数理科学II(長谷川教官)　2005年度夏学期シケプリ

(for 理科1類28組)

Written by H.Sumizawa

＜Contents＞

※ **巻末**(P. 37〜)**に練習問題の解答があります。**

注意事項

・**最終回** 7/11(**月**)**の授業内容は含まれていません**。

・授業での説明とは順番・構成をかなり変えています。特に高階微分方程式を解くのに必要な線形代数の知識は，第4章にまとめて記しました。

・一見分量が多そうに見えますが，そうでもないです。最後の1/3は問題の答えだったり。

・製作日数10日ぐらいなので，間違い多発の予感。

・試験は7/21(木)の10:50から，743教室にて。頑張りましょう。

数理科学 II (長谷川教官) 2005 年度夏学期シケプリ
for 理科 1 類 28 組
2005/07/09　1:19:49

１．1 階の微分方程式の解法

1-1. 変数分離形の微分方程式

＜基本事項 1.1＞ 変数分離形の微分方程式

$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ の形で表される微分方程式は

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

と変形して両辺を積分すれば解ける。

＜例題 1.1＞

次の微分方程式を解け。

$$\frac{dy}{dx} = 3y$$

＜解答＞

与えられた方程式を変形すると

$$\frac{dy}{y} = 3dx$$

両辺を積分すると

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3dx$$

$\log y = 3x + C$ (C：定数) ・・・(☆)

$\therefore\ y = e^{3x+C} = e^C \cdot e^{3x}$

ここで改めて $C = e^C$ とおくと　←微分方程式を解くときはうまく任意定数を置き換えましょう

$y = Ce^{3x}$ (C：定数)

＜注意＞

(☆)以降を厳密にやると次のようになります。

$y \neq 0$ のもとで

$\log|y| = 3x + C$ (C：定数)

$\therefore\ y = \pm e^{3x+C} = \pm e^C \cdot e^{3x}$

ここで改めて $C = \pm e^C (\neq 0)$ とおくと　$y = Ce^{3x}$

$y = 0$ の場合は，上の式において $C = 0$ とすればよい。

したがって　$y = Ce^{3x}$ (C：定数)

※実際に解くときは，上の解答のやり方でも正しい解が求まるので，それで十分です。

＜練習問題 1.1**＞**
次の微分方程式を解け。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{x}$$

＜練習問題 1.2**＞**
(1) 例題 1.1 について，初期条件 $(x=0, y=2)$ のもとでの解を求めよ。
(2) 練習問題 1.1 について，初期条件 $(x=1, y=0)$ のもとでの解を求めよ。

1-2. 同次形の微分方程式

＜基本事項 1.2**＞ 同次形の微分方程式**

$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の形で表される微分方程式は

$z=y/x$ と置換すると，$y'=z+xz'$ だから

$$z+x\frac{dz}{dx}=f(z)$$

と変形すれば，変数分離形によって解ける。

＜例題 1.2**＞**
次の微分方程式を解け。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y}{2x+y}$$

＜解答＞
与えられた方程式の右辺を変形すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+2\dfrac{y}{x}}{2+\dfrac{y}{x}}$$

$z=y/x$ と置換すると，$y'=z+xz'$ だから

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{1+2z}{2+z}$$

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{1-z^2}{2+z}$$

$$\int\frac{2+z}{1-z^2}dz=\int\frac{dx}{x}$$ ←変数分離してます

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+z}+\frac{3}{1-z}\right)dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\log\frac{1+z}{(1-z)^3}=2\log x+C \quad (C：定数)$$

$$\therefore \frac{1+z}{(1-z)^3}=Cx^2 \quad (C：定数)$$

$z=y/x$ を代入すると

$$\frac{1+y/x}{(1-y/x)^3}=Cx^2$$

$$\therefore x+y=C(x-y)^3 \quad (C：定数)$$

＜練習問題 1.3＞
次の微分方程式を初期条件 $(x=1,\ y=1)$ のもとで解け。

$$x\frac{dy}{dx}=y+xe^{y/x}$$

1-3. 線形常微分方程式

＜基本事項 1.3＞ 線形常微分方程式

$\dfrac{dy}{dx}=f(x)y+g(x)$ の形で表される微分方程式は

まず $\dfrac{dy}{dx}=f(x)y$ を変数分離によって解き，

その定数 C の部分を x の関数 $a(x)$ でおきかえて，

この式をもとの方程式に代入し $a(x)$ を決定することによって解ける。

＜例題 1.3＞
次の微分方程式を解け。

$$y'=-y+\sin x$$

＜解答＞
まず $y'=-y$ を変数分離によって解くと

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\therefore y=Ce^{-x}$$

そこで $y=a(x)e^{-x}$ としてもとの方程式に代入すると

$$a'(x)e^{-x}-a(x)e^{-x}=-a(x)e^{-x}+\sin x \quad \cdots(☆)$$

$$a'(x) = e^x \sin x$$

$$\therefore a(x) = \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C \quad (C：定数)$$ ←部分積分 2 回！

したがって，求める解は

$$y = \frac{\sin x - \cos x}{2} + Ce^{-x} \quad (C：定数)$$

※(☆)のように，両辺に同じ項が出現してその項を消すことがポイントです。

＜練習問題 1.4＞
次の微分方程式を v について解け。また $t \to +\infty$ のとき v はどうなるか考察せよ。

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \mu v$$

1-4. Bernoulli 形，Ricatti 形の微分方程式

＜基本事項 1.4＞ Bernoulli 形の微分方程式
$\frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x)y^n$ (n：1 以外の任意の実数) の形で表される微分方程式は
$z = y^{1-n}$ と置換すれば，線形常微分方程式 or 変数分離形に帰着させて解ける。

＜例題 1.4＞
次の微分方程式を解け。

$$y' = y^{2/3} - 2y$$

＜解答＞
$z = y^{1-2/3} = y^{1/3}$ とおくと $y = z^3$
両辺を x で微分すると

$$y' = 3z^2 z'$$

もとの方程式に代入すると

$$3z^2 z' = z^2 - 2z^3$$

$$3z' = 1 - 2z$$

変数分離によって解くと

$$\int \frac{3dz}{1-2z} = \int dx$$

$$-\frac{3}{2}\log(1-2z) = x + C \quad (C：定数)$$

$$\therefore 1-2z = Ce^{-(2/3)x}$$

$$z = Ce^{-(2/3)x} + \frac{1}{2}$$

したがって，求める解は

$$y = z^3 = \left\{Ce^{-(2/3)x} + \frac{1}{2}\right\}^3$$

＜基本事項 1.5**＞** Ricatti **形の微分方程式**

$\frac{dy}{dx} = f(x) + g(x)y + h(x)y^2$ **の形で表される微分方程式は**
1 **つの解** $y = u(x)$ **が分かっているとき，** $y = u(x) + z(x)$ **とおいて**
もとの方程式に代入することにより，Bernoulli **形に帰着させて解ける。**

＜例題 1.5**＞**
次の微分方程式を解け。

$$y' = 3e^x - 3y + e^{-x}y^2$$

＜解答＞

$y = e^x$**を両辺に代入すると**

$$(\text{左辺}) = e^x$$

$$(\text{右辺}) = 3e^x - 3e^x + e^{-x}e^{2x} = e^x$$

となるので， $y = e^x$ **は特殊解になっている。**
そこで $y = e^x + z$ **とおいてもとの方程式に代入すると**

$$e^x + z' = 3e^x - 3(e^x + z) + e^{-x}(e^x + z)^2$$

$$z' = -z + e^{-x}z^2 \quad \leftarrow \text{Bernoulli 形}$$

$w = z^{1-2} = \frac{1}{z}$ **とおくと，** $z = \frac{1}{w}$ **より** $z' = -\frac{1}{w^2}w'$ **となるので**

$$-\frac{1}{w^2}w' = -\frac{1}{w} + e^{-x}\frac{1}{w^2}$$

$$w' = w - e^{-x} \quad \leftarrow \text{線形}$$

ここで $w' = w$ **を変数分離によって解くと** $w = Ce^x$ $(C$ **：定数**$)$
そこで $w = a(x)e^x$ **とおいて**

$$a'(x)e^x + a(x)e^x = a(x)e^x - e^{-x}$$

$$a'(x) = -e^{-2x}$$

$$\therefore a(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + C \quad (C\text{：定数})$$

よって

$$w = \frac{1}{2}e^{-x} + Ce^{x}$$

$$z = \frac{1}{w} = \frac{2e^{x}}{1+2Ce^{2x}}$$

したがって，求める解は

$$y = e^{x} + z = \frac{e^{x}\left(3+2Ce^{2x}\right)}{1+2Ce^{2x}} \quad (C：定数)$$

＜練習問題 1.5＞
微分方程式 $x^2y' + x^2y^2 + 3xy + 1 = 0$ について，次の問いに答えよ。

(1) 特殊解 $y = \dfrac{\lambda}{x}$ をもつ。実数 λ を決定せよ。

(2) 一般解を求めよ。

1-5. 完全形の微分方程式

＜基本事項 1.6＞ 完全形の微分方程式(1) －定義・概要－
微分方程式 $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$ について，

$$\exists\varphi(x,y) \ \text{s.t.} \ \begin{cases} f(x,y) = \varphi_x(x,y) \\ g(x,y) = \varphi_y(x,y) \end{cases} \qquad (\varphi_x, \varphi_y \text{ は } \varphi \text{ を } x, y \text{ それぞれで偏微分したもの})$$

となっているとき，この微分方程式は完全形であるといい，
一般解は $\varphi(x,y) = C$ (C：定数) となる[(1)]。

＜基本事項 1.7＞ 完全形の微分方程式(2) －実践編－
2 つの関数 $f(x,y)$，$g(x,y)$ が連続的に微分可能であるとき，
微分方程式 $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$ が完全形であるための必要十分条件は

$$f_y(x,y) = g_x(x,y)$$

である。またこのとき

$$\varphi(x,y) = \int f(x,y)dx + \int g(x,y)dy - \iint g_x(x,y)dxdy$$

とすることにより，基本事項 1.6 に準じて一般解を求めることができる。

(1) $\varphi_x(x,y)dx + \varphi_y(x,y)dy = 0 \iff d\varphi(x,y) = 0$ (全微分が 0) であることより。

＜例題 1.6＞
次の微分方程式を解け。
$$(2x-3y)dx-(3x-2y)dy=0$$

＜解答＞

$\dfrac{\partial}{\partial y}(2x-3y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{-(3x-2y)\right\}=-3$ より，この微分方程式は完全形。

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)&=\int(2x-3y)dx-\int(3x-2y)dy-\iint(-3)dxdy\\&=\left(x^2-3xy\right)-\left(3xy-y^2\right)+3xy\\&=x^2-3xy+y^2\end{aligned}$$

したがって，一般解は
$$x^2-3xy+y^2=C \quad (C：定数)$$

＜練習問題 1.6＞
基本事項 1.7 を証明せよ。

＜練習問題 1.7＞
次の微分方程式を解け。
$$\left(x^2-2xy+2y^2\right)dx+\left(-x^2+4xy-y^2\right)dy=0$$

＜基本事項 1.8＞ 積分因子
微分方程式　$f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$ が完全形でなくても，
両辺にある関数 $\lambda(x,y)$ をかけて，
$$\lambda(x,y)f(x,y)dx+\lambda(x,y)g(x,y)dy=0$$
が完全形になれば，この微分方程式を解くことができる。
このような関数 $\lambda(x,y)$ を**積分因子**という。

＜例題 1.7＞
次の微分方程式を解け。
$$ydx-\left(2x+y^3\right)dy=0$$

＜解答＞

積分因子として $\dfrac{1}{y^3}$ をとり，これを両辺にかけると
$$\frac{1}{y^2}dx-\left(\frac{2x}{y^3}+1\right)dy=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{-\left(\frac{2x}{y^3}+1\right)\right\}=-\frac{2}{y^3}$$ より，この微分方程式は完全形。

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)&=\int\left(\frac{1}{y^2}\right)dx-\int\left(\frac{2x}{y^3}+1\right)dy-\iint\left(-\frac{2}{y^3}\right)dxdy\\&=\frac{x}{y^2}+\left(\frac{x}{y^2}-y\right)-\int\left(\frac{1}{y^2}\right)dx\\&=\frac{x}{y^2}+\left(\frac{x}{y^2}-y\right)-\frac{x}{y^2}\\&=\frac{x}{y^2}-y\end{aligned}$$

したがって，一般解は

$$\frac{x}{y^2}-y=C\quad (C\ ：定数)$$

＜練習問題 1.8**＞**

次の微分方程式を，積分因子として $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ をとることにより解け。

$$ydx-\left(x^2+y^2+x\right)dy=0$$

1-6. 等傾斜法による解の近似

1 階の微分方程式が与えられたとき，それを完全に解くことはできなくても，予測をもとにある程度まで解を近似することはできるかもしれません。

例えば， $y'=-y^2+x$ という微分方程式が与えられたとします。
この解を正しく求めるのは難しいですが， $x\to+\infty$ での挙動を近似することは可能です。

まず， y' というのはグラフの接線の傾きですが，これを固定して定数 k とします。
このとき， $k=-y^2+x$ すなわち $x=y^2+k$ と表せ，グラフは x 軸対称の放物線です。
つまり，放物線 $x=y^2+k$ 上で接線の傾き k である点は，微分方程式の 1 つの解です。

さて，ここで k の値をいろいろ動かし，対応するグラフ上の接点がどう動くかを考えます。
$x=y^2+k$ より $\dfrac{1}{k}=\dfrac{dx}{dy}=2y$ であることを利用し， y に対応する k, x を調べてみると

y	1	2	3	4	…	50
k	1/2	1/4	1/6	1/8		1/100
x	1.50	4.25	9.17	16.125		2500.01

となることより，$x \to +\infty$ において $y \to \sqrt{x}$ に収束する解をもつことが予想されます。
そのような解を1つ決めて $y = \varphi(x)$ とおき，一般解 $y = \varphi(x) + z$ を考えます。

$y = \varphi(x) + z$ を与えられた微分方程式に代入すると

$$\varphi'(x) + z' = -\left(\varphi^2(x) + 2\varphi(x)z + z^2\right) + x$$

ここで仮定より，$x \to +\infty$ において $\varphi'(x) = -\varphi^2(x) + x$ だから

$$z' = -2\varphi(x)z - z^2 \quad \leftarrow \text{Bernoulli形}$$

$z^{1-2} = w$ とおいて計算すると $w' = 2\varphi(x)w + 1$　…①　←線形

ここで $w' = 2\varphi(x)w$ を変数分離によって解くと $w = Ce^{2\int_0^x \varphi(x)dx}$ (C：定数)

そこで $w = a(x)e^{2\int_0^x \varphi(x)dx}$ を①に代入して整理すると

$$a'(x) = e^{-2\int_0^x \varphi(x)dx}$$

さらに $\rho(x) = e^{-2\int_0^x \varphi(x)dx}$ とおくと

$$a(x) = \int_0^x \rho(x)dx + C \quad (C\text{：定数})$$

このとき，$w = \left\{\int_0^x \rho(x)dx + C\right\} \cdot \dfrac{1}{\rho(x)}$ だから，一般解は

$$y = \varphi(x) + z = \varphi(x) + \frac{1}{w} = \varphi(x) + \frac{\rho(x)}{\int_0^x \rho(x)dx + C}$$

となります。

ここで，$A = \int_0^{+\infty} \rho(x)dx$ とします。

$\int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = +\infty$ (1) より $x \to +\infty$ において $\rho(x) \to 0$ となることに注意し，
$A + C$ の値によって場合分けしてみましょう。

(I) $A + C \neq 0$ のとき

$$y \to \lim_{x \to +\infty} \left\{ \varphi(x) + \frac{\rho(x)}{\int_0^x \rho(x)dx + C} \right\} = \varphi(x) + \frac{0}{A + C} = \varphi(x) = \sqrt{x} \quad (x \to +\infty)$$

なお，$A + C > 0$ の場合は，$a(x) = \int_0^x \rho(x)dx + C = 0$ となる $x = a$ が存在すれば，
$x = a$ は漸近線となります。ちなみに $a(x)$ は単調増加なので，$A + C < 0$ の場合は
$a(a) = 0$ とはなり得ません。

(Ⅱ) $A+C=0$ のとき

$$y=\varphi(x)\left\{1+\frac{\dfrac{\rho(x)}{\varphi(x)}}{\int_0^x \rho(x)dx+C}\right\}$$ と書き換えて，カッコ内の分数について考察します。

$x\to+\infty$ において

(分母)$\to \int_0^{+\infty}\rho(x)dx+C=A+C=0$

(分子)$\to 0$ ($\because \rho(x)\to 0$)

不定形になるので，l’Hôpital の定理が使えます。分母・分子をそれぞれ微分すると

分母：$\dfrac{d}{dx}\left\{\int_0^{+\infty}\rho(x)dx+C\right\}=\rho(x)$

分子：
$$\frac{d}{dx}\frac{\rho(x)}{\varphi(x)}=\frac{\rho'(x)\varphi(x)-\rho(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$$
$$=\frac{-2\varphi^2(x)\rho(x)-\rho(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \quad {}^{(2)}$$
$$=\rho(x)\left\{-2-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\right\}$$

となるので

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\rho(x)}{\varphi(x)}}{\int_0^x\rho(x)dx+C}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\rho(x)\left\{-2-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\right\}}{\rho(x)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{-2-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\right\}=-2 \quad {}^{(3)}$$

したがって，$x\to+\infty$ において

$$y\to\varphi(x)\cdot(1-2)=-\varphi(x)=-\sqrt{x}$$

＜注＞

(1) $x\to+\infty$ において $\varphi(x)\to\sqrt{x}$ より，$\int_0^x\varphi(x)dx\to+\infty$

(2) $\rho(x)=e^{-2\int_0^x\varphi(x)dx}$ より，$\rho'(x)=-2\varphi(x)\rho(x)$

(3) $x\to+\infty$ において $\varphi(x)\to\sqrt{x}$ より，$\varphi'(x)\to\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$\varphi^2(x)\to x$ だから

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\to\frac{1}{2x\sqrt{x}}\to 0$$

２．高階微分方程式の解法

2-1. 2 階定数係数の線形微分方程式

＜基本事項 2.1＞ 2 階定数係数の線形微分方程式
$y''+ay'+by=0$ (a,b ：定数) の形で表される微分方程式の一般解は
2 次方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ の 2 解を λ_1,λ_2 とすると

$$y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x} \quad (A,B：定数)$$

の形で表される。
ただし 2 次方程式が重解 $-\dfrac{a}{2}$ をもつ場合，一般解は

$$y=(Ax+B)e^{(-a/2)x} \quad (A,B：定数)$$

の形で表される。

＜例題 2.1＞
次の(1)〜(3)の各場合について，微分方程式 $y''+ay'+by=0$ (a,b ：定数) を解け。
(1) 2 次方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が 2 つの異なる実数解 r,s をもつとき
(2) 2 次方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が 2 つの異なる虚数解 $r\pm is$ (r,s ：実数) をもつとき
(3) 2 次方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が重解 $-a/2$ をもつとき

＜解答＞
$y=e^{\lambda x}$ を与えられた方程式に代入すると

$$\lambda^2e^{\lambda x}+a\lambda e^{\lambda x}+be^{\lambda x}=0$$

$e^{\lambda x}\neq 0$ だから，両辺を $e^{\lambda x}$ で割ると

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

この 2 次方程式の解によって，問題のように場合分けする。

(1) 明らかに， $y=e^{rx}$ および $y=e^{sx}$ は微分方程式の解である。
そこで線形性より，一般解は $y=Ae^{rx}+Be^{sx}$ (A,B ：定数) と表せる。

(2) (1)と同様に，一般解は $y=Ae^{(r+is)x}+Be^{(r-is)x}$ (A,B ：定数) と表せる。
ここで Euler の公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ により

$$e^{(r+is)x}=e^{rx}e^{isx}=e^{rx}(\cos sx+i\sin sx)$$
$$e^{(r-is)x}=e^{rx}e^{-isx}=e^{rx}\{\cos(-sx)+i\sin(-sx)\}=e^{rx}(\cos sx-i\sin sx)$$

となるので

$$y=Ae^{rx}(\cos sx+i\sin sx)+Be^{rx}(\cos sx-i\sin sx)$$

ここで $\cos sx\pm i\sin sx$ は共役な複素数で， e^{rx} および y は実数であるから，
A,B は共役でなければならない。

そこで $A=\dfrac{C-iD}{2}$， $B=\dfrac{C+iD}{2}$ $(C, D$ ：実数) とおくと

$$y=e^{rx}\left\{\frac{C-iD}{2}(\cos sx+i\sin sx)+\frac{C+iD}{2}(\cos sx-i\sin sx)\right\}$$
$$=e^{rx}(C\cos sx+D\sin sx)\quad (C, D\text{ ：実数})$$

が求める一般解となる。

(3) まず，少なくとも $y=e^{(-a/2)x}$ は微分方程式の解である。

そこで $y=f(x)e^{(-a/2)x}$ とおいてみる。このとき

$$y'=\left\{f'(x)-\frac{a}{2}f(x)\right\}e^{(-a/2)x}$$
$$y''=\left\{f''(x)-af'(x)+\frac{a^2}{4}f(x)\right\}e^{(-a/2)x}$$

これらを与えられた微分方程式に代入して整理すると

$$e^{(-a/2)x}\left\{f''(x)+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)f(x)\right\}=0$$

$e^{(-a/2)x}\neq 0$，かつ重解を持つことより $a^2-4b=0$ (判別式) だから，

$$f''(x)=0$$
$$\therefore\ f(x)=Ax+B\quad (A, B\text{ ：定数})$$

したがって，求める一般解は $y=(Ax+B)e^{(-a/2)x}$ $(A, B$ ：定数) となる。

＜練習問題 2.1＞

次の微分方程式を，それぞれ初期条件のもとで解け。

(1) $y''+6y'+8y=0$ ($x=0$ のとき $y=1$， $y'=0$)

(2) $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx$ ($t=0$ のとき $x=l$； $t=\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ のとき $\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$) ※ $k, m>0$ とする

(3) $y''=4y'-4$ ($x=0$ のとき $y=1$； $x=\log 2$ のとき $y=4$)

2-2. 高階定数係数の線形微分方程式

この項では，線形代数の知識が大量発生します。行列式や逆行列から Jordan 標準形・行列の冪級数まで，今回の試験に必要な線形代数の知識を第 4 章にまとめました。必要に応じてその項目を読んでから(または併読しながら)，この項を読むことをおすすめします。

また，Word の数式表記の都合上，列ベクトルの太字が表示されないので，代わりに文字の上に矢印をつけて $\vec{x}$ などのように記すことにします。

＜基本事項 2.2＞ 定数係数の連立 1 階常微分方程式

微分方程式

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \qquad\vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$ は,

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ とおくと

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

の形で表され，その解は

$$\vec{x}(t) = \exp(At)\vec{c} \qquad \text{ただし} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}$$

となる。

＜例題 2.2＞

次の微分方程式の解 $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ を求めよ。

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = -4x_1(t) + 6x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_3'(t) = 4x_1(t) - 4x_2(t) \end{cases}$$

ただし $x_1(0) = 1$，$x_2(0) = 0$，$x_3(0) = 2$ とする。

＜解答＞

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$ とおくと，この微分方程式は

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

の形で表されるので，初期条件を考慮すると解は

$$\vec{x}(t) = \exp(At)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \cdots(☆)$$

となる。そこで $\exp(At)$ を計算したい。

第4章の例題4.5の過程により

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$$ とすると，$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$ とJordan標準形に変換できる。

さらに第4章の例題4.6の過程により

$$\exp(At)=P\{\exp(Bt)\}P^{-1}=e^{2t}\begin{pmatrix}1-2t&2t&t\\-4t&1+4t&2t\\4t&-4t&1-2t\end{pmatrix}$$

したがって(☆)より

$$\vec{x}(t)=\exp(At)\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

※ここに挙げたのは解答の一例です。Jordan標準形の作り方は他にも考えられます。
　また，一般スペクトル分解を用いた解法もあります。
　行列の計算に関する知識などは，第4章を参照してください。

＜基本事項2.3＞ 高階定数係数の線形微分方程式

微分方程式 $y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_0y(x)=0$ は，

$$\vec{y}=\begin{pmatrix}y(x)\\y'(x)\\\vdots\\y^{(n-1)}(x)\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{pmatrix}$$ とおくと

$$\vec{y}'=A\vec{y}$$

の形で表され，その解 $\vec{y}$ の第1成分 $y(x)$ が求める微分方程式の解となる。

＜練習問題2.2＞

次の微分方程式の解 $y(t)$ を求めよ。

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t)-3\frac{d^2}{dt^2}y(t)+4y(t)=0$$

ただし　$y(0)=1$，$y'(0)=0$，$y''(0)=-1$ とする。

３．解の存在と一意性

3-1. Lipshitz 条件の導入

＜基本事項 3.1＞ Lipshitz 条件と解の存在・一意性
閉領域 $D=\{(x,y)\,|\,|x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$ (a,b ：正の定数) とする。
微分方程式 $y'=f(x,y)$ ［連続とする］に対して,

$$\exists L>0,\ \forall (x,y_1),(x,y_2)\in D\ \text{ s.t. }\ |f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$$

が成り立つとき, $y'=f(x,y)$ は D 上で Lipshitz 条件を満たしているという。

さらにこのとき，初期条件 $(x,y)=(x_0,y_0)$ を満たす微分方程式の解 $y(x)$ が

$$|x-x_0|\le \min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$$

を満たす x に対して一意的に存在する。
ただし $M=\sup\{|f(x,y)|\,|\,(x,y)\in D\}$ とする。

このことを本章の大部分を使って証明します。少々面倒ですが，授業で 2 時間分ぐらい使って説明していた内容なので，確認しておくほうが無難かと思われます。

まず $y'=f(x,y)$ の両辺を x_0 から x までの範囲で積分すると

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dy}{dx}dx=\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx$$

ここで

$$(\text{左辺})=y(x)-y(x_0)=y(x)-y_0\quad(\because \text{初期条件})$$

だから

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx\quad\cdots①$$

となります。

3-2. Lipshitz 条件下における解の存在の証明

関数列 $y_n(x)$ を

$$y_0(x)=y_0$$
$$y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f\big(x,y_n(x)\big)dx\quad(\text{for }\ \forall n\ge 0)\quad\cdots②$$

と定義し，その極限をとって

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)\quad\cdots③$$

とおいたときに， $y(x)$ が微分方程式の解になっていることを証明します。

まずLipshitz条件下において，$\forall n$自然数に対して，$y_n(x)$が閉領域D上の点として定義できることを示します。すなわち，

$$|x - x_0| \le \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \Rightarrow \forall n \text{ 自然数 s.t. } |y_n(x) - y_0| \le b \quad \cdots ④$$

が示されれば十分です。

④をnに関する帰納法で示します。

＜$n = 0$のとき＞

②より　$y_0(x) = y_0$

$\therefore |y_0(x) - y_0| = 0 \le b$

＜$n = k$で成り立つと仮定して，$n = k + 1$のとき＞

$$|y_{k+1}(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_k(x))dx\right| \quad (\because ②)$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_k(x))|dx\right|$$

ここで帰納法の仮定より $(x, y_k(x)) \in D$ だから

$$|f(x, y_k(x))| \le M$$

よって

$$|y_{k+1}(x) - y_0| \le \left|\int_{x_0}^{x} Mdx\right| = M|x - x_0|$$

ここで $|x - x_0| \le \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \le \frac{b}{M}$ だから

$$|y_{k+1}(x) - y_0| \le M \cdot \frac{b}{M} = b$$

以上により，④が示されました。

次に，関数列$y_n(x)$が一様収束することを示します。

ちなみに，関数列$y_n(x)$が関数$g(x)$に一様収束する，とは

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$自然数，$\forall x$，$\forall n \ge N$ s.t. $|y_n(x) - g(x)| < \varepsilon$

が成り立つことです。

(この証明は，後で出てくる積分と極限の順序交換可能性を保証するのに必要になります)

まず関数列$g_n(x)$を

$$\left.\begin{aligned} &g_0(x) = y_0(x) \\ &g_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x) \quad (\text{for } \forall n \text{ 自然数}) \end{aligned}\right\} \cdots ⑤$$

と定義し，両辺を0からnまで加えると

$$\sum_{k=0}^{n} g_k(x) = y_n(x)$$

さらに $n \to \infty$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$$

となります。つまり，$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ が一様収束することを示せばよいことになります。

そのために補題として

$$\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| \le \frac{ML^{n-1}}{n!}\left|x - x_0\right|^n \quad \cdots ⑥$$

を n に関する帰納法で示します。

＜$n=1$ のとき＞

$$\left|y_1(x) - y_0(x)\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f\left(x, y_0(x)\right)dx\right| \quad (\because ②)$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} \left|f\left(x, y_0(x)\right)\right|dx\right|$$

ここで $\left(x, y_0(x)\right) \in D$ より $\left|f\left(x, y_0(x)\right)\right| \le M$ だから

$$\left|y_1(x) - y_0(x)\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} Mdx\right| = M\left|x - x_0\right| = \frac{mL^0}{1!}\left|x - x_0\right|^0$$

＜$n=k$ で成り立つと仮定して，$n=k+1$ のとき＞

$$\left|y_{k+1}(x) - y_k(x)\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f\left(x, y_k(x)\right)dx - \int_{x_0}^{x} f\left(x, y_{k-1}(x)\right)dx\right| \quad (\because ②)$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x} \left\{f\left(x, y_k(x)\right) - f\left(x, y_{k-1}(x)\right)\right\}dx\right|$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} \left|f\left(x, y_k(x)\right) - f\left(x, y_{k-1}(x)\right)\right|dx\right|$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} L\left|y_k(x) - y_{k-1}(x)\right|dx\right| \quad (\because \text{Lipshitz 条件})$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} L\frac{ML^{k-1}}{k!}\left|x - x_0\right|^k dx\right| \quad (\because \text{帰納法の仮定})$$

$$= \frac{ML^k}{k!}\left|\int_{x_0}^{x} \left|x - x_0\right|^k dx\right|$$

$$= \frac{ML^k}{k!}\frac{1}{k+1}\left|x - x_0\right|^{k+1} = \frac{ML^k}{(k+1)!}\left|x - x_0\right|^{k+1}$$

以上により，⑥が示されました。

ここで $\left|x - x_0\right| \le \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\} \le a$ だから，⑤,⑥より

$$\left|g_n(x)\right| = \left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| \le \frac{ML^{n-1}}{n!}a^n = \frac{M}{L}\frac{(aL)^n}{n!}$$

さらに，右辺の和をとると

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{L}\frac{(aL)^n}{n!} = \frac{M}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(aL)^n}{n!} = \frac{M}{L}e^{aL} \quad (\because \text{Taylor 展開により } e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!})$$

となります。

さて，ここで

Weierstrass の優級数定理

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ に対して，収束する正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ が存在し，$\left|f_n(x)\right| \le c_n(x)$ ならば
この級数は絶対一様収束する。

という定理を適用すると，

$\left|g_n(x)\right| \le \dfrac{M}{L}\dfrac{(aL)^n}{n!}$ かつ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{L}\frac{(aL)^n}{n!}$ が収束するので，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ は一様収束します。

したがって $y_n(x)$ も一様収束することになります。

では，いよいよ③によって定義した $y(x)$ が①を満たすことを確認しましょう。

③を①に代入すると

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, \lim_{n\to\infty} y_n(x)\right)dx \\
&\overset{(A)}{=} y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f\left(x, y_n(x)\right)dx \\
&\overset{(B)}{=} y_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f\left(x, y_n(x)\right)dx \\
&\overset{(C)}{=} \lim_{n\to\infty}\left\{y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y_n(x)\right)dx\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x) = (\text{左辺})
\end{aligned}$$

となり，$y(x)$ は確かに微分方程式の解になっていることが分かります。

※(A)の変形は，関数 $f(x, y)$ の連続性により成立。
　(B)の変形は，$y_n(x)$ が一様収束するため，積分と極限の順序交換が許されるので成立。
　(C)の変形は，極限における加法の連続性により成立。

以上により，
　“閉領域 D **内で** Lipshitz **条件を満たす微分方程式は少なくとも** 1 **つの解** $y(x)$ **をもつ”**
ことが示されました。

3-3. Lipshitz 条件下における解の一意性の証明

解の一意性を示すには, 微分方程式 $y' = f(x, y)$ が 2 つの解 $y = y(x)$, $y = Y(x)$ をもつと仮定して, $y(x) = Y(x)$ となることを導けばよいですね。

そのために補題として
微分方程式 $y' = f(x, y)$ の 2 解 $y = y(x)$, $y = Y(x)$ について

$$|y(x) - Y(x)| \le \frac{mL^n}{n!}|x - x_0|^n \quad \cdots ⑦$$

ただし $m = \sup\left\{|y(x) - Y(x)| \,\middle|\, |x - x_0| \le \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}\right\} \quad \cdots ⑧$

となることを n に関する帰納法で示します。
＜$n = 0$ のとき＞

$$\begin{aligned} |y(x) - Y(x)| &\le m \quad (\because ⑧) \\ &= \frac{mL^0}{0!}|x - x_0|^0 \end{aligned}$$

＜$n = k$ で成り立つと仮定して, $n = k+1$ のとき＞
$y = y(x)$, $y = Y(x)$ が解であるから, ①より

$$\begin{cases} y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y(x)\right)dx \\ Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, Y(x)\right)dx \end{cases}$$

となることを用いると

$$\begin{aligned} |y(x) - Y(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f\left(x, y(x)\right)dx - \int_{x_0}^{x} f\left(x, Y(x)\right)dx\right| \\ &= \left|\int_{x_0}^{x} \left\{f\left(x, y(x)\right) - f\left(x, Y(x)\right)\right\}dx\right| \\ &\le \left|\int_{x_0}^{x} \left|f\left(x, y(x)\right) - f\left(x, Y(x)\right)\right|dx\right| \\ &\le \left|\int_{x_0}^{x} L|y(x) - Y(x)|dx\right| \quad (\because \text{Lipshitz 条件}) \\ &\le \left|\int_{x_0}^{x} L\frac{ML^k}{k!}|x - x_0|^k dx\right| \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= \frac{ML^{k+1}}{k!}\left|\int_{x_0}^{x} |x - x_0|^k dx\right| \\ &= \frac{ML^{k+1}}{(k+1)!}|x - x_0|^{k+1} \end{aligned}$$

以上により, ⑦が示されました。

ここで $|x - x_0| \le \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \le a$ だから，⑦より

$$|y(x) - Y(x)| \le \frac{mL^n}{n!} a^n = \frac{m(aL)^n}{n!} \quad (\text{for } \forall n \ge 0) \quad \cdots⑨$$

ここで $\lim_{n\to\infty} \frac{m(aL)^n}{n!} = 0$ だから，⑨より $|y(x) - Y(x)| = 0$，すなわち $y(x) = Y(x)$

以上により，
“ 閉領域 D **内で** Lipshitz **条件を満たす微分方程式は異なる** 2 **解を持ち得ない ”**
ことが示されました。

すべてを総合すれば，
“ 閉領域 D **内で** Lipshitz **条件を満たす微分方程式の解は一意的に存在する ”**
ことが示され，基本事項 3.1 の定理の証明が完結したことになります。

注意：「Lipshitz 条件を満たすならば解が一意的に存在する」は正しいですが，
「Lipshitz 条件を満たさないならば解が一意的に存在しない」は正しくありません。

＜練習問題 3.1**＞**

微分方程式 $y' = f(x, y)$ に対して，閉領域 D において $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ が存在し，かつこの偏微分が連続ならば，Lipshitz 条件が成立する。このことを証明せよ。

＜練習問題 3.2**＞**

次の微分方程式は閉領域 D をどのようにとっても Lipshitz 条件を満たすか。Lipshitz 条件を満たさない領域があれば，それを答えよ。

(1) $y' = 3y$

(2) $y' = \frac{y^2 - 1}{x}$

(3) $y' = y^{2/3}$

４．線形代数の基礎知識

本章では，第 2 章で取り扱った高階線形微分方程式を解くのに必要な最低限の線形代数の知識をまとめておきます。線形代数が嫌いな人でも取り組めるよう，抽象的な概念論は出来る限り排除し，数値計算的な内容のみを取り扱うことにしました。なお，行列の定義や加法・減法・積といった，高校数学の範囲で習う内容はここでは省略します。

4-1. 行列の基本変形と行列式・連立 1 次方程式・逆行列

＜基本事項 4.1＞ 行列の基本変形

行基本変形

・2 つの行を入れ替える
・ある行に 0 でない数をかける
・ある行に他のある行の定数倍を加える

列基本変形

・2 つの列を入れ替える
・ある列に 0 でない数をかける
・ある列に他のある列の定数倍を加える

これらを合わせて行列の**基本変形**という。

＜基本事項 4.2＞ 行列式の求め方

n 次正方行列 $A(a_{ij})$ について，**行列式**を det A，$|A|$ などと表す(定義は省略)。

行列式を求めるには，行基本変形または列基本変形を繰り返すことによって
第 1～n 行，第 1～n 列のうちいずれか 1 つについて

(ア) 全ての成分が 0 になる場合　$|A| = 0$

(イ) 1 つの成分 a_{ij} を除いて全て 0 になる場合

$|A| = (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$，ただし A_{ij} は行列 A から i 行と j 列を除いた $(n-1)$ 次正方行列
この過程を繰り返して，行列の次数を下げていけば最終的に行列式が求まる。

特に

$A = (a_{11})$ のとき，$|A| = a_{11}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ のとき，$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ のとき，

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

＜例題 4.1＞
次の各行列について，行列式の値を求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 4\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$　(2) $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 0 & -1 & 5\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$　(3) $C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 5 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$

＜解答＞

(1) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 4\\ 3 & -1 & 0\end{vmatrix}=1\times(0+4)+2\times(12-0)+1\times(0+6)=34$

(2) $|B|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 0 & -1 & 5\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{vmatrix}$　(**第** 1 **行を**-2 **倍して第** 3 **行に加えた**)

$=0$　(**第** 3 **行の成分が全て** 0 **だから**)

(3) $|C|=\begin{vmatrix}3 & 0 & 5 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 7\end{vmatrix}$

$=(-1)^{1+4}\cdot 2\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 7\end{vmatrix}$　(**第** 4 **列の成分が第** 1 **行以外全て** 0 **であることより**)

↑**行列** C **から第** 1 **行・第** 4 **列を除いたもの**

$=-2\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$　(**第** 1 **行を**-1 **倍して第** 4 **行に加えた**)

$=-2\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\begin{vmatrix}3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$　(**第** 1 **列の成分が第** 1 **行以外全て** 0 **であることより**)

$=-2\cdot 12=-24$　(3×3 **の行列式は公式で計算** or **第** 1 **列で展開して計算**)

＜基本事項 4.3＞ 連立 1 次方程式の解法

連立 1 次方程式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$ ・・・(☆) は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

の形に書き表すことができる。

ここで $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_n \end{pmatrix}$ を行基本変形のみによって

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1' \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_n' \end{pmatrix}$ の形に変形できたとき，(☆)の解は $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}$ である。

＜基本事項 4.4＞ 連立 1 次方程式とランク

連立 1 次方程式 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ・・・(＊) を考える。

この方程式が自明な解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持つ必要十分条件は

$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$，つまり $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ を行基本変形してある行が全て 0 になることである。

また， $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ を行基本変形することにより最大いくつの行の成分を

全て 0 にできるかを考え，その値を p とするとき，

$\mathrm{rank}A = n - p$ を行列 A の**ランク**といい，(＊)の自明でない 1 次独立な解は p 組とれる。

※ベクトル $\vec{r}_1, \cdots \vec{r}_n \neq \vec{0}$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow \forall t_1, \cdots t_{n-1} \in \Re$ s.t. $\vec{r}_n \neq t_1\vec{r}_1 + \cdots + t_{n-1}\vec{r}_{n-1}$

＜例題 4.2**＞**
次の連立方程式を，行列の行基本変形を用いて解け。

$$\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x-2y+3z=9 \\ 4x+2y+7z=31 \end{cases}$$

＜解答＞
順に行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & 7 & 31 \end{pmatrix} \underset{①}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -7 & -16 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 10 & -5 & -5 \end{pmatrix} \underset{②}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -7 & -16 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\underset{③}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -7 & -16 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{④}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{⑤}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{⑥}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{⑦}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

となり， $x=2$，$y=1$，$z=3$ **を得る。**

なお，上記の①～⑦で行った行基本変形は以下の通りである。
① **第** 2 **行を**-2 **倍して第** 1 **行に，第** 2 **行を**-4 **倍して第** 3 **行に加える**
② **第** 1 **行を**-2 **倍して第** 3 **行に加える**
③ **第** 3 **行を** 1/9 **倍する**
④ **第** 3 **行を** 7 **倍して第** 1 **行に加える**
⑤ **第** 1 **行を** 1/5 **倍する**
⑥ **第** 1 **行を** 2 **倍して第** 2 **行に，第** 3 **行を**-3 **倍して第** 2 **行に加える**
⑦ **第** 1 **行と第** 2 **行を入れ替える**

＜練習問題 4.1**＞**
次の連立方程式について(1),(2)**に答えよ。**

$$\begin{cases} y+z+3w=c_1 \\ -2x+y+4z+w=c_2 \\ -2x+4y+7z+10w=c_3 \\ -6x+y+10z-3w=c_4 \end{cases}$$

(1) **解が存在するための** $c_1 \sim c_4$ **の条件を述べよ。**
(2) $c_1=c_2=c_3=c_4=0$ **のとき，自明でない** 1 **次独立の解は何組作れるか。**

＜基本事項 4.5＞ 逆行列

n 次正方行列 A について，行列式が $|A| \neq 0$ を満たすとき，この行列は**正則**であるといい，
$AB = BA = E$ (単位行列) を満たす n 次正方行列 B が存在する。
このような B を A の**逆行列**といい， A^{-1} と表す。

$A(a_{ij})$ の逆行列の求め方

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & O & & 1 \end{pmatrix}$$ を連立 1 次方程式を解く要領で行基本変形し，

$$\begin{pmatrix} 1 & & O & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$ ･･･(☆) の形にできたら， $A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ である。

(☆)の形に変形できない(どこかの行の成分が全て 0 になる)ときは逆行列が存在しない。

＜例題 4.3＞

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

＜解答＞

実は例題 4.2 と同じ行列(手抜き･･･)。全く同様に①～⑦の基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{①}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{②}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{③}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$\underset{④}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & -5/9 & -2 & 7/9 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 0 & 1/9 \end{pmatrix} \underset{⑤}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1/9 & -2/5 & 7/45 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$\underset{⑥}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1/9 & -2/5 & 7/45 \\ 1 & 0 & 0 & 4/9 & -1/5 & -1/45 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 0 & 1/9 \end{pmatrix} \underset{⑦}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/9 & -1/5 & -1/45 \\ 0 & 1 & 0 & -1/9 & -2/5 & 7/45 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}$$

したがって $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/9 & -1/5 & -1/45 \\ -1/9 & -2/5 & 7/45 \\ -2/9 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}$ が得られる。

4-2. 固有値と対角化

＜基本事項 4.6＞ 固有値と対角化

n 次正方行列 A について,

$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$ を満たすような $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ を**固有ベクトル**, 複素数 λ を**固有値**という。

n 個の 1 次独立な固有ベクトル $\vec{x}_1, \cdots \vec{x}_n$ があるとき, 対応する固有値を $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ とすると

$P = \left(\vec{x}_1, \cdots \vec{x}_n\right)$ ととることにより $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$ とできる。

このような操作を**対角化**という。

＜基本事項 4.7＞ 固有方程式

n 次正方行列 A について,

$|xE - A|$ を**固有多項式**(n 次式になる), $|xE - A| = 0$ を**固有方程式**という。

A の固有値は, 固有方程式の解に相当する。

＜例題 4.4＞

行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ を, 正則行列 P を用いて $P^{-1}AP$ により対角化せよ。

＜解答＞

行列 A の固有多項式は

$$|xE - A| = \begin{vmatrix} x-6 & 3 & 7 \\ 1 & x-2 & -1 \\ -5 & 3 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -x^2+8x-9 & x+1 \\ 1 & x-2 & -1 \\ 0 & 5x-7 & x+1 \end{vmatrix} \quad \text{(行基本変形)}$$

$$= -\begin{vmatrix} -x^2+8x-9 & x+1 \\ 5x-7 & x+1 \end{vmatrix} \quad \text{(第 1 列に関して展開した)}$$

$$= -\{(-x^2+8x-9)(x+1) - (x+1)(5x-7)\} = (x+1)(x-1)(x-2)$$

よって $|xE - A| = 0$ を解くことにより, 固有値は $-1,1,2$ である。

固有値-1 に対応する固有ベクトルを $\vec{x}_1$ とすると

$$A\vec{x}_1 = -\vec{x}_1 \quad \text{すなわち} \quad (A+E)\vec{x}_1 = O \qquad \therefore \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}\vec{x}_1 = O$$

$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ として，行基本変形により連立 1 次方程式を解くと

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \underset{①}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 18 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{②}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{③}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① 第 2 行を 7 倍して第 1 行に，第 2 行を 5 倍して第 3 行に加える
② 第 1 行を 2/3 倍して第 3 行に加え，かつ第 1 行を 1/18 倍する
③ 第 1 行を-3 倍して第 2 行に加える

となることより

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ -a_1 + c_1 = 0 \end{cases}$$

したがって，$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる。

同様に，固有値 1 に対応する固有ベクトルを $\vec{x_2}$ とすると

$(A-E)\vec{x_2} = O$ より　$\vec{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる。

さらに，固有値 2 に対応する固有ベクトルを $\vec{x_3}$ とすると

$(A-2E)\vec{x_3} = O$ より　$\vec{x_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる。

ここで $P = \left(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とすると

$$AP = \left(A\vec{x_1}, A\vec{x_2}, A\vec{x_3}\right) = \left(-\vec{x_1}, \vec{x_2}, 2\vec{x_3}\right)$$

$$[\because (A+E)\vec{x_1} = O,\ (A-E)\vec{x_2} = O,\ (A-2E)\vec{x_3} = O]$$

$$PB = \left(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}\right)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \left(-\vec{x_1}, \vec{x_2}, 2\vec{x_3}\right)$$

となるので　$AP = PB$
$|P| \neq 0$ より両辺に左から P^{-1} をかけると，$P^{-1}AP = B$ となり，対角化できる。

＜練習問題 4.2＞

行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&4&1\\2&-4&0\end{pmatrix}$ を，正則行列 P を用いて $P^{-1}AP$ により対角化せよ。

4-3. Jordan 標準形

＜基本事項 4.8＞ Jordan 標準形とは？

k 次正方行列 $J(\alpha,k)=\begin{pmatrix}\alpha&1&&&\\&\alpha&1&&O\\&&\ddots&\ddots&\\O&&&\ddots&1\\&&&&\alpha\end{pmatrix}$ を固有値 α に対する k 次 **Jordan 細胞**といい，

$J=\begin{pmatrix}J(\alpha_1,k_1)&&&\\&J(\alpha_2,k_2)&&\\&&\ddots&\\&&&J(\alpha_m,k_m)\end{pmatrix}$ と並べたものを **Jordan 行列**という。

任意の正方行列 A は，正則行列 P を用いて $P^{-1}AP$ により Jordan 行列 J に変形できる。
この J を A の **Jordan 標準形**という。

※ 1. $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ の中に同じ値が含まれてもよい。もちろん 0 でもよい。
　2. J を n 次正方行列とすると，$k_1+\cdots+k_m=n$ となる。
　3. 正方行列 A の Jordan 標準形は，Jordan 細胞の並べる順序を除いて一意的に定まる。

＜基本事項 4.9＞ Jordan 標準形の求め方

1. まず対角化のときの要領で固有方程式を解き，固有値を求める。
2. 各固有値の重複度(固有方程式の解としての)は，その固有値に対する全ての Jordan 細胞の次数の総和になる(1)。
3. 各固有値に対する固有ベクトルを求め，1 次独立な固有ベクトルの個数が Jordan 細胞の個数にあたる(2)(3)(4)。
4. 各 Jordan 細胞 $J_1(\alpha_1,k_1)$ について

$$(A-\alpha_1E)\vec{x}^{\,l}_1=O,\ (A-\alpha_1E)\vec{x}^{\,l}_2=\vec{x}^{\,l}_1,\ \cdots(A-\alpha_1E)\vec{x}^{\,l}_{k_l}=\vec{x}^{\,l}_{k_l-1}$$

　となる $\vec{x}^{\,l}_1,\ \vec{x}^{\,l}_2,\ \cdots\vec{x}^{\,l}_{k_l}$ を求める(5)(6)。　　　(次のページに続く)

＜基本事項 4.9＞ つづき

5. $P=\left(\vec{x}_1^1,\vec{x}_2^1,\cdots\vec{x}_{k_1}^1,\cdots,\vec{x}_1^l,\vec{x}_2^l,\cdots\vec{x}_{k_l}^l,\cdots,\vec{x}_1^m,\vec{x}_2^m,\cdots,\vec{x}_{k_m}^m\right)$ とすれば

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} J(\alpha_1,k_1) & & & \\ & J(\alpha_2,k_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\alpha_m,k_m)\end{pmatrix}$$ となる。

(1) 例えば固有値 1 の重複度が 4 なら $J(1,4)$，$J(1,3)\oplus J(1,1)$，$J(1,2)\oplus J(1,2)$，$J(1,2)\oplus J(1,1)\oplus J(1,1)$，$J(1,1)\oplus J(1,1)\oplus J(1,1)\oplus J(1,1)$ が考えられます。

(2) 「異なる固有値の数＝1 次独立な固有ベクトルの個数」とは限りません。練習問題 4.2 のように，異なる固有値が 2 個でも 1 次独立な固有ベクトルを 3 個とれる場合があります。

(3) 重解でない(重複度 1 の)固有値に対応する固有ベクトルは 1 個だけです。

(4) 1 次独立な固有ベクトルが n 個とれた場合，普通に対角化できます。もちろん対角行列も Jordan 標準形の一種です(1 次 Jordan 細胞を n 個並べたものとみなせるので)。

(5) すべての列ベクトルが 1 次独立になるようにとりましょう。P を構成する n 個の列ベクトルのうち，1 つでも 1 次独立性を崩すものがあれば，$|P|=0$ になってしまいます。

(6) 各 Jordan 細胞 $J_l(\alpha_l,k_l)$ の次数 k_l と，それに対応する列ベクトルの数は一致します。

かなり分かりにくい説明だったと思うので，もう少し具体的に見てみましょう。
n 次正方行列 A の Jordan 標準形が

$$B=\begin{pmatrix} J(\alpha,1) & & O \\ & J(\alpha,3) & \\ O & & J(\beta,2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&0&0&0&0&0\\0&\alpha&1&0&0&0\\0&0&\alpha&1&0&0\\0&0&0&\alpha&0&0\\0&0&0&0&\beta&1\\0&0&0&0&0&\beta\end{pmatrix}$$

※このとき固有多項式は $(x-\alpha)^4(x-\beta)^2$ となっているはず。

であるとし，$B=P^{-1}AP$ を満たす正則行列 P の求め方を考えます。
まず，固有値 α に対応する 1 次独立な固有ベクトルが 2 個求められるはずです。
それらを $\vec{x}_1,\vec{x}_2$ とします。すなわち $(A-\alpha E)\vec{x}_1=O$，$(A-\alpha E)\vec{x}_2=O$ です。
さらに $\vec{x}_2$ について，$(A-\alpha E)\vec{x}_3=\vec{x}_2$，$(A-\alpha E)\vec{x}_4=\vec{x}_3$ となる $\vec{x}_3,\vec{x}_4$ をとります。
次に，固有値 β に対応する 1 次独立な固有ベクトルが 1 個求められるはずなので，
それを $\vec{x}_5$ とすれば $(A-\beta E)\vec{x}_5=O$，さらに $(A-\beta E)\vec{x}_6=\vec{x}_5$ となる $\vec{x}_6$ をとります。
$\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_6$ が全て 1 次独立になるようにとっておけば，$P=\left(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_6\right)$ として
$AP=PB$ (←例題 4.4 の最後と同様に各自確かめて下さい)，すなわち $B=P^{-1}AP$ となります。

＜例題 4.5＞
行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ を，正則行列 P を用いて $P^{-1}AP$ により Jordan 標準形にせよ。

＜解答＞
$|xE-A|=(x-2)^3$ となるので，固有値は 2 のみである。
$A-2E=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ であり，これを行基本変形すると $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるので

$\mathrm{rank}(A-2E)=1$ であることより $(A-2E)\vec{p}=O$ となる 1 次独立な $\vec{p}$ は
$3-1=2$ (個) 存在し，したがって Jordan 細胞も 2 個存在する(1)。

この 2 つの $\vec{p}$ を $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ とすると $\vec{p}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\vec{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ととれ，

さらに $(A-2E)\vec{p}_3=\vec{p}_2$ とすると $\vec{p}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる。

ここで $P=\left(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とすると(2)

$$AP=\left(A\vec{p}_1, A\vec{p}_2, A\vec{p}_3\right)=\left(2\vec{p}_1, 2\vec{p}_2, \vec{p}_2+2\vec{p}_3\right)$$

$$PB=\left(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\right)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\left(2\vec{p}_1, 2\vec{p}_2, \vec{p}_2+2\vec{p}_3\right)$$

ゆえに $AP=PB$
$|P|\neq 0$ だから，両辺に P^{-1} を左からかけて $B=P^{-1}AP$ となり，Jordan 標準形になった。

(1) この段階で Jordan 標準形は B の形になることが分かるので， $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ をとる段階では $(A-2E)\vec{p}_3=\vec{p}_2$ を満たす $\vec{p}_3$ が存在するようにとる必要があります。
その方法の一例を次ページに示します。

(2) P の列ベクトルと，Jordan 細胞を並べる順序を正しく対応させましょう。上でやったように， $AP=PB$ となるようにする，ということを念頭において考えてください。

$(A-2E)\vec{p_3}=\vec{p_2}$ を満たす $\vec{p_3}$ が存在するように $\vec{p_1}, \vec{p_2}$ をとる方法の一例

$\vec{p_1}=\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$，$\vec{p_2}=\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ とおく(もちろん $\vec{p_1}, \vec{p_2}$ は 1 次独立)。

$(A-2E)\vec{p_1}=O$，$(A-2E)\vec{p_2}=O$ であることより

$$\begin{cases} -2a_1+2b_1+c_1=0 \cdots\cdots ① \\ -2a_2+2b_2+c_2=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

さらに $(A-2E)\vec{p_3}=\vec{p_2}$ であることより，連立 1 次方程式の要領で行基本変形して

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & a_2 \\ -4 & 4 & 2 & b_2 \\ 4 & -4 & -2 & c_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_2+b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_2+c_2 \end{pmatrix}$$

となるので，$\vec{p_3}$ が存在するには

$$\begin{cases} -2a_2+b_2=0 \cdots\cdots ③ \\ 2a_2+c_2=0 \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

であることが必要である。

②～④より，$a_2:b_2:c_2=1:2:(-2)$　　$\therefore \vec{p_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

このとき，$\vec{p_3}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

①を満たし，かつ $\vec{p_2}$ と 1 次独立である $\vec{p_1}$ をとると，例えば $\vec{p_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}$ が 1 次独立になっているので，$P=\begin{pmatrix} \vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3} \end{pmatrix}$ により変換できる。

＜練習問題 4.3＞

行列 $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ を，正則行列 P を用いて $P^{-1}AP$ により Jordan 標準形に変換せよ。

4-4. 行列の指数計算

＜基本事項 4.10＞ 行列の指数関数

n 次正方行列 A について，自然対数の底 e による行列の指数関数は

$$e^{A} = \exp A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

と定義される。これは任意の A に対して収束する。

cf. Taylor 展開： $e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$　(任意の x に対して収束)

＜基本事項 4.11＞ 行列の指数計算に関する定理

(1)　n 次対角行列 $S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$ について， $\exp S = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

(2)　$\exp(PSP^{-1}) = P(\exp S)P^{-1}$

(3) Jordan 行列　$J = \begin{pmatrix} J(\alpha_1, k_1) & & & \\ & J(\alpha_2, k_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\alpha_m, k_m) \end{pmatrix}$ を

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & \alpha_1 & & & \\ & & & \alpha_2 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & \alpha_m \end{pmatrix}$$ と $$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & \ddots & & & O & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & \ddots & \\ & O & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$ の和に分解すると

$SN = NS$，　$\exp(S+N) = (\exp S)(\exp N)$

※行列の指数法則は一般には成り立たないが，2 つの行列の積が可換ならば成り立つ。

＜練習問題 4.4＞

(1)(2)　基本事項 4.10 を用いて，基本事項 4.11 の(1)(2)を証明せよ。

(3)　基本事項 4.11 において，t をスカラー変数として　$\exp\{(S+N)t\} = \{\exp(St)\}\{\exp(Nt)\}$ も成り立つことを証明せよ($SN = NS$ であることを用いる)。

＜例題 4.6＞

行列 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -4 & 6 & 2\\ 4 & -4 & 0\end{pmatrix}$ について, $\exp(At)$ を計算せよ。

＜解答＞

例題 4.5 より, $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ とすると $B=P^{-1}AP$ $\therefore A=PBP^{-1}$

よって $\exp(At)=\exp(PBP^{-1}t)=\exp\{P(Bt)P^{-1}\}=P\{\exp(Bt)\}P^{-1}$ [∵**基本事項** 4.11-(2)]

まず $\exp(Bt)$ を求めよう。

$$\exp(Bt)=\exp\begin{pmatrix}2t & 0 & 0\\ 0 & 2t & 0\\ 0 & 0 & 2t\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & t\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ [∵**練習問題** 4.4-(3)]

ここで

$$\exp\begin{pmatrix}2t & 0 & 0\\ 0 & 2t & 0\\ 0 & 0 & 2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{2t} & 0 & 0\\ 0 & e^{2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{2t}\end{pmatrix}$$ [∵**基本事項** 4.11-(1)]

$N=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & t\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ とすると $\exp N=E+\dfrac{N}{1!}+\dfrac{N^2}{2!}+\cdots$ [∵**基本事項** 4.10]

$$=E+N \quad [\because N^2=O]$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

であるから

$$\exp(Bt)=\begin{pmatrix}e^{2t} & 0 & 0\\ 0 & e^{2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{2t} & 0 & 0\\ 0 & e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & 0 & e^{2t}\end{pmatrix}$$

一方 $P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ であるから

$$\exp(At)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t} & 0 & 0\\ 0 & e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & 0 & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}1-2t & 2t & t\\ -4t & 1+4t & 2t\\ 4t & -4t & 1-2t\end{pmatrix}$$

＜基本事項 4.12＞ 一般スペクトル分解

正方行列 A の固有多項式が

$$\phi_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_r)^{m_r} \quad (\lambda_1,\cdots\lambda_r \text{ は異なる数})$$

であるとする。

$$g_i(x) = \frac{\phi_A(x)}{(x-\lambda_i)^{m_i}} \quad (i=1,\cdots r)$$

$$\frac{1}{\phi_A(x)} = \frac{h_1(x)}{(x-\lambda_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{h_r(x)}{(x-\lambda_r)^{m_r}} \quad (\text{部分分数分解}; h_i(x) \text{ は } (m_i-1) \text{ 次以下}) \quad \cdots(*)$$

$$P_i = g_i(A)h_i(A) \quad (i=1,\cdots r)$$

とすれば,

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r + N$$

のように**一般スペクトル分解**できる。

ただし N は冪零行列(有限回かけ合わせると零行列になるような行列)で,

かつ $P_1,\cdots P_r$ は $\begin{cases} P_1+\cdots+P_r = E \\ P_i^{\ 2} = P_i \\ P_iP_j = O \quad (i \neq j) \end{cases}$ を満たす。

※ (＊)式の両辺に $\phi_A(x)$ をかけて分母を払うと

$$h_1(x)g_1(x) + \cdots + h_r(x)g_r(x) = 1$$

となることも覚えておきましょう。

＜基本事項 4.13＞ 一般スペクトル分解による行列の指数計算

正方行列 A が

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r + N$$

のように一般スペクトル分解できるとき,

$$\exp(Ax) = \{\exp(Ax)\}(P_1+\cdots+P_r) = \{\exp(Ax)\}P_1 + \cdots + \{\exp(Ax)\}P_r$$

$$\{\exp(Ax)\}P_i = e^{\lambda_i x}\left[\exp\{(A-\lambda_i E)x\}\right]P_i \quad \cdots(☆)$$

により $\exp(Ax)$ を計算できる。

※ $(A-\lambda_i E)^{m_i}P_i = O$ (証明略) が成り立つため,(☆)式の右辺は有限和になります。

＜練習問題 4.5＞

基本事項 4.13 の(☆)式を証明せよ。

＜例題 4.7＞

行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ について，一般スペクトル分解を用いて $\exp(Ax)$ を計算せよ。

＜解答＞

固有多項式は $\phi_A(x)=|xA-E|=(x-3)^2(x+3)$ である。

ここで $g_1(x)=\dfrac{\phi_A(x)}{(x-3)^2}=x+3$，$g_2(x)=\dfrac{\phi_A(x)}{(x+3)}=(x-3)^2$ とおく。

(↑ $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-3$ だと思ってください)

さらに $\dfrac{1}{(x-3)^2(x+3)}=\dfrac{Ax+B}{(x-3)^2}+\dfrac{C}{x+3}$ (A,B,C ：定数) とおいて分母を払うと

$(Ax+B)(x+3)+C(x-3)^2=1$ ･･･①

両辺の係数を比較することにより $A=-\dfrac{1}{36}$，$B=\dfrac{1}{4}$，$C=\dfrac{1}{36}$ と求まる。

これを①式に代入すると

$-\dfrac{1}{36}(x-9)(x+3)+\dfrac{1}{36}(x-3)^2=1$ ･･･②

$h_1(x)=-\dfrac{1}{36}(x-9)$，$h_2(x)=\dfrac{1}{36}$ とおくと，②式は

$h_1(x)g_1(x)+h_2(x)g_2(x)=1$ (1) ･･･③

$P_1=h_1(A)g_1(A)$，$P_2=h_2(A)g_2(A)$ とすると

$P_1=-\dfrac{1}{36}(A-9E)(A+3E)$，$P_2=\dfrac{1}{36}(A-3E)^2$ (2)

これらを計算すると $P_1=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$P_2=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ となり(3)，

一般スペクトル分解は $A=3P_1-3P_2+N$ (N ：冪零行列) となる(4)。

ここで $P_1+P_2=E$ より $\exp(Ax)=\{\exp(Ax)\}P_1+\{\exp(Ax)\}P_2$

$$\begin{aligned}\{\exp(Ax)\}P_1&=[\exp\{3Ex+(A-3E)x\}]P_1 \quad (\leftarrow \lambda_1=3\text{だからこう変形する})\ (5)\\ &=e^{3x}[\exp\{(A-3E)x\}]P_1\\ &=e^{3x}\left\{P_1+\frac{x}{1!}(A-3E)P_1+\frac{x^2}{2!}(A-3E)^2P_1+\cdots\right\}\\ &=e^{3x}P_1\end{aligned}$$

$\{\exp(Ax)\}P_2=[\exp\{-3Ex+(A+3E)x\}]P_2=e^{-3x}P_2$ (上と同様に計算)

したがって

$$\exp(Ax) = e^{3x}P_1 + e^{-3x}P_2 = \frac{e^{3x}}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{e^{-3x}}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

(1) P_1, P_2 を混同しないよう，一度 $\sum h_i(x)g_i(x)$ の形に書き直すことをおすすめします。

(2) $h_i(A), g_i(A)$ は可換になるみたいなので，積の順序は特に気にしなくていいです。
あと，多項式に行列を代入する際，定数部分には単位行列 E をつけることに注意。

(3) P_1 を求めれば，$P_1 + P_2 = E$ となることから P_2 を計算できます。

(4) $\exp(Ax)$ を計算する過程において，一般スペクトル分解の形そのものや冪零行列 N を使うことはありません。でも N を実際に計算してみたほうが検算になってよいと思います。ちなみにこの例では $N = O$ になっています。

(5) P_i と λ_i の対応を間違えないように注意しましょう(間違えると, 無限級数が収束しなくなって計算できません・・・逆にいえば収束しなければ間違ってるってことですね)。

＜練習問題 4.6**＞**

行列　$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & -2 \\ -5 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の 2 通りの方法で $\exp(Ax)$ を計算せよ。

(1) Jordan 標準形を用いて

(2) 一般スペクトル分解を用いて

練習問題の解答

１．1 階の微分方程式の解法

＜練習問題 1.1＞ (P.2)

与えられた方程式を変形して積分すると

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{y-1}{y+1} = \log x + C \quad (C\text{：定数})$$

$$\therefore \frac{y-1}{y+1} = e^{2(\log x + C)} = e^{2C}\cdot e^{2\log x} = x^2 e^{2C}$$

ここで改めて $C = e^{2C}$ とおくと

$$\frac{y-1}{y+1} = Cx^2 \quad (C\text{：定数})$$

$$\therefore y = \frac{1+Cx^2}{1-Cx^2}$$

＜練習問題 1.2＞ (P.2)

(1) 例題 1.1 の一般解に $(x=0, y=2)$ を代入すると

$$2 = Ce^0$$

$$\therefore y = 2e^{3x}$$

(2) 練習問題 1.1 の一般解に $(x=1, y=0)$ を代入すると

$$0 = \frac{1+C}{1-C} \quad \text{より} \quad C = -1$$

$$\therefore y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

＜練習問題 1.3＞ (P.3)

与えられた方程式の右辺を x で割ると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{y/x}$$

$z = y/x$ と置換すると， $y' = z + xz'$ だから

$$z + x\frac{dz}{dx} = z + e^z$$

$$x\frac{dz}{dx}=e^{z}$$

$$\int\frac{dz}{e^{z}}=\int\frac{dx}{x}$$ ←変数分離

$$-e^{-z}=\log x+C \quad (C：定数)$$

$$\therefore z=-\log(C-\log x) \quad (C：定数)$$ ←C の符号を変えました

$z=y/x$ を代入すると

$$\frac{y}{x}=-\log(C-\log x)$$

$$\therefore y=-x\log(C-\log x) \quad (C：定数)$$

初期条件 $(x=1, y=1)$ より

$$1=-\log(C-0) \quad ゆえに \quad C=\frac{1}{e}$$

$$\therefore y=-x\log\left(\frac{1}{e}-\log x\right)$$

＜練習問題 1.4＞ (P.4)

与えられた方程式の両辺を m で割ると

$$\frac{dv}{dt}=-g-\frac{\mu}{m}v \quad \cdots(☆)$$

まず, $\frac{dv}{dt}=-\frac{\mu}{m}v$ を変数分離によって解くと

$$\int\frac{dv}{v}=-\frac{\mu}{m}\int dt$$

$$\therefore v=Ce^{-(\mu/m)t}$$

そこで $v=a(t)e^{-(\mu/m)t}$ として(☆)に代入すると

$$a'(t)e^{-(\mu/m)t}-\frac{\mu}{m}a(t)e^{-(\mu/m)t}=-g-\frac{\mu}{m}a(t)e^{-(\mu/m)t}$$

$$a'(t)=-ge^{(\mu/m)t}$$

$$\therefore a(t)=-\frac{mg}{\mu}e^{(\mu/m)t}+C \quad (C：定数)$$

したがって, 一般解は

$$v=-\frac{mg}{\mu}+Ce^{-(\mu/m)t} \quad (C：定数)$$

よって $t\to+\infty$ のとき $v\to-\frac{mg}{\mu}$ となる。

＜練習問題 1.5＞ (P.6)

(1) 与えられた方程式を変形すると

$$y' = -y^2 - \frac{3}{x}y - \frac{1}{x^2} \quad \cdots(☆)$$

これに $y = \frac{\lambda}{x}$ を代入すると

$$(\text{左辺}) = -\frac{\lambda}{x^2}$$

$$(\text{右辺}) = -\frac{\lambda^2}{x^2} - \frac{3\lambda}{x^2} - \frac{1}{x^2}$$

よって

$$-\lambda = -\lambda^2 - 3\lambda - 1$$

$$\therefore \lambda = -1$$

(2) 一般解を $y = -\frac{1}{x} + z$ とおいて(☆)に代入すると

$$\frac{1}{x^2} + z' = -\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2z}{x} + z^2\right) - \frac{3}{x}\left(-\frac{1}{x} + z\right) - \frac{1}{x^2}$$

$$z' = -\frac{z}{x} - z^2 \quad \leftarrow \text{Bernoulli 形}$$

$w = z^{1-2} = \frac{1}{z}$ とおくと， $z = \frac{1}{w}$ より $z' = -\frac{1}{w^2}w'$ となるので

$$-\frac{1}{w^2}w' = -\frac{1}{wx} - \frac{1}{w^2}$$

$$w' = \frac{w}{x} + 1 \quad \cdots(＊) \quad \leftarrow \text{線形}$$

ここで $w' = \frac{w}{x}$ を変数分離によって解くと

$$\int \frac{dw}{w} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\log w = \log x + C \quad (C\text{：定数})$$

$$\therefore w = Cx \quad (C\text{：定数})$$

そこで $w = a(x)x$ とおいて(＊)に代入すると

$$a'(x)x + a(x) = a(x) + 1$$

$$a'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\therefore a(x) = \log|x| + C \quad (C\text{：定数})$$

よって $w = a(x)x = (\log|x| + C)x$

$$z = \frac{1}{w} = \frac{1}{(\log|x| + C)x}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{x} + z = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\log|x| + C} - 1\right) \quad (C\text{：定数})$$

＜練習問題 1.6＞ (P.7)

$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$ **が完全形であるとき**

$$\exists\varphi(x, y)\ \ \text{s.t.}\ \begin{cases} f(x, y) = \varphi_x(x, y) \\ g(x, y) = \varphi_y(x, y) \end{cases}$$

となっているので，

$$f_y(x, y) = \varphi_{xy}(x, y),\quad g_x(x, y) = \varphi_{yx}(x, y)$$

ここで $f(x, y)$，$g(x, y)$ **が連続的に微分可能であることより**

$$\varphi_{xy}(x, y) = \varphi_{yx}(x, y)$$

したがって $f_y(x, y) = g_x(x, y)$ **となる。**

一方， $f_y(x, y) = g_x(x, y)$ **のとき，**

$$\varphi(x, y) = \int f(x, y)dx + \int g(x, y)dy - \iint g_x(x, y)dxdy \quad \cdots(☆)$$

と定義し，両辺を x **で偏微分すると**

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= f(x, y) + \int g_x(x, y)dy - \int g_x(x, y)dy \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$

ただし， $g(x, y)$ **が連続的に微分可能であることより**

$$\frac{\partial}{\partial x}\int g(x, y)dy = \int \frac{\partial}{\partial x} g(x, y)dy$$

となることを用いた。

同様に(☆)の両辺を y **で偏微分することにより** $\varphi_y(x, y) = g(x, y)$ **となる。**

したがって，この微分方程式は完全形である。

＜練習問題 1.7＞ (P.7)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 2xy + 2y^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2 + 4xy - y^2\right) = -2x + 4y$$ **より，この微分方程式は完全形。**

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int\left(x^2 - 2xy + 2y^2\right)dx + \int\left(-x^2 + 4xy - y^2\right)dy - \iint(-2x + 4y)dxdy \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2y + 2xy^2\right) + \left(-x^2y + 2xy^2 - \frac{1}{3}y^3\right) + \int\left(x^2 - 4xy\right)dy \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2y + 2xy^2\right) + \left(-x^2y + 2xy^2 - \frac{1}{3}y^3\right) + \left(x^2y - 2xy^2\right) \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x^2y + 2xy^2 - \frac{1}{3}y^3 \end{aligned}$$

したがって，一般解は

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2y + 2xy^2 - \frac{1}{3}y^3 = C \quad (C\ \text{：定数})$$

＜練習問題 1.8＞ (P.8)

積分因子として $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ **をとり，これを両辺にかけると**

$$\frac{y}{x^2+y^2}dx-\left(1+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{-\left(1+\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right\}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$ **より，この微分方程式は完全形。**

$$\varphi(x,y)=\int\frac{y}{x^2+y^2}dx-\int\left(1+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy-\iint\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy$$

ここで

$$\int\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy=\frac{y}{x^2+y^2}\quad\cdots(☆)$$

であるから

$$\int\frac{y}{x^2+y^2}dx=\iint\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy$$

したがって

$$\varphi(x,y)=-\int\left(1+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy$$

$$=-\arctan\frac{y}{x}-y\quad\cdots(＊)$$

となるので，一般解は

$$\arctan\frac{y}{x}+y=C\quad(C\text{ ：定数})$$

$$\therefore x=\frac{y}{\tan(C-y)}\quad(C\text{ ：定数})$$

<u>(☆)の証明</u>

$y=x\tan\theta$ **とおくと**

$$x^2+y^2=x^2\left(1+\tan^2\theta\right)=\frac{x^2}{\cos^2\theta},\quad dy=x\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

だから

$$\int\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy=\int x^2\left(1-\tan^2\theta\right)\frac{\cos^4\theta}{x^4}x\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\int\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{x}d\theta=\int\frac{\cos2\theta}{x}d\theta$$

$$=\frac{1}{2x}\sin2\theta=\frac{1}{x}\sin\theta\cos\theta$$

ここで $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ だから

$$\int \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dy = \frac{y}{x^2+y^2}$$

<u>(＊)の証明</u>

$y = x\tan\theta$ とおいて，上と同様に計算すると

$$\int \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int d\theta = \theta$$

となる。ここで $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ より，$\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$

２．高階微分方程式の解法

＜練習問題 2.1＞ (P.12)

(1) 2 次方程式 $\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$ の解は，$-2, -4$ だから，一般解は

$$y = Ae^{-2x} + Be^{-4x} \quad (A, B：定数)$$

$$\therefore y' = -2Ae^{-2x} - 4Be^{-4x}$$

初期条件より

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 0 = -2A - 4B \end{cases} \qquad \therefore A = 2,\ B = -1$$

よって求める解は $y = 2e^{-2x} - e^{-4x}$

(2) 2 次方程式 $m\lambda^2 = -k$ の解は，$\pm i\sqrt{k/m}$ だから，一般解は

$$x = Ae^{(i\sqrt{k/m})t} + Be^{(-i\sqrt{k/m})t} \quad (A, B：定数)$$

$$= (A+B)\cos(\sqrt{k/m})t + i(A-B)\sin(\sqrt{k/m})t$$

A, B 共役より $A = \dfrac{C-iD}{2}$, $B = \dfrac{C+iD}{2}$ (C, D ：実数) とおくと

$$x = C\cos(\sqrt{k/m})t + D\sin(\sqrt{k/m})t$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left\{C\cos(\sqrt{k/m})t + D\sin(\sqrt{k/m})t\right\}$$

初期条件より

$$\begin{cases} l = C \\ 0 = -\dfrac{k}{m}D \end{cases} \qquad \therefore C = l,\ D = 0$$

よって求める解は $x = l\cos(\sqrt{k/m})t$

(3) 2次方程式 $\lambda^2 = 4\lambda - 4$ の解は，2(重解) だから，一般解は

$$y = f(x)e^{2x}$$

$$\therefore y' = \{f'(x) + 2f(x)\}e^{2x}$$

$$y'' = \{f''(x) + 4f'(x) + 4f(x)\}e^{2x}$$

これらを与えられた微分方程式に代入して整理すると

$$e^{2x} f''(x) = 0$$

ここで $e^{2x} \neq 0$ より $f''(x) = 0$

$\therefore f(x) = Ax + B$ (A, B：定数)

したがって，求める一般解は $y = (Ax + B)e^{2x}$ (A, B：定数) となる。

初期条件より

$$\begin{cases} 1 = B \\ 4 = 4(A\log 2 + B) \end{cases} \qquad \therefore A = 0,\ B = 1$$

よって求める解は $y = e^{2x}$

＜練習問題2.2＞ (P.14)

与えられた微分方程式を変形すると

$$y'''(t) = 3y''(t) - 4y(t)$$

よって $\vec{y} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと，上式は $\vec{y}' = A\vec{y}$ と表せる。

AのJordan標準形を求めると，例えば

変換行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ をとれば $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とできる。

よって $\exp(At) = P\{\exp(Bt)\}P^{-1}$

ここで

$$\exp(Bt) = \exp\begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\exp(At)=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t}&0&0\\0&e^{2t}&te^{2t}\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4&-4&1\\5&4&-1\\-6&-3&3\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4e^{-t}+(5-6t)e^{2t}&-4e^{-t}+(4-3t)e^{2t}&e^{-t}+(-1+3t)e^{2t}\\-4e^{-t}+(4-12t)e^{2t}&4e^{-t}+(5-6t)e^{2t}&-e^{-t}+(1+6t)e^{2t}\\4e^{-t}+(-4-24t)e^{2t}&-4e^{-t}+(4-12t)e^{2t}&e^{-t}+(8+12t)e^{2t}\end{pmatrix}$$

したがって

$$\vec{y}=\exp(At)\begin{pmatrix}y(0)\\y'(0)\\y''(0)\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4e^{-t}+(5-6t)e^{2t}&-4e^{-t}+(4-3t)e^{2t}&e^{-t}+(-1+3t)e^{2t}\\-4e^{-t}+(4-12t)e^{2t}&4e^{-t}+(5-6t)e^{2t}&-e^{-t}+(1+6t)e^{2t}\\4e^{-t}+(-4-24t)e^{2t}&-4e^{-t}+(4-12t)e^{2t}&e^{-t}+(8+12t)e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{9}\left\{e^{-t}\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}6-9t\\3-18t\\-12-36t\end{pmatrix}\right\}$$

この第 1 成分をとることにより

$$y(t)=\frac{1}{3}\left\{e^{-t}+e^{2t}(2-3t)\right\}$$

３．解の存在と一意性

＜練習問題 3.1＞ (P. 20)

平均値の定理により

$$0<\exists\theta<1\ \text{ s.t. }\ \frac{|f(x,y_1)-f(x,y_2)|}{|y_1-y_2|}=\left|\frac{\partial}{\partial y}f\left(x,y_1+\theta(y_2-y_1)\right)\right|$$

であり，閉領域 D 上で $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ が連続であるから，その絶対値は最大値 L をもつので

$$\frac{|f(x,y_1)-f(x,y_2)|}{|y_1-y_2|}=\left|\frac{\partial}{\partial y}f\left(x,y_1+\theta(y_2-y_1)\right)\right|\le L$$

となり，Lipshitz 条件が成立することが示された。

＜練習問題3.2**＞** (P. 20)

(1) 2点$(x, y_1), (x, y_2)$をとると

$$|3y_1 - 3y_2| = 3|y_1 - y_2|$$

となるので，閉領域Dのとり方によらずLipshitz条件を満たす。

または，練習問題3.1の結果を用いると，

$$\frac{\partial}{\partial y}3y = 3$$

より，全てのx, yにおいて連続的に偏微分が存在するので，Lipshitz条件を満たす。

(2) $x = 0$では，そもそもy'が定義されていないのでLipshitz条件を満たさない。

$x \neq 0$のとき

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y^2 - 1}{x} = \frac{2y}{x}$$

より，連続的に偏微分が存在するので，Lipshitz条件を満たす。

(3) 2点$(x, y_1), (x, 0)$をとると

$$\frac{\left|y_1^{2/3} - 0^{2/3}\right|}{|y_1 - 0|} = \frac{1}{\left|y_1^{1/3}\right|} \to +\infty \quad (y_1 \to 0)$$

となるので，$y = 0$ではLipshitz条件を満たさない。

$y \neq 0$のとき

$$\frac{\partial}{\partial y}y^{2/3} = \frac{2}{3y^{-1/3}}$$

より，連続的に偏微分が存在するので，Lipshitz条件を満たす。

４．線形代数の基礎知識

＜練習問題4.1**＞** (P. 24)

順に基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & c_1 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & c_2 \\ -2 & 4 & 7 & 10 & c_3 \\ -6 & 1 & 10 & -3 & c_4 \end{pmatrix} \underset{①}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & c_1 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & c_2 \\ 0 & 3 & 3 & 9 & -c_2 + c_3 \\ 0 & -2 & -2 & -6 & -3c_2 + c_4 \end{pmatrix} \underset{②}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & c_1 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3c_1 - c_2 + c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_1 - 3c_2 + c_4 \end{pmatrix}$$

となる。

※ ① 第2行を-1倍して第3行に，第2行を-3倍して第4行に加える
　② 第1行を-3倍して第3行に，第1行を2倍して第4行に加える　　という変形。

(1) 解が存在するためには, $0x+0y+0z+0w=0$ を満たす必要があるので

$$\begin{cases} -3c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 - 3c_2 + c_4 = 0 \end{cases}$$

(2) 上の基本変形より, $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & 7 & 10 \\ -6 & 1 & 10 & -3 \end{pmatrix} = 2$ なので,

自明でない 1 次独立な解は $4-2=2$ (組) 作れる。

※(2)で, 1 次独立な 2 組の解は, 例えば $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ のようにとれる。

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ なども解だが, これは上に挙げた 2 つのベクトルの 1 次結合で構成できる。

＜練習問題 4.2＞ (P. 28)

固有多項式を計算すると

$$|xE - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ 1 & x-4 & -1 \\ -2 & 4 & x \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)^2$$

よって $|xE - A| = 0$ を解くことにより, 固有値は 1, 2 (重解) である。

固有値 1 に対応する固有ベクトルを $\vec{x_1}$ とすると

$(A-E)\vec{x_1} = O$ より $\vec{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ととれる。

固有値 2 に対応する固有ベクトルを $\vec{x_2}$ とすると

$(A-2E)\vec{x_2} = O$ より $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \vec{x_2} = O$

行基本変形により $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とできるので

$\vec{x_2}=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$ とおくと $-a_2+2b_2+c_2=0$ となる。

これを満たす 1 次独立な $\vec{x_2},\vec{x_2}'$ を求めると，例えば $\vec{x_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\vec{x_2}'=\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ ととれる。

したがって，$P=\left(\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_2}'\right)=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&1&-2\\2&-1&3\end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ となる。

※この問題のように，固有方程式が重解を持つ場合でも，$A-\lambda E$ のランクによってはトータル n 個の 1 次独立な固有ベクトルを持ち，このような場合には対角化できます。固有ベクトルの個数が n 未満なら対角化できず，この場合 Jordan 標準形という形にならら変形できます(まあ対角行列も Jordan 標準形の一種ですが)。これについては次項で解説します。

＜練習問題 4.3＞ (P. 31)

固有多項式を計算すると

$$|xE-A|=\begin{vmatrix}x+2&1&2&-1\\-5&x-3&-4&1\\-1&0&x-1&1\\3&1&2&x-2\end{vmatrix}=(x-1)^4$$

よって $|xE-A|=0$ を解くことにより，固有値は 1 のみ(4 重解)である。

ここで連立 1 次方程式 $(A-E)\vec{x}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ を行基本変形によって計算すると

$$\begin{pmatrix}-3&-1&-2&1&a\\5&2&4&-1&b\\1&0&0&-1&c\\-3&-1&-2&1&d\end{pmatrix}\underset{①}{\rightarrow}\begin{pmatrix}-3&-1&-2&1&a\\-1&0&0&1&b+2d\\1&0&0&-1&c\\-3&-1&-2&1&d\end{pmatrix}\underset{②}{\rightarrow}\begin{pmatrix}-3&-1&-2&1&a\\-1&0&0&1&b+2d\\0&0&0&0&b+c+2d\\0&0&0&0&-a+d\end{pmatrix}$$

① 第 4 行を 2 倍して第 2 行に加える

② 第 1 行を-1 倍して第 4 行に，第 2 行を第 3 行に加える

となるので，解が存在するための条件は

$$\begin{cases}b+c+2d=0\\-a+d=0\end{cases}\quad\cdots(☆)$$

となる。

また $\mathrm{rank}(A-E)=2$ だから，1 次独立な固有ベクトルは $4-2=2$ (個) 存在する[(1)]。

まず，$(A-E)\vec{x}=O$ の解を $\vec{x_1}=\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$，$\vec{x_2}=\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$ すると

$$\begin{cases} -3a_1-b_1-2c_1+d_1=0 \cdots\cdots ① \\ -a_1+d_1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a_2-b_2-2c_2+d_2=0 \cdots\cdots ③ \\ -a_2+d_2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

また，$\vec{x_2}$ については $(A-E)\vec{x_3}=\vec{x_2}$ を満たす $\vec{x_3}$ が存在する必要があるので，(☆)より

$$\begin{cases} b_2+c_2+2d_2=0 \cdots\cdots ⑤ \\ -a_2+d_2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

③～⑥を満たす 1 次独立な $\vec{x_2}$ は，$\vec{x_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のみである[2]。

$(A-E)\vec{x_3}=\vec{x_2}$ を考えると，$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と行基本変形されるので

$\vec{x_3}=\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix}$ とすると $\begin{cases} -3a_3-b_3-2c_3+d_3=1 \cdots\cdots ⑦ \\ -a_3+d_3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧ \end{cases}$

さらに $(A-E)\vec{x_4}=\vec{x_3}$ を満たす $\vec{x_4}$ が存在する必要があるので，(☆)より

$$\begin{cases} b_3+c_3+2d_3=0 \cdots\cdots ⑨ \\ -a_3+d_3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑩ \end{cases}$$

⑦～⑩を満たす $\vec{x_3}$ として，例えば $\vec{x_3}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

$(A-E)\vec{x_4}=\vec{x_3}$ を考えると，$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と行基本変形されるので

$\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \\ d_4 \end{pmatrix}$ とすると $\begin{cases} -3a_4 - b_4 - 2c_4 + d_4 = 1 \cdots\cdots ⑪ \\ -a_4 + d_4 = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑫ \end{cases}$

⑪, ⑫を満たす $\vec{x}_4$ として，例えば $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

一方，①, ②を満たし，$\vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ と 1 次独立な $\vec{x}_1$ として，$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる[(3)]。

以上より，$P = \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[(1)] Jordan 細胞が 2 個なので，$J(1,3) \oplus J(1,1)$ または $J(1,2) \oplus J(1,2)$ の形に絞れます。

[(2)] $(A-E)\vec{x} = \vec{x}_2$ の解は存在するが $(A-E)\vec{x} = \vec{x}_1$ の解は存在しないということから，$\vec{x}_1$ の構成する Jordan 細胞の大きさが 1 次であることが分かり，すると $\vec{x}_2$ については $4-1=3$(次) だと分かります。[すなわち $J(1,3) \oplus J(1,1)$ の形だと決定できます]

Jordan 細胞 $J(1,3)$ に対応する列ベクトルは $\vec{x}_2$ の他に $3-1=2$(個) あるはずなので $(A-E)\vec{x}_3 = \vec{x}_2$，$(A-E)\vec{x}_4 = \vec{x}_3$ まで計算すればよいことになります。

ちなみに，仮に③～⑥を満たす 1 次独立なベクトルが 2 つ存在したならば，それらを $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ とすれば，$\vec{x}_1, \vec{x}_2$ が各々 $J(1,2)$ の Jordan 細胞を構成すると分かるので，$(A-E)\vec{x}_3 = \vec{x}_1$，$(A-E)\vec{x}_4 = \vec{x}_2$ を満たす $\vec{x}_3, \vec{x}_4$ を計算し，

$P = \left(\vec{x}_1, \vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_4\right)$ とすれば，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となります。

↑2 次の Jordan 細胞が 2 つ

このとき P の列ベクトルの順序に注意。例題 4.5 でやったように，$AP = PB$ となるようにする，ということを念頭においてやれば間違えないはずです。

[(3)] 本当に 1 次独立かどうか不安だったら，$P = \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\right)$ の行列式を計算して 0 でないことを確認すればよいでしょう。ここでは行列式の値は 1 になります。

＜練習問題 4.4＞ (P. 32)

(1) n 次対角行列 $S=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}$ に対して $S^k=\begin{pmatrix}\lambda_1{}^k & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n{}^k\end{pmatrix}$ だから

$$\exp S = E+\frac{S}{1!}+\frac{S^2}{2!}+\frac{S^3}{3!}+\cdots \quad [\because \text{基本事項 } 4.10]$$

$$=\begin{pmatrix}1+\frac{\lambda_1}{1!}+\frac{\lambda_1{}^2}{2!}+\frac{\lambda_1{}^3}{3!}+\cdots & & O\\ & \ddots & \\ O & & 1+\frac{\lambda_n}{1!}+\frac{\lambda_n{}^2}{2!}+\frac{\lambda_n{}^3}{3!}+\cdots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix} \quad [\because \text{Taylor 展開}]$$

(2) $$\exp(PSP^{-1}) = E+\frac{PSP^{-1}}{1!}+\frac{(PSP^{-1})^2}{2!}+\frac{(PSP^{-1})^3}{3!}+\cdots \quad [\because \text{基本事項 } 4.10]$$

$$=E+\frac{PSP^{-1}}{1!}+\frac{PS^2P^{-1}}{2!}+\frac{PS^3P^{-1}}{3!}+\cdots \quad [\because P^{-1}P=E\ ]$$

$$=P\left(E+\frac{S}{1!}+\frac{S^2}{2!}+\frac{S^3}{3!}+\cdots\right)P^{-1} \quad [\because PEP^{-1}=E\ ]$$

$$=P(\exp S)P^{-1} \quad [\because \text{基本事項 } 4.10]$$

(3) $SN=NS$ の両辺に t^2 をかけると $SNt^2=NSt^2$
これは $(St)(Nt)=(Nt)(St)$ とも書けるので, St と Nt の積は可換である。
よって指数法則が適用でき, $\exp(St+Nt)=\{\exp(St)\}\{\exp(Nt)\}$
すなわち $\exp\{(S+N)t\}=\{\exp(St)\}\{\exp(Nt)\}$

＜練習問題 4.5＞ (P. 34)

$\{\exp(Ax)\}P_i=[\exp\{\lambda_i Ex+(A-\lambda_i E)x\}]P_i$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・①

$\lambda_i Ex$ は単位行列の定数倍であるから, これと $(A-\lambda_i E)x$ の積は可換である。

よって指数法則が使えて

$[\exp\{\lambda_i Ex+(A-\lambda_i E)x\}]P_i=\{\exp(\lambda_i Ex)\}[\exp\{(A-\lambda_i E)x\}]P_i$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・②

ここで行列の指数の定義より

$$\exp(\lambda_i Ex)=\left\{E+\frac{\lambda_i x}{1!}E+\frac{(\lambda_i x)^2}{2!}E^2+\cdots\right\}=\left\{1+\frac{\lambda_i x}{1!}+\frac{(\lambda_i x)^2}{2!}+\cdots\right\}E=e^{\lambda_i x}E \quad ・・③$$

以上①～③により $\{\exp(Ax)\}P_i=e^{\lambda_i x}[\exp\{(A-\lambda_i E)x\}]P_i$ が導かれる。

＜練習問題 4.6＞ (P. 36)
固有多項式は $\phi_A(x) = |xA - E| = (x-1)^3(x+1)$ **である。**

(1) **まず固有値 1 について考える。**

$$(A-E)\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$ **とすると**

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & a \\ 6 & 2 & 4 & -2 & b \\ -5 & -1 & -3 & 2 & c \\ -1 & -1 & -1 & 0 & d \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+c \\ -5 & -1 & -3 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a+d \end{pmatrix}$$

と行基本変形できる。

$\mathrm{rank}(A-E) = 2$ **より，固有値 1 に対する** Jordan **細胞は 2 個** $\to$ $J(1,2) \oplus J(1,1)$ **の形**

そこで $\begin{cases} (A-E)\vec{x_1} = O \\ (A-E)\vec{x_3} = O \\ (A-E)\vec{x_2} = \vec{x_1} \end{cases}$ **となる 1 次独立な** $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$ **として，例えば**

$$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \vec{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \vec{x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

次に固有値-1 についても， $(A+E)\vec{x_4} = O$ **を解いて** $\vec{x_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **が得られる。**

よって $P = \left(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **とすれば**

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\exp(Ax) = P\{\exp(P^{-1}APx)\}P^{-1}$$

$$= P\left[\exp\left\{\begin{pmatrix} x & & & O \\ & x & & \\ & & x & \\ O & & & -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right]P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} e^x & & & O \\ & e^x & & \\ & & e^x & \\ O & & & e^{-x} \end{pmatrix}\{\exp(Nx)\}P^{-1} \quad \leftarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ とおいた

ここで $N^2 = O$ より $\exp(Nx) = E + xN = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ だから

$$\exp(Ax) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^x & & & O \\ & e^x & & \\ & & e^x & \\ O & & & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^x\begin{pmatrix} -x+1 & -x & -x & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ x-3 & x-1 & x-1 & 1 \\ -x & -x & -x & 1 \end{pmatrix} + e^{-x}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $g_1(x) = \dfrac{\phi_A(x)}{(x-1)^3} = x+1$，$g_2(x) = \dfrac{\phi_A(x)}{x+1} = (x-1)^3$ とおく。

ここで $\dfrac{1}{\phi_A(x)} = \dfrac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)^3} + \dfrac{D}{x+1}$ ($A \sim D$：定数) とおくと，係数比較により

$A = \dfrac{1}{8}$，$B = -\dfrac{1}{2}$，$C = \dfrac{7}{8}$，$D = -\dfrac{1}{8}$，

となるので

$$\frac{1}{8}(x^2-4x+7)(x+1) - \frac{1}{8}(x-1)^3 = 1$$

が得られる。

$h_1(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 4x + 7)$，$h_2(x) = -\frac{1}{8}$ **とおくと**

$$h_1(x)g_1(x) + h_2(x)g_2(x) = 1$$

と書ける。

さらに $P_1 = h_1(A)g_1(A)$，$P_2 = h_2(A)g_2(A)$ **とおくと，** $P_1 + P_2 = E$ **であり，**

$$P_1 = \frac{1}{8}(A^2 - 4A + 7E)(A + E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = -\frac{1}{8}(A - E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

$$\{\exp(Ax)\}P_1 = [\exp\{xE + (A - E)x\}]P_1$$

$$= e^x\left\{P_1 + \frac{x}{1!}(A - E)P_1 + \frac{x^2}{2!}(A - E)^2 P_1 + \cdots\right\}$$

[$(A - E)^2 P_1 = O$ **になります**]

$$= e^x \begin{pmatrix} -x+1 & -x & -x & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ x-3 & x-1 & x-1 & 1 \\ -x & -x & -x & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{\exp(Ax)\}P_2 = [\exp\{-xE + (A + E)x\}]P_2$$

$$= e^{-x}\left\{P_2 + \frac{x}{1!}(A + E)P_2 + \cdots\right\}$$

[$(A + E)P_2 = O$ **になります**]

$$= e^{-x} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_1 + P_2 = E$ **であることより**

$$\exp(Ax) = \{\exp(Ax)\}P_1 + \{\exp(Ax)\}P_2$$

$$= e^x \begin{pmatrix} -x+1 & -x & -x & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ x-3 & x-1 & x-1 & 1 \\ -x & -x & -x & 1 \end{pmatrix} + e^{-x} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$