2010 年度夏学期 数理科学 IV（担当：松田茂樹）
期末試験解答

by うぉーり

2010 年 8 月 8 日

[1]

A の固有多項式 $\Phi_A(t) = \det(A - tI) = (t-1)(t-2)^3$ である．各固有値 α について固有空間を求める．$A - \alpha I$ をそれぞれ左基本変形すると，

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 2/3 & \\ & & & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

であるから，固有空間はそれぞれ $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$，$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ で次元はどちらも 1 である．これと固有多項式から A のジョルダン標準形 J は，

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

と分かる．次に $(A-2I)^2 v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる v を求める．$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるから，$v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすれば，$(A-2I)^2 v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$(A-2I)v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．よって $P^{-1}AP = J$ となる行列 P として

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

がとれる．□

[2]

well-defined，線形，全射，単射をそれぞれ示せば良い．

・<u>well-defined</u>

$[x]=[y]$ とすると，この時 $x-y \in \mathrm{Ker} f^m$ より $\varphi([x])-\varphi([y]) = f^m(x)-f^m(y) = f^m(x-y) = 0$．よって $\varphi([x])$ の値は代表元 x のとり方によらない．また，$[x] \in \mathrm{Ker} f^{m+1}/\mathrm{Ker} f^m$ なら，$f\left(f^m(x)\right) = f^{m+1}(x) = 0$ なので，$f^m(x) \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f^m$.

・<u>線形性</u>

$\varphi\left([x]+[y]\right) = \varphi\left([x+y]\right) = f^m(x+y) = f^m(x)+f^m(y) = \varphi([x])+\varphi([y])$ 及び $\varphi\left(k\left[x\right]\right) = \varphi\left([kx]\right) = f^m(kx) = kf^m(x) = k\varphi\left([x]\right)$ から確かに φ は線形写像である．（ただし $x, y \in \mathrm{Ker} f^{m+1}$，$k \in \mathrm{K}$ で，線形写像の合成は線形写像であることを用いた）．

・<u>全射</u>

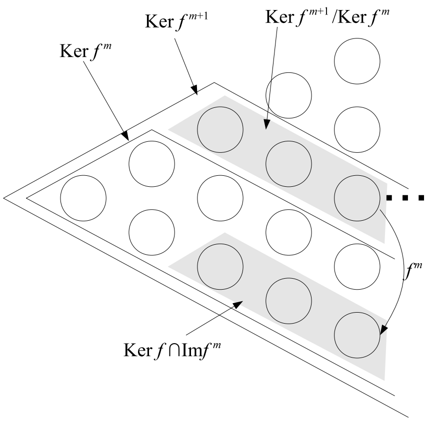
$v \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f^m$ すなわち $f(v)=0$，$v = f^m(x)$ とする．このとき $x \in \mathrm{Ker} f^{m+1}$ $\therefore$ $[x] \in \mathrm{Ker} f^{m+1}/\mathrm{Ker} f^m$ で，$\varphi\left([x]\right) = v$ なので φ は全射である．

・<u>単射</u>

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$ を示せば良い．$\varphi\left([x]\right) = 0$ とする．このとき $f^m(x) = 0$ なので $x = x - 0 \in \mathrm{Ker} f^m$．ゆえに $x \sim 0$ $\therefore$ $[x] = [0]$ であり確かに φ は単射.

以上より φ は同型写像である．□

■ちなみに授業で扱った図でこの問題の状況を表すと次のような感じになります.



[3]

(1) (a) より $f-2$ は巾零変換であるから，十分大きい k に対し $\dim \mathrm{Im}(f-2)^k = 0$. また $\dim \mathrm{Ker}(f-2)^4 = \mathrm{Ker}(f-2)^5 = 10$ より $k \geq 4$ では $\dim \mathrm{Ker}(f-2)^k = 10$. よって $\underline{\dim V = 0 + 10 = 10}$.

(2) $\dim V$ が 10（は偶数なので再高次の係数は $+1$）で固有値は 2 のみなので，f の固有多項式は $\underline{\Phi_f(t) = (t-2)^{10}}$.

(3) $\dim \mathrm{Im}(f-2)^3 = 10 - 9 \neq 0$ だが $\dim \mathrm{Im}(f-2)^4 = 10 - 10 = 0$ なので，$(f-2)^3 \neq 0$ だが $(f-2)^4 = 0$. ゆえに f の最小多項式は $\underline{\psi_f(t) = (t-2)^4}$.

(4) [2] の結果より

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}(f-2) \cap \mathrm{Im}(f-2)^m) &= \dim(\mathrm{Ker}(f-2)^{m+1}/\mathrm{Ker}(f-2)^m) \\ &= \dim \mathrm{Ker}(f-2)^{m+1} - \dim \mathrm{Ker}(f-2)^m\end{aligned}$$

なので固有値 2 で $m+1 (m = 0, 1, 2, 3, 4\ \textit{i.e.}\ m+1 = 1, 2, 3, 4, 5)$ 次以上のジョルダンブロックの数は順に $4 - 0 = 4$, $7 - 4 = 3$, $9 - 7 = 2$, $10 - 9 = 1$, $10 - 10 = 0$ 個である. よって（次数が大きいほうから順に考えて）f のジョルダン標準形 J は

$$\underline{J = J_4(2) \oplus J_3(2) \oplus J_2(2) \oplus J_1(2)\ .}$$

[4]

まずは A のジョルダン標準形を求める. $\det(A - tI) = -(t-2)^3$ より固有値は 2 のみ. また $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ より $\mathrm{Ker}(A - 2I) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ で，$(A - 2I)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$(A - 2I) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ なのでジョルダン標準形は $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$，また変換行列 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である. $P^{-1}AP = J \therefore A = PJP^{-1}$ を代入して左から P^{-1} をかければ

$$\frac{d}{dt}(P^{-1}\boldsymbol{x}) = J(P^{-1}\boldsymbol{x})$$

となり，$P^{-1}\boldsymbol{x}$ に関する微分方程式としてみなすとその基本解行列 X は

$$\exp(tJ) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ & e^{2t} & te^{2t} \\ & & e^{2t} \end{pmatrix}$$

なので，$P^{-1}\boldsymbol{x} = X\boldsymbol{c} \therefore \boldsymbol{x} = PX\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^3$ とおける. これに $t = 0$ を代入すると

$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{c}$ でこれを解くと $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. よって解 $\boldsymbol{x}(t)$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ & e^{2t} & te^{2t} \\ & & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 2te^{2t} + 3e^{2t} \\ 2te^{2t} + 5e^{2t} \\ t^2e^{2t} + 5te^{2t} + 4e^{2t} \end{pmatrix}} \end{aligned}$$