$\boxed{1}$

(1) $(1+x)^y = e^{\log(1+x)^y} = e^{y\log(1+x)}$

ここで、$\log(1+x) = 0 + x\cdot 1 + \frac{x^2}{2}\cdot(-1) + \frac{x^3}{3!}2 + \cdots$

$\therefore\ y\log(1+x) = xy - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}x^3y$

$\therefore\ e^{y\log(1+x)} = 1 + (xy - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}x^3y) + \frac{1}{2!}(xy - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}x^3y)^2 + \cdots$

5次以上の項を無視すると.

$= 1 + (xy - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}x^3y) + \frac{1}{2}x^2y^2$

$= \underline{1 + xy - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3y}$ //

(2) $\arcsin(x\sin y)$

$\sin y = 0 + y\cdot 1 + \frac{y^2}{2}\cdot 0 + \frac{y^3}{3!}\cdot(-1) + \cdot$

$= y - \frac{y^3}{6}$

$\therefore\ x\sin y = (y - \frac{y^3}{6})x$.

また、$\arcsin kx = 0 + x\cdot k + \frac{x^2}{2!}\cdot 0 + \frac{x^3}{3!}\cdot k^3 + \cdots$

$\therefore\ \arcsin(x\sin y) = 0 + x\cdot(y - \frac{y^3}{6}) + \frac{x^2}{2!}\cdot 0 + \frac{x^3}{3!}\cdot(y - \frac{y^3}{6})^3 + \cdots$

5次以上の項を無視すると.

$= \underline{xy - \frac{1}{6}xy^3}$ //

$\boxed{2}$

(1) $\int_D x^2y^2\,dx\,dy \qquad (D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq R^2\})$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと、 $D_+ = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$

$$
\begin{aligned}
\therefore \int_D x^2y^2\,dx\,dy &= \int_{D_+} r^2\cos^2\theta \cdot r^2\sin^2\theta \cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta \int_0^R r^5\,dr \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,d\theta \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^R \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta \times \frac{R^6}{6} \\
&= \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{2\pi} \times \frac{R^6}{6} \\
&= \underline{\frac{\pi}{24}R^6}
\end{aligned}
$$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+(x^2+y^2)^2}\right)dx$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと、 $D_+ = \{(r, \theta) : 0 \leq r,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$

$$
\begin{aligned}
\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+(x^2+y^2)^2}\right)dx &= \int_{D_+}\frac{r}{1+(r^2)^2}\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}d\theta \int_0^{\infty}\frac{r}{1+r^4}\,dr \cdots ①
\end{aligned}
$$

ここで、$r^2 = \tan\phi$ とおくと、$r = \sqrt{\tan\phi}$

r	$0 \longrightarrow \infty$
ϕ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\frac{1}{\cos^2\phi}}{2\sqrt{\tan\phi}}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore ① &\Leftrightarrow \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cancel{\sqrt{\tan\phi}}}{\cancel{1+\tan^2\phi}}\cdot\frac{\cancel{\frac{1}{\cos^2\phi}}}{2\cancel{\sqrt{\tan\phi}}}\,d\phi \\
&\Leftrightarrow 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\,d\phi \\
&\Leftrightarrow 2\pi\cdot\frac{\pi}{4} \\
&\Leftrightarrow \underline{\frac{\pi^2}{2}}
\end{aligned}
$$

(3) $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{2\pi} \cos^4 (x-y^2)\, dy$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4 (x-y^2)\, dx\, dy$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2(x-y^2)}{2} \right)^2 dx\, dy$

$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ 1 + 2\cos 2(x-y^2) + \cos^2 2(x-y^2) \}\, dx\, dy$

$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (3 + 4\cos 2(x-y^2) + \cos 4(x-y^2))\, dx\, dy$

$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left[3x + 2\sin 2(x-y^2) + \frac{1}{4} \sin 4(x-y^2) \right]_0^{2\pi} dy$

$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} 6\pi\, dy \quad \left(\because \left[\sin 2(x-y^2) \right]_0^{2\pi} = \sin 2(2\pi - y^2) - \sin 2(-y^2) = \sin 2(-y^2) - \sin 2(-y^2) = 0 . \left[\sin 4(x-y^2) \right]_0^{2\pi}\text{も同様} \right)$

$= \frac{3}{4}\pi \cdot 2\pi$

$= \underline{\frac{3}{2}\pi^2}$

1行目から2行目の移行が正しいのか少し怖いですが、これが成り立たなかったら答えがxの関数になってしまうのでこの移行は正しいと思われます。

3 $z^2-x^2-y^2-1=0$, $z>0$ で表される $\mathbb{R}^3$ 上の曲面を S とする.

(1) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とすると,

$z^2=r^2+1$. $z>0$ より, $z=\sqrt{r^2+1}$

よって, S を r, θ でパラメータ表示すると, $\underline{(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ \sqrt{r^2+1})}$

(2) $F(x,y,z)=z^2-x^2-y^2-1=0$ とすると,

$F_x=-2x$, $F_y=-2y$, $F_z=2z$

∴ $(a,b,c)\in S$ における接平面の方程式は,

$$0=\underbrace{F(a,b,c)}_{=0}+(x-a)F_x(a,b,c)+(y-b)F_y(a,b,c)+(z-c)F_z(a,b,c)$$

$$=(x-a)(-2a)+(y-b)(-2b)+(z-c)2c$$

$$=-2ax-2by+2cz+2a^2+2b^2-2c^2$$

$$\therefore\ ax+by-cz=-(c^2-a^2-b^2)$$

$$=-1$$

$$\therefore\ \underline{ax+by-cz=-1}$$

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2+1}$

また, 題意より, $x^2+y^2\leq R^2$ だから, $1\leq z\leq\sqrt{R^2+1}$ の範囲の表面積

を求めればよい.

$z=f(x,y)$ と表される曲面の表面積は

$\int_D\sqrt{1+\{f_x(x,y)\}^2+\{f_y(x,y)\}^2}\,dx\,dy$ より,

$$\int_D\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$=\int_D\sqrt{\frac{(x^2+y^2+1)+x^2+y^2}{x^2+y^2+1}}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^R\sqrt{\frac{2r^2+1}{r^2+1}}\,r\,dr\,d\theta$$

$=$?

(3) $z = t$ での S の切り口は, $x^2+y^2 = t^2-1$ の円

この円の円周は $2\pi\sqrt{t^2-1}$

∴ 求める表面積は $\displaystyle\int_1^{\sqrt{R^2+1}} 2\pi\sqrt{t^2-1}\,dt$ … ②

$s = t+\sqrt{t^2-1}$ とおくと.

$s-t = \sqrt{t^2-1}$

∴ $s^2-2st+\cancel{t^2} = \cancel{t^2}-1$

$t = \dfrac{s^2+1}{2s}$

t	$1 \longrightarrow \sqrt{R^2+1}$
s	$1 \longrightarrow R+\sqrt{R^2+1}$

$\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{s^2-1}{2s^2}$

$$∴ ② \iff 2\pi\int_1^{R+\sqrt{R^2+1}} \sqrt{\frac{s^4+2s^2+1}{4s^2}-1}\cdot\frac{s^2-1}{2s^2}\,ds$$

$$\iff 2\pi\int_1^{R+\sqrt{R^2+1}} \sqrt{\left(\frac{s^2-1}{2s}\right)^2}\cdot\frac{s^2-1}{2s^2}\,ds$$

$$\iff 2\pi\int_1^{R+\sqrt{R^2+1}} \frac{(s^2-1)^2}{4s^3}\,ds$$

$$\iff \frac{\pi}{2}\int_1^{R+\sqrt{R^2+1}} \left(s-\frac{2}{s}+\frac{1}{s^3}\right)ds$$

$$\iff \frac{\pi}{2}\left[\frac{s^2}{2}-2\log s-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}\right]_1^{R+\sqrt{R^2+1}}$$

$$\iff \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(R^2+2R\sqrt{R^2+1}+R^2+\cancel{1}-\cancel{1}\right)-2\log\left(R+\sqrt{R^2+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R^2+2R\sqrt{R^2+1}+R^2+1}-1\right)\right\}$$

$$\iff \frac{\pi}{2}\left(R^2+R\sqrt{R^2+1}-2\log\left(R+\sqrt{R^2+1}\right)+\frac{R^2+R\sqrt{R^2+1}}{2R^2+2R\sqrt{R^2+1}+1}\right)$$

(4) (a) ?

(b) パラメータ r, θ を用いると、 $(r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$

$$\frac{xy}{z^3} = \frac{r^2}{(r^2+1)^{\frac{3}{2}}} \cos\theta \sin\theta$$

今、r と θ は独立な変数なので、$f(r) = \dfrac{r^2}{(r^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, $g(\theta) = \cos\theta\sin\theta$

として、$f(r)$, $g(\theta)$ それぞれの最大値をかけたものが答えである。

$$f'(r) = \frac{2r(r^2+1)^{\frac{3}{2}} - r^2 \cdot \frac{3}{\cancel{2}}(r^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}r}{(r^2+1)^{3}}$$

$$= \frac{2r(r^2+1) - 3r^3}{(r^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{r(2-r^2)}{(r^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

r	0	…	$\sqrt{2}$	…
$f'(r)$	/	+	0	−
$f(r)$	/	↗	最大 極大	↘

$\therefore$ $f(r)$ は $\sqrt{2}$ で最大値 $\frac{2}{27}\sqrt{27}$ をとる。

$g(\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

$\therefore$ $g(\theta)$ は最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

よって、最大値は $\frac{2}{27}\sqrt{27} \times \frac{1}{2} = \underline{\frac{\sqrt{27}}{27}}$ //

4

(a) 正しい

理由) $x=\frac{R}{2}$で級数が絶対収束しないと仮定すると、

$x=R$でも級数は絶対収束しないのは明らか

今、$x=R$で、級数は収束するので、$x=\frac{R}{2}$でも級数は収束する。

∴ $a_n(\frac{1}{2}R)^n=b_n$とすると、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\frac{R}{2}=1$$ しかあり得ない。

ただ、このとき、$a_nR^n=C_n$とすると、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot R=2>1$$ より、

C_nは発散する。これは題意と矛盾するので、

$x=\frac{R}{2}$で級数は絶対収束する。

(b) 正しい

理由) 関数 f が一様連続でないと仮定する。

ある $\varepsilon>0$ があって、これはすべての $\delta>0$ に対して

$|x-y|<\delta$ なら $|f(x)-f(y)|\geqq\varepsilon$ … ①

$\delta=\frac{1}{n}$、xをx_n、yをy_nとする。

x_nは有界数列なので、収束部分列 $\{x_{\varphi(n)}\}$ が存在し、このときの極限を α とする。

$|x_{\varphi(n)}-y_{\varphi(n)}|<\frac{1}{n}$ だから、$y_{\varphi(n)}$ も同じ α に収束する

Iは閉区間なので、f は α で連続だから、

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_{\varphi(n)})-f(y_{\varphi(n)})|=|f(\alpha)-f(\alpha)|=0$$

これは①と矛盾するので、

fはI上一様連続

(c) 正しい

理由) $f_1, f_2, \cdots$ が f に I の各点で収束するので、

一様収束 $\delta_n = \sup_x |f_n(x) - f(x)|$ が 0 に収束する.

このとき、$\left| \int_0^1 (f - f_n)\, dx \right| \leqq \int_0^1 \delta_n\, dx = \delta_n$ より.

$\int_0^1 f_n(x)\, dx$ は $\int_0^1 f(x)\, dx$ に収束する.

３

(3) http://members3.jcom.home.ne.jp/nososnd/math/integ.pdf
の公式を使うともっと早く、簡潔に解けます。

(4)(a)$G(x,y,z,\lambda)=g(x,y,z)+\lambda F(x,y,z)$として、$G_x=G_y=G_z=G_\lambda=0$を解くことを、ラグランジュの未定乗数法と言います。数Ｉ完璧にしたい人は解き方をググってみてください。シケタイは理解できませんでした。

(b)答え$\sqrt{3}/9$でした