解答訂正

1(2)

$$\begin{aligned}\sin y \log(1+x) &= (y - \frac{1}{6}y^3)(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4) \\ &= \underline{xy - \frac{1}{6}xy^3 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}x^3y}\end{aligned}$$

$\boxed{1}$

(1) $\log(1+x) = 0 + x \cdot 1 + \frac{x^2}{2} \cdot (-1) + \frac{x^3}{3!} \cdot 2 + \frac{x^4}{4!} \cdot (-6)$

$= \underline{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4}$

(2) $\sin y \log(1+x) = \sin y \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right)$

$\sin y = 0 + y \cdot 1 + \frac{y^2}{2} \cdot 0 + \frac{y^3}{3!} \cdot (-1) + \frac{y^4}{4!} \cdot 0$

$= y - \frac{1}{3}y^3$

$\therefore \sin y \log(1+x) = \left(y - \frac{1}{3}y^3 \right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right)$

$= \underline{xy - \frac{1}{3}xy^3 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}x^3y}$

(3) $(1+x)^{\sin x} = e^{\log(1+x)^{\sin x}} = e^{\sin x \log(1+x)}$

$\sin x \log(1+x) = 0 + x \cdot 0 + \frac{x^2}{2} \cdot 2 + \frac{x^3}{3!} \cdot (-3) + \frac{x^4}{4!} \cdot 4$

$= x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4$

$\therefore e^{\sin x \log(1+x)} = 1 + \left(x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 \right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 \right)^2$

$= \underline{1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4}$

$\boxed{2}$

$\int_D (x^4 + x^2y^2)\,dx\,dy \qquad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと、$D_+ = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$

$$
\begin{aligned}
\therefore \int_D (x^4 + x^2y^2)\,dx\,dy &= \int_D x^2(x^2+y^2)\,dx\,dy \\
&= \int_{D_+} r^2\cos^2\theta \cdot r^2 \cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta \int_0^R r^5\,dr \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{6}r^6\right]_0^R \\
&= \underline{\frac{\pi}{6}R^6}
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$

$z^3 - x^2 - y^2 = 1$ で表される $\mathbb{R}^3$ 上の曲面を S とする

(1) $F(x, y, z) = z^3 - x^2 - y^2 - 1 = 0$ とする。

$F_x = -2x,\ F_y = -2y,\ F_z = 3z^2$

$\therefore$ 点 (a, b, a^2+b^2) における S の接平面の方程式は、

$$
\begin{aligned}
0 &= \underbrace{F(a, b, a^2+b^2)}_{=0} + (x-a)F_x(a, b, a^2+b^2) + (y-b)F_y(a, b, a^2+b^2) \\
&\qquad + \{z-(a^2+b^2)\}F_z(a, b, a^2+b^2) \\
&= (x-a)(-2a) + (y-b)(-2b) + \{z-(a^2+b^2)\}3(a^2+b^2)^2 \\
&= -2ax - 2by + 3(a^2+b^2)z + 2a^2 + 2b^2 - 3(a^2+b^2)^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2ax + 2by - 3(a^2+b^2)z &= 2a^2 + 2b^2 - 3(a^2+b^2+1) \\
&= \underline{-a^2 - b^2 - 3}
\end{aligned}
$$

(2) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと、

$z^3 = r^2+1$

$\therefore\ z=\sqrt[3]{r^2+1} > 0$

$\therefore$ S を r, θ でパラメータ表示すると、$(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ \sqrt[3]{r^2+1})$

ただし、$0 \leqq r$, $0 \leqq \theta < 2\pi$

$\therefore\ \dfrac{xy}{z^4}$ を r, θ を使って表すと、

$$\frac{xy}{z^4} = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{(r^2+1)^{\frac{4}{3}}}$$

ここで、r, θ は独立な変数なので、$\dfrac{r^2}{(r^2+1)^{\frac{4}{3}}} = f(r)$, $\cos\theta\sin\theta = g(\theta)$ の

最大値を求めてかければよい。

$$f'(r) = \frac{2r(r^2+1)^{\cancel{\frac{4}{3}}} - r^2\cdot\frac{4}{3}\cancel{(r^2+1)^{\frac{1}{3}}}\cdot 2r}{(r^2+1)^{\cancel{\frac{8}{3}}\,\frac{7}{3}}}$$

$$= \frac{2r(r^2+1) - \frac{8}{3}r^3}{(r^2+1)^{\frac{7}{3}}}$$

$$= \frac{2r(1-\frac{1}{3}r^2)}{(r^2+1)^{\frac{7}{3}}}$$

$\therefore\ f'(r)=0$ とすると、$r=\sqrt{3}$

r	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(r)$	/	+	0	−
$f(r)$	/	↗	最大 極大	↘

よって、$f(r)$ は $r=\sqrt{3}$ で最大値 $\dfrac{3}{16}\sqrt[3]{16}$ をとる

$g(\theta) = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

よって、$g(\theta)$ は最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる

以上より、求める最大値は $\dfrac{3}{16}\sqrt[3]{16} \times \dfrac{1}{2} = \underline{\dfrac{3}{32}\sqrt[3]{16}}$

$\boxed{4}$ は 2009年度を参照。