2004年度冬学期解答

1　はじめに

所詮一学生が作ったものにすぎません。参照の際は自己責任でお願いします。

不備、誤りがあったら、g940609@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp までお願いします。できるだけ早く直します。

小西

2　問1

今年はジョルダン標準形についてそこまで深くはやっていないので、たぶんこれは範囲外です。

3　問2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ のジョルダン標準形を求めよ。

解答. 変換行列の形は求められていなので、本来ならジョルダンダイアグラムを求めればジョルダン標準形が決定し解決する。
しかし、講義ではジョルダンダイアグラムの求め方をほとんど詳しく説明していない。

そこで、連立一次方程式的にジョルダン標準形を決定してみる。

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^4$$
$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

方程式

$$(A - I_4)\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

が解を持つ条件を考える。

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 4 & -2 & 1 & -2 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{a}{2} + \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2a + b + d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right)$$

よって、

$$\begin{cases} 2a = b + d \\ c = 0 \end{cases}$$

$\mathbf{0}$ は解の存在条件を満たすから、$(A - I_4)\boldsymbol{p}_1 = \mathbf{0}$ とおくと、

$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる。

$\boldsymbol{p}_1$ は解の存在条件を満たすから、$(A - I_4)\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1$ とおくと、

$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととれる。

$\boldsymbol{p}_2$ は解の存在条件を満たさない。
よって、$(A - I_4)\boldsymbol{p}_3 = \mathbf{0}$ とおき、$\boldsymbol{p}_3$ が $\boldsymbol{p}_1$ と一次独立になるように $\boldsymbol{p}_3$ を選ぶと、

$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ととれる。

$\boldsymbol{p}_3$ は解の存在条件を満たすから、$(A - I_4)\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{p}_3$ とおくと、

$\boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととれる。

$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 & \boldsymbol{p}_4 \end{pmatrix}$ とおく。

$$A\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1, A\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2, A\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_3, A\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_4$$

より、

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} A\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 & A\boldsymbol{p}_3 & A\boldsymbol{p}_4 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

また、本来なら一般論より確かめる必要はないのだが、$|P| = 2 \neq 0$ より P は正則。

$$\therefore A = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

ゆえに、A のジョルダン標準形は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square$$

4　問3

(1) $A = \begin{pmatrix} 15 & -5 & -6 \\ 5 & -2 & -3 \\ 27 & -9 & -10 \end{pmatrix}$ の最小多項式が
$m_A(\lambda) = \Phi_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+1)$ であることを示せ。

(2)$W(2) = \mathrm{Ker}(A-2I_3)^2, W(-1) = \mathrm{Ker}(A+I_3)$ とおく。
直和分解

$$\mathbb{C}^3 = W(2) \oplus W(-1)$$

において、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3$ に対して、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \quad (\boldsymbol{x}_1 \in W(2), \boldsymbol{x}_2 \in W(-1))$$

とする。
$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を A と $\boldsymbol{x}$ で表せ。

解答. (1) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+1)$ であるから、
最小多項式 $m_A(\lambda)$ は、$(\lambda-2)(\lambda+1), (\lambda-2)^2(\lambda+1)$ のいずれか。

$$(A-2I_3)(A+I_3) = \begin{pmatrix} 21 & -6 & -9 \\ -21 & 6 & 9 \\ 63 & -18 & -27 \end{pmatrix} \neq O_3$$

よって、

$$m_A(\lambda) = \Phi_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+1)$$ □

解答. (2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\lambda-2)^2(\lambda+1)} &= \frac{\frac{1}{3}}{(\lambda-2)^2} + \frac{-\frac{1}{9}}{\lambda-2} + \frac{\frac{1}{9}}{\lambda+1} \\ &= \frac{-\frac{1}{9}\lambda + \frac{5}{9}}{(\lambda-2)^2} + \frac{\frac{1}{9}}{\lambda+1} \end{aligned}$$

$$\therefore 1 = (-\frac{1}{9}\lambda + \frac{5}{9})(\lambda+1) + \frac{1}{9}(\lambda-2)^2$$

ゆえに、

$$I_3 = (-\frac{1}{9}A + \frac{5}{9}I_3)(A+I_3) + \frac{1}{9}(A-2I_3)^2$$

ここで、

$$P_1 = (-\frac{1}{9}A + \frac{5}{9}I_3)(A+I_3), P_2 = \frac{1}{9}(A-2I_3)^2$$

とおくと、

$$I_3 = P_1 + P_2 \tag{1}$$

となる。
(1) より、$\boldsymbol{x_1} = P_1\boldsymbol{x_1} + P_2\boldsymbol{x_1}$
ここで、

$$\begin{aligned} P_2\boldsymbol{x_1} &= \frac{1}{9}(A-2I_3)^2\boldsymbol{x_1} \\ &= \frac{1}{9}\mathbf{0} \quad (\because \boldsymbol{x_1} \in W(2) = \mathrm{Ker}(A-2I_3)^2) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

よって、$\boldsymbol{x_1} = P_1\boldsymbol{x_1}$
同様にして、$P_1\boldsymbol{x_2} = \mathbf{0}$ も示せる。
以上より、

$$\begin{aligned} P_1\boldsymbol{x} &= P_1\boldsymbol{x_1} + P_1\boldsymbol{x_2} \\ &= P_1\boldsymbol{x_1} \\ &= \boldsymbol{x_1} \end{aligned}$$

よって、$W(2)$ への射影は、

$$P_1 = (-\frac{1}{9}A + \frac{5}{9}I_3)(A+I_3)$$

同様にして、$W(-1)$ への射影は,

$$P_2 = \frac{1}{9}(A-2I_3)^2 \qquad \square$$

(補足)
$W(2), W(-1)$ を具体的に求めてみると、

$$W(2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, W(-1) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次独立なので、確かに

$$\mathbb{C}^3 = W(2) \oplus W(-1)$$

と直和分解できている。

5 問4

> $A \in M_3(\mathbb{C})$ に対して、
>
> $$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$
>
> が成立するとする。λ の多項式 $f(\lambda)$ に対して、
>
> $$\Phi_{f(A)}(\lambda) = (\lambda - f(\alpha))(\lambda - f(\beta))(\lambda - f(\gamma))$$
>
> を示せ。

解答. 固有値 α に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とおくと、

$$A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}$$

$f(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$ とおく。
このとき、$f(A) = a_nA^n + \cdots + a_1A + a_0I_3$ より、

$$\begin{aligned} f(A)\boldsymbol{v} &= a_nA^n\boldsymbol{v} + \cdots + a_1A\boldsymbol{v} + a_0I_3\boldsymbol{v} \\ &= a_n\alpha^n\boldsymbol{v} + \cdots + a_1\alpha\boldsymbol{v} + a_0\boldsymbol{v} \\ &= f(\alpha)\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

よって、$f(A)$ は固有値 $f(\alpha)$ を持つ。
β, γ についても同様のことがいえる。
ゆえに、

$$\Phi_{f(A)}(\lambda) = (\lambda - f(\alpha))(\lambda - f(\beta))(\lambda - f(\gamma)) \qquad \square$$

6 問5

実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ を考える。
$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ に対して、$\|\boldsymbol{x}\| = 1$ の下で $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ を最大化、最小化せよ。

解答. $T = \lambda I_4 - A$ とおく。

$$|T| = (\lambda + 3)^2(\lambda - 3)^2$$

$\lambda = -3$ のとき、

$$T = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

グラム・シュミットの正規直交化法により、

固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ がとれる。

$\lambda = 3$ のとき、

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

グラム・シュミットの正規直交化法により、

固有ベクトル $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_4 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 & \boldsymbol{p}_4 \end{pmatrix}$ とおく。

$$AP = P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ が $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底であることは簡単に確かめられるから、
P は直交行列となる。

よって、${}^tPAP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とおく。
${}^tP\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}\,(\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4)$ とすると、

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{w} \tag{1}$$

P は直交行列なので、$\|\boldsymbol{x}\| = 1$ より、$\|\boldsymbol{w}\| = 1$
$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと、

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{2}$$

(1) より、

$$\begin{aligned} (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= (AP\boldsymbol{w}, P\boldsymbol{w}) \\ &= ({}^tPAP\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) \\ &= (B\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) \\ &= -3w^2 - 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \end{aligned}$$

最大値について、(2) より、

$$\begin{aligned} (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= 3 - 6w^2 - 6x^2 \\ &\leq 3 \end{aligned}$$

等号は、$w = x = 0$ で成立。
このとき、$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{w} = y\boldsymbol{p}_3 + z\boldsymbol{p}_4\,(y^2 + z^2 = 1)$
よって、

$$\boldsymbol{x} = y\boldsymbol{p}_3 + z\boldsymbol{p}_4\,(y^2 + z^2 = 1)\text{ のとき、}\max(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 3$$

最小値について、(2) より、

$$\begin{aligned} (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= -3 + 6y^2 + 6z^2 \\ &\geq -3 \end{aligned}$$

等号は、$y = z = 0$ で成立。
このとき、$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{w} = w\boldsymbol{p}_1 + x\boldsymbol{p}_2\,(w^2 + x^2 = 1)$
よって、

$$\boldsymbol{x} = w\boldsymbol{p}_1 + x\boldsymbol{p}_2\,(w^2 + x^2 = 1)\text{ のとき、}\min(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -3 \qquad \square$$

7　問6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 1 & 13 \\ 9 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

に対して、$\mathrm{Ker}(A)$ と $\mathrm{Im}(A)$ の基底をそれぞれ一組求めよ。

解答.

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 54 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -19 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して、$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -z \begin{pmatrix} 0 \\ 54 \\ 11 \\ -19 \\ -1 \end{pmatrix}$$

よって、$\mathrm{Ker}(A)$ の基底として、$\begin{pmatrix} 0 \\ 54 \\ 11 \\ -19 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれる。

また (1) より、$\mathrm{Im}(A)$ の基底として、$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

がとれる。 □

(補足) 計算チェック。

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 54 \\ 11 \\ -19 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

こういうチェックを行えば、計算ミスを最小限にできるはず。

8 問 7

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して、

$$V = \mathbb{R}\boldsymbol{a}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{a}_2, W = \mathbb{R}\boldsymbol{a}_3 + \mathbb{R}\boldsymbol{a}_4$$

とする。部分空間 $V \cap W$ の基底を求めよ。

解答. $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix}$ とする。
$V \cap W$ の任意の元 $\boldsymbol{u}$ をとると、

$$\boldsymbol{u} = w\boldsymbol{a}_1 + x\boldsymbol{a}_2 = -y\boldsymbol{a}_3 - z\boldsymbol{a}_4$$

とおける。

$$\therefore A \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ここで、

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -z \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{R})$$

よって、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= w\boldsymbol{a}_1 + x\boldsymbol{a}_2 \\ &= -3z\boldsymbol{a}_1 + 2z\boldsymbol{a}_2 \\ &= z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

ゆえに、$V \cap W$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ がとれる。 $\square$