2007年度冬学期解答

1　はじめに

　所詮一学生が作ったものにすぎません。参照の際は自己責任でお願いします。

　不備、誤りがあったら、g940609@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp までお願いします。できるだけ早く直します。

小西

2　問1

(1)$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

$V = \mathbb{R}\boldsymbol{a_1} + \mathbb{R}\boldsymbol{a_2} + \mathbb{R}\boldsymbol{a_3}$ の正規直交基底を 1 組求めよ。

(2)$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ の V への正射影を 4 次正方行列 P を用いて $P\boldsymbol{x}$ と表せ

解答. (1) グラム・シュミットの正規直交化法により、正規直交基底

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を得る。 □

解答. (2) 求める正射影は、

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x})\boldsymbol{p}_1 + (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{x})\boldsymbol{p}_2 + (\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{x})\boldsymbol{p}_3 &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{p}_1 \\ {}^t\boldsymbol{p}_2 \\ {}^t\boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{p}_1 \\ {}^t\boldsymbol{p}_2 \\ {}^t\boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}
$$

とおけば、V への正射影は $P\boldsymbol{x}$ と表される。 □

3　問2

$\mathbb{R}^n$ の部分空間 V の次元を l として V の基底を $\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_l}$ とする。
$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \cdots & \boldsymbol{a_l} \end{pmatrix}$ とおく。
(1) 一般に $m \times n$ 行列 A に対して

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^tA)$$

であることを用いてよい。

$$V^\perp = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \boldsymbol{v} \in V, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = 0\}$$

に対して
$(a)V^\perp = \mathrm{Ker}({}^tA)$
$(b)\mathrm{dim}V^\perp = n - l$
であることを示せ。

(2)
(a)$V \subset (V^\perp)^\perp$ を示せ。
(b)$V = (V^\perp)^\perp$ を次元定理を用いて示せ。

(3)$m \times n$ 行列 B に対して

$$\mathrm{Ker}(B)^\perp = \mathrm{Im}({}^tB)$$

を示せ。

解答. (1)$V = \mathrm{Im}(A)$ と表される。
任意の $\boldsymbol{v} \in V^\perp$ をとる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \in V^\perp &\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n, (\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n, ({}^tA\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0 \\
&\Leftrightarrow {}^tA\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}({}^tA)
\end{aligned}$$

よって、

$$V^\perp = \mathrm{Ker}({}^tA)$$

また、次元定理より、

$$\begin{aligned}\mathrm{dim} V^{\perp} &= \mathrm{dim}\mathrm{Ker}({}^tA)\\ &= n - \mathrm{dim}\mathrm{Im}({}^tA)\\ &= n - \mathrm{rank}({}^tA)\\ &= n - \mathrm{rank}(A)\\ &= n - \mathrm{dim}\mathrm{Im}(A)\\ &= n - \mathrm{dim}V\\ &= n - l\end{aligned}$$

よって、

$$\mathrm{dim}V^{\perp} = n - l \qquad \square$$

解答. (2) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ をとる。
$V^{\perp}$ の定義より、

$$\forall \boldsymbol{w} \in V^{\perp}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$$

$$\therefore \boldsymbol{v} \in (V^{\perp})^{\perp}$$

ゆえに、

$$V \subset (V^{\perp})^{\perp}$$

さらに、(1) より、

$$\begin{aligned}\mathrm{dim}(V^{\perp})^{\perp} &= n - \mathrm{dim}V^{\perp}\\ &= n - (n - \mathrm{dim}V)\\ &= \mathrm{dim}V\end{aligned}$$

これより、

$$V = (V^{\perp})^{\perp} \qquad \square$$

解答. (3) (1) より、一般の行列 C に対して、

$$\mathrm{Ker}({}^tC) = \mathrm{Im}(C)^{\perp}$$

$B = {}^tC$ とおくと、

$$\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Im}({}^tB)^{\perp}$$

さらに、(2) より、

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(B)^{\perp} &= (\mathrm{Im}({}^{t}B)^{\perp})^{\perp} \\ &= \mathrm{Im}({}^{t}B)\end{aligned}$$

よって、

$$\mathrm{Ker}(B)^{\perp} = \mathrm{Im}({}^{t}B) \qquad \square$$

4　問 3

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ を直交行列を用いて対角化せよ。

解答. $T = \lambda I_3 - A$ とおく。

$$|T| = (\lambda - 3)^2(\lambda - 6)$$

$\lambda = 3$ のとき、

$$\begin{aligned}T &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと、$x + y + z = 0$

グラム・シュミットの正規直交化法により、

固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

$\lambda = 6$ のとき、

$$
\begin{aligned}
T &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって、固有ベクトル $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix}$ とおく。

$$
AP = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}
$$

$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であることは簡単に確かめられるから、
P は直交行列となる。
よって、

$$
{}^tPAP = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \square
$$

5　問4

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ により $\mathbb{R}^3$ は

$$\mathbb{R}^3 = V(-1) \oplus V(3) \oplus V(-3)$$

と直和分解できる。
ただし、$V(\alpha) = \mathrm{Ker}(A - \alpha I_3)$ とする。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3}$$

と、この直和分解に応じて分解するとき、

$$\boldsymbol{x_1} = f(A)\boldsymbol{x}\,(\in V(-1))$$

となる多項式 $f(t)$ を求めよ。

解答.

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda+3)$$

よって、

$$\mathbb{R}^3 = V(-1) \oplus V(3) \oplus V(-3)$$

と直和分解できる。
ここで、$f(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_l t^l$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(A)\boldsymbol{x} &= (c_0 I_3 + c_1 B + \cdots + c_l A^l)(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3}) \\ &= \left\{c_0 + \cdots + c_l \times (-1)^l\right\}\boldsymbol{x_1} + \left\{c_0 + \cdots + c_l \times 3^l\right\}\boldsymbol{x_2} + \left\{c_0 + \cdots + c_l \times (-3)^l\right\}\boldsymbol{x_3} \\ &= f(-1)\boldsymbol{x} + f(3)\boldsymbol{y} + f(-3)\boldsymbol{z} \end{aligned}$$

ラグランジュの補間公式を用いて、$f(t)$ を決定する。
$f(-1) = 1, f(3) = f(-3) = 0$ より、

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 \times \frac{(t-3)(t-(-3))}{(-1-3)(-1-(-3))} + 0 \times \frac{(t-(-3))(t-(-1))}{(3-(-3))(3-(-1))} + 0 \times \frac{(t-(-1))(t-3)}{(-3-(-1))(-3-3)} \\ &= -\frac{1}{8}(t-3)(t+3) \end{aligned}$$

$$\therefore f(t) = -\frac{1}{8}(t-3)(t+3)$$

□

(補足)
ラグランジュの補間公式を使わなくても解ける。
$f(3) = f(-3) = 0$ より、$f = a(t-3)(t+3)$
$f(-1) = 1$ より、a が求まり、$f(t)$ を決定できる。

6　問5

$A = (a_{ij})$ を 3 次正方行列とする。

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

とするとき、a_2 を求めよ。

解答.

$$a_2 = {\Phi_A}'(0)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
{\Phi_A}'(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda}\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{13} \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

(i, j) 余因子を $\tilde{A}_{ij}$ とおけば、

$${\Phi_A}'(0) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{33}$$

$$\therefore a_2 = \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{33}$$

□

7　問6

次の行列の最小多項式を求めよ。

$(1)A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(2)B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

解答. (1)

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$$

よって、最小多項式 $m_A(t)$ は、

$$(t+2)(t-1), (t+2)(t-1)^2$$

のいずれか。

$$(A + 2I_3)(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \neq O_3$$

よって、

$$m_A(t) = (t+2)(t-1)^2$$

□

解答. (2)

$$\Phi_B(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

よって、最小多項式 $m_B(t)$ は、

$$(t-1)(t-2), (t-1)(t-2)^2$$

のいずれか。

$$(B - I_3)(B - 2I_3) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \neq O_3$$

よって、

$$m_B(t) = (t-1)(t-2)^2$$

□

8　問 7

問 6 の (2) の行列 B に対して $\mathbb{R}^3$ を直和分解せよ。
各固有空間はどの行列の核であるかについて記述すればよい。

解答. $m_B(t) = (t-1)(t-2)^2$ より、

$$\mathbb{R}^3 = W(1) \oplus W(2)$$

と直和分解できる。ただし、

$$W(1) = \mathrm{Ker}(B - I_3), W(2) = \mathrm{Ker}(B - 2I_3)^2$$

□

9　問 8

A を 3 次正方行列とする。
A が正則のとき、A^{-1} を A の多項式で表せ。

解答. まず、問 5 において、a_1, a_3 を求める。
$B = \lambda I_3 - A = (b_{ij})$ とする。

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} b_{3\sigma(3)} \\ &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) + \sum_{\sigma \neq \mathrm{id}} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} b_{3\sigma(3)} \\ &= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \cdots + \sum_{\sigma \neq \mathrm{id}} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} b_{3\sigma(3)}\end{aligned}$$

$\sigma \neq \mathrm{id}$ のとき、ある i について、$\sigma(i) \neq i$
$j = \sigma(i)$ とおくと、σ が単射であることから、$\sigma(j) \neq j$
よって、$b_{1\sigma(1)}, b_{2\sigma(2)}, b_{3\sigma(3)}$ の内少なくとも 2 つは対角成分でないので、
$\sum_{\sigma \neq \mathrm{id}} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} b_{3\sigma(3)}$ は高々1 次式。

$$\therefore a_1 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = -\mathrm{tr}(A)$$

また、

$$a_3 = \Phi_A(0) = |-A| = (-1)^3 |A| = -|A|$$

$$\therefore \Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - \mathrm{tr}(A)\lambda^2 + (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{33})\lambda - |A|$$

ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^3 - \mathrm{tr}(A)A^2 + (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{33})A - |A| I_3 = O_3$$

A は正則で、$|A| \neq 0$ ゆえ、

$$I_3 = \frac{1}{|A|}\left\{A^3 - \mathrm{tr}(A)A^2 + (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{33})A\right\}$$

両辺に A^{-1} をかけて、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left\{A^2 - \mathrm{tr}(A)A + (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{33})I_3\right\} \qquad \square$$

(補足)
a_1 については、直接計算した方が求めやすいだろう。