坂井さん'11 夏試験問題解答

問１．

次の解析関数の，指定された点を中心とした Taylor 展開を求めよ.（ただし $x = a$ を中心とした Talyor 展開を求めるとは，関数の $\sum_{n=o}^{\infty} c_n(x-a)^n$ の形の表示を求めることである.）

(a)　$(1+x)^{\lambda}$　(中心 $x = 0$),　　(b)　$\sin x$　(中心 $x = \pi/6$),　　(c)　$\tan x$　(中心 $x = 0$).

ただし，(c) については，x の４乗の項まで求めればよい.

〈解〉

(a)

$\lambda \in \mathbf{N}^0$ のとき

$$(1+x)^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\lambda} {}_{\lambda}C_k x^k$$

それ以外のとき

$$(1+x)^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-k+1)}{k!} x^k$$

(b)

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin' x\,|_{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin'' x\,|_{x=\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}, \quad \sin''' x\,|_{x=\frac{\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

より

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4 + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{4n!}\{(1+\sqrt{3}) + (-1)^n(1-\sqrt{3})\}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^n \ (\text{[　] はガウス記号})
\end{aligned}$$

(c)(I,II)

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right) \times \left\{1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right) + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right)^2 + O(x^6)\right\} \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)
\end{aligned}$$

問２．

次の極限値を求めよ.

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right), \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad (c)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-1}-\sqrt{1-x}\right).$$

〈解〉

(a)

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2\sin^2 x}\left\{\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)^2-x^2\right\}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2\sin^2 x}\left(-\frac{2}{3!}x^4+o(x^4)\right)\\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\log\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left\{-\left(\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right)-\left(\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\right\}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right)\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

よって

$$\text{与式} = e^{-\frac{1}{2}}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x}\,|_{x=0} &= 1\\
\left(\sqrt{1-x}\right)'|_{x=0} &= -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,|_{x=0}\\
&= -\frac{1}{2}\\
\left(-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)'|_{x=0} &= -\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\,|_{x=0}\\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

より

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)\right)\right\} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

問３．

数列 $\{a_n\}$ が０に収束しているとする．はじめの k 項の平均を b_k とおくと，数列 $\{b_n\}$ も０に収束することを示せ．

〈解〉（解析）

${}^{\exists}\varepsilon > 0 \quad {}^{\exists}N > \mathbf{N} \quad n > \mathbf{N} \to |a_n| < \varepsilon$

とすると

$$
|b_k| = \left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\right| \leq \frac{|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_k|}{k}
$$

ここで $|a_i|(1 \leq i \leq N)$ の中で最大のものを A とすると

$n \geq N$ で $|a_n| < \varepsilon$ に注意して

$$
|b_k| < \frac{AN+\varepsilon(k-n)}{k} < \frac{AN}{k} + \varepsilon
$$

k を大きくとれば

$\frac{AN}{k} < \varepsilon$ より $|b_k| < 2\varepsilon = \varepsilon'$.

よって

${}^{\exists}\varepsilon' > 0 \quad {}^{\exists}N > \mathbf{N} \quad n > \mathbf{N} \to |b_n| < \varepsilon'$ より

$\{b_n\}$ は収束する

問４．

(a) ２次元の直交座標を極座標に，関係式 $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を使って書き直すとき，偏微分作用素の間の関係は，r と θ の関数を要素とする行列 $M(r,\theta)$ を使って

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = M(r,\theta) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}
$$

と書ける．行列 $M(r,\theta)$ を求めよ．

(b) 偏微分作用素 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ を極座標の変数 (r,θ) による表示に書き直せ．

(c) ２変数ラプラシアン $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ を極座標の変数 (r,θ) による表示に書き直せ．

〈解〉（ノート）

(a)

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

より

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

よって $M(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 &= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 \\ &= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}$$

(c)

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}$$

より

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

問５.

次の関数 $f(x,y)$ の極値と，極値を与える点を全て求めよ.

$f(x,y) = x^3 + y^4 - 3x - 2y^2 + 1, \quad (b) f(x,y) = \cos x + \cos y - \cos(x+y), \quad (0 < x, y < \pi/2)$

〈解〉

(a)

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{xy}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 4,$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x - 3 = 0 \\ f_y(x,y) = 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}$$

を解いて $(x,y) = (\pm1, 0), (\pm1, \pm1), (\pm1, \mp1)$(複合同順)

f のヘッセ行列は

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$(x,y) = (1,0)$ のとき

$H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \to \det H = -24 < 0 \to$ 鞍点（極値をとらない）

$(x,y)=(-1,0)$ のとき

$H=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \to \det H = 24 < 0, \quad tr\, H = -10 \to$ 極大値をとり、その値は 3

$(x,y)=(1,\pm 1)$ のとき

$H=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \to \det H = 48 < 0, \quad tr\, H = 14 > 0 \to$ 極小値をとり、その値は-2

$(x,y)=(-1,\pm 1)$ のとき

$H=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \to \det H = -48 < 0 \to$ 鞍点（極値をとらない）

(b)

$$f_{xx}(x,y) = -\cos x + \cos(x+y), \quad f_{xy}(x,y) = \cos(x+y), \quad f_{yy}(x,y) = -\cos y + \cos(x+y),$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -\sin x + \sin(x+y) & = & 0 \\ f_y(x,y) = -\sin y + \sin(x+y) & = & 0 \end{cases}$$

を $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ に注意して解いて $(x,y) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$

f のヘッセ行列は

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos x + \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ \cos(x+y) & \cos y + \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

$(x,y) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ のとき

$H=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \to \det H = \frac{3}{4} > 0, \quad tr > H = -2 < 0 \to$ 極大値をとり、その値は $\frac{3}{2}$