坂井さん配布プリント解答
まえがき

坂井さんが最終授業の最後に配布したプリントの解答です。過去問を見るにテイラー展開と極限の問題以外はこのプリントそのまま、極限は類題が出ているようなので解答を覚えればかなりの点数が期待できます。しかし坂井さん自身が解答を配布しなかったのでこれは Keen と Endow で考え出した回答例でもあります。勿論、二人で色々議論して調べたりして完璧な解答になるように努力しましたが未熟さ故のミス、重大な欠陥があるかもしれません。その点をご理解いただいた上でご使用ください。尚、調べた結果証明が載っていた、類似の解答があった、答えのみ見つかったなどはその都度記述していますのでその部分はまず間違いなく正しいはずです。また、解答の内容につきましては講義のノートに準拠しておりますのでわからない用語、公式、定理などはノートを参照ください。
最後に引用の略記と引用著作物を記しておきます。
（オイラー）「オイラーの贈物　新装版」　吉田武 著　東海大学出版会
（解析）「解析概論」　高木貞治 著　岩波書店
（微積）「数学シリーズ微分積分学」　難波誠　著
（I、II）「数理系のための　基礎と応用 微分積分 I、II」　金子晃 著　サイエンス社
（ノート）講義ノート

文責　Keen

問１．

有理関数

$$f(x)=\frac{3x^2-3x-9}{(x+2)(x+3)(x-1)^2}$$

を $f(x)=a/(x+2)+b/(x+3)+c/(x-1)+d/(x-1)^2$ の形に書くことができる（これを部分分数展開という）．a,b,c,d を求めよ．

〈解〉（オイラー）(解法)

$$(x+2)f(x)=\frac{3x^2-3x-9}{(x+3)(x-1)^2}=a+\frac{x+2}{x+3}b+\frac{x+2}{x-1}c+\frac{x+2}{(x-1)^2}d$$

$x=-2$ を代入して

$$\begin{aligned} a &= \frac{12+6-9}{1\times 9} \\ &= 1 \end{aligned}$$

同じく

$$\begin{aligned} b=(x+3)f(x)\mid_{x=-3} &= \frac{27+9-9}{-1\times(-4)^2} \\ &= -\frac{27}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d=(x-1)^2f(x)\mid_{x=1} &= \frac{3-3-9}{3\times 4} \\ &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

c について

$$\begin{aligned} (x-1)^2f(x) &= \frac{a(x-1)^2}{(x+2)}+\frac{b(x-1)^2}{x+3}+c(x-1)+d \\ \frac{d}{dx}(x-1)^2f(x) &= (x-1)^2(\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+3})'+2(x-1)(\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+3})+c \\ c=\frac{d}{dx}(x-1)^2f(x)\mid_{x=1} &= \frac{(6x-3)(x^2+5x+6)-(2x+5)(3x^2-3x-9)}{(x^2+5x+6)^2}\mid_{x=1} \\ &= \frac{3\times 12+9\times 7}{12^2}=\frac{11}{16} \end{aligned}$$

又は

$$f(x)=\frac{3x^2-3x-9}{(x+2)(x+3)(x-1)^2}=\frac{1}{x+2}-\frac{9}{4(x-3)}+\frac{c}{x-1}-\frac{3}{4(x-1)^2}$$

$$f(2)=\frac{12-6-9}{4\times 5\times 1}=\frac{1}{4}-\frac{27}{16}+c-\frac{3}{4}$$

$$\therefore\quad c=\frac{11}{16}$$

問２．

指数関数 e^x や，三角関数 $\sin x$ は x の多項式で表すことはできないことを証明しなさい。

〈解〉

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

とする．
e^x について
$e^x = f(x)$ と書けるとき

$$e^x = f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n+1)}(x) = 0$$

となり矛盾．よって題意成立．
$\sin x$ について
$\sin x = f(x)$ と書けるとき

$$\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = \ldots = 0$$

となり矛盾．よって題意成立．

問３．

数列 $\{a_n\}$ が０に収束しているとする．はじめの k 項の平均を b_k とおくと，数列 $\{b_n\}$ も０に収束することを示せ．

〈解〉（解析）
$^\exists\varepsilon > 0 \quad ^\exists N > \mathbf{N} \quad n > \mathbf{N} \to |a_n| < \varepsilon$
とすると

$$|b_k| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}\right| \leq \frac{|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k|}{k}$$

ここで $|a_i|(1 \leq i \leq N)$ の中で最大のものを A とすると
$n \geq N$ で $|a_n| < \varepsilon$ に注意して

$$|b_k| < \frac{AN + \varepsilon(k-n)}{k} < \frac{AN}{k} + \varepsilon$$

k を大きくとれば
$\frac{AN}{k} < \varepsilon$ より $|b_k| < 2\varepsilon = \varepsilon'$.
よって
$^\exists\varepsilon' > 0 \quad ^\exists N > \mathbf{N} \quad n > \mathbf{N} \to |b_n| < \varepsilon'$ より
$\{b_n\}$ は収束する

問４．

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ をそれぞれ $a_n = (1+\frac{1}{n})^n, b_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ で定義する．数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ はともに収束すること，さらに，同じ値に収束することを示せ.

〈解〉(ノート)

$$\begin{aligned}
b_n &= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} \\
&= 1+1+\frac{1}{2\times 1}+\frac{1}{3\times 2\times 1}+\ldots+\frac{1}{n\times(n-1)\times\ldots\times 3\times 2\times 1} \\
&\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 2}+\frac{1}{2\times 2\times 2}+\ldots+\frac{1}{2\times 2\times\ldots\times 2} \\
&= 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \\
&\leq 3 \\
a_n &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k+1}{n}\right) \\
&< b_n < 3
\end{aligned}$$

より $\{a_n\},\{b_n\}$ ともに上に有界.
$\{b_n\}$ が単調増加は明らかで,

$$\begin{aligned}
a_n &= 1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{n^2}+\ldots \\
&= 1+1+1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots \\
a_{n+1} &= 1+1+\frac{(n+1)n}{(n+1)^2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)^3}+\ldots \\
&= 1+1+1\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+1\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\ldots
\end{aligned}$$

各項を比べると a_{n+1} の方が大きく，項数も多いのでので $\{a_n\}$ も単調増加.
よって $\{a_n\},\{b_n\}$ ともに上に有界で単調増加なので A3 定理より収束する.

$a_n \leq b_n$ を示したので

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

としたとき $e \geq \beta$ がいえればよい.
つまり β は b_n の上限だから $e \geq b_n$ がいえればよい.
$n \leq m$ としたとき

$$a_m = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{m}\right) \geq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)$$

より

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} a_m = e &\geq \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\\ &= b_n\end{aligned}$$

よって $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

問５.

次のふたつの，和の順番の違う無限級数の，収束，発散を調べよ.

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\dots$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\dots$$

〈解〉

(上) 第 n 項までの部分和を S_n と書くと，S_{odd} は単調減少，S_{even} は単調増加．$S_{odd} > S_{even}$ よりどちらも有界.

$a_n \to 0$ より収束先は等しく、S_n 自体も収束.

(下)3 つごとの和の数列を b_n とすると

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\\ &> \frac{1}{\sqrt{4n}}+\frac{1}{\sqrt{4n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\\ &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\\ &> \frac{1}{\sqrt{n}}\\ \sum_{k=1}^{\infty} b_n &> \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} = \infty\end{aligned}$$

部分列の和が収束しないから全体も収束しない。

〈別解〉

(上)

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ は単調減少し 0 に収束するので A4 定理より収束する.

cf)A4 定理：交代級数 $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k \quad (a_k \geq 0)$ は a_k が単調減少かつ 0 に収束するなら収束する.

［証明］(I、II)

n を奇数として部分和 s_n を考えると

$s_{n+1} = s_n - a_{n+1}, s_{n+2} = s_{n+1} + a_{n+2} < s_n \quad (\because$ 仮定より $a_{n+1} > a_{n+2})$
$s_{n+3} = s_{n+2} - a_{n+3} > s_{n+1}$ などにより
$m \geq n$ として

$$|s_m - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$(仮定) より A1 定理 (コーシーの判定条件) を満たすから収束.
n が偶数の時も同様の議論が可能.
［証明終］

問 6 .

任意の実数 x, y に対して、$f(x+y) = f(x) + f(y)$ をみたす連続関数 f は $f(x) = ax$(a は定数) の形に限ることを示せ.

〈解〉
$x = y = 0$ を代入して整理して $f(0) = 0$
$y = 1$ を代入して $f(x+1) = f(x) + f(1)$
$f(1) = a$ とすると帰納的に $f(x) = ax \quad (x \in \mathbf{Z})$
$y = \frac{1}{n}$ を代入し、$f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$ などから帰納的に $f(x) = ax \quad (x \in \mathbf{Q})$
無理数に収束する有理数列を用いれば f の連続性より $f(x) = ax \quad (x \in \mathbf{R})$

問 7

次の解析関数の $x = 0$ での Taylor 展開を求めよ ((d) は x^4 の項まで)

$$(a)(1+x)^\lambda, \quad (b)\log(1+x^2), \quad (c)\sin^2 x, \quad (d)\frac{x}{e^x - 1}.$$

〈解〉
(a)
$\lambda \in \mathbf{N}^0$ のとき

$$(1+x)^\lambda = \sum_{k=0}^{\lambda} {}_\lambda C_k x^k$$

それ以外のとき

$$(1+x)^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1)}{k!} x^k$$

(b)(ノート)
$|x| < 1$ として

$$\frac{1}{1-x} \quad = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

両辺積分して-1 を掛けて

$$\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \ldots$$

x に $-x^2$ を代入して

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \dots$$

(c)

$$\begin{aligned} \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} &= -\frac{(2x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(2x)^4}{2\cdot 4!} - \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k-1} x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

(d)

$$\frac{x}{e^x-1} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

として両辺に $e^x - 1 = x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$ を掛けると

$$x = a_0 x + (a_1 + \frac{a_0}{2!})x^2 + (a_2 + \frac{a_1}{2!} + \frac{a_0}{3!})x^3 + (a_3 + \frac{a_2}{2!} + \frac{a_1}{3!} + \frac{a_0}{4!})x^4 + (a_4 + \frac{a_3}{2!} + \frac{a_2}{3!} + \frac{a_1}{4!} + \frac{a_0}{5!})x^5 + \dots$$

恒等式だから

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 &=& 1 \\ a_1 + \frac{a_0}{2!} &=& 0 \\ a_2 + \frac{a_1}{2!} + \frac{a_0}{3!} &=& 0 \\ a_3 + \frac{a_2}{2!} + \frac{a_1}{3!} + \frac{a_0}{4!} &=& 0 \\ a_4 + \frac{a_3}{2!} + \frac{a_2}{3!} + \frac{a_1}{4!} + \frac{a_0}{5!} &=& 0 \end{array} \right.$$

これを解いて

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -\frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{12} \quad a_3 = 0 \quad a_4 = -\frac{1}{720}$$

よって

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \dots$$

問 8 .

次の関数 $f(x)$ にたいし，$x=0$ における 100 次の微分係数と 101 次の微分係数を求めよ.

$$(a) f(x) = \frac{x}{1-x^{50}}, \qquad (b) f(x) = \frac{\sin x^{100}}{1+x}.$$

〈解〉

(a)

$|x| < 1$ で成立する式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

の x に x^{50} を代入して，x を掛けて

$$f(x)=\frac{x}{1-x^{50}}=x+x^{51}+x^{101}+x^{151}+\dots$$

$$f^{(100)}(x)=101!x+\frac{151!}{50!}x^{51}+\dots$$

$$\therefore f^{(100)}(0)=0$$

$$f^{(101)}(x)=101!+\frac{151!}{49!}x^{50}+\dots$$

$$\therefore f^{(101)}(0)=101!$$

(b)

$$\begin{aligned}\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\\ \frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+\dots\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\sin x^{100}}{1+x}=x^{100}-x^{101}+x^{102}-x^{103}+\dots+(1-\frac{1}{3!})x^{300}+\dots\\ f^{(100)}(x) &= 100!-101!x+\dots\\ \underline{f^{(100)}(0)} &= 100!\\ f^{(101)}(x) &= -101!+102!x-\dots\\ \underline{f^{(101)}(0)} &= -101!\end{aligned}$$

問９．

変数 x の $x=0$ における冪級数で，$x=0$ 以外の全ての点で発散するような例をあげよ．

〈解〉

$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ を考えると，

$x=0$ で $S(0)=0$.

$x\neq 0$ では

$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{a^n}\quad(a\neq 0)$ は発散することから

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

も発散するのでこれは条件を満たす.

問１０．

Bernoulli 数 B_n を
$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nB_nx^{2n}}{(2n)!}$$
で定義する．B_n を $n=1$ から 4 まで計算せよ．

〈解〉(I、II)(答えのみ)

$$\frac{x}{e^x-1}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x4+\dots$$

として両辺に $e^x-1=x+\frac{1}{2!}x^2+\dots$ を掛けると

$$x=a_0x+(a_1+\frac{a_0}{2!})x^2+(a_2+\frac{a_1}{2!}+\frac{a_0}{3!})x^3+(a_3+\frac{a_2}{2!}+\frac{a_1}{3!}+\frac{a_0}{4!})x^4+(a_4+\frac{a_3}{2!}+\frac{a_2}{3!}+\frac{a_1}{4!}+\frac{a_0}{5!})x^5+\dots$$

恒等式だから

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 &=& 1\\ a_1+\frac{a_0}{2!} &=& 0\\ a_2+\frac{a_1}{2!}+\frac{a_0}{3!} &=& 0\\ a_3+\frac{a_2}{2!}+\frac{a_1}{3!}+\frac{a_0}{4!} &=& 0\\ a_4+\frac{a_3}{2!}+\frac{a_2}{3!}+\frac{a_1}{4!}+\frac{a_0}{5!} &=& 0\\ &\vdots& \end{array}\right.$$

これを解いて

$$a_0=1\quad a_1=-\frac{1}{2}\quad a_2=\frac{1}{12}\quad a_3=0\quad a_4=-\frac{1}{720}\quad a_5=0\quad a_6=\frac{1}{42\cdot 720}\quad a_7=0\quad a_8=-\frac{1}{1080\cdot 720}$$

$B_n=(2n)!|a_{2n}|$ だから

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30}.$$

問１１．

$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ は C^∞-関数であって，$f'(0)=f''(0)=\dots=f^{(n)}(0)=\dots=0$ であることを示せ.

〈解〉(微積)(I、II)

まず $x\neq 0$ のとき $f^{(n)}(x)=\frac{p_n(x)}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$　($p_n(x)$ は $p_n(0)\neq 0$ となる多項式)

となることを示す.

$g(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ とする.

［1］

$g'(x)=(1+\frac{2}{x^3})e^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{x^3+2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$

より $p_1(x)=x^3+2$ とすれば題意成立.

［2］

$g^{(k)}(x) = \frac{p_k(x)}{x^{3k}} e^{-\frac{1}{x^2}}$ と仮定．この仮定の下で

$$\begin{aligned}\frac{dg(x)}{dx} &= \left\{\frac{p_k'(x)x^{3k} - 3kp_k(x)x^{3k-1}}{(x^{3k})^2} + \frac{2p_k(x)}{x^{3k+3}}\right\} \quad e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{p_k'(x)x^{3k} - 3kp_k(x)x^{3k-1} + 2p_k(x)}{x^{3k+3}} e^{-\frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

より $p_{k+1}(x) = p_k'(x)x^{3k} - 3kp_k(x)x^{3k-1} + 2p_k(x)$ とおけば $k+1$ でも成立．
［1］［2］より数学的帰納法から $x \neq 0$ で $f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$．
これは $n \to \infty$ でも成立するから f は $x \neq 0$ で C^∞ 級．
$x > 0$ として $\frac{1}{x^2} = t$ とおき，$k-1 < t < k$ なる自然数 k をとって

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3n}} = \frac{t^{\frac{3n}{2}}}{e^t} < \frac{t^{2n}}{e^t} < \frac{k^{2n}}{e^{k-1}} = e\frac{k^{2n}}{e^k} \to 0 (t \to \infty).$$

よって $p_n(0) < \infty$ により

$$\lim_{x \to +0} f^{(n)}(x) = 0$$

同様にして

$$\lim_{x \to -0} f^{(n)}(x) = 0$$

よって $f^{(n)}(x)$ は存在し，$f^{(n)}(0) = 0$.

問１２.

次の極限値を求めよ.

$$(a) \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2 \cos x}, \quad (b) \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad (c) \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{\log x + \log \log x}.$$

〈解〉
(a)

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \lim_{x \to 0} -\frac{\sin^2 x}{x^2 \cos x(\cos x + 1)} \\ &= -\frac{1}{1 \cdot (1+1)} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(b)(ノート)

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \log \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \log \frac{\sin x}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \log \left\{1 - \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \dots\right)\right\}\end{aligned}$$

$$X = \frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \dots$$

として

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \log \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \log(1-X) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \left(-X - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{3}X^3 \dots\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \left[-\frac{x^2}{3!} + \left\{\frac{1}{5!} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(3!)^2}\right\} x^4 + \dots\right] \\
&= -\frac{1}{3!}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{与式} = e^{-\frac{1}{6}}$$

(c)

$\log x = X$ と変数変換すれば $x \to \infty$ のとき $X \to \infty$ だから

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\log x + \log\log x} = \lim_{X\to\infty} \frac{X}{X + \log X} = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{\log X}{X}} = 1$$

問１３.

$\cot x = \cos x / \sin x$ の部分分数展開の公式

$$x \cot x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - n^2 x^2}$$

を冪級数に書き直し，Bernoulli 数と比べることで,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

の値を計算しなさい.

〈解〉(I、II)

$$\begin{aligned}
x \cot x &= x \frac{\cos x}{\sin} \\
&= ix \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} \\
&= ix \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1} \\
&= ix + \frac{2ix}{e^{2ix} - 1}
\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n x^{2n}}{(2n)!}$$

より

$$
\begin{aligned}
x\cot x &= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n B_n(2ix)^{2n}}{(2n)!} \\
&= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n(2x)^{2n}}{(2n)!} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

また、$|x|<1$ として

$$
\begin{aligned}
x\cot x = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2-\pi^2n^2} &= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{\pi^2n^2-x^2} \\
&= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{2x^2}{\pi^2n^2}}{1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}} \\
&= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2x^2}{\pi^2n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right)^k\right\} \\
&= 1-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{\pi^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

(1),(2) の x^{2k} の係数を比較すると,

$$
-\frac{2^{2k}B_k}{(2k)!} = -\frac{2}{\pi^{2k}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}
$$

$$
\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1}B_k\pi^{2k}}{(2k)!}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2^{2\cdot 1-1}B_1\pi^2}{2!} &= \frac{\pi^2}{6} \\
\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{2^{2\cdot 2-1}B_2\pi^4}{4!} &= \frac{\pi^4}{90}
\end{aligned}
$$

問１４.

$f(x),g(x),h(x)$ を区間 $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能な関数とする．このとき，次式を満たす実数 $c\quad(a<c<b)$ が存在することを示せ．また $h(x)\equiv 1$ のとき，この式は何を意味するか．（ヒント：Rolle の定理）

$$
\det\begin{pmatrix} f'(c) & g'(c) & h'(c) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix} = 0
$$

〈解〉(微積)

$F(x)=\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix}$ とおけば $F(a)=F(b)=0$ だからロル

の定理より

$$F'(c) = \det \begin{pmatrix} f'(c) & g'(c) & h'(c) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix} = 0 \quad (a < c < b) \text{ となる } c \text{ が存在する}$$

から題意成立.

また，$h(x) \equiv 1$ のとき $h'(x) \equiv 0$ より

$$\det \begin{pmatrix} f'(c) & g'(c) & h'(c) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix} = \{g(a)-g(b)\}f'(c)-\{f(a)-f(b)\}g'(c) = 0 \quad ({}^{\exists}c \quad a < c < b)$$

となるからこれはコーシーの平均値の定理になっている.

cf) コーシーの平均値の定理 (ノート)

f, g を $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能な函数とすると，
$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ を満たす $c \in (a,b)$
が存在する.

問１５.

つぎの関数 $f(x,y)$ に対して $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.

$$\begin{aligned} (a) f(x,y) &= \sin(xy), & (b) f(x,y) = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0 \text{ で}), \\ (c) f(x,y) &= \log(x^2+y^2) & ((x,y) \neq (0,0) \text{ で}), \\ (d) f(x,y) &= \log(x + \sin y) & (x + \sin y > 0 \text{ なる領域で}). \end{aligned}$$

〈解〉

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2 \sin xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos xy - xy\sin xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \sin xy$$

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

(c)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{4xy}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

(d)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+\sin y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\cos y}{x+\sin y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+\sin y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos y}{(x+\sin y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1 + x\sin y}{(x + \sin y)^2}$$

問１６．

定数 α に対し

$$x(u,v) = u\cos\alpha - v\sin\alpha, \qquad y(u,v) = u\sin\alpha + v\cos\alpha$$

とおく． $f(x(u,v), y(u,v)) = g(u,v)$ とするとき，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

が成り立つことを確かめなさい.

〈解〉(微積)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-\sin\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\alpha\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \\
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\alpha\right\} \\
&\quad + \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\alpha\right\} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

問１７．

$f(x,y)$ が C^2 級の関数ならば， $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ が成り立つことを示せ.

〈解〉(I、II)

$$\begin{aligned}
f_{xy}(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f_x(x, y+h) - f_x(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\lim_{k\to 0}\left\{\frac{f(x+k, y+h) - f(x, y+h)}{k} - \frac{f(x+k, y) - f(x,y)}{k}\right\}
\end{aligned}$$

ここで f は C^2 級だから， $\lim_{h\to 0}$ と $\lim_{k\to 0}$ を入れ替えてよく，

$$\begin{aligned}
f_{xy}(x,y) &= \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+k, y+h) - f(x+k, y)}{h} - \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}\right\} \\
&= \lim_{k\to 0}\frac{f_y(x+k, y) - f_y(x,y)}{k} \\
&= f_{yx}(x,y)
\end{aligned}$$

問１８．

3 変数ラプラシアン $\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ を極座標の変数 (r,θ,φ) による表示に書き直せ．ただし，$(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

〈解〉

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \varphi=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ より

$$
\begin{aligned}
\triangle \;=\;& \frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \\
&+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\right)^2\left\{\left(\frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{z\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}\right)^2\right\} \\
&+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{1}{1+\frac{y}{x}}\right)^2\left\{\left(-\frac{y}{x^2}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2+0\right\} \\
&+2\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2)}\left\{xz^2\frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}}+yz^2\frac{y}{z\sqrt{x^2+y^2}}+z\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}\right)\right\}\right] \\
&+\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta}\right)\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{x^2}{x^2+y^2}\left(-\frac{y}{xz\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{xz\sqrt{x^2+y^2}}+0\right) \\
&+\left(\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{x^2}{x^2+y^2}\left\{x\left(-\frac{y}{x^2}\right)+y\frac{1}{x}+0\right\}\right] \\
&+\frac{\partial}{\partial r}\frac{(y^2+z^2)+(z^2+x^2)+(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2)}} \\
&+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{z\{2(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)-(2x^2+2y^2)(x^2+y^2)-(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)\}+2z(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} \\
&+\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{2xy-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
=\;& \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}
$$

※一部紙面の都合上共通因数を括りだした部分があります．数学的正しさは
変わりませんが実際の計算と異なる部分が生じる可能性があります.

問１９．

次の関数 $f(x,y)$ の極値と，極値を与える点をすべて求めよ．

$$(a)f(x,y)=x^3y+xy^3-xy,\quad (b)f(x,y)=x^2+xy+y^2-5x-4y.$$

〈解〉

(a)

$$f_{xx}(x,y)=6xy,\quad f_{xy}(x,y)=3x^2+3y^2-1,\quad f_{yy}(x,y)=6xy,$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2y + y^3 - y &= y(3x^2+y^2-1) = 0 \\ f_y(x,y) = 3y^2x + x^3 - x &= x(3y^2+x^2-1) = 0 \end{cases}$$

を解いて $(x,y) = (0,0), (0,\pm1), (\pm1,0), (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}), (\mp\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$(複合同順)
f のヘッセ行列は

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2+3y^2-1 \\ 3x^2+3y^2-1 & 6xy \end{pmatrix}$$

$(x,y) = (0,0)$ のとき
$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to \det H = -1 < 0 \to$ 鞍点（極値をとらない）
$(x,y) = (0,\pm1), (\pm1,0)$ のとき
$H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \to \det H = -4 < 0 \to$ 鞍点
$(x,y) = (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ のとき
$H = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \to \det H = 2 > 0, \quad tr\, H = 3 > 0 \to$ 極小
$(x,y) = (\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2})$ のとき
$H = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \to \det H = 2 > 0, \quad tr\, H = -3 < 0 \to$ 極大
よって
$(x,y) = (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ のとき極小値 $-\frac{3}{16}$
$(x,y) = (\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2})$ のとき極大値 $\frac{3}{16}$ をとる.
(b)

$$f_{xx}(x,y) = 2, \quad f_{xy}(x,y) = 1, \quad f_{yy}(x,y) = 2,$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x + y - 5 &= 0 \\ f_y(x,y) = 2y + x - 4 &= 0 \end{cases}$$

を解いて $(x,y) = (2,1)$
f のヘッセ行列は $H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\to \det H = 3 > 0, \quad tr\, H = 4 > 4 \to$ 極小
よって f は $(x,y) = (2,1)$ で極小値をとる

坂井さん配布プリント解答
あとがき

まず感想は思ったより打つのに時間がかかりましたね。丸二日半くらいですかね。正直数　A のシケタイを引き受けたのを後悔するくらい時間がかかりました。そんなわけで UP が遅れて申し訳ありません。こんな時期に上げて役に立てたでしょうか。でもまだ問１８の別解を書いていないので近いうちに（試験後にでも）改訂版を出すかもしれません。でも問１８はそれだけで入力に１時間半かかった強敵ですからやる気が起きるかどうか … 偏微分の入力めんどすぎです。でもなんだかんだでまた来学期も数　A のシケタイを引き受けてそうな気がします。そのときはメモ用のノートとアップ用のノートを使い分けるので字が汚いなんてことはないと思います。それでは皆さん試験勉強がんばってください。