r < a$ のときは C の内側を通過する電流は 0 で, $r > a$ のときは C の内側を通過する電流は I なので,
アンペールの法則より,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \times 2\pi r = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \mu_0 I & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore \quad B(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r > a) \end{cases}$$

問 6

厚さ h の無限に広い板の内部を電流密度 j_0 の電流が流れている．この板の中心を $z = 0$ とするとき，磁場 $\vec{B}$ の大きさを z の関数として求めよ．

解答

閉曲線 C として, $2|z| \times a$ の長方形を考える．
ただし長さ $2|z|$ の辺は z 軸に平行で中点が $z = 0$ 上にあり，長さ a の辺は磁場に平行であるとする．
$|z| < a/2$ のときは C の内側を通る電流は $2j_0az$ で, $|z| > a/2$ のとき C の内側を通る電流は j_0ah なので,
アンペールの法則より,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(z) \times 2a = \begin{cases} 2\mu_0 j_0 az & (|z| < a/2) \\ \mu_0 j_0 ah & (|z| > a/2) \end{cases}$$

$$\therefore \quad B(z) = \begin{cases} \mu_0 j_0 z & (|z| < a/2) \\ \dfrac{\mu_0 j_0 h}{2} & (|z| > a/2) \end{cases}$$

問 7

底面の半径が a である円柱の内部を電流 I が流れている．磁場$\vec{B}$の大きさを軸からの距離 r の関数として求めよ．

解答

閉曲線 C として，中心が円柱の軸に一致する半径 r の円を考える．

$r < a$ のときは C の内側を通過する電流は$\dfrac{r^2}{a^2}I$ で, $r > a$ のときは C の内側を通過する電流は I なので,

アンペールの法則より,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \times 2\pi r = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{a^2} r^2 & (r < a) \\ \mu_0 I & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore \quad B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r & (r < a) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r > a) \end{cases}$$

問 8

質量 m，電荷 q をもつ粒子を磁場$\vec{B}$のかかったサイクロトロンで加速する．サイクロトロンにかける交流電圧の周期 T を求めよ．

解答

粒子が磁場から受ける力の大きさは qvB なので，運動方程式は

$$m\frac{v^2}{r} = qvB$$

$$\therefore \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

問 9

$a \times b$ の長方形の周上を電流 I が流れている．この長方形の法線ベクトル$\hat{n}$が磁場$\vec{B}$と角度θをなすとき，電流が磁場から受ける力のモーメント$\vec{N}$の大きさを求めよ．

解答

θが一定であれば回路に働く力のモーメントは一定なので，長さ b の辺が磁場と垂直になるようにする．
このとき，長さ b の辺に働く力の大きさは IbB なので，力のモーメント$\vec{N}$の大きさは,

$$N = aIbB\sin\theta$$

問 10

半径 a の円形回路を電流 I が流れている．回路の法線と角度θをなすように磁場$\vec{B}$をかけたとき，回路が磁場から受ける力のモーメント$\vec{N}$の大きさを求めよ．

解答

回路の面積はπa^2なので，回路の磁気双極子モーメント$\vec{\mu}$の大きさは,

$$\mu = I\pi a^2$$

$$\therefore \quad N = \mu B\sin\theta = I\pi a^2 B\sin\theta$$

問 11

半径 a の円周上を質量 m，電荷 q を持つ粒子が角運動量$\vec{L}$で運動している．磁気双極子モーメント$\vec{\mu}$を求めよ．

解答

電荷の速度を v とすると，時間$\dfrac{2\pi a}{v}$あたり電荷 q が移動していることから電流$\dfrac{qv}{2\pi a}$が流れているとみなすことができる．
回路の面積はπa^2なので，磁気双極子モーメント$\vec{\mu}$は,

$$\vec{\mu} = \frac{qv}{2\pi a} \times \pi a^2 \times \hat{n} = \frac{q}{2m} \times amv\hat{n} = \frac{q}{2m}\vec{L}$$

III　時間的に変化する電磁場

電磁誘導の法則

回路の内側を通る磁束Φが変化したとき，回路に発生する起電力は,

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

磁束Φとは,

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

S：回路を端とする曲面 (閉曲面ではない. S が閉曲面の場合は $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$)

回路 C の形状が変化しない場合は,

$$V = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

変位電流

電場が時間的に変化する場合，前章のアンペールの法則が成り立たない．その場合は変位電流 (密度)$\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ を考慮して,

$$V = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

C：任意の閉曲線
S：C を端とする任意の曲面
$\vec{j}$: S を貫く電流の密度
$\vec{E}$: S を貫く電場

電磁場の基本法則 (積分形のマクスウェル方程式)

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$ (S：閉曲面)：ガウスの法則

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$ (S：閉曲面)：磁荷は存在しない

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$ (C：閉曲線, S：C を端とする曲面)：電磁誘導の法則

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$ (C：閉曲線, S：C を端とする曲面)：アンペールの法則と変位電流

演習問題

問 1

断面が半径 a の円で，長さ l，単位長さあたりの巻数 n のソレノイドについて，以下の問題に答えよ．

(1) ソレノイドに発生する起電力 $V = -L\dfrac{dI}{dt}$ より，ソレノイドの自己インダクタンス L を求めよ．

(2) 電場$\vec{E}$の大きさをソレノイドの中心軸からの距離 r の関数として求めよ．

問 2

半径 a の円形の極板からなる平行板コンデンサーに電流 I が流れ込んでいる．以下の問題に答えよ．

(1) 極板を流れる電流の面電流密度 K を，極板の中心からの距離 r の関数として求めよ．

(2) 極板間に生じる磁場$\vec{B}$の大きさを，コンデンサーの中心からの距離 r の関数として求めよ．

問 1

断面が半径 a の円で，長さ l，単位長さあたりの巻数 n のソレノイドについて，以下の問題に答えよ．

(1) ソレノイドに発生する起電力 $V = -L\dfrac{dI}{dt}$ より，ソレノイドの自己インダクタンス L を求めよ．

(2) 電場$\vec{E}$の大きさをソレノイドの中心軸からの距離 r の関数として求めよ．

解答

(1) ソレノイドに発生する磁場は$\mu_0 nI$ なので，ソレノイドを通過する磁束Φは,

$$\Phi = \pi a^2 \mu_0 nI \times nl$$

$$\therefore \quad V = \frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \pi a^2 l n^2 \frac{dI}{dt}$$

$$\therefore \quad L = \mu_0 \pi a^2 l n^2$$

(2) 閉曲線 C として，ソレノイドの中心軸を中心とする半径 r の円を考える．
$r < a$ のときは C の内側を通る磁束は$\mu_0 \pi r^2 l n^2 I$ で, $r > a$ のときは C の内側を通る磁束は$\mu_0 \pi a^2 l n^2 I$ なので,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(r) \times 2\pi r = \begin{cases} -\mu_0 \pi r^2 l n^2 \dfrac{dI}{dt} & (r < a) \\ -\mu_0 \pi a^2 l n^2 \dfrac{dI}{dt} & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore \quad E(r) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\mu_0 n \dfrac{dI}{dt} r & (r < a) \\ -\dfrac{1}{2}\mu_0 n a^2 \dfrac{dI}{dt}\dfrac{1}{r} & (r > a) \end{cases}$$

※　E の値はプラスでも可

問 2

半径 a の円形の極板からなる平行板コンデンサーに電流 I が流れ込んでいる．以下の問題に答えよ．

(1) 極板を流れる電流の面電流密度 K を，極板の中心からの距離 r の関数として求めよ．

(2) 極板間に生じる磁場$\vec{B}$の大きさを，コンデンサーの中心からの距離 r の関数として求めよ．

解答

(1) 極板の中心から半径 r の円内における電荷保存則より，

$$I - 2\pi r K(r) = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I$$

$$\therefore \quad K(r) = \frac{I}{2\pi r}\left\{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}$$

(2) 解１：アンペールの法則による解法

閉曲線 C としてコンデンサーの中心を中心とし極板に平行な半径 r の円を考える．
曲面 S として, C を底面とし，極板を挟んで C と反対の位置にもう１つの底面があるような円柱を考える．

(1) より S を貫く電流は $I - 2\pi r K(r) = \dfrac{r^2}{a^2} I$ なので，アンペールの法則より，

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = B(r)\times 2\pi r = \begin{cases} \mu_0 \dfrac{r^2}{a^2} I & (r < a) \\ \mu_0 I & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore \quad B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & (r < a) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r > a) \end{cases}$$

解２：変位電流による解法

閉曲線 C としてコンデンサーの中心を中心とし極板に平行な半径 r の円を考える．
曲面 (平面)S として, C の内部を考える．
$\dfrac{\partial E}{\partial t}\times \pi a^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0} I$ より $\dfrac{\partial E}{\partial t} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{I}{\pi a^2}$ なので,

$$\mu_0\varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{\pi a^2}\times \pi r^2 = \dfrac{\mu_0 I r^2}{a^2} & (r < a) \\ \dfrac{\mu_0 I}{\pi a^2}\times \pi a^2 = \mu_0 I & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore \quad \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = B(r)\times 2\pi r = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r^2}{a^2} & (r < a) \\ \mu_0 I & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore \quad B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & (r < a) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r > a) \end{cases}$$

IV　電気回路

演習問題

問 1

直列に接続された抵抗 R と電気容量 C のコンデンサーに $0 < t < T$ の間だけ直流電圧 E をかけ $t > T$ では電圧をかけないとき，コンデンサーに蓄えられる電荷 q と回路を流れる電流 I を時間 t の関数として求めよ．

問 2

並列に接続された抵抗 R と電気容量 C のコンデンサーに $0 < t < T$ の間だけ定電流 I_0を流し $t > T$ では電流を流さないとき，コンデンサーに蓄えられる電荷 q と抵抗を流れる電流 I を時間 t の関数として求めよ．

問 3

直列に接続された抵抗 R と自己インダクタンス L のコイルに $0 < t < T$ の間だけ直流電圧 E をかけ $t > T$ では電圧をかけないとき，回路を流れる電流 I を時間 t の関数として求めよ．

問 4　♠

抵抗 R，電荷 q_0が蓄えられた電気容量 C のコンデンサー，自己インダクタンス L のコイルを直列に接続したとき，コンデンサーに蓄えられる電荷 q を時間 t の関数として求めよ．

問 5　♠♠

直列に接続された抵抗 R，電気容量 C のコンデンサー，自己インダクタンス L のコイルに交流電圧 $V_0 \sin \omega t$ をかけたとき，回路を流れる電流 I を時間 t の関数として求めよ．

問 6　♠

抵抗 R に交流電圧 $V_0 \sin \omega t$ をかけたとき，回路の消費電力は$\bar{P} = \dfrac{1}{2} R I_0^2$($I_0$は電流の振幅) であることを示せ．

問 7　♠

直列に接続された抵抗 R，電気容量 C のコンデンサー，自己インダクタンス L のコイルに交流電圧 $V_0 \sin \omega t$ をかけて，回路を流れる電流の振幅 $I_0(\omega)$ の 2 乗のピークの鋭さを表す半値幅 ($I_0^2 = \dfrac{1}{2}(I_0^2)_{\max}$となる$\omega$の 2 つの値の差) は$\Gamma_{\mathrm{FWHM}} = \dfrac{R}{L}$であることを示せ．

問 1

直列に接続された抵抗 R と電気容量 C のコンデンサーに $0 < t < T$ の間だけ直流電圧 E をかけ $t > T$ では電圧をかけないとき，コンデンサーに蓄えられる電荷 q と回路を流れる電流 I を時間 t の関数として求めよ．

解答

キルヒホッフの法則より,

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \begin{cases} E & (0 < t < T) \\ 0 & (t > T) \end{cases}$$

$0 < t < T$ のとき,

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}(q - CE)$$

$$\therefore \quad \frac{dQ}{q - CE} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\therefore \quad \ln|q - CE| = -\frac{t}{RC} + A \qquad (A：積分定数)$$

$$\therefore \quad q = CE + Be^{-\frac{t}{RC}} \qquad \cdots\cdots(*)$$

初期条件より $t = 0$ のとき $q = 0$ なので, $B = -CE$

$$\therefore \quad q = CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$t > T$ のとき, $(*)$ で $E = 0$ として，初期条件より $t = T$ のとき $q = CE(1 - e^{-\frac{T}{RC}})$ なので, $B = CE(e^{\frac{T}{RC}} - 1)$

$$\therefore \quad q = CE(e^{\frac{T}{RC}} - 1)e^{-\frac{t}{RC}}$$

以上より,

$$q(t) = \begin{cases} CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) & (0 < t < T) \\ CE(e^{\frac{T}{RC}} - 1)e^{-\frac{t}{RC}} & (t > T) \end{cases}$$

$$\therefore \quad I(t) = \frac{dq}{dt} = \begin{cases} \dfrac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}} & (0 < t < T) \\ -\dfrac{E}{R}(e^{\frac{T}{RC}} - 1)e^{-\frac{t}{RC}} & (t > T) \end{cases}$$

$\boxed{\text{問 2}}$

並列に接続された抵抗 R と電気容量 C のコンデンサーに $0 < t < T$ の間だけ定電流 I_0を流し $t > T$ では電流を流さないとき，コンデンサーに蓄えられる電荷 q と抵抗を流れる電流 I を時間 t の関数として求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

キルヒホッフの法則より，

$$\begin{cases} I + \dfrac{dq}{dt} = \begin{cases} I_0 & (0 < t < T) \\ 0 & (t > T) \end{cases} \\ RI - \dfrac{1}{C}q = 0 \end{cases}$$

$0 < t < T$ のとき，

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}(q - I_0 RC)$$

$$\therefore \quad \frac{dQ}{q - I_0 RC} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\therefore \quad \ln|q - I_0 RC| = -\frac{t}{RC} + A \qquad (A\text{：積分定数})$$

$$\therefore \quad q = I_0 RC + Be^{-\frac{t}{RC}} \qquad \cdots\cdots(*)$$

初期条件より $t = 0$ のとき $q = 0$ なので, $B = -I_0 RC$

$$\therefore \quad q = I_0 RC(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$t > T$ のとき, $(*)$ で $I_0 = 0$ として，初期条件より $t = T$ のとき $q = I_0 RC(1 - e^{-\frac{T}{RC}})$ なので,

$$B = I_0 RC(e^{\frac{T}{RC}} - 1)$$

$$\therefore \quad q = I_0 RC(e^{\frac{T}{RC}} - 1)e^{-\frac{1}{RC}t}$$

以上より，

$$q(t) = \begin{cases} I_0 RC(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) & (0 < t < T) \\ I_0 RC(e^{\frac{T}{RC}} - 1)e^{-\frac{1}{RC}t} & (t > T) \end{cases}$$

$$\therefore \quad I(t) = \begin{cases} I_0 - \dfrac{dq}{dt} = I_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) & (0 < t < T) \\ -\dfrac{dq}{dt} = I_0(e^{\frac{T}{RC}} - 1)e^{-\frac{t}{RC}} & (t > T) \end{cases}$$

$\boxed{\text{問 3}}$

直列に接続された抵抗 R と自己インダクタンス L のコイルに $0 < t < T$ の間だけ直流電圧 E をかけ $t > T$ では電圧をかけないとき，回路を流れる電流 I を時間 t の関数として求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

キルヒホッフの法則より,

$$RI + L\frac{dI}{dt} = \begin{cases} E & (0 < t < T) \\ 0\dfrac{dI}{dt} & (t > T) \end{cases}$$

$0 < t < T$ のとき,

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}(I - \frac{E}{R})$$

$$\therefore \quad \frac{dI}{I - \dfrac{E}{R}} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\therefore \quad \ln\left|I - \frac{E}{R}\right| = -\frac{R}{L}t + A \qquad (A\text{：積分定数})$$

$$\therefore \quad I = \frac{E}{R} + Be^{-\frac{R}{L}t} \qquad \cdots\cdots(*)$$

初期条件より $t = 0$ のとき $I = 0$ なので, $B = -\dfrac{E}{R}$

$$\therefore \quad I = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$t > T$ のとき, $(*)$ で $E = 0$ として，初期条件より $t = T$ のとき $I = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}T})$ なので, $B = \dfrac{E}{R}(e^{\frac{R}{L}T} - 1)$

$$\therefore \quad I = \frac{E}{R}(e^{\frac{R}{L}T} - 1)e^{-\frac{R}{L}T}$$

以上より,

$$I(t) = \begin{cases} \dfrac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) & (0 < t < T) \\ \dfrac{E}{R}(e^{\frac{R}{L}T} - 1)e^{-\frac{R}{L}T} & (t > T) \end{cases}$$

問 4 ♠

抵抗 R，電荷 q_0が蓄えられた電気容量 C のコンデンサー，自己インダクタンス L のコイルを直列に接続したとき，コンデンサーに蓄えられる電荷 q を時間 t の関数として求めよ．

解答

キルヒホッフの法則より,

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q+L\frac{d^2q}{dt^2}=0$$

$q=Ae^{\alpha t}$と置くと, $(R\alpha+\dfrac{1}{C}+L\alpha^2)e^{\alpha t}=0$ より,

$$\alpha=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

$\omega=\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$とすると,

$$\therefore \quad q(t)=Ae^{-\frac{R}{2L}t}\times e^{i\omega}=Ae^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega t+\phi) \qquad (\phi\text{: 初期位相})$$

初期条件より $t=0$ のとき $q=q_0$なので,

$$q(t)=q_0e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\omega t$$

問 5 ♠♠

直列に接続された抵抗 R，電気容量 C のコンデンサー，自己インダクタンス L のコイルに交流電圧 $V_0 \sin\omega t$ をかけたとき，回路を流れる電流 I を時間 t の関数として求めよ．

解答

キルヒホッフの法則より，

$$RI + \frac{1}{C}q + L\frac{dI}{dt} = V_0 \sin\omega t$$

$$\therefore \quad L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = V_0\omega\cos\omega t$$

ここで，$L\dfrac{d^2 J}{dt^2} + R\dfrac{dJ}{dt} + \dfrac{1}{C}J = V_0\omega\sin\omega t$ として，$X = I + iJ$ についての方程式

$$L\frac{d^2 X}{dt^2} + R\frac{dX}{dt} + \frac{1}{C}X = V_0\omega e^{i\omega t}$$

を考える．

$X = Ae^{i\omega t}$ と置くと，$(-\omega^2 L + i\omega R + \dfrac{1}{c})X = Ae^{i\omega t} = V_0\omega e^{i\omega t}$ より，

$$A = \frac{V_0\omega}{-\omega^2 L + i\omega R + \dfrac{1}{c}} = \frac{1}{i}\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} - i\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\right)$$

$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ とし,ϕを $\cos\phi = \dfrac{R}{Z}, \sin\phi = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{Z}$ を満たすように定めると，

$$A = \frac{1}{i}\frac{V_0}{Z}(\cos\phi - i\sin\phi) = \frac{1}{i}\frac{V_0}{Z}e^{-i\phi}$$

$$\therefore \quad I = \mathrm{Re}(X) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\frac{V_0}{Z}e^{i(\omega t - \phi)}\right) = \frac{V_0}{Z}\sin(\omega t - \phi)$$

問 6 ♠

直列に接続された抵抗 R に交流電圧 $V_0 \sin \omega t$ をかけたとき，消費電力は$\bar{P} = \frac{1}{2}RI_0^2$($I_0$は電流の振幅) であることを示せ.

解答

$V = V_0 \sin \omega t$, $I = I_0 \sin \omega t$ より，

$$\begin{aligned} VI &= V_0 I_0 \sin^2 \omega t \\ &= RI_0^2 \sin^2 \omega t \\ &= RI_0^2 \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \bar{P} = \overline{VI} = \frac{1}{2}RI_0^2$$

問 7 ♠

直列に接続された抵抗 R，電気容量 C のコンデンサー，自己インダクタンス L のコイルに交流電圧 $V_0 \sin \omega t$ をかけて，回路を流れる電流の振幅 $I_0(\omega)$ の 2 乗のピークの鋭さを表す半値幅 ($I_0^2 = \frac{1}{2}(I_0^2)_{\max}$となる$\omega$の 2 つの値の差) は$\Gamma_{\mathrm{FWHM}} = \frac{R}{L}$であることを示せ.

解答

$I_0^2 = \dfrac{V_0^2}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ より，$\dfrac{(I_0^2)_{\max}}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{V_0^2}{R^2}$

よって，$I_0 = \dfrac{(I_0^2)_{\max}}{2}$となるときの$\omega$は$\omega L - \dfrac{1}{\omega C} = \pm R$ を満たす.

$$\omega^2 \pm \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0$$

$$\therefore \quad \omega = \pm \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad \text{(複合任意)}$$

$\omega > 0$ より，　$\omega = \pm \dfrac{R}{2L} + \sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2} + \dfrac{1}{LC}}$

$$\therefore \quad \Gamma_{\mathrm{FWHM}} = \frac{R}{L}$$

V　マクスウェル方程式

微分形のマクスウェル方程式

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho$　　　ρ: 電荷密度

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t})$　　　$\vec{j}$: 電流密度

電磁波

電磁波の波動方程式

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\vec{\nabla}^2 \vec{B}$$

電磁波の速度を $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \dfrac{\omega}{k}$、波数ベクトルを$\vec{k}$(大きさは k，向きは波の進行方向) とすると,$\vec{r}$で表される位置における電場$\vec{E}$および磁場$\vec{B}$は,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \beta)$$

$$(\beta = \alpha + n\pi)$$

と表せる．このとき,

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{c}\hat{k} \times \vec{E}_0$$

ベクトルポテンシャル

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$を満たす$\vec{A}$をベクトルポテンシャルという.

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$が成り立つとき，任意のスカラー量 f に対して,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} f)$$

が成り立つ. ($\vec{B}$はゲージ変換 ($A \to A + \vec{\nabla} f$) に対して不変.)

演習問題

問 1

電場の各成分が

$$\begin{cases} E_x = E_y = 0,\, E_z = \dfrac{\alpha z|z|}{2} & (|z| < \dfrac{a}{2}\text{のとき}) \\ E_x = E_y = 0,\, E_z = \dfrac{\alpha a^2}{2}\dfrac{|z|}{z} & (|z| > \dfrac{a}{2}\text{のとき}) \end{cases}$$

で与えられるような電場$\vec{E}$がある．ただしαと a は定数である．このような電場を与える電荷密度ρを求めよ．

問 2

電場の各成分が

$$\begin{cases} E_x = \alpha rx,\, E_y = \alpha ry,\, E_z = \alpha rz & (r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} < a\text{ のとき}) \\ E_x = \dfrac{\alpha a^4 x}{r^3},\, E_y = \dfrac{\alpha a^4 y}{r^3},\, E_z = \dfrac{\alpha a^4 z}{r^3} & (r > a\text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられるような電場$\vec{E}$がある．ただしαと a は定数である．このような電場を与える電荷密度ρを求めよ．

問 3

ベクトルポテンシャルの各成分が

$$\begin{cases} A_x = -\dfrac{\alpha z^2}{2},\, A_y = A_z = 0 & (|z| < \dfrac{d}{2}\text{のとき}) \\ A_x = -\dfrac{\alpha d|z|}{2} + \dfrac{\alpha d^2}{8},\, A_y = A_z = 0 & (|z| > \dfrac{d}{2}\text{のとき}) \end{cases}$$

で与えられるようなベクトルポテンシャル$\vec{A}$がある．ただし,αと d は定数である．このようなベクトルポテンシャルを与える磁場$\vec{B}$および電流密度$\vec{j}$を求めよ．

問 4

磁場の各成分が

$$\begin{cases} B_x = \alpha y,\, B_y = -\alpha x,\, B_z = 0 & (\rho = \sqrt{x^2+y^2} < a\text{ のとき}) \\ B_x = \dfrac{\alpha a^2 y}{\rho^2},\, B_y = -\dfrac{\alpha a^2 x}{\rho^2},\, B_z = 0 & (\rho > a\text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられるような磁場$\vec{B}$がある．以下の問題に答えよ．ただし,αと a は定数である．

(1) このような電場を与える電流密度 j を求めよ．

(2) このような電場を与えるベクトルポテンシャル$\vec{A}$の例を示せ．

問 5 ♠

マクスウェル方程式を用いて真空中の電磁波の波動方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\vec{\nabla}^2 \vec{E} \\ \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\vec{\nabla}^2 \vec{B} \end{cases}$$

を導け．

問 1

電場の各成分が

$$\begin{cases} E_x = E_y = 0,\, E_z = \dfrac{\alpha z|z|}{2} & (|z| < \dfrac{a}{2}\text{のとき}) \\ E_x = E_y = 0,\, E_z = \dfrac{\alpha a^2}{2}\dfrac{|z|}{z} & (|z| > \dfrac{a}{2}\text{のとき}) \end{cases}$$

で与えられるような電場$\vec{E}$がある．ただしαと a は定数である．このような電場を与える電荷密度ρを求めよ．

解答

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\rho = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \begin{cases} \alpha|z| & (|z| < \dfrac{a}{2}) \\ 0 & (|z| > \dfrac{a}{2}) \end{cases}$$

$$\therefore \quad \rho = \begin{cases} \alpha\varepsilon_0|z| & (|z| < \dfrac{a}{2}) \\ 0 & (|z| > \dfrac{a}{2}) \end{cases}$$

問 2

電場の各成分が

$$\begin{cases} E_x = \alpha r x,\, E_y = \alpha r y,\, E_z = \alpha r z & (r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} < a\text{ のとき}) \\ E_x = \dfrac{\alpha a^4 x}{r^3},\, E_y = \dfrac{\alpha a^4 y}{r^3},\, E_z = \dfrac{\alpha a^4 z}{r^3} & (r > a\text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられるような電場$\vec{E}$がある．ただしαと a は定数である．このような電場を与える電荷密度ρを求めよ．

解答

$$\frac{\partial}{\partial x}\alpha r x = \frac{\alpha(r^2+x^2)}{r}, \frac{\partial}{\partial y}\alpha r y = \frac{\alpha(r^2+y^2)}{r}, \frac{\partial}{\partial z}\alpha r z = \frac{\alpha(r^2+z^2)}{r},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\alpha a^4 x}{r^3} = \frac{\alpha a^4(r^2-3x^2)}{r^5}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{\alpha a^4 y}{r^3} = \frac{\alpha a^4(r^2-3y^2)}{r^5}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{\alpha a^4 z}{r^3} = \frac{\alpha a^4(r^2-3z^2)}{r^5}$$

であるため，

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\rho = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\alpha(3r^2+x^2+y^2+z^2)}{r} = 4\alpha r & (r < a) \\ \dfrac{\alpha a^4(3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0 & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore \quad \rho = \begin{cases} 4\alpha\varepsilon_0 r & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

$\boxed{\text{問 3}}$

ベクトルポテンシャルの各成分が

$$\begin{cases} A_x = -\dfrac{\alpha z^2}{2},\, A_y = A_z = 0 & (|z| < \dfrac{d}{2}\text{のとき}) \\ A_x = -\dfrac{\alpha d|z|}{2} + \dfrac{\alpha d^2}{8},\, A_y = A_z = 0 & (|z| > \dfrac{d}{2}\text{のとき}) \end{cases}$$

で与えられるようなベクトルポテンシャル$\vec{A}$がある．ただし,αと d は定数である．このようなベクトルポテンシャルを与える磁場$\vec{B}$および電流密度$\vec{j}$を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{cases} (0, -\alpha z, 0) & (|z| < \dfrac{d}{2}) \\ (0, -\dfrac{\alpha d}{2}\dfrac{|z|}{z}, 0) & (|z| > \dfrac{d}{2}) \end{cases}$$

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{cases} (\alpha, 0, 0) & (|z| < \dfrac{d}{2}) \\ (0, 0, 0) & (|z| > \dfrac{d}{2}) \end{cases}$$

$$\therefore \quad \vec{j} = \begin{cases} (\dfrac{\alpha}{\mu_0}, 0, 0) & (|z| < \dfrac{d}{2}) \\ (0, 0, 0) & (|z| > \dfrac{d}{2}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{問 4}}$

磁場の各成分が

$$\begin{cases} B_x = \alpha y,\, B_y = -\alpha x,\, B_z = 0 & (\rho = \sqrt{x^2+y^2} < a \text{ のとき}) \\ B_x = \dfrac{\alpha a^2 y}{\rho^2},\, B_y = -\dfrac{\alpha a^2 x}{\rho^2},\, B_z = 0 & (\rho > a \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられるような磁場$\vec{B}$がある．以下の問題に答えよ．ただし,αと a は定数である．

(1)　このような電場を与える電流密度 j を求めよ．

(2)　このような電場を与えるベクトルポテンシャル$\vec{A}$の例を示せ．

$\boxed{\text{解答}}$

(1)

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \begin{cases} -\alpha - \alpha = -2\alpha & (\rho < a) \\ -\dfrac{\alpha a^2(\rho^2 - 2x^2)}{\rho^4} - \dfrac{\alpha a^2(\rho^2 - 2y^2)}{\rho^4} = 0 & (\rho > a) \end{cases}$$

であるため,

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{cases} (0, 0, -2\alpha) & (\rho < a) \\ (0, 0, 0) & (\rho > a) \end{cases}$$

$$\therefore \quad \vec{j} = \begin{cases} (0, 0, -2\dfrac{\alpha}{\mu_0}) & (\rho < a) \\ (0, 0, 0) & (\rho > a) \end{cases}$$

(2) $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$より

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \begin{cases} \alpha y & (\rho < a) \\ \dfrac{\alpha a^2 y}{\rho^2} & (\rho > a) \end{cases}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \begin{cases} -\alpha x & (\rho < a) \\ -\dfrac{\alpha a^2 x}{\rho^2} & (\rho > a) \end{cases}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$$

なので，例えば

$$\vec{A} = \begin{cases} (-\alpha xz, -\alpha yz, 0) & (\rho < a) \\ (-\dfrac{\alpha a^2 xz}{\rho^2}, -\dfrac{\alpha a^2 yz}{\rho^2}, 0) & (\rho > a) \end{cases}$$

とすると条件が満たされる．

$\boxed{\text{問 5}}$ ♠

マクスウェル方程式を用いて真空中の電磁波の波動方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{E} \\ \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{B} \end{cases}$$

を導け.

$\boxed{\text{解答}}$

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ の両辺を t で微分すると,

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ より $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$ なので,

$$-\nabla \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

ここで, $\nabla \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ の両辺を t で微分すると,

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ より $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}$ なので,

$$\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

ここで, $\nabla \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{B}$$

VI　誘電体中の電場

相対誘電率 (比誘電率)

電気容量 C_0のコンデンサーの極板間をある誘電体で満たしたところ，電気容量が C になったとする．このとき，誘電体の相対誘電率 (比誘電率)κを

$$\kappa = \frac{C}{C_0}(> 1)$$

と定義する．

分極

分極：単位体積当たりの電気双極子モーメント
電場$\vec{E}$中の誘電体の分極$\vec{P}$は,

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = (\kappa - 1)\varepsilon_0 \vec{E}$$

$\chi_e = \kappa - 1$ を電気感受率という．

誘電体中の電場の方程式

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

$$\int_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

電束密度 :$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$　　　εは誘電体中の誘電率

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

演習問題

問 1

厚さ a の無限に広い板の内部に電荷が密度ρで分布している．この板の両面は，厚さ b，相対誘電率 (比誘電率)κの板状の誘電体に覆われている．この板の中心を $z=0$ とするとき，電場$\vec{E}$と分極$\vec{P}$の大きさを z の関数として求めよ．

問 2

半径 a の球の内部に電荷 Q が一様に分布している．この球の外側は，内半径 a，外半径 $b(a<b)$，相対誘電率 (比誘電率)κの板状の誘電体に覆われている．電場$\vec{E}$と分極$\vec{P}$の大きさを中心からの距離 r の関数として求めよ．

問 3

中心を共有する半径 a および $b(a<b)$ の二つの球形の極板からなるコンデンサーがある．半径 a の極板には電荷 Q が一様に分布し，半径 b の極板には電荷 $-Q$ が一様に分布している．また，コンデンサーの極板間には相対誘電率 (比誘電率)κの誘電体が充填されている。電場$\vec{E}$および分極$\vec{P}$の大きさを中心からの距離 r の関数として求めよ．

問 4

軸を共有する断面の半径が a および $b(a<b)$ である二つの円筒形の極板からなるコンデンサーがある．断面の半径が a である極板には電荷 Q が一様に分布し，断面の半径が b である極板には電荷 $-Q$ が一様に分布している．また，コンデンサーの極板間には相対誘電率 (比誘電率)κの誘電体が充填されている。電場$\vec{E}$および分極$\vec{P}$の大きさを軸からの距離 r の関数として求めよ．

問 1

厚さ a の無限に広い板の内部に電荷が密度ρで分布している．この板の両面は，厚さ b，相対誘電率 (比誘電率)κの板状の誘電体に覆われている．この板の中心を $z=0$ とするとき，電場$\vec{E}$と分極$\vec{P}$の大きさを z の関数として求めよ．

解答

閉曲面 S として，底面積 A，高さ $2|z|$ で，底面が電荷の面と平行で軸が電荷の面と直交するような角柱または円柱を考える．
誘電体中の電場の方程式より，

$$\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{底面}} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{\text{側面}} \vec{D}\cdot d\vec{S} = 2A\times D(z) + 0 = \begin{cases} 2A\rho z & (|z| < \dfrac{a}{2}) \\ Aa\rho & (|z| > \dfrac{a}{2}) \end{cases}$$

$$D(z) = \begin{cases} \varepsilon_0 E(r) + P(r) = \varepsilon_0\kappa E(r) & (\dfrac{a}{2} < |z| < \dfrac{a}{2} + b) \\ \varepsilon_0 E(r) & (|z| < \dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2} + b < |z|) \end{cases} \quad \text{より，}$$

$$E(z) = \begin{cases} \dfrac{\rho z}{\varepsilon_0} & (|z| < \dfrac{a}{2}) \\ \dfrac{a\rho}{2\kappa\varepsilon_0} & (\dfrac{a}{2} < |z| < \dfrac{a}{2} + b) \\ \dfrac{a\rho}{2\varepsilon_0} & (\dfrac{a}{2} + b < |z|) \end{cases}$$

$$P(z) = \begin{cases} \dfrac{(\kappa-1)a\rho}{2\kappa} & (\frac{a}{2} < |z| < \frac{a}{2} + b) \\ 0 & (|z| < \frac{a}{2}, \frac{a}{2} + b < |z|) \end{cases}$$

解説

誘電体に外部から電場がかかると，誘電体中に電荷の偏りが生じ，その電荷によって誘電体中に電場を生じます．そのようにして生じた電場の大きさを表すベクトルを分極といいます．ですから，誘電体中でなければ分極は常に 0 になります．誘電対の分極の大きさは誘電体の外部の電場の大きさに比例し,$\vec{P} = (\kappa - 1)\varepsilon_0\vec{E}$ となっています.
誘電体中の電場というのは，外部からかかる電場と内部にできる電場の和 $(\vec{E} + \vec{P}/\varepsilon_0)$ になり，それをε_0倍したベクトル $(\vec{E} + \vec{P}/\varepsilon_0)$ を電束密度といいます．電場$\vec{E}$を電束密度$\vec{D}$に置き換えると，ガウスの法則は以下のように書き換えられます.

$$\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q$$

$$\int_S (\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})\cdot d\vec{S} = Q$$

問 2

半径 a の球の内部に電荷 Q が一様に分布している．この球の外側は，内半径 a，外半径 $b(a<b)$，相対誘電率 (比誘電率)κの板状の誘電体に覆われている．電場$\vec{E}$と分極$\vec{P}$の大きさを中心からの距離 r の関数として求めよ．

解答

閉曲面 S として，電荷 Q と中心が同じ半径 r の球面を考える．
誘電体中の電場の方程式より，

$$\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \times D(r) = \begin{cases} \dfrac{r^3}{a^3}Q & (r<a) \\ Q & (r>a) \end{cases}$$

$$D(r) = \begin{cases} \varepsilon_0 E(r) + P(r) = \varepsilon_0 \kappa E(r) & (a<r<b) \\ \varepsilon_0 E(r) & (r<a,\, b<r) \end{cases} \quad \text{より，}$$

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r & (r<a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\kappa\varepsilon_0 r^2} & (a<r<b) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (b<r) \end{cases}$$

$$P(r) = \begin{cases} \dfrac{\kappa-1}{4\pi\kappa}\dfrac{Q}{r^2} & (a<r<b) \\ 0 & (r<a,\, b<r) \end{cases}$$

解説

真空中に誘電体を挿入する．

$\vec{E}$を$\dfrac{1}{\varepsilon_0}\vec{D}$で置き換える．

$\varepsilon_0\vec{E}$を$\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$で置き換える．

ε_0を$\kappa\varepsilon_0$で置き換える．

以上の作業は全て同値です．誘電体を挿入した後も真空である場所は誘電体の影響を全く受けないことを考えると，問 1 の電場は p.8 の I 問 4 の電場を，誘電体が挿入された $a/2<|z|<a/2+b$ の部分だけε_0を$\kappa\varepsilon_0$で置き換えたものだし，問 2 の電場は p.8 の I 問 5 の電場を，誘電体が挿入された $a<r<b$ の部分だけε_0を$\kappa\varepsilon_0$ で置き換えたものになっています．

問 3

中心を共有する半径 a および $b(a<b)$ の二つの球形の極板からなるコンデンサーがある．半径 a の極板には電荷 Q が一様に分布し，半径 b の極板には電荷 $-Q$ が一様に分布している．また，コンデンサーの極板間には相対誘電率 (比誘電率)κの誘電体が充填されている。電場$\vec{E}$および分極$\vec{P}$の大きさを中心からの距離 r の関数として求めよ．

解答

閉曲面 S として，半径が r で両極板に中心が一致する球を考える．
誘電体中の電場の方程式より，

$$\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \times D(r) = \begin{cases} Q & (a<r<b) \\ 0 & (r<a,\, b<r) \end{cases}$$

$$D(r) = \begin{cases} \varepsilon_0 E(r) + P(r) = \varepsilon_0 \kappa E(r) & (a<r<b) \\ \varepsilon_0 E(r) & (r<a,\, b<r) \end{cases}$$ より，

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\kappa\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & (a<r<b) \\ 0 & (r<a,\, b<r) \end{cases}$$

$$P(r) = \begin{cases} \dfrac{\kappa-1}{4\pi\kappa}\dfrac{Q}{r^2} & (a<r<b) \\ 0 & (r<a,\, b<r) \end{cases}$$

問 4

軸を共有する断面の半径が a および $b(a < b)$ である二つの円筒形の極板からなるコンデンサーがある．断面の半径が a である極板には電荷 Q が一様に分布し，断面の半径が b である極板には電荷 $-Q$ が一様に分布している．また，コンデンサーの極板間には相対誘電率 (比誘電率)κの誘電体が充填されている。電場$\vec{E}$および分極$\vec{P}$の大きさを軸からの距離 r の関数として求めよ．

解答

閉曲面 S として，底面の半径が r，高さが l で両極板に軸が一致する円柱を考える．
誘電体中の電場の方程式より，

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2\pi rl \times D(r) = \begin{cases} Q & (a < r < b) \\ 0 & (r < a,\, b < r) \end{cases}$$

$$D(r) = \begin{cases} \varepsilon_0 E(r) + P(r) = \varepsilon_0 \kappa E(r) & (a < r < b) \\ \varepsilon_0 E(r) & (r < a,\, b < r) \end{cases}$$ より，

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi\kappa\varepsilon_0 rl} & (a < r < b) \\ 0 & (r < a,\, b < r) \end{cases}$$

$$P(r) = \begin{cases} \dfrac{\kappa - 1}{2\pi\kappa}\dfrac{Q}{rl} & (a < r < b) \\ 0 & (r < a,\, b < r) \end{cases}$$

解説

問 3 と問 4 の電場も問 1，問 2 と同様に，それぞれ p.10 の I 問 6，p.11 の I 問 7 の電場の $a < r < b$ の部分だけε_0を$\kappa\varepsilon_0$ で置き換えたものになっています．なお，期末試験ではさらに「並行板コンデンサーの容量に等しいことを示せ」などが出題される可能性がありますので，I の問 6，問 7 も復習しておきましょう．