

数学 2F (工学部共通科目 藤堂教員)

Mathematics 2F

大野

Y. Ono

2010 年 7 月 15 日

July 15, 2010

—— 挨拶・諸連絡 ——

- 今回は数学で暴走します．
- 例によって「小冊子印刷」がおすすめです．
- レポートは各自で頑張りましょう．
べ、別にみんなのために作ったんじゃないんだからねっ
- <http://todo.ap.t.u-tokyo.ac.jp/lectures/2010s-math2f> に色々書いてあります．見ましょう．
- 成績は

$$\left. \begin{array}{l} \text{期末試験 (100 点)} = A \\ \text{平常点 (30 \sim 40 点)} = B \end{array} \right\} \Rightarrow \max(A, 0.6 \times A + B)$$

だそうで、つまり「自信があったら授業出なくてもいいよ」ってこと．

- 試験について New!
 - 7 月 21 日 (水) 10:15 ~ 12:15 (2h)
 - ノート類持ち込み不可．
 - 長いけど問題が多いわけではないらしい．
 - ネットの講義録も見てね！

ばい 大野

—— 更新履歴 ——

- ver. 2010.7.14
 - 授業内容・レポート ... 完了．
 - 過去問...完了．
- ver. 2010.7.2
 - 授業で扱ってない箇所には ♠ をつけるようにしました．つけ忘れがあるかもだけど、「授業でやってないんだからいらねーだろ」って意見が出るでしょうが、半ば趣味なのでお気になさらず．
- ver. 2010.6.17
 - 索引を作り始めました．無駄とか言わないように．

目次

第 1 章	複素函数論	1
1.1	複素数・複素平面・極表示	1
1.2	べき級数と収束半径	3
1.3	初等函数	9
1.4	複素函数の微分	12
1.5	複素函数と等角写像	18
1.6	複素積分の基礎概念	20
1.7	Cauchy の積分定理	23
1.8	Cauchy の積分公式	26
1.9	特異点と Laurent 展開	29
1.10	留数解析	32
1.11	定積分の評価	35
1.12	無限遠点と Riemann 球面	41
1.13	多価函数と Riemann 面	45
1.14	偏角の原理	47
1.15	部分分数展開	48
1.16	無限乗積	51
1.17	ガンマ函数と鞍点法	52
第 2 章	Fourier 解析	59
2.1	Fourier 級数	59
2.2	離散 Fourier 変換	63
2.3	Fourier 変換	68
2.4	Laplace 変換	76
2.5	積分変換	81
2.6	直交函数列による展開	85

第 3 章	偏微分方程式	95
3.1	偏微分方程式と境界条件	95
3.2	拡散方程式 (熱伝導方程式)	97
3.3	Green 函数	100
3.4	Helmholtz 方程式	102
3.5	定係数 2 階線型偏微分方程式	104
付録 A	レポート問題・解答例	109
付録 B	過去問・解答例	129
索引		141

第 1 章

複素函数論

複素函数論 (theory of complex functions)¹⁾とは、複素函数の微分積分を扱う分野である。ただし、実函数の微積分の単なる延長ではないことを初めに述べておく。例えば、ある複素函数が 複素微分可能 であるとする。するとすべての高階微分が存在しており、さらに複素平面（ほぼ）全域での函数の値や微分・積分の値が定まるという性質がある。これは明らかに実函数では持ち得ない性質である。なぜこのようなことが起こるかという、下線を引いた「複素微分可能」という条件が、実函数よりも強いものになっているためである。その条件は Cauchy-Riemann の関係式と呼ばれる。

§ 1.1 複素数・複素平面・極表示

まず、複素数や複素平面について要点を述べる。

1.1.1 複素数

定義 1.1 複素数(complex number) とは、

$$z = a + ib \quad (1.1)$$

と書ける数である。右辺の各記号の意味は次の通りである：

$i (= \sqrt{-1})$: 虚数単位(imaginary unit)

$a (\in \mathbf{R})$: 実部(real part) $b (\in \mathbf{R})$: 虚部(imaginary part)

実部・虚部はそれぞれ $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ とも書く。

1) 複素解析(complex analysis) というとも多い。

1.1.2 複素平面と極表示

定義 1.2 x 軸 (横軸) に $\operatorname{Re} z$, y 軸 (縦軸) に $\operatorname{Im} z$ の値をとるような平面を複素平面(complex plane) という. x 軸のことを実軸(real axis), y 軸を虚軸(imaginary axis) と呼ぶ. 一つの複素数は複素平面上の一点として表される.

定義 1.3 複素平面において, 原点から $z = a + ib$ の点までの距離を $|z|$ と書き, 絶対値(absolute value, modulus) という.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1.2)$$

である. 原点から z の点までの線分と実軸正方向とのなす角を, 反時計回りを正として偏角(argument) といい,

$$\theta = \arg z \quad (-\pi \leq \theta < \pi) \quad (1.3)$$

と書く. これらを用いて, z は

$$a = |z| \cos \theta, \quad b = |z| \sin \theta \quad (1.4)$$

$$z = |z| e^{i\theta} = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.5)$$

とも書くことができる. 極座標の考え方を用いたもので, 極表示(polar representation)²⁾と呼ばれる.

2) もしくは極形式(polar form).

1.1.3 複素共役

定義 1.4 複素数 $z = a + ib$ に対して，虚部の正負を反転させた

$$\bar{z} = a - ib \quad (1.6)$$

を， z の複素共役(complex conjugate) という．複素共役を用いると，

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad |z|^2 = z\bar{z} \quad (1.7)$$

と書くことができる．

複素平面において，複素共役は実軸に関して対称な点を表す．単位円上の点 $z = e^{i\theta}$ では， $\bar{z} = z^{-1}$ に注意する．

1.1.4 積

複素数 α, β の偏角を θ, φ とする．これらの積は

$$\alpha\beta = |\alpha|e^{i\theta} \times |\beta|e^{i\varphi} = |\alpha||\beta|e^{i(\theta+\varphi)} \quad (1.8)$$

となる．複素数の積は，複素平面上における伸縮と（原点中心の）回転に対応する．

§ 1.2 べき級数と収束半径

1.2.1 べき級数

定義 1.5 複素数 a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を係数とした n 次の多項式

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n \quad (1.9)$$

について，極限 $n \rightarrow \infty$ をとった

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1.10)$$

のような級数をべき級数(power series) という．べき級数は

- ある一つの有限の値に収束(convergence) する．
- 有限の値に収束しない．つまり無限大に大きくなるか、いくつかの値を振動する．これらを合わせて発散(divergence) するという．

のいずれかになる．

収束するための必要条件は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n z^n| = 0 \quad (1.11)$$

である³⁾．(証明略)

1.2.2 絶対収束

定義 1.6 (絶対収束) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \infty \quad (1.12)$$

を満たすとき、この級数は絶対収束(absolutely convergent) するという．

3) むしろ $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n z^n| \neq 0$ なら収束しない、といったほうが分かりやすいと思われる．

定理 1.1 絶対収束する級数に関して、以下の性質がある：

- (1) 絶対収束する級数は収束する．
- (2) 絶対収束する級数は、和の順番をどのように交換しても収束して、その和は変わらない⁴⁾．
- (3) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ が共に絶対収束するとき、

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (1.13)$$

$$c_n = \sum_{r=0}^n a_r b_{n-r}. \quad (1.14)$$

証明 (1) $\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ より明らか．

(2),(3) は略．メンドい．そしてムズい． ■

1.2.3 幾何級数

べき級数の例として、幾何級数(geometric series)⁵⁾

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \quad (1.15)$$

を考える．

$$(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}) = 1-z^n \quad (1.16)$$

について $n \rightarrow \infty$ の極限をとると、 $|z| > 1$ では右辺は発散する． $|z| < 1$ であれば(右辺) $\rightarrow 0$ となるので、

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (1.17)$$

4) つまり絶対収束しない級数は、和の順序によって値が変わる(事もある)ということ．

5) もしくは等比級数

となる．この級数は $|z| < 1$ で絶対収束する．

1.2.4 収束半径

前節の幾何級数は $|z|$ と 1 との大小で収束・発散が決まった．このような値のことを収束半径という．

定理 1.2 (Abel) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が $z = z_0$ で収束すれば、 $|z| < |z_0|$ で絶対収束する．もし $z = z_0$ で発散すれば、 $|z| > |z_0|$ で発散する．これを Abel の定理という．

この定理を証明するために、まず補題を示す．

補題 ある正の実数 R について、

$$|a_n| \leq \frac{M}{R^n} \quad (1.18)$$

となるように M が (n によらず) 選べるならば、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は $|z| < R$ で絶対収束する．

証明 実際に計算して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \underbrace{\left(\frac{|z|}{R}\right)^n}_{<1} = \frac{M}{1 - (|z|/R)} < \infty \quad (1.19)$$

■

証明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が $z = z_0$ で収束するならば、 $n \rightarrow \infty$ で $|a_n z_0^n| \rightarrow 0$ ．したがって $a_n z_0^n$ は有界である．すると、すべての n に関して $|a_n z_0^n| \leq M$ となる M が存在する．このとき、 $R = |z_0|$ とすると、 $|a_n| \leq M/R^n$ ．ゆえに補題によって、べき級数は $|z| < |z_0|$ で絶対収束する． ■

定理 1.3 任意のべき級数に対して、ある非負の実数 ρ が存在して

- $|z| < \rho$ では絶対収束する .
- $|z| > \rho$ では発散する .
- $|z| = \rho$ の場合については一般にはいえない .

このような ρ を収束半径(radius of convergence) といい、 $|z| = \rho$ が複素平面上で描く円を収束円(circle of convergence) という . z が収束円の内部にあれば、級数は収束する⁶⁾ .

定理 1.4 収束半径 ρ は

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (1.20)$$

もしくは

$$\frac{1}{\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (1.21)$$

によって求めることができる . ただし後者は上極限をとっていることに注意 . 前者は d'Alembert の収束判定法(-'s ratio test) , 後者は Cauchy の収束判定法(-'s root test) と呼ばれる⁷⁾ .

6) $\rho = 0, \infty$ もあり得る .

7) どちらも「~の収束判定法」と言いましたが、英語では異なった呼び方をしています . d'Alembert の収束判定法では a_n の比をとっていて、Cauchy の収束判定法では a_n の根号をとっていることからそれぞれ ratio, root と呼ばれるようです . これ合わせて、日本語でも「係数比判定法」や「べき根判定法」と呼ぶことがあります .

1.2.5 べき級数の微分

複素函数の微分は、実函数の微分と同様に

$$\frac{d}{dz}f(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (1.22)$$

と定義される。ただし h は複素数である⁸⁾。

べき級数の微分の前に、 z^n の微分を考える。例えば $n = 2$ では

$$\frac{d}{dz}z^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = 2z \quad (1.23)$$

と、実函数の場合と変わらない。また、任意の整数 n について

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1} \quad (1.24)$$

となる。

べき級数

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1.25)$$

の微分について考える。各項について項別に微分したべき級数

$$f_1(z) = a_1 + 2a_2z + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^n \quad (1.26)$$

の収束半径を計算すると、

$$\rho_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n|a_n|}{(n+1)|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \rho \quad (1.27)$$

と、 $f(z)$ の収束半径に一致する。べき級数は、収束円の内部で何度でも微分・積分可能であり、それぞれ項別に微分・積分したものと一致する。

8) 実際には複素平面上でどのように h が 0 に近づいていくかを考えなければなりません。 h と書けば曖昧に進められますね。

例 1.1 幾何級数 $f(z)$

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (1.28)$$

は $\rho = 1$ で, $|z| = 1$ では常に発散する. 別の幾何級数 $g(z)$ は

$$g(z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad (1.29)$$

は $\rho = 1$ である. $|z| = 1$ では $z = 1$ で発散し, $z \neq 1$ で条件収束⁹⁾する. さらに別の幾何級数 $h(z)$ は

$$h(z) = z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)^2} \quad (1.30)$$

は $\rho = 1$ で, $|z| = 1$ で常に収束する¹⁰⁾. これらの間には

$$f(z) = \frac{dg}{dz}, \quad g(z) = z \frac{dh}{dz} \quad (1.31)$$

という関係があり, どれも収束半径は同じであるものの, $|z| = \rho$ での収束・発散はそれぞれ異なっている.

§ 1.3 初等函数

1.3.1 指数函数

定義 1.7 複素数の指数函数 e^z は, 実数の e^x の Taylor 展開にならって

$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (1.32)$$

と定義される.

9) 収束するが絶対収束しないということ.

10) 余談だが, $z = 1$ では $h(1) = \pi^2/6$ になる.

収束半径は, d'Alembert の判定法により

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \infty \quad (1.33)$$

となる. つまり任意の z で定義できているということである.

1.3.2 対数函数

定義 1.8 対数函数 $\log z$ も指数函数と同様に, 実数の $\log x$ の Taylor 展開にならって

$$\log z := (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n \quad (1.34)$$

と定義される.

収束半径は, d'Alembert の判定法により

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)}{(-1)^{n+2} \cdot n} \right| = 1 \quad (1.35)$$

となる. つまり, $|z-1| < 1$ で定義できる. $|z-1| = 1$ を考えると, $z=0$ では発散し, そのほかの収束円上では収束する.

$z=0$ 対数函数 $\log z$ の定義式 (1.34) は, $|z-1| > 1$ では発散してしまう. では収束円の外側 (例えば $z=3$ など) ではどのように定義すればよいのだろうか.

解析接続

収束円の外側で対数函数を定義するには, 収束円の中心を移動してやればよい. すなわち, $z-1 = (z-\frac{3}{2}) + \frac{1}{2}$ として代入し, 展開するのである¹¹⁾:

$$\log z = \log \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \left(z - \frac{3}{2} \right) - \frac{2}{9} \left(z - \frac{3}{2} \right)^2 + \dots \quad (1.36)$$

11) ぶっちゃけ $x = \frac{3}{2}$ を中心とした $\log x$ の Taylor 展開そのものだけど.

$$a'_n = -\frac{1}{n} \left(-\frac{2}{3} \right)^n, \quad \rho' = \frac{3}{2} \quad (1.37)$$

これによって、定義域が $|z - \frac{3}{2}| \leq \frac{3}{2}$ ($z \neq 0$) へと広げられた。このようにして定義域を広げていくことを、解析接続(analytic continuation)という。繰り返し定義域を拡大することにより、複素平面のほぼ全域で定義することができる。

$\log z$ の多価性

実数の対数函数には、 $y = \log x \Leftrightarrow x = e^y$ という性質があった。これを複素数で考える。すなわち、対数函数の別の定義を

$\log z$ の値は、 $z = e^\omega$ を満たす ω

とする。このとき、 $z = re^{i\theta}$, $\omega = x + iy$ ($r, \theta, x, y \in \mathbf{R}$) とおけば、

$$re^{i\theta} = e^x e^{iy} \Rightarrow r = e^x, \quad e^{i\theta} = e^{iy} \quad (1.38)$$

$$\therefore x = \log r, \quad y = \theta + \underbrace{2n\pi}_{\text{不定性}} \quad (n \in \mathbf{Z}) \quad (1.39)$$

であるから、

$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbf{Z}) \quad (1.40)$$

となる。このように複数の値を取りうる函数を多価函数(multivalued function)という。この場合は無限多価函数である。

主値

$\log z$ には上のように偏角に不定性があることが分かった。対数函数に限らず、複素平面に切断線(branch cut)を入れて多価函数の偏角を制限することができる¹²⁾。例えば負の実軸に切断線を入れて、 $-\pi \leq \theta < \pi$ と制限する。このときの $\log z$ を $\text{Log } z$ と書いて、対数函数の主値(principal value)という。主値

12) 「それをすてるなんてとんでもない」ってときには、偏角の範囲によって複数の複素平面を考える ($(n-2)\pi \leq \theta < n\pi$ を 1 枚目ってな感じで) ことがあります。そのような平面を Riemann 面といいます。

を用いると,

$$\log z = \operatorname{Log} |z| + i \arg z \quad (1.41)$$

と書ける.

累乗函数 (べき函数)

対数函数と同様に, 累乗函数にも多価性が存在する:

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log r + i\theta) + \frac{2n\alpha\pi}{\text{不定性}}} \quad (1.42)$$

ただし $\alpha \in \mathbf{R}$ とする. 対数函数と違い, α の値によって不定性は異なる:

- α が整数なら, $e^{2n\alpha\pi} = 1$ より不定性はない.
- α が有理数 ($\alpha = q/p, p > 1$) なら, p 価函数である.
- α が無理数なら, 無限多価函数である.

主値は

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z} = e^{\alpha(\log r + i\theta)} \quad (-\pi \leq \theta < \pi) \quad (1.43)$$

となる.

§ 1.4 複素函数の微分

1.4.1 複素函数

定義 1.9 複素函数 (complex function) とは, $x, y \in \mathbf{R}, u(x, y), v(x, y) : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, z = x + iy \in \mathbf{C}$ として

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy) \quad (1.44)$$

と書ける函数である.

例 1.2 $f(x) = x - iy$ とおけば $u = x, v = -y$ であり, $g(z) = x^2 + y^2$ とおけば $u = x^2 + y^2, v = 0$ である. 複素共役 \bar{z} を用いれば, $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ であるから, $f(z) = \bar{z}, g(z) = z\bar{z}$ となる.

1.4.2 偏微分

複素数による微分を考える前に, x, y による偏微分を考える. これらは単純に

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.45)$$

とすればよい. では $\partial/\partial z, \partial/\partial \bar{z}$ はどうなるだろうか. まず $\partial/\partial z$ を計算する. ただしここでは \bar{z} を固定するものとする¹³⁾.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)}_{\partial/\partial z \text{ の定義}} f \quad (1.46)$$

\bar{z} についても同様に

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)}_{\partial/\partial \bar{z} \text{ の定義}} f \quad (1.47)$$

例 1.3 上のようにして定義した $\partial/\partial z, \partial/\partial \bar{z}$ によれば

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (x + iy) = 1 \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (x - iy) = 0 \quad (1.49)$$

となる. このようにして, z, \bar{z} が独立であるといえる. そのため $f(z)$ を $f(z, \bar{z})$ と書くことができる.

13) $z = x + iy$ が決まると $\bar{z} = x - iy$ も決まるので, このようなことは考えにくいのだが, 便宜的にこうするというのである.

1.4.3 複素微分

定義 1.10 複素函数 $f(z)$ について,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (1.50)$$

が $h \rightarrow 0$ への近づき方によらず同じ値に収束する場合, f は z において複素微分可能であるといい, (1.50) 式を $\frac{df}{dz}$ と書く.

例 1.4 $f(z) = z^2$ とすると,

$$\frac{df}{dz} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2z+h) = 2z \quad (1.51)$$

であり, 複素微分可能である.

例 1.5 $f(z) = \bar{z}$ とすると, $h = |h|e^{i\theta}$ として

$$\frac{df}{dz} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{(z+h)} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = e^{-2i\theta} \quad (1.52)$$

となる. h の偏角によるので, 複素微分不可能である.

定義 1.11 ある函数が, 複素平面上のある領域のすべての点で複素微分可能であるとき, 解析的(analytic) もしくは正則(holomorphic) であるという. このような函数を解析函数(analytic function) もしくは正則函数(holomorphic function) という.

1.4.4 Cauchy-Riemann の関係式

定理 1.5 複素函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が解析的であるための必要十分条件は, $u(x, y), v(x, y)$ が関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.53)$$

を満たすことである．この関係式を **Cauchy-Riemann** の関係式という．

証明 必要条件と十分条件に分けて証明する．

必要条件 h, f を実部と虚部に分ける：

$$h = \Delta x + i\Delta y, \quad (1.54)$$

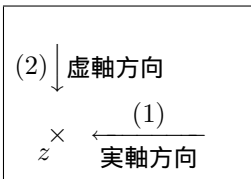
$$f(z+h) - f(z) = \Delta u + i\Delta v. \quad (1.55)$$

これによって、微分を

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = (*) \quad (1.56)$$

と書く．近づき方の例として、実・虚軸それぞれに沿った近づき方を考える．

(1) $\Delta y = 0$ とする．



$$(*) = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.57)$$

(2) $\Delta x = 0$ とする．

$$(*) = \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} \rightarrow -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.58)$$

両者が一致するためには、Cauchy-Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.59)$$

が成立している必要がある．

(複素微分可能ならば特定の 2 つの近づき方において微分係数が一致する，ということから導出した必要条件である．)

十分条件 Cauchy-Riemann の関係式が成立しているとき，複素微分可能であることを示す．

$$\begin{aligned}
 \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta y) \\
 &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}}{1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x}} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}}{1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x}} + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta y) \\
 &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}}{1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x}} \left[1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x} \underbrace{\frac{\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}}}_{=1} \right] + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta y) \\
 &\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{1.60}$$

以上より，必要十分性が示された． ■

十分条件（勝手に証明）♠

（授業のやつがすっかりこななかったので別に証明した．）

u, v の全微分を考えると，Cauchy-Riemann の関係式から

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy \tag{1.61}$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \tag{1.62}$$

となっているので，

$$\begin{aligned}
 df &= du + i dv = \frac{\partial u}{\partial x} dx + i^2 \frac{\partial v}{\partial x} dy + i \frac{\partial v}{\partial x} dx + i \frac{\partial u}{\partial x} dy \\
 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (dx + i dy) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) dz.
 \end{aligned} \tag{1.63}$$

よって f は複素微分可能であり，その微分係数は

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.64}$$

である .

df/dz の値

Cauchy-Riemann の関係式が成立しているので , 微分係数は別の形に書くことができる :

$$\frac{df}{dz} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} & (1.65a) \\ \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = -i \frac{\partial f}{\partial y} & (1.65b) \\ \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \frac{\partial u}{\partial z} & (1.65c) \\ \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2i \frac{\partial v}{\partial z} & (1.65d) \end{cases}$$

Cauchy-Riemann の関係式の別の形

先ほど $f(z)$ を $f(z, \bar{z})$ とも書けるとしたが , (1.63) 式を見ると , \bar{z} が含まれていない . そこで実際に \bar{z} で偏微分すると ,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.66)$$

となる . ゆえに Cauchy-Riemann の関係式は

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (1.67)$$

と同値である¹⁴⁾ . この式は , 解析函数は \bar{z} を含まないことを意味している .

例 1.6 (対数函数の主値) $\log z = \log r + i\theta$ ($-\pi \leq \theta < \pi$) と表示すれば , $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ であるから , 偏微分演算子は

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & (1.68a) \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & (1.68b) \end{cases}$$

14) こっちにはディーバー方程式って名前があるらしいです . ちなみに「ディーバー」ってのは人の名前ではなく $\bar{\partial} = \partial/\partial \bar{z}$ のことです . Google 先生に助けを求めたら , 「複素解析幾何と $\bar{\partial}$ 方程式」って本を紹介してくれました . 危険な匂いがしたのでスルーしておきます .

となる．ゆえに

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \operatorname{Log} z = \frac{1}{2} e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\log r + i\theta) = 0 \quad (1.69)$$

であるので， $\operatorname{Log} z$ は解析的である．ただし $r = 0$ と負の実軸（切断線）上では解析的でない．

調和函数 ◆

Cauchy-Riemann の関係式 (1.53) の第 1 式を $x[y]$ ，第 2 式を $y[x]$ で微分して，これらから $v[u]$ を消去すると， u, v は Laplace 方程式

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0 \quad (1.70)$$

を満たす調和函数(harmonic function)であることがわかる．これは，電磁気学でのクーロンポテンシャルや流体力学での速度ポテンシャルなどにも関連する重要な方程式である．

§ 1.5 複素函数と等角写像

1.5.1 2 次元ベクトル場としての複素函数

複素函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ は

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1.71)$$

と，2 次元ベクトルを 2 次元ベクトルへ対応させる写像であるといえる．これはつまり，複素平面において $w = f(z)$ を 2 次元ベクトル場のように考えることができるということである．実際，後に示すように，複素函数と 2 次元ベクトル場には密接な関係がある．

1.5.2 写像としての複素函数

別の見方をすると，複素函数 $w = f(z)$ は， z 平面 (x - y 平面) 上の点から w 平面 (u - v 平面) 上の点への写像であるとも考えられる． z 平面上である曲線を描くと，それは w 平面上のある曲線に対応する．

例 1.7 $w = z^2$ について考える．極表示を用いれば

$$z = re^{i\theta}, \quad w = r^2 e^{i2\theta} \quad (1.72)$$

であるから， w 平面上の偏角は， z 平面上の倍の偏角であることが分かる．

$$z = x + iy, \quad (1.73)$$

$$w = u + iv = (x^2 - y^2) + i(2xy) \quad (1.74)$$

と書くと， $u(x, y) = x^2 - y^2, v = 2xy$ である．ここで， $u = c_1, v = c_2$ (c_1, c_2 は正の定数) について考えてみると， w 平面上では $u = c_1$ は v 軸に， $v = c_2$ は u 軸に平行な直線である．ゆえにこれらは直交している．そして z 平面では $x^2 - y^2 = c_1$ も $2xy = c_2$ も双曲線になり，直交している．

実は $w = f(z)$ が解析的であれば， $u = \text{const.}, v = \text{const.}$ を表す z 平面上の 2 つの曲線は直交する．なぜならば，曲線 $u(x, y) = \text{const.}, v(x, y) = \text{const.}$ の法線ベクトルはそれぞれ $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right), \nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ と書け，これらの内積は

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}_{-\frac{\partial u}{\partial y}} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{\partial u}{\partial x}} = 0 \quad (1.75)$$

となるからである（法線同士が直交すれば曲線も直交する）．

より一般に，次の定理が成り立つ．

定理 1.6 (等角写像 ♠) 複素函数 $w = f(z)$ が z 平面上のある点 z_0 で解析的であり，かつ $f'(z_0) \neq 0$ とする．このとき， z 平面上で z_0 と通る 2 曲線のなす角と，それらに対応する w 平面での 2 曲線がなす角は等しい．

証明 z_0 を通る 2 曲線上にあつて， z_0 に近い点 z_1, z_2 をとる．また $w_i = f(z_i)$ ($i = 0, 1, 2$) とおく．すると， $f(z)$ は解析的なので

$$\lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2 \rightarrow z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0} = \frac{df(z_0)}{dz} \quad (1.76)$$

が成り立ち、ゆえに十分小さな $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ によって

$$\frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \frac{df(z_0)}{dz} + \underbrace{\varepsilon_1}_{\rightarrow 0} \quad (1.77)$$

$$\frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0} = \frac{df(z_0)}{dz} + \underbrace{\varepsilon_2}_{\rightarrow 0} \quad (1.78)$$

と書くことができる。 $f'(z_0) \neq 0$ より、この式から

$$\begin{aligned} \lim_{z_1, z_2 \rightarrow z_0} \frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} &= \lim_{z_1, z_2 \rightarrow z_0} \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \frac{f'(z_0) - \varepsilon_2}{f'(z_0) - \varepsilon_1} \\ &= \lim_{z_1, z_2 \rightarrow z_0} \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \end{aligned} \quad (1.79)$$

となる。これは $\triangle z_0 z_1 z_2$ と $\triangle w_0 w_1 w_2$ とが $z_1, z_2 \rightarrow z_0$ の極限で相似であるということで、2 曲線のなす角は写像しても等しいことが示された。 ■

§ 1.6 複素積分の基礎概念

1.6.1 曲線に沿う積分

実 1 変数函数の積分は、区間 $[a, b]$ の分割を行って定義された。しかし複素函数の場合、その区間の経路が複素平面上で複数存在する¹⁵⁾。そこで、次のようにして積分を定義する。

定義 1.12 経路となる曲線 C を $z(t)$ ($a \leq t \leq b$) とパラメータ表示する。パラメータ t によって区間を分割し、区分和

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(z(t_i)) [z(t_{i+1}) - z(t_i)] \quad (1.80)$$

15) $z = 0$ から $z = 1$ の区間であっても、(i) 実軸上を $z = x$ と辿る。(ii) 虚軸上を $z = iy$ と辿って、実軸に平行に $z = x + 1$ と辿り、最後に虚軸に平行に $z = 1 + y$ と辿る。などいくらでも考えられる。

の $N \rightarrow \infty$ の極限を積分とする：

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \frac{dz}{dt} dt. \quad (1.81)$$

右辺の計算は実函数の積分と変わらない。

特に C が閉曲線のときは次のように書く：

$$\oint_C f(z) dz \quad (1.82)$$

例 1.8 C を 4 点 $(0,0), (a,0), (a,b), (0,b)$ を頂点とする長方形の辺とし，分割して左回りに各辺を C_1, C_2, C_3, C_4 とする。

(a) $f(z) = z$ を C に沿って積分すると，

$$C_1 : \int_{C_1} f(z) dz = \int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}, \quad (1.83)$$

$$C_2 : \int_{C_2} f(z) dz = \int_0^b (a + iy) i dy = iab - \frac{b^2}{2}, \quad (1.84)$$

$$C_3 : \int_{C_3} f(z) dz = \int_a^0 (x + ib) dx = -\frac{a^2}{2} - iab. \quad (1.85)$$

$$C_4 : \int_{C_4} f(z) dz = \int_b^0 iy i dy = \frac{b^2}{2} \quad (1.86)$$

となるから，

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (1.87)$$

(b) $g(z) = \bar{z}$ を C に沿って積分すると，上の計算で被積分函数のみ $i \rightarrow -i$ となって，

$$\oint_C f(z) dz = 2i \underbrace{ab}_{\text{長方形の面積}}. \quad (1.88)$$

例 1.9 今度は C を原点中心，半径 r の円周（反時計回り）とする．この閉曲線上では，パラメータを極表示

$$z = re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (1.89)$$

$$\frac{dz}{d\theta} = ire^{i\theta} = iz \quad (1.90)$$

に定めるのがよい．

(a) $f(z) = z^n$ ($n \in \mathbf{N}$) を C に沿って積分すると，

$$\begin{aligned} \oint_C z^n dz &= \int_0^{2\pi} z^n iz d\theta = i \int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta \\ (n \neq -1) \quad &= ir^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned} \quad (1.91a)$$

$$(n = -1) \quad = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \quad (1.91b)$$

(b) $g(z) = \bar{z}$ は

$$\oint \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} r e^{-i\theta} (ir e^{i\theta}) d\theta = 2i \cdot \underbrace{\pi r^2}_{\text{円の面積}}. \quad (1.92)$$

補足 1 以上 2 つの例で， $f(z) = z^n$ ($n > 0$) の積分は 0 で， $g(z) = \bar{z}$ の積分は $2i \times (C$ が囲む領域の面積) となっている．実はこれらは一般の閉曲線で成り立つ (1.7.3 節)．

1.6.2 複素積分と 2 次元ベクトル場の線積分

複素積分

$$\int_C f(z) dz \quad (1.93)$$

は，複素平面上の曲線に沿って計算されるものであり，これは 2 次元ベクトル場の線積分

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.94)$$

と似た考え方である． $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $dz = dx + idy$ として積分を書き下す：

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + idy)$$

$$= \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy). \quad (1.95)$$

これは, $d\mathbf{r} = (dx, dy)$, $\mathbf{A}(x, y) = (u, -v)$, $\mathbf{B} = (v, u)$ とおくと,

$$\int_C f(z) dz = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + i \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.96)$$

となる.

複素積分はこのようにしてベクトル場の線積分へ変形できる. ここにベクトル解析の定理を用いれば, 複素積分に関する性質を見つけることができる.

1.6.3 Cauchy-Riemann の関係式のベクトル場における意味

2次元ベクトル場 \mathbf{A}, \mathbf{B} に対して 3次元ベクトル場 $\mathbf{A}_{(3)} = (\mathbf{A}, 0)$, $\mathbf{B}_{(3)} = (\mathbf{B}, 0)$ を定義し, 2次元ベクトルの回転を $\nabla \times \mathbf{A} = (\nabla \times \mathbf{A}_{(3)})_z$ などと定める¹⁶⁾. すると Cauchy-Riemann の関係式は

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad (1.97)$$

と書き換えられる. これは, ベクトル場 \mathbf{A}, \mathbf{B} が渦なしであることを意味している.

§ 1.7 Cauchy の積分定理

電磁気学で習った, ベクトル解析についての定理である Stokes の定理を応用することで, 複素解析における重要な定理が証明される.

1.7.1 Stokes の定理と Green の定理

まずは Stokes の定理とその 2次元版とも言える Green の定理を紹介する.

16) 授業だと $\nabla \times \mathbf{A}$ とかだったけど, \mathbf{A} は 2次元ベクトルなので, こんな無理矢理な定義にしなければなりません.

定理 1.7 (Stokes, Green) 空間内の領域 S とその境界線 (閉曲線) $C = \partial S$, そして 3 次元ベクトル場 V を考えると,

$$\oint_C V \cdot dr = \iint_S (\nabla \times V) \cdot d\sigma \quad (1.98)$$

という関係式が成立する. これを Stokes の定理という. ただし $d\sigma$ は, 大きさが面積素の, 領域の外向き法線ベクトルである.

Stokes の定理を複素平面に応用するため, S を xy 平面上の領域とする. すると $d\sigma = (0, 0, dxdy)$ であるから, (1.98) 式は

$$\oint_C (V_x dx + V_y dy) = \iint_S \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dxdy \quad (1.99)$$

となる. この関係式が成り立つことを Green の定理¹⁷⁾という.

1.7.2 Cauchy の積分定理

Green の定理を用いると, 解析函数の積分について重要な公式が証明できる.

定理 1.8 $f(z)$ が $C, S (\partial S = C)$ 上のすべての点で解析的ならば,

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (1.100)$$

が成り立つ. これを Cauchy の積分定理¹⁸⁾という.

証明 Green の定理を $A = (u, -v), B = (v, u)$ に用いれば,

$$\oint_C A \cdot dr = \iint_S \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy \quad (1.101)$$

$$\oint_C B \cdot dr = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy \quad (1.102)$$

17) Gauss-Stokes の定理って言うてたけどなんなんでしょうね

18) Cauchy の第 1 定理ともいいます. 理由は後ほど.

となる．よって $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が C, S 上のすべての点で kaisekitei ならば，

$$\oint_C f(z)dz = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + i \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.103)$$

が成り立つ． ■

定理 1.9 ♣ C_1, C_2 を，2つの端点を同一とする曲線とする．これらを合わせた閉曲線が囲む領域を S として， $f(z)$ が C_1, C_2, S 上のすべての点で解析的ならば，

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \quad (1.104)$$

となる．つまり，解析関数ならば積分の値は経路によらない．

証明 Cauchy の積分定理を閉曲線 $C_1 + C_2^{-1}$ に適用すれば明らか．ただし後述の補足 2 を用いた． ■

1.7.3 いくつかの確認

Cauchy の積分定理（とそれに関する議論）から，

$$\oint_C z^n dz = 0 \quad (n \geq 0) \quad (1.105)$$

$$\oint_C \bar{z} dz = 2i \cdot S \quad (1.106)$$

を示す．ただし S は C の囲む領域の面積である．

z^n の積分 $n \geq 0$ ならば z^n は有限の領域において解析的なので，Cauchy の積分定理から

$$\oint_C z^n dz = 0 \quad (1.107)$$

である． $n < 0$ ならば z^n は原点で解析的でないから，原点を含む領域においては Cauchy の積分定理は成り立たない．

\bar{z} の積分 $\bar{z} = x - iy$ について考える． $A = (x, y), B = (-y, x)$ より，
(1.101), (1.102) 式から

$$\oint_C A \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad \oint_C B \cdot d\mathbf{r} = \iint_S 2dx dy = 2S \quad (1.108)$$

$$\therefore \oint_C \bar{z} dz = 2iS. \quad (1.109)$$

よって，一般の閉曲面 C に沿って \bar{z} を積分すると，その値は C が囲む領域の面積になることが示された．

§ 1.8 Cauchy の積分公式

補足 2 閉曲線 C (積分経路) は一般に曲線が囲む領域を左側に見ながら進む向きを正としている¹⁹⁾．これに対し，逆向きの経路を C^{-1} と書くことにする．すると，次のようになる：

$$\oint_C f(z) dz = - \oint_{C^{-1}} f(z) dz. \quad (1.110)$$

補足 3 パラメータによる積分について

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(z) \frac{dz}{dt} dt \right| \leq \int_a^b |f(z)| \left| \frac{dz}{dt} \right| dt \\ &\leq \max |f(z)| \int_a^b \left| \frac{dz}{dt} \right| dt \end{aligned} \quad (1.111)$$

であるから，経路 C の長さを l として次の式が成り立つ：

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \max |f(z)| \cdot l. \quad (1.112)$$

19) 授業では言っていなかったけど大体そう．円で言えば反時計回りね．

1.8.1 積分路の変更

前節で解析函数ならば積分は経路によらないとしたが、領域内に特異点があっても、閉曲線ならば²⁰⁾積分の値は経路によらない。

定理 1.10 閉曲線 C_1 と、その中にある閉曲線 C_2 を考える。函数 $f(z)$ は、 C_2 の内部には特異点があるが C_1 と C_2 の間で解析的とする。このとき、

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz \quad (1.113)$$

が成り立つ。つまり、解析的な領域では積分路はどのようににも変更できる。

証明 C_1 と C_2 の間をつなぐ経路を考える。 C_1 から C_2 への経路を C_3 、逆向きを C_3^{-1} とする。すると全体の経路は $C = C_1 + C_2^{-1} + C_3 + C_3^{-1}$ となる²¹⁾。すると C 内において $f(z)$ は解析的なので、Cauchy の積分定理より

$$\oint_C f(z)dz = 0. \quad (1.114)$$

C_3, C_3^{-1} での積分は相殺するので、

$$\oint_{C_1 + C_2^{-1}} f(z)dz = 0 \quad (1.115)$$

$$\therefore \oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz \quad (1.116)$$

■

20) 解析函数だと 0 になるけどね。

21) C_2 は逆向きにします

1.8.2 Cauchy の積分公式

定理 1.11 (Cauchy) 閉曲面 C の内部において $f(z)$ は解析的とする． C の内部の点 z_0 について， $f(z_0)$ は

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (1.117)$$

によって求められる．これを **Cauchy の積分公式**²²⁾ という．

証明 $\frac{f(z_0)}{z - z_0}$ は $z = z_0$ で解析的でない．そこで，積分経路を z_0 を中心とする半径 r (微小) の円に変形する：

$$z = z_0 + re^{i\theta} \quad (r \ll 1, 0 \leq \theta < 2\pi) \quad (1.118)$$

このとき， $dz = ire^{i\theta} d\theta$ より

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \quad (1.119)$$

となるが， $f(z)$ 自体は $z = z_0$ で解析的なので，この式で $r \rightarrow 0$ の極限をとってもよく，

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0) d\theta = f(z_0). \quad (1.120)$$

■

22) Cauchy の第 2 定理・積分表示ともいいます．積分定理を第 1 定理といった理由はこの定理があるからなのでした．

定理 1.12 (Goursat) Cauchy の積分公式 (1.117) の両辺を z_0 で微分することで, $f(z_0)$ の微分係数も求まる:

$$\frac{d}{dz}f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz, \quad (1.121)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}f(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (1.122)$$

これを Goursat の公式という.

§ 1.9 特異点と Laurent 展開

これまでは解析的な函数の性質について述べてきた. しかし実際には, 解析的でない点がどこかに存在する場合がほとんどである.

1.9.1 特異点

定義 1.13 解析的でない点を特異点(singularity)といい, 分布の仕方によって次のように呼ばれる:

- 孤立特異点: 個々の特異点が離れた位置に存在している.
- 集積特異点: 特異点が連続的に分布している.
- 分岐点: 多価函数における, Riemann 面(後述)の切れ目.

1.9.2 Laurent 展開

孤立特異点においては Taylor 展開不可であるが, べきを負の範囲まで拡張すれば別の展開が可能である.

定理 1.13 (Laurent) 複素函数 $f(z)$ は $z = 0$ を孤立特異点を持つとする． $z = 0$ の周りの閉曲線 C において解析的なとき， $f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad (1.123)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{z'^{n+1}} dz' \quad (1.124)$$

とべき級数展開できる²³⁾．これを **Laurent 展開** という．

証明 $z = 0$ を囲むように閉曲線 C_1, C_2 を考える．ただし C_1 は C_2 の外側に存在するとする．また， C_1, C_2 をつなぐ経路を C_3 とする． C_1, C_2 の間の点 z について Cauchy の積分公式より

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1+C_3^{-1}+C_2^{-1}+C_3} \frac{f(z')}{z' - z} dz' \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z')}{z' - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z')}{z' - z} dz' \end{aligned} \quad (1.125)$$

となる． C_1 上では $|z'/z| > 1$ ， C_2 上では $|z/z'| > 1$ より

$$(C_1 \text{ 上で}) \quad \frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z'} \frac{1}{1 - z/z'} = \frac{1}{z'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z'}\right)^n \quad (1.126)$$

$$\begin{aligned} (C_2 \text{ 上で}) \quad -\frac{1}{z' - z} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1 - z'/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z'}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{z} \frac{z}{z'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z'}{z}\right)^n = \frac{1}{z'} \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{z}{z'}\right)^n \end{aligned} \quad (1.127)$$

と変形できる．これを代入すると

23) 孤立特異点が $z = z_0$ にある場合，

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz'$$

とすればよい．

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \oint_{C_1} \frac{f(z')}{z'^{n+1}} dz' + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \oint_{C_2} \frac{f(z')}{z'^{n+1}} dz' \quad (1.128)$$

となる． $f(z)$ は $z = 0$ 以外では（基本的に）解析的であるので，積分経路 C_1 と C_2 では積分値は変化しない．ゆえに

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{z'^{n+1}} dz' \right] z^n \quad (1.129)$$

■

1.9.3 主要部

定義 1.14 $f(z)$ の Laurent 展開

$$f(z) = \cdots + \underbrace{\frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z}}_{(*)} + z_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \quad (1.130)$$

において，負べきの部分 $(*)$ を主要部という．

主要部について，次のような性質がある．

主要部が 0

主要部が 0 ならば複素函数 $f(z)$ は $z = 0$ において解析的で，収束する．

主要部が有限項

主要部が有限項，例えば

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + z_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \quad (1.131)$$

ならば， $z = 0$ を k 位の極(pole) という． $k = 1$ のときは単純極(single pole) という． $z = 0$ で $f(z)$ は発散する．

主要部が無限項

主要部が無限項ならば, $z = 0$ は真性特異点(essential singularity) という. $z = 0$ での $f(z)$ の値は, 近づき方によってどのような値にでも収束させることができる.

§ 1.10 留数解析

1.10.1 留数

定義 1.15 (留数) 複素函数 $f(z)$ が $z = z_0$ に孤立特異点を持つとき,

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \quad (1.132)$$

を $z = z_0$ における留数(residue) という. ただし, C は $z = a$ を中心とした(十分小さい)円である.

留数と Laurent 展開

複素函数 $f(z)$ が $z = z_0$ 以外で解析的ならば, その Laurent 展開を C に沿って積分すると, $z = z_0 + re^{i\theta}$ として

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_C (z - z_0)^n dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} \cdot i r e^{i\theta} d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n i r^{n+1} \cdot 2\pi \delta_{n,-1} = 2\pi i a_{-1} \end{aligned} \quad (1.133)$$

となる. ただし $\delta_{n,-1}$ は Kronecker のデルタである. よって

$$a_{-1} = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) \quad (1.134)$$

である. 基本的にはこの形で用いることになる.

1.10.2 留数定理

孤立特異点が複数存在する場合には、次の定理が成立する。

定理 1.14 (留数定理) 複素函数 $f(z)$ が $z = z_1, z_2, \dots, z_n$ を孤立特異点を持ち、それ以外の領域で解析的とする。このとき C を $z = z_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を内部に含む閉曲線として、

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_i} f(z) \quad (1.135)$$

が成り立つ。これを留数定理(residue theorem)という。

証明 孤立特異点 $z = z_i$ の周りに小さな円 C_i を考え、 C と C_i を結ぶ。その結果 C の内部から孤立特異点の周囲のみが除かれた領域を考えることができ、そこでは $f(z)$ は解析的なので

$$\oint_{C + \sum_{i=1}^n C_i^{-1}} f(z)dz = 0 \quad (1.136)$$

$$\therefore \oint_C f(z)dz = \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_i} f(z). \quad (1.137)$$

■

1.10.3 留数の計算

実際に留数を求める計算を行う。

例 1.10 (単純極) $f(z)$ が $z = z_0$ を単純極に持つならば、

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + \dots \quad (1.138)$$

$$\therefore \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (1.139)$$

例 1.11 (k 位の極) $f(z)$ が $z = z_0$ を k 位の極に持つならば,

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + \cdots \quad (1.140)$$

なので

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]. \quad (1.141)$$

例 1.12 (部分分数展開) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ は

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \quad (1.142)$$

なので, $z = 0, 1$ を 1 位の極に持つ. そして

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -1, \quad \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 1. \quad (1.143)$$

1.10.4 積分への応用

例 1.13 経路 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上で次の積分を求める:

$$\oint_C \frac{2z}{z^2 - 1} dz. \quad (1.144)$$

通常ならば $x = 2 \cos \theta, y = \sin \theta$ と置いてパラメータ θ による積分を行うところであるが, 留数を用いると簡単に計算できる. 部分分数展開して

$$\frac{2z}{z^2 - 1} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \quad (1.145)$$

なので, $z = \pm 1$ で単純極, 留数 1 である. よって留数定理から

$$\oint_C \frac{2z}{z^2 - 1} dz = 4\pi i. \quad (1.146)$$

例 1.14 $f(\cos \theta, \sin \theta)$ が $\cos \theta, \sin \theta$ の有理函数であるとき:

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \quad (1.147)$$

を考える． $z = e^{i\theta}$ と置けば $\cos \theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $\sin \theta = \frac{z-z^{-1}}{2i}$, $d\theta = -i \frac{dz}{z}$ なので，

$$\begin{aligned} I &= -i \oint f\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \sin \theta = \frac{z+z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{z} \\ &= 2\pi \times \sum (\text{単位円内の留数}) \end{aligned} \quad (1.148)$$

§ 1.11 定積分の評価

1.11.1 基本方針

複素積分では，経路を上手にとることによって定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \quad (1.149)$$

の値を求めることができる．その際，次の点がポイントになる：

- 積分路を付け加えて閉経路にする．このとき，付け加えた経路からの寄与は
 - － 既に与えられている
 - － もしくは，適当な極限で寄与が消えるようにする
 ようにする．
- 閉経路に関する積分は留数定理を用いる．

1.11.2 簡単な例

まずは簡単な問題について複素数の視点から解き，手法を確認する．

例 1.15

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \quad (1.150)$$

を求める²⁴⁾．積分経路はもともと実軸全体であるが，原点中心，半径 R の（上側の）半円に対し $R \rightarrow \infty$ の極限を考える．半円部について，(1.112) 式から

$$(\text{半円部の寄与}) \leq \max \left| \frac{1}{z^2 + 1} \right| \cdot \pi R \leq \frac{1}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi}{R} \rightarrow 0. \quad (1.151)$$

$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$ の特異点は $z = \pm i$ で，留数は $\pm \frac{1}{2i}$ である．半円内にあるのは $z = +i$ なので，留数定理より

$$I + \underbrace{(\text{半円部})}_{\rightarrow 0} = 2\pi i \times \frac{1}{2i} \quad (1.152)$$

$$\therefore I = \pi. \quad (1.153)$$

1.11.3 Jordan の補題

定理 1.15 (Jordan) $|z| \rightarrow \infty$ で一様に $|f(z)| \rightarrow 0$ であるとする．このとき、正の実数 a について

$$\int_{C^+} f(z) e^{iaz} dz \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \quad (1.154)$$

が成り立つ．ただし C^+ は原点中心，半径 R の円の上半分である．これを Jordan の補題という

証明 一様に $|f(z)| \rightarrow 0$ に収束するとは，

与えられた ε に対して，ある R_ε が存在して $R > R_\varepsilon$ ならば C^+ 上で z によらず $|f(z)| < \varepsilon$ とできる．

ということである． C^+ 上で $z = Re^{i\theta}$ なので

$$|e^{iaz}| = |e^{iaR(\cos \theta + i \sin \theta)}| = e^{-aR \sin \theta} \quad (1.155)$$

$$\left| \frac{dz}{d\theta} \right| = |Rie^{i\theta}| = R \quad (1.156)$$

24) $\arctan x$ とか言っちゃ駄目です．あくまで「複素数使うと積分できるよ！」が主題なので．

である．また， $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ であるから

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{C^+} f(z) e^{iaz} dz \right| &\leq \int_0^\pi |f(z)| |e^{iaz}| \left| \frac{dz}{d\theta} \right| d\theta \\
 &< \int_0^\pi \varepsilon e^{-aR \sin \theta} R d\theta = 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \theta} d\theta \\
 &< 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \frac{2\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\varepsilon \pi}{a} (1 - e^{-aR}) \\
 &< \frac{\pi}{a} \varepsilon \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{1.157}$$

■

なお，円の下半分 C^- に関しては

$$\int_{C^-} f(z) e^{-iaz} dz \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \tag{1.158}$$

が成り立つ．

1.11.4 Dirichlet 核

次に

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \tag{1.159}$$

を計算する．そのまま考えるのは難しいので， $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ によって変形する．また，積分範囲についても極限を用いて書き換える：

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} 2 \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \frac{1}{i} \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx \\
 &= \frac{1}{i} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \\
 &= \frac{1}{i} \cdot \underbrace{\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx}_{\text{Cauchy の主値}}
 \end{aligned} \tag{1.160}$$

よって， $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ の積分について計算すればよいことが分かる．積分経路を図②のように C_{ε} ：半径 ε の半円， C_0 ：Cauchy の主値， C^+ ：半径 R の半円へ

と分割する．全体が囲む領域では $f(z)$ は解析的なので積分は 0 , また C^+ の積分に関しては Jordan の補題より 0 なので ,

$$I \cdot i = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = i\pi. \quad (1.161)$$

よって

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \quad (1.162)$$

となる．この積分を Dirichlet 核(-kernel) という．

Cauchy の主値 (主値積分) ♠

先ほど , Cauchy の主値として

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \quad (1.163)$$

という表記を導入した．これはより一般に , 以下のように定義される .

定義 1.16 函数 $f(x)$ が $x = c$ を特異点にもち , 区間 $a \leq x \leq b$ 上で $x = c$ を除いて連続であるとする .

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx - \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right] \quad (1.164)$$

が存在するとき , これを

$$\mathcal{P} \int_a^b f(x) dx \quad (1.165)$$

と書いて Cauchy の主値(-principal value) , Cauchy の主値積分という .

1.11.5 Gauss 積分

基本的な場合

実数の範囲

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \quad (a \in \mathbf{R}, a > 0) \quad (1.166)$$

ならば簡単で,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-a(x^2+y^2)}$$

($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ として)

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr \, r e^{-ar^2} = \frac{\pi}{a}. \quad (1.167)$$

よって

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (1.168)$$

多少拡張すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{b^2}{4a}} dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (1.169)$$

となる.

これを複素数へ拡張する:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+ib)^2} dx. \quad (1.170)$$

$z = x + ib$ において,

$$I = \int_C e^{-az^2} dz. \quad (1.171)$$

ただし C は, 実軸に平行な直線 $\operatorname{Im} z = b$ である. 図④のように C_1 : 実軸上, C_2 : $z = R + iy$ ($0 \leq y \leq b$), C_3 : $z = xi + b$ ($R \geq x \geq -R$), C_4 :

$z = -R + iy$ ($b \geq y \geq 0$) という経路を考える．すると，

$$\left(\underbrace{\int_{C_1}}_{\sqrt{\frac{\pi}{a}}} + \int_{C_2} + \underbrace{\int_{C_3}}_{-I} + \int_{C_4} \right) e^{-az^2} dz = 0 \quad (1.172)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \int_{C_2} e^{-az^2} dz \right| \\ \left| \int_{C_4} e^{-az^2} dz \right| \end{array} \right\} \leq \max \left| e^{-az^2} \right| \cdot b = e^{-(R^2-b^2)} \cdot b \rightarrow 0 \quad (1.173)$$

なので，

$$I = \int_C e^{-az^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+ib)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (1.174)$$

Fresnel 積分

次に

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-ix^2} dx = \frac{2}{\sqrt{i}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (1.175)$$

を計算してみる．ただし $z = \sqrt{i}x$ とした．経路を図④のように C_1 : 実軸上 $[0, R]$, C_2 : 扇形 , C_3 : $z = \sqrt{i}x$ として e^{-z^2} を積分すると , C_1 では Gauss 積分より $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, C_2 は

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_2} e^{-z^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} \cdot i R e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos 2\theta} R d\theta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.176)$$

求める経路は C_3 の逆向きで , $C_1 + C_2 + C_3$ では Cauchy の積分公式より 0 であるから ,

$$I = \frac{2}{\sqrt{i}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{i}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 - i). \quad (1.177)$$

上の結果から

$$\int_0^{\infty} e^{ix^2} dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx - i \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 - i) \quad (1.178)$$

なので,

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (1.179)$$

がいえる. この積分を Fresnel 積分という.

拡張された Gauss 積分

これまでの結果から, Gauss 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(z+c)^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (1.180)$$

がより一般的に, $a, c \in \mathbf{C}$ でも成り立っていることが分かる²⁵⁾. ただし $\operatorname{Re} a \geq 0$ かつ $a \neq 0$ である.

§ 1.12 無限遠点と Riemann 球面

1.12.1 無限遠点

無限遠点(point at infinity)とは, 一言で言えば「限りなく遠い点」である. 実函数の時には $x \rightarrow \pm\infty$ を考えた. 複素平面では, 限りなく遠い点は平面のどの方向にも存在するので, 異なった考え方をする必要がある. そこで, 複素平面上における無限遠点は, 絶対値が無限で, 偏角は不定な点とする. 記号は ∞ を用いる²⁶⁾. 限りなく遠い点は無限に存在するのだが, 便宜的に「無限遠点」として一点で代表させる.

例 1.16 $w = \frac{1}{z}$ という函数によって z 平面と w 平面を対応させる. すると, z 平面上の原点は w 平面上の無限遠点に, w 平面上の原点は z 平面上の無限遠

25) $a, c \in \mathbf{R}$: (1.168), (1.169) 式, $a \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{C}$: (1.174) 式, $a = i$: (1.177) 式です.

26) 所謂「無限大」とは異なる使い方なので, この用法に反対する人や, ∞ と書く人もいる. らしい.

点に対応する．無限遠点を定義することによって， z 平面上の点と w 平面上の点が 1 対 1 対応するのである．

複素数の集合 \mathbf{C} には無限遠点は含まれていない．無限遠点を加えた拡張複素平面(extended complex plane) の記号を

$$\mathbf{C}^*, \mathbf{P}^1 := \mathbf{C} \cup \{\infty\} \quad (1.181)$$

とする．

1.12.2 Riemann 球面

無限遠点を便宜的に定義したが，具体的に複素平面上でどの点という定義はしていない．これを分かりやすく捉える，Riemann 球面(-sphere) という方法がある．

半径 1 の球を考えて，中心を通る平面を複素平面とする（原点は球の中心とする）．また，上端を $N(0, 0, 1)$ ，下端を $S(0, 0, -1)$ とする．複素平面上の点 $(x, y, 0)$ ， $z = x + iy$ と N とを結ぶ直線が球と交わる点を (X, Y, Z) とすれば，図 1.1 から分かるように

$$x = \frac{X}{1 - Z}, \quad y = \frac{Y}{1 - Z} \quad (1.182)$$

であり，逆に解けば

$$X = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \quad Y = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \quad Z = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \quad (1.183)$$

である．ゆえに

$$\begin{array}{lll} z = 0 & (\text{原点}) & \mapsto S \\ |z| = 1 & (\text{単位円周}) & \mapsto \text{赤道} \\ |z| = \infty & (\text{無限遠点}) & \mapsto N \end{array}$$

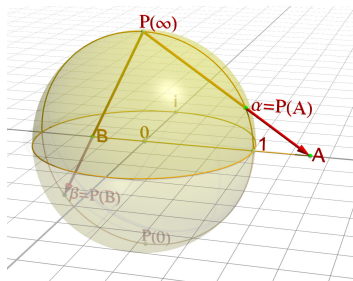


図 1.1 Riemann 球面²⁸⁾

28) Wikipedia より．

と, Riemann 球面は \mathbb{C}^* と 1 対 1 対応していることが分かる. Riemann 球面そのものを拡張複素平面ということもある.

1.12.3 無限遠点における函数のふるまい

無限遠点で函数がどのようにふるまうかを調べる. その際, $w = 1/z$ と変数変換すると, $z = \infty$ が $w = 0$ となるので分かりやすい.

無限遠点における函数の値

まず, 無限遠点で函数がどのような値をとるか, 特異点かどうかなどについて例を挙げて述べる.

例 1.17 (n 次多項式) $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ は $z = \infty$ で $f(\infty) = \infty$. ここで, $w = 1/z$ と変数変換する. すると

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = a_0 + \frac{a_1}{w} + \cdots + \frac{a_n}{w^n} \quad (1.184)$$

なので, $z = \infty, w = 0$ は n 位の極である.

例 1.18 (指数函数) $f(z) = e^z$ は $f(\infty) = \infty$. 変数変換して

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = 1 + \frac{1}{w} + \frac{1}{2w^2} + \cdots \quad (1.185)$$

なので, $z = \infty, w = 0$ は真性特異点である.

例 1.19 (無限遠点で解析的な函数) 上 2 つはともに無限遠点が特異点であったが, $f(z) = (z-1)/(z+1)$ は, 無限遠点で解析的である:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{w} - 1}{\frac{1}{w} + 1} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1-w}{1+w} = 1. \quad (1.186)$$

無限遠点における留数

今度は無限遠点での留数について述べる. 一般に, $w = 1/z$ の変数変換を用いれば

$$\operatorname{Res}_{z=z'} f(z) = \lim_{z \rightarrow z'} (z - z') f(z) = - \lim_{w \rightarrow w'} \frac{w - w'}{w w'} f\left(\frac{1}{w}\right)$$

$$= - \lim_{w \rightarrow w'} (w - w') \frac{f(1/w)}{w^2} \quad (1.187)$$

となる．よって $z' = \infty, w' = 0$ とすれば

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = - \lim_{w \rightarrow 0} w \frac{f(1/w)}{w^2} = \operatorname{Res}_{w=0} \left[- \frac{f(1/w)}{w^2} \right] \quad (1.188)$$

となる．つまり， $z = \infty$ における $f(z)$ の留数は $f(1/w)$ の $w = 0$ での留数ではない．ただし何位かは $f(1/w)$ のものであるので注意．

例 1.20 (解析的な函数) 無限遠点で解析的なことを示した $f(z) = (z - 1)/(z + 1)$ について計算してみると，

$$\begin{aligned} - \frac{f(1/w)}{w^2} &= - \frac{1}{w^2} \frac{1-w}{1+w} = - \frac{1-w}{w^2} (1 + w + w^2 + \cdots) \\ &= - \frac{1}{w^2} + \frac{2}{w} - 2 + \cdots \end{aligned} \quad (1.189)$$

であるから，

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 2 \quad (1.190)$$

となる．解析的であるはずの点において留数が 0 でない．

例 1.21 (n 次多項式) $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ は，

$$- \frac{f(1/w)}{w^2} = - \frac{a_0}{w^2} - \cdots \quad (1.191)$$

なので，解析的でないのに留数は 0 である．

$R < |z| < \infty$ の範囲において $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ と Laurent 展開されるとする．このとき，留数は

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = - \operatorname{Res}_{w=0} \frac{\sum \frac{a_n}{w^n}}{w^2} = - \operatorname{Res}_{w=0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^{-n-2} = -a_{-1} \quad (1.192)$$

となる．

§ 1.13 多価函数と Riemann 面

1.13.1 単純な例 (分岐点が 1 つ)

1.3.2 節 (p.10-) で見たように, 対数函数や累乗函数は多価函数であった. 例えば $\log z$ は

$$\log z = \log r + i\theta + i \cdot 2n\pi \quad (1.193)$$

と, 無限多価函数であるし, $z^{\frac{1}{2}}$ は

$$z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\log r + i\theta}{2} + n\pi} = \begin{cases} e^{\frac{\log r + i\theta}{2}} & n: \text{偶数} \\ -e^{\frac{\log r + i\theta}{2}} & n: \text{奇数} \end{cases} \quad (1.194)$$

$$(1.195)$$

と, 2 価函数である. (どちらも $z = re^{i\theta + i \cdot 2n\pi}$ とした.) これらはどちらも分岐点が $z = 0$ にある.

切断線

$z^{\frac{1}{2}}$ を例にとって, $w = z^{\frac{1}{2}}$ がどのような写像を表しているか考える. $0 \leq \theta < 2\pi$ とすると, z 平面では原点周りに 1 周するが, w 平面では半周しかしない. 続いて $2\pi \leq \theta < 4\pi$ とすれば, z 平面では 2 周目, w 平面では再び半周する. つまり上手く対応していないのである. そこで 1.3.2 節では切断線を入れて値域を制限し, 1 価函数とした²⁹⁾.

この他に, 値域を制限するのではなく, 定義域を拡張する方法がある.

Riemann 面

Riemann 面とは複素平面を拡張したもので, 多価函数 $w = f(z)$ に対して z 平面を複数枚設置するというものである. 例を挙げて説明しよう.

例 1.22 ($z^{\frac{1}{2}}$ の Riemann 面) $w = z^{\frac{1}{2}}$ について, 切断線を実軸負の領域に引く. これまでの手法ではこの切断線によって定義域を $-\pi \leq \theta < \pi$ などとしていた. しかしここで, $\pi \leq \theta < 3\pi$ の領域を別の複素平面に作るのである.

29) 例えば $z^{\frac{1}{2}}$ ならば $-\pi \leq \theta < \pi$, w は虚軸より右側のみ, などというように.

すると w 平面と z 平面の対応関係は図④のようになり, 1 対 1 のように見ることが出来る.

例 1.23 (無限多価函数 $\log z$ の Riemann 面) $\log z$ は無限多価函数であり, Riemann 面も無限に考える. 対応は図④のようになる.

Riemann 面において, 切断線は Riemann 面同士のつながる領域を表している. 基本的に切断線の入れ方は (分岐点を通れば) 自由であるが, 積分定理を使う際には積分路と切断線が交わらないように 2 つを設定しなくてはならない.

1.13.2 分岐点が 2 つある例

少し複雑な例として, $f(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = (z + 1)^{\frac{1}{2}}(z - 1)^{\frac{1}{2}}$ を考える. 分岐点は $z = \pm 1$ にあるので, 切断線はとりあえず実軸上 $[-1, 1]$ に引くことにしよう. この引き方が適切か否か, $f(z)$ の偏角の変化で調べる.

$z + 1 = re^{i\theta}$, $z - 1 = \rho e^{i\varphi}$ とする (θ, φ はそれぞれ $(-1, 0)$, $(1, 0)$ から測った角度である). すると $\arg f(z) = \frac{\theta + \varphi}{2}$ である. 図④のような経路と点 A ~ G を考えれば, 偏角は次のように変化する:

	A	B	C	D	E	F	G
θ	0	0	0	π	2π	2π	2π
φ	0	π	π	π	π	π	2π
$\arg f(z)$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π

偏角が 2π 変化しているので, 適切だといえる. このとき Riemann は図④のようになる.

別の切断線

他にも, 切断線を実軸上 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ に引くこともできる. このようにして作った Riemann 面も適切なもので, 図④のようになる.

Riemann 球面との対応

2 種類の切断線は, Riemann 球面に投影すると分かりやすい. まとめれば図④のようになり, Riemann 球面の上半分もしくは下半分に引いただけの違いで

あることが分かる．

§ 1.14 偏角の原理

1.14.1 偏角の原理といくつかの例

定理 1.16 複素函数 $f(z)$ を有理型（極以外に特異点を持たない）とするとき，

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_i n_i - \sum_j k_j \quad (1.196)$$

が成り立つ．ただし n_i は i 番目の零点の重複度， k_j は j 番目の極の位数である³⁰⁾．このことを偏角の原理という．

証明 まずは簡単な例から示す．零点に関する項を考えるために， $f(z) = (z - z_i)^{n_i} g(z)$ とする．ただし $g(z)$ は $g(z_i) \neq 0$ で解析的とする．このときは

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_i}{z - z_i} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (1.197)$$

で，右辺第 2 項は解析的であるから，留数定理より (1.196) 式が成り立つ．極に関する項は， $n_i \mapsto -k_j$ とすることで同様に成り立つことが確認できる．一般化するには，

$$f(z) = \frac{(z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \cdots}{(z - \zeta_1)^{k_1} (z - \zeta_2)^{k_2} \cdots} g(z) \quad (1.198)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_1}{z - z_1} + \cdots - \frac{k_1}{z - \zeta_1} - \cdots + \frac{g'}{g} \quad (1.199)$$

とすればよい． ■

例 1.24 (正則函数) C とその内部において $f(z)$ が解析的であれば，(1.196) 式右辺は $\sum n_i$ である．

30) つまり $(z - z_i)^{n_i}, (z - \zeta_j)^{-k_j}$ の形をとる．

例 1.25 (多項式) $f(z)$ が N 次多項式のとき, C を十分に大きくとれば $f \sim z^N$ であるから、

$$\frac{f'}{f} \sim \frac{N}{z}, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'}{f} dz = N \quad (1.200)$$

となる。

1.14.2 偏角の原理の意味

この定理がなぜ「偏角」の原理と呼ばれているか述べる。積分変数を $w = f(z)$ へと変換すれば, $dw = f'(z)dz$ より

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(C)} \frac{dw}{w} \quad (1.201)$$

となる。この値は $f(C)$ が原点の周りを回る回数に等しい。他にも、直接

$$\oint \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \left[\log f(z) \right]_{z_1}^{z_1} \quad (1.202)$$

としてもよい。この値は一見 0 になるようにも思えるが、対数函数の多価性 ($i \cdot 2n\pi$) から同様の結果になる。

§ 1.15 部分分数展開

定理 1.17 函数 $f(z)$ は, 1 位の極を z_1, \dots, z_n, \dots に持つとする。ただし $|z_i| \neq 0$ とする。このとき,

$$f(z_0) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z_0 - z_n} + \frac{1}{z_n} \right) \quad (1.203)$$

が成り立つ。ただし b_n は z_n での留数である。

証明 $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots$ とする。経路 C_n を z_i すべてと $z_0, 0$ を囲むようにとる。また, \tilde{C}_n を C_n から各極を含まないように迂回させた経路とする。

Cauchy の積分公式と留数定理から

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{C}_n} \frac{f(z')}{z' - z_0} dz' \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(z')}{z' - z_0} dz' - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=z_n} \frac{f(z)}{z - z_0}. \end{aligned} \quad (1.204)$$

$\operatorname{Res}_{z=z_n} \frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{b_n}{z_n - z_0}$ より, この式はさらに

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(z')}{z' - z_0} dz' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z_0 - z_n} \quad (1.205)$$

となる. $\frac{1}{z' - z_0} = \frac{1}{z'} + \frac{z_0}{z'(z' - z_0)}$ とすれば, 右辺第 1 項は

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(z')}{z' - z_0} dz' = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(z')}{z'} dz' + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{z_0 f(z')}{z'(z' - z_0)} dz'}_{\dots} \quad (1.206)$$

また (1.205) 式で $z_0 = 0$ とおけば

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(z')}{z'} dz' = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z_n} \quad (1.207)$$

であるので, (1.205) 式へ (1.206), (1.207) 式を代入すれば (1.203) 式が導かれる. ■

例 1.26 (簡単な例) $\frac{1}{(z-2)(z-1)}$ は, 極が $z = 1, 2$, 留数はそれぞれ $-1, 1$, $f(0) = \frac{1}{2}$ で

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{z-1} + 1 \right) + \left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.208)$$

と, 正しく部分分数展開された.

例 1.27 (余接函数 $\cot z$) 次に $f(z) = \cot z - \frac{1}{z}$ を考える. $\cot z = 1/\tan z$ で, $|z| \leq 1$ において $\tan z \sim z$ より, $f(0) = 0$. 極は $z = n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) である. 留数は

$$b_n = \lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi) \frac{\cos z}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{z - n\pi}{\underbrace{\sin z - \sin n\pi}_0} \cos z = \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{\cos z}{\frac{d}{dz} \sin z} = 1 \quad (1.209)$$

となるので，部分分数展開は

$$\begin{aligned}
 f(z) &= 0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} - \cancel{\frac{1}{n\pi}} + \frac{1}{z - (-n)\pi} - \cancel{\frac{1}{(-n)\pi}} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}
 \end{aligned} \tag{1.210}$$

となる．よって

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} \tag{1.211}$$

である．

両辺を微分すると，

$$(\text{左辺}) \mapsto -\frac{1}{\sin^2 z} \tag{1.212}$$

$$(\text{右辺}) \mapsto -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{z^2}{\pi^2} + n^2}{\left(\frac{z^2}{\pi^2} - n^2\right)^2} \tag{1.213}$$

となるので， $1/\sin^2 z$ の部分分数展開は

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{z^2}{\pi^2} + n^2}{\left(\frac{z^2}{\pi^2} - n^2\right)^2} \tag{1.214}$$

となる．

$|z| \ll 1$ のとき

$$\frac{1}{\sin^2 z} \simeq \frac{1}{\left(z - \frac{z^3}{6}\right)^2} \simeq \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{z^2}{3}\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3} \tag{1.215}$$

なので，(1.214) 式で $z \rightarrow 0$ とすると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (1.216)$$

が得られる。これは Euler の公式である。

§ 1.16 無限乗積

定理 1.18 (無限乗積展開) $f(z)$ が z_1, z_2, \dots を 1 位の零点に持つとする。このとき,

$$f(z) = f(0)e^{\frac{f'(0)}{f(0)}z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}}. \quad (1.217)$$

と無限乗積を用いて展開できる。

証明 f'/f は z_n ($n = 1, 2, \dots$) を 1 位の単純極に持ち、留数は 1 である。ゆえに部分分数展開して,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} \right). \quad (1.218)$$

両辺を積分すると

$$\log f(z) = \frac{f'(0)}{f(0)}z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\log(z - z_n)}_{\log[(-z_n)(1 - \frac{z}{z_n})]} + \frac{z}{z_n} \right) + \underbrace{C}_{\text{定数}} \quad (1.219)$$

$$f(z) = e^C e^{\frac{f'(0)}{f(0)}z} \prod_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-z_n)}_{\text{定数}} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}} = A e^{\frac{f'(0)}{f(0)}z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}} \quad (1.220)$$

となる。 $z = 0$ で $f(0) = A$ だから、示された。 ■

例 1.28 ($\sin z$ の無限乗積展開) $f(z) = \sin z/z$ とすると、 $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) =$

$0, \lim_{z \rightarrow 0} f'(0) = 0$ で , 零点は $z = n\pi$ ($n \neq 0$) なので ,

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} &= \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}} \cdot \left(1 + \frac{z}{n\pi}\right) e^{-\frac{z}{n\pi}} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right). \end{aligned} \quad (1.221)$$

よって $\sin z$ の無限乗積展開は

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \quad (1.222)$$

となる . 両辺を展開して z^3 の係数を見ると ,

$$(\text{左辺}) \mapsto -\frac{1}{6} \quad (1.223)$$

$$(\text{右辺}) \mapsto -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \quad (1.224)$$

なので , (1.216) 式が得られる .

§ 1.17 ガンマ函数と鞍点法

1.17.1 ガンマ函数

定義 1.17 (ガンマ函数) $\operatorname{Re} z > 0$ なる z に対して

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.225)$$

で定義される函数を , ガンマ函数という . この積分は Euler の第 2 種積分とも呼ばれる .

階乗との関係

z が 1 より大きな実数 $s+1$ である時は, ガンマ函数は

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s dt = \left[-e^{-t} t^s \right]_0^\infty + s \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt}_{s\Gamma(s)} \\ &= s(s-1)\Gamma(s-1) = \cdots = s \cdot (s-1) \cdots 1\Gamma(1)\end{aligned}\quad (1.226)$$

と変形できる. $\Gamma(1) = 1$ なので, $s = n \in \mathbf{N}$ については

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (1.227)$$

となる.

半整数の階乗 ♠

ガンマ函数を用いて階乗函数を拡張することができる. 頻繁に登場するのが半整数 $n + \frac{1}{2} = \frac{2n+1}{2}$ である. まずは $\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. そして

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt \quad (1.228)$$

は, $t = \tau^2$ と変数変換して

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty e^{-\tau^2} \tau^{-1} \cdot 2\tau d\tau = 2 \int_0^\infty e^{-\tau^2} d\tau \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^\infty e^{-\tau^2} d\tau}_{\text{Gauss 積分}} = \sqrt{\pi}\end{aligned}\quad (1.229)$$

となる. よって

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}. \quad (1.230)$$

極と零点

ガンマ函数は $z = 0, -1, -2, \dots$ に³¹⁾1 位の極を持つ．また有限複素平面上には零点を持たない．

1.17.2 Stirling の公式

ガンマ函数

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^s dt \quad (1.231)$$

について， s が非常に大きな場合を考える． $t = sx$ と変数変換すると，

$$\Gamma(s+1) = s^{s+1} \int_0^\infty e^{-sx} x^s dx = s^{s+1} \int_0^\infty e^{s \overbrace{(\log x - x)}^{f(x)}} dx. \quad (1.232)$$

s が十分に大きく， $e^{sf(x)}$ は激しい変化をするので，主に $f(x)$ の最大値近傍の値のみが影響を持つ． $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ より， $f(x)$ は $x = 1$ で最大．その近傍で Taylor 展開すれば，

$$f(x) = \left[(x-1) - \frac{(x-2)^2}{2} + \dots \right] - x \simeq -1 - \frac{(x-2)^2}{2} \quad (1.233)$$

と近似できる．よって

$$\int_0^\infty e^{sf(x)} dx \simeq \int_0^\infty e^{s \left[-1 - \frac{(x-2)^2}{2} \right]} dx = e^{-s} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{2}(x-2)^2} dx. \quad (1.234)$$

これは一見すると Gauss 積分のように見えるが，区間がずれているためそのままでは適用できない．だが， $e^{-\frac{s}{2}(x-2)^2}$ は s が十分大きいとき $x = 1$ 付近で鋭いピークを持つので，積分区間を $(0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ としてもよい．よって

$$\int_0^\infty e^{sf(x)} dx \simeq e^{-s} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{s}{2}(x-2)^2} dx = e^{-s} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \quad (1.235)$$

となるから，

31) 定義するときに $\operatorname{Re} z > 0$ だった気がするけどきつと気のせいだ．うん．

$$\Gamma(s+1) \simeq s^s e^{-s} \sqrt{2\pi s} \quad (1.236)$$

が成り立つ．この式は Stirling の公式という．

このように，変数の値が非常に大きなところでの漸近的振る舞いを見る方法を，鞍点法(method of saddle point) もしくは最急降下法(method of steepest descent) という．

1.17.3 鞍点法

ガンマ関数の漸近形を求めたときに用いた手法をなぜ鞍点法（最急降下法）と呼ぶのか，ここで一般的な場合の手法について述べて説明する．

$$I(s) = \int_C g(z) e^{sf(z)} dz \quad (1.237)$$

の値を近似的に求める．ただし $g(z)$ はなだらかで， $f(z)$ は解析的であるとする．また経路 C の両端において， $f(z) = -\infty$ となるものとする．まず， $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ として

$$I(s) = \int_C g(z) e^{su(x, y)} e^{isv(x, y)} dz \quad (1.238)$$

と分解する．ここで，経路について次のような条件を課すことにしよう：

1. 実部 $u(x, y)$ が極大をとる．
2. その点の付近で虚部 $v(x, y)$ が定数．

条件のもとで経路を $z = z(t)$ とパラメータ表示する．ただし u が極大をとる点を $z(0) = z_0$ ，端点を $t = a < 0, b > 0$ とする．すると，条件は

1. $\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = 0, \left. \frac{d^2u}{dt^2} \right|_{t=0} < 0$
2. $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = 0$

と書ける． z_0 近傍で

$$z = z_0 + te^{i\theta} = (x_0 + t \cos \theta) + i(y_0 + t \sin \theta) \quad (1.239)$$

とすれば (ただし θ は z_0 の点での経路の傾きである),

$$\begin{aligned} \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{t=0} \cos \theta + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{t=0} \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (1.240)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{t=0} \cos \theta + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{t=0} \sin \theta \\ &= - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{t=0} \cos \theta + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{t=0} \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (1.241)$$

となる. ただし最終行での変形は Cauchy-Riemann の関係式を用いた. これらの式を $\sin^2 + \cos^2 = 1$ を用いて整理すれば,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{t=0} = 0 \quad (1.242)$$

$$\frac{df}{dz}(z_0) = 0 \quad (1.243)$$

となる. また, 2 階微分は

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \theta \quad (1.244)$$

となる. ここで, $z = z_0$ で C と直交する方向

$$z = z_0 + t' e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} \quad (1.245)$$

での 2 階微分を計算すると,

$$\frac{d^2 u}{dt'^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos^2 \theta \quad (1.246)$$

である. ゆえに

$$\underbrace{\frac{d^2 u}{dt^2}}_{<0} + \underbrace{\frac{d^2 u}{dt'^2}}_{>0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.247)$$

となる³²⁾ので, z_0 は極大でなく鞍点となっている. Cauchy-Riemann の関係式から

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.248)$$

なので, ∇u と $v = \text{const.}$ は平行である³³⁾. そこで, C は ∇u と平行かつ鞍点が極大になるようなもの \tilde{C} を選ぶ (解析的ならば, 積分の値は経路によらない).

$z = z_0$ のまわりで

$$\begin{aligned} f(z) &\simeq f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0) (z - z_0)^2 = f(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2} e^{2i\theta} t^2 \\ &= f(z_0) - \frac{1}{2} a t^2 \quad (a = |f''(z_0) e^{2i\theta}| = |f''(z_0)|) \end{aligned} \quad (1.249)$$

と展開すれば,

$$\begin{aligned} I(s) &= \int_{\tilde{C}} g(z) e^{s f(z)} dz \simeq e^{s f(z_0)} e^{i\theta} g(z_0) \int_a^b e^{-\frac{s}{2} a t^2} dt \\ &\simeq e^{s f(z_0)} e^{i\theta} g(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{sa}}. \end{aligned} \quad (1.250)$$

a をもとに戻して,

$$I(s) = \int_C g(z) e^{s f(z)} dz \simeq \frac{\sqrt{2\pi} g(z_0) e^{s f(z_0)} e^{i\theta}}{|s f''(z_0)|^{1/2}} \quad (1.251)$$

1.17.4 ガンマ函数と鞍点法

上の議論をガンマ函数に当てはめて, Stirling の公式の導出が正しい鞍点法であったことを確認する.

ガンマ関数の場合は $f(z) = \log z - z$ なので, $\frac{df}{dz} = 0$ は $z = 1$ である. 極表示 $z = r e^{i\theta}$ を用いれば

$$f(z) = \log r + i\theta - r e^{i\theta} = (\log r - r \cos \theta) + i(\theta - r \sin \theta) \quad (1.252)$$

32) $f(z)$ が解析的ならば, Cauchy-Riemann の関係式から u は $\nabla^2 u = 0$ を満たします.

33) $\nabla u, \nabla v$ はスカラー場 u, v の勾配を表しているの, これらの内積が 0 ということは勾配同士が直交, つまり一方の勾配ともう一方の等高線は平行になる.

となる．よって

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{z=1} = \left(\frac{1}{r} - \cos \theta \right)_{r=1, \theta=0} = 0, \quad (1.253)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\frac{1}{r^2} < 0. \quad (1.254)$$

また $v = \theta - r \sin \theta = \text{const.}$ ならば $\theta = 0$ なので，実軸上 $(0, \infty)$ は正しい最急降下線だといえる．

第 2 章

Fourier 解析

§ 2.1 Fourier 級数

2.1.1 周期函数

定義 2.1 函数 $f(x)$ が $p > 0$ について

$$f(x+p) = f(x) \quad (2.1)$$

を満たすとき, p を $f(x)$ の周期(period) という. このとき $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x+np) = f(x)$ なので, np も周期である. 最も小さな周期のことを基本周期という.

2.1.2 Fourier 級数展開

定理 2.1 周期が $p = 2L$ の函数 $f(x)$ は, 三角函数によって

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.2)$$

と展開できる. 係数は

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (2.3)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.4)$$

である. これを Fourier 級数展開という.

証明 三角函数の直交性

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \cos \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x &= \frac{1}{L} \int_0^L dx \left[\cos \frac{(n-m)\pi}{L} x + \cos \frac{(n+m)\pi}{L} x \right] \\ &= \delta_{nm}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{m\pi}{L} x &= \frac{1}{L} \int_0^L dx \left[\cos \frac{(n-m)\pi}{L} x - \cos \frac{(n+m)\pi}{L} x \right] \\ &= \delta_{nm}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x = 0 \quad (2.7)$$

を用いる。(2.2) 式の両辺に $\frac{1}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}$, $\frac{1}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}$ をかけて $[-L, L]$ で積分すれば a_n, b_n が求められる。 ■

奇函数と偶函数

$f(x)$ が奇函数 $f(x) = -f(-x)$ ならば $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$ は奇函数なので $a_n = 0$.
このときの級数を Fourier 正弦級数という .

逆に $f(x)$ が偶函数 $f(x) = f(-x)$ ならば $f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$ は奇函数なので $b_n = 0$. このときの級数を Fourier 余弦級数という .

2.1.3 複素 Fourier 級数

定理 2.2 周期が $p = 2L$ の函数 $f(x)$ は, 指数函数によって

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}} \quad (2.8)$$

と展開できる . 係数は

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{L}} \quad (2.9)$$

である . これを複素 Fourier 級数展開という .

証明 Euler の関係式から

$$\cos \frac{n\pi x}{L} = \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2}, \quad (2.10)$$

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i} \quad (2.11)$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2} + b_n \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\frac{n\pi x}{L}} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

となる. $b_0 = 0, a_{-n} = a_n, b_{-n} = -b_n$ より, この式の第 1 項は $n = 0$, 総和
内第 1 項は $n \geq 1$, 第 2 項は $n \leq -1$ の場合とできる. このときの係数は

$$\frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x) \underbrace{\left(\cos \frac{n\pi x}{L} - i \sin \frac{n\pi x}{L} \right)}_{\text{Euler の公式}} \quad (2.13)$$

なので, 示された. ■

指数関数の直交性

三角関数の直交性と同様に, 指数関数にも直交性がある:

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx e^{i\frac{n\pi x}{L}} \cdot e^{i\frac{m\pi x}{L}} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx e^{i\frac{(n+m)\pi x}{L}} = \delta_{n,-m} \quad (2.14)$$

この直交性から, (2.8) 式の両辺に $\frac{1}{2L} e^{-i\frac{m\pi x}{L}}$ をかけて $[-L, L]$ で積分すれば c_n が得られる.

2.1.4 最小誤差近似

Fourier 級数展開(のようなもの)で, 級数を途中で打ち切ったものを考える:

$$\varphi_N(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(\alpha_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (2.15)$$

ただし, α_n, β_n は (まだ) 任意の実数とする. この, α_n, β_n を調整して, できるだけ $f(x)$ に近くなるような φ_N を求める.

Bessel の不等式

2 乗平均誤差

$$\delta^2 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L [f(x) - \varphi_N(x)]^2 dx \quad (2.16)$$

が最小になるようにする．実際に計算して，

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L [f(x) - \varphi_N(x)]^2 dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L [f(x)^2 - 2f(x)\varphi_N(x) + \varphi_N(x)^2] dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left[f(x)^2 - \alpha_0 f(x) - 2f(x) \sum_{n=1}^N \left(\alpha_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right. \\ &\quad + \frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{n=1}^N \left(\alpha_n^2 \cos^2 \frac{n\pi x}{L} + 2\alpha_n \beta_n \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} + \beta_n^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{L} \right) \\ &\quad + \sum_{n \neq n'} \left(\alpha_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \left(\alpha_{n'} \cos \frac{n'\pi x}{L} + \beta_{n'} \sin \frac{n'\pi x}{L} \right) \\ &\quad \left. + 2 \cdot \frac{\alpha_0}{2} \sum_{n=1}^N \left(\alpha_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (2.17)$$

三角関数の直交性 (2.5),(2.6),(2.7) 式より，積分の結果は

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx \\ &\quad - \frac{a_0}{2} \alpha_0 - \sum_{n=1}^N (a_n \alpha_n + b_n \beta_n) + \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx + \frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{4} - \frac{a_0^2}{4} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [(\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2] - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned} \quad (2.18)$$

となる．最終行では α_n, β_n について平方完成した．ただし a_n, b_n は $f(x)$ の Fourier 級数展開の係数 (2.3),(2.4) 式である．これを最小にするのは $\alpha_n =$

$a_n, \beta_n = b_n$ である．つまり，三角函数による展開の中で，Fourier 級数が最も良い近似になっているのである．

$$\delta^2 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx - \frac{a_0^2}{4} - \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \quad (2.19)$$

なので，これは N について単調減少である．また定義から $\delta^2 \geq 0$ より，

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \quad (2.20)$$

が成り立つ．これを Bessel の不等式という．

Parseval の等式

$f(x)$ が区間連続（不連続点があっても，有限個の不連続点しかない）であって，かつ区間で十分になめらか（激しく変化しない）ならば，Bessel の不等式において $N \rightarrow \infty$ とすれば等号が成り立つ：

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (2.21)$$

これを Parseval の等式という．

複素 Fourier 級数

複素 Fourier 級数では，Bessel の不等式及び Parseval の等式は

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx \begin{cases} \geq \\ = \end{cases} \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \quad (2.22)$$

となる．

§ 2.2 離散 Fourier 変換

今度は，関数全体でなく離散値が与えられているとする¹⁾．このときの Fourier 変換を考える．

1) 実際はこっちのが実用的．実験で得られるデータって離散的だしね．

2.2.1 離散 Fourier 変換

定理 2.3 $0 < x \leq p$ の区間で $x = t_k = \frac{kp}{N}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) に $f(t_k)$ なる値が与えられているとする。このとき, $f(t_k)$ は

$$f(t_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^N \hat{f}(\omega_l) e^{i\omega_l t_k} \quad (2.23)$$

と展開できる。ただし

$$\omega_l = \frac{2\pi l}{p}, \quad (2.24)$$

$$\hat{f}(\omega_l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N f(t_k) e^{-i\omega_l t_k} \quad (2.25)$$

である。これは $f(t_k)$ から $\hat{f}(\omega_l)$ への変換だと考えられ, 離散 Fourier 変換(Discrete Fourier Transform) という。

証明 (2.23) 式の両辺に $[e^{i\omega_m t_k}]^*$ をかけて k について和をとる：

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=1}^N f(t_k) e^{-i\omega_m t_k} \quad (2.26)$$

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^N \hat{f}(\omega_l) \underbrace{\sum_{k=1}^N e^{i(\omega_l - \omega_m) t_k}}_{N\delta_{l,m}} = \sqrt{N} \hat{f}(\omega_m) \quad (2.27)$$

よって (2.25) 式が示された。 ■

2.2.2 行列表示とユニタリー変換

$f(t_k) = f_k, \hat{f}(\omega_l) = \hat{f}_l$ と書くことにする．離散 Fourier 変換は，行列とベクトルによって

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_N \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{F}}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-i\frac{2\pi}{N} \cdot (1 \cdot 1)} & e^{-i\frac{2\pi}{N} \cdot (1 \cdot 2)} & \dots & e^{-i\frac{2\pi}{N} \cdot (1 \cdot N)} \\ e^{-i\frac{2\pi}{N} \cdot (2 \cdot 1)} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ e^{-i\frac{2\pi}{N} \cdot (N \cdot 1)} & \dots & \dots & e^{-i\frac{2\pi}{N} \cdot (N \cdot N)} \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \quad (2.28)$$

と書ける． U は見辛いが，前小節の定義から

$$\sqrt{N}U_{lk} = e^{-i\omega_l t_k} = e^{-i\frac{2\pi l}{p} \cdot \frac{kp}{N}} = e^{-i\frac{2\pi}{N} \cdot (l \cdot k)} \quad (2.29)$$

である．

ユニタリー変換

実は U はユニタリー行列(unitary matrix) という特殊な性質を持った行列である．その性質とは，

$$(UU^\dagger)_{lk} = \sum_{m=1}^N U_{lm} U_{mk}^\dagger = \sum_{m=1}^N U_{lm} U_{km}^* = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N} (l-k)m} = \delta_{l,k} \quad (2.30)$$

$$UU^\dagger = I \text{ (単位行列)} \quad (2.31)$$

と²⁾，Hermite 共役が逆行列となるというものである³⁾． $\hat{\mathbf{F}}$ は \mathbf{F} のユニタリー変換である．

ユニタリー変換すべてに言えることだが，

$$|\hat{\mathbf{F}}|^2 = \hat{\mathbf{F}}^\dagger \hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}}^\dagger U U^\dagger \hat{\mathbf{F}} = (U^\dagger \hat{\mathbf{F}})^\dagger (U^\dagger \hat{\mathbf{F}})$$

2) U^\dagger は Hermite 共役 (転置 + 複素共役) をとる事を意味しています．手描きだと転置の U^\dagger と間違えやすいかもです．

3) 編集してて気づいたけど U って対称行列ですね．ってことは Hermite 共役は複素共役そのものでした．

$$=(U^{-1}\hat{\mathbf{F}})^\dagger(U^{-1}\hat{\mathbf{F}})=\mathbf{F}^\dagger\mathbf{F}=|\mathbf{F}|^2 \quad (2.32)$$

と, 変換前後でベクトルの長さ(ノルム)は変化しない. $\mathbf{F}, \hat{\mathbf{F}}$ の成分で書けば,

$$\sum_{n=1}^N |\hat{f}_n|^2 = \sum_{n=1}^N |f_n|^2 \quad (2.33)$$

となる. この式も Parseval の等式と呼ばれる.

ベクトルの長さ(ノルム)は変換で変化しないことがわかった. つまり, U は N 次元空間内における回転を表してると言える.

別の見方(基底の変換)

U が N 次元空間内における回転を表すと述べたが, これは空間の基底が変化したと考えることもできる. 実際に確認しよう. まず, ベクトル V を

$$V = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_1} f_1 + \cdots + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{e_N} f_N = \sum_{n=1}^N f_n e_n = \mathbf{I} \mathbf{F} \quad (2.34)$$

と定義する. これはまた

$$\begin{aligned} V &= \mathbf{I} \mathbf{F} = \mathbf{I} U^\dagger U \mathbf{F} = U^\dagger \hat{\mathbf{F}} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} e^{i\frac{2\pi}{N}} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\hat{e}_1} \hat{f}_1 + \cdots + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\hat{e}_N} \hat{f}_N = \sum_{n=1}^N \hat{f}_n \hat{e}_n \end{aligned} \quad (2.35)$$

と書ける⁴⁾. 確かに U は基底を $\{e_1, \dots, e_N\}$ から $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_N\}$ へ変換しているのがわかる. これらの基底は, どちらも

$$e_i \cdot e_j = \delta_{i,j}, \quad \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{i,j} \quad (2.36)$$

と, 完全正規直交基底となっていることがわかる⁵⁾.

4) U の N 行目と N 列目は全て 1 となることに注意.

5) 「完全」とはこの式からは証明出来ていませんが, 実はちゃんと証明出来ます. やらないけれど.

2.2.3 高速 Fourier 変換（概略）

離散 Fourier 変換は行列とベクトルの積に書けるが、これでは計算回数が N^2 になり、計算機などでの処理に時間がかかる。そこで高速に処理するために考えられた高速 Fourier 変換(Fast Fourier Transform; FFT) というアルゴリズムがある。これは、 U を疎行列へ分解することにより計算回数を減らすものである。 N が 2 の累乗であれば、 $\log_2 N$ 個の疎行列へ分解でき、計算回数も $N \log_2 N$ となる。例えば $N = 1000 \approx 2^{10}$ であれば、 $\frac{N \log_2 N}{N^2} = \frac{\log_2 N}{N} = \frac{10}{1000}$ と、処理速度に 100 倍もの差が生じる。

2.2.4 離散 Fourier 変換の限界：Nyquist 周波数

離散 Fourier 変換では、周期はどれだけ短くても $\frac{2p}{N}$ までしかとることができない。そのため周波数は $\frac{\pi N}{p}$ より大きくすることはできない。

定義 2.2 離散 Fourier 変換において、 $\omega_c = \frac{\pi N}{p}$ を Nyquist 周波数という。 $\omega > \omega_c$ の成分は離散 Fourier 変換では再現できない。これをエイリアシングという⁶⁾。

Nyquist 周波数より小さい成分でも、完全に再現できるとは限らない。それを例で見てみよう。

例 2.1 $f(t_s) = \cos(t_s)$ を $p = 2\pi, N = 4$ として離散 Fourier 変換する。 $t = \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ に $0, -1, 0, 1$ のデータが存在している。Nyquist 周波数は $\omega_c = 2 > 1$ (1 は $f(t_s)$ の周波数) である。行列表示で考えると、

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

6) 高周波数の領域が再現できないことから、高周波（紫外，UV）のカットオフということもある。

$$U = \left[\frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i \frac{2\pi}{N} km} \right]_{km} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & -1 & i & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ i & -1 & -i & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\hat{F} = UF = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

となる．よって

$$f(t_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \hat{f}(\omega_n) e^{i\omega_n t_k} = \frac{1}{2} \cos t_k + \frac{1}{2} \cos 3t_k \quad (2.40)$$

と，完全には再現出来ていない．グラフを図@にプロットした．

この問題点を解決するには，Nyquist 周波数を大きくすれば良い．つまり $N \rightarrow \infty, \omega \rightarrow \infty$ とするのである．これは Fourier 級数展開そのものになる．

Fourier 級数展開で紫外カットオフは解決できるが，逆に，どのようにしても周期が p より長いものは表すことができない⁷⁾．これを解決するのが次節で述べる Fourier 変換である．

§ 2.3 Fourer 変換

2.3.1 Fourier 級数・積分定理

定理 2.4 周期 $2L$ の函数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} (x-t) dt \quad (2.41)$$

$$= \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} (x-t) dt \quad (2.42)$$

と書くことができる．これを Fourier の級数定理という．

7) これを低周波（赤外，IR）のカットオフということもある．

証明 Fourier 級数展開①に係数の式②を代入し、 $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A - B)$ を用いて整理すれば (2.41) 式となる。(2.42) 式へは、 \cos の偶函数性を用いて変形すればよい。 ■

定理 2.5 函数 $f(x)$ は、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \cos \omega(x - t) \quad (2.43)$$

と書くことができる。これを Fourier の積分定理という。

証明 Fourier の級数定理において $n\pi/L = \omega_n, \pi/L = \Delta\omega$ とし、 $L \rightarrow \infty$ の極限をとる。すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \cos \omega_n(x - t) \\ &\rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \cos \omega(x - t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \cos \omega(x - t) \end{aligned} \quad (2.44)$$

となる。よって示された。 ■

2.3.2 Fourier 変換

定理 2.6 函数 $f(x)$ から別の函数へ

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} \quad (2.45)$$

と写すことを Fourier 変換(-transform) という。 $f(x)$ は $\hat{f}(\omega)$ によって

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} \quad (2.46)$$

と復元できる。これを Fourier 逆変換(-inverse transform) という。

証明 Fourier の積分定理を用いる．積分定理の \cos を \sin に変えた

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \sin \omega(x-t)}_{(*)} \quad (2.47)$$

を考えると， $(*)$ 部分は ω の奇函数なので，この積分は 0 となる．よって積分定理にこの式を i 倍したものを加えてもよい．すると

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega(x-t)} \quad (2.48)$$

となる．この式も Fourier の積分定理と呼ばれる．積分を 2 段階に分けて

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} \right] \quad (2.49)$$

と書けば，題意が示されているのがわかる． ■

Fourier 変換・逆変換を， $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$, $f = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]$ と書くこともある．

2.3.3 Fourier 余弦・正弦変換

定理 2.7 Fourier 変換において， $f(x)$ が偶函数であれば \hat{f} は実数になる．その値は

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dt f(t) \cos \omega t \quad (2.50)$$

となる．これを Fourier 余弦変換という． $f(x)$ が奇函数であれば \hat{f} は純虚数になる．その値に i をかけたものは

$$\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dt f(t) \sin \omega t \quad (2.51)$$

となる．これを Fourier 正弦変換という．

証明 Fourier 変換において Euler の公式 $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$ を用いれば

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \cos \omega t - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \sin \omega t \quad (2.52)$$

となる． $f(x)$ の偶奇性によって整理すれば明らか． ■

余弦・正弦変換の利用法 ♠

(レポートで，余弦変換が使えなさそうだけど実は使えるよ！ってのがあったので追記しておきます．)

$x \geq 0$ のみで定義された函数 $f(x)$ を考える． $x < 0$ の範囲へ $f(-x) = f(x)$ を満たすように拡張する．するとこの函数は偶函数であるから Fourier 余弦変換ができ，

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dt f(t) \cos \omega t \quad (2.53)$$

となる．これ自身も ω の偶函数であるので，逆変換は

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} d\omega \hat{f}_c(\omega) \cos \omega x \quad (2.54)$$

となる．この後に再び x の範囲を $x \geq 0$ に区切ってやればよい．同様にして正弦変換も $x \geq 0$ で定義された函数について用いることができる．

このような手段によって，Fourier 余弦・正弦変換は， $x \geq 0$ でのみ定義された函数に対しても用いることができるのである．

2.3.4 Fourier 変換の例

例 2.2 (単一パルス)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \quad (2.55)$$

を Fourier 変換する．偶函数なので，Fourier 余弦変換すれば

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega} \quad (2.56)$$

となる．逆変換してみると，

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_c(\omega) \cos \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega x}{\omega} d\omega. \quad (2.57)$$

ここで,

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega \cos \omega x}{\omega} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \quad (2.58)$$

を用いれば, もとの単一パルスが得られる.

Fourier 逆変換の, $x = 1$ での振る舞いを見てみる. 実際に計算すれば,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega \cos \omega}{\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{2} \quad (2.59)$$

となる. これは $x = 1$ での左極限と右極限との平均である.

単一パルスの不連続点において, Fourier 逆変換の値が左極限と右極限との平均をとることを示したが, これは一般的に言える. ただしその両側では激しく振動する.

Gibbs の現象

先程の単一パルスの Fourier 逆変換で, 積分区間の上限を有限値で区切って
 しまう, つまり

$$\int_0^a \frac{\cos \omega x \sin \omega}{\omega} d\omega \quad (2.60)$$

とする. これは, Fourier 級数展開において無限級数でなく有限項で打ち切ることに相当する. すると不連続点において強い振動が発生し, 上限値をいくら大きくしても, 振動の幅が小さくなるだけで振動は小さくならない (不連続点に振動が集まってくる). この現象を Gibbs の現象という⁸⁾.

例 2.3 (Dirac のデルタ函数) Fourier 変換の式に逆変換の式を代入した

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(x-t)} \right] \quad (2.61)$$

と, Dirac のデルタ函数の定義式

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \delta(x-t) \quad (2.62)$$

8) レポート No9. の図が分かりやすいと思います.

とを比較すると、デルタ関数が積分で

$$\delta(x-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(x-t)} \quad (2.63)$$

と定義できることがわかる⁹⁾。

例 2.4 (Gaussian) Gaussian $f(x) = e^{-\frac{ax^2}{2}}$ を Fourier 変換すると

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{at^2}{2}} e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{a}{2}\left(t+i\frac{\omega}{a}\right)^2} e^{-\frac{\omega^2}{2a}}}_{\text{Gauss 積分}} = \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2a}}}{\sqrt{a}} \quad (2.64)$$

と、変換後も Gaussian になっている。

これを正規分布と見たとき、もとの Gaussian の分散（分布の広がり）は $1/\sqrt{a}$ なのに対し、変換後は \sqrt{a} となっている。ゆえに、変換前後での分布の幅は反比例することがわかる。物理的には、Fourier 変換が実空間と波数空間、実時間と角周波数との間の変換になっていることに対応している¹⁰⁾。

2.3.5 Parseval の等式

Fourier 変換で、関数の絶対値の自乗は

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2 &= \int dt f^*(t) f(t) \\ &= \int dt \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dv \hat{f}(v) e^{-ivt} \right]^* \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} \right] \end{aligned}$$

9) これ以外にも、デルタ関数は様々な関数の極限で書くことができます。例を以下にあげておきます：

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin kx}{\pi x}$$

10) 量子論の不確定性関係 $\Delta x \Delta p, \Delta t \Delta E \geq \hbar/2$ を考えると、幅が反比例しているということが分かりやすいかもしれません。ただし、運動量と波数、エネルギーと角周波数が対応している（Einstein - de Broglie の関係式）ことに注意です。

$$= \int d\omega \int dv \hat{f}^*(v) \hat{f}(\omega) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int dt e^{i(v-\omega)t}}_{\delta(v-\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\hat{f}(\omega)|^2 \quad (2.65)$$

と，保存される：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\hat{f}(\omega)|^2 \quad (2.66)$$

これは Fourier 変換における Parseval の等式である．

2.3.6 Fourier 変換の性質

定理 2.8 Fourier 変換には，一般に成立する以下のような性質がある：

$$1. \text{ 線型性：} \quad \mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g] \quad (2.67)$$

$$2. \text{ 微分：} \quad \mathcal{F}[f'] = i\omega \mathcal{F}[f] \quad (2.68)$$

$$3. \text{ } n \text{ 階微分：} \quad \mathcal{F}[f^{(n)}] = (i\omega)^n \mathcal{F}[f] \quad (2.69)$$

証明 1. は Fourier 変換の式より明らか．2. は Fourier 逆変換の式を微分すれば，

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [i\omega \hat{f}(\omega)] e^{i\omega t} dt = \mathcal{F}^{-1} [i\omega \hat{f}(\omega)] \quad (2.70)$$

となるので，両辺の Fourier 変換をとればよい．これを繰り返せば 3. が得られる． ■

2.3.7 Fourier 変換の応用例

応用例として，偏微分方程式の解法とたたみこみ積分を紹介する．

例 2.5 (波動方程式) 1次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.71)$$

は, Fourier 変換を用いると簡単な形へ変換できる. 両辺に $e^{-i\alpha x}$ をかけて x で積分する:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{v^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} e^{-i\alpha x} dx. \quad (2.72)$$

$y = y(x, t)$ の x に関する Fourier 変換を $Y(\alpha, t)$ と置けば, この式は (2.69) 式で $n = 2$ として

$$(i\alpha)^2 Y(\alpha, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Y(\alpha, t) \quad (2.73)$$

となる. よって, 偏微分方程式である 1 次元波動方程式が t に関する常微分方程式へ変換された. ここに初期条件 $y(x, 0) = f(x)$ が与えられれば, それを Fourier 変換して $Y(\alpha, t)$ を求めることができる. その逆変換が求める解である.

例 2.6 たたみこみ(convolution) 積分

$$(f * g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx \quad (2.74)$$

を Fourier 変換する. f, g の逆変換の式を代入すれば

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{f}(\omega) e^{i\omega(t-x)} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dv \hat{g}(v) e^{ivx} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \int dv \hat{f}(\omega) \hat{g}(v) e^{i\omega t} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \int dx e^{-i(\omega-v)x} \right]}_{\delta(\omega-v)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) e^{i\omega t} = \mathcal{F}^{-1} \left[\mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g] \right] \end{aligned} \quad (2.75)$$

となるので, 両辺を Fourier 変換して

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g] \quad (2.76)$$

が得られる. たたみこみ積分の Fourier 変換は Fourier 変換の積となる.

高速 Fourier 変換 (FFT) を用いれば, たたみこみ積分の値は高速に評価できる.

§ 2.4 Laplace 変換

2.4.1 Laplace 変換

定義 2.3 $t \geq 0$ で定義された区分的に連続な函数 $f(t)$ に対して,

$$F(s) = \mathcal{L}[f] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.77)$$

を Laplace 変換(-transform) という.

ある実定数 s_0, M に対して

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t} \quad (t \geq 0) \quad (2.78)$$

となっているとき, $s > s_0$ に対して $F(s)$ が存在する¹¹⁾:

$$\begin{aligned} |F(s)| &\leq \int_0^{\infty} |e^{-st}| |f(t)| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-st} M e^{s_0 t} dt \\ &= M \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

2.4.2 Laplace 変換の例

例 2.7 Heaviside 函数(-function)¹²⁾:

$$\Theta(t-a) = \begin{cases} 1 & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \quad (a > 0) \quad (2.80)$$

11) 例えば $f(t) = e^{t^\alpha}$ などだと, $F(s)$ の有界性が示せない.

12) Heaviside の階段函数 (-step function), 階段函数, ステップ函数といった名称があります. シータ函数と呼ぶ本も 1 冊だけ見たことがあります (土井正男「統計力学」朝倉書店) が, そのほかで見たことはありません. なお, 記号についても Θ, θ, H, u などと色々用います. ここでは個人的な好みで Θ を用いることにします. あ, 人から聞いた話によると Heaviside 函数の Fourier 変換をやらないのは難しいからじゃないか, とのこと.

の¹³⁾Laplace 変換を考えると,

$$\mathcal{L}[\Theta(t-a)] = \int_a^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s} e^{-as} \quad (2.81)$$

となる.

例 2.8 Dirac のデルタ函数 $\delta(t-a)$ を Laplace 変換すると,

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as} \quad (2.82)$$

となる.

2.4.3 Laplace 変換の性質

定理 2.9 Fourier 変換と同様に, Laplace 変換にも一般に成立する以下のような性質がある:

$$1. \text{ 線型性: } \mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g] \quad (2.83)$$

$$2. \text{ 微分: } \mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0) \quad (2.84)$$

$$3. \text{ } n \text{ 階微分: } \mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n \mathcal{F}[f] - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (2.85)$$

証明 1. は定義より明らか. 2. は, 部分積分によって

$$\mathcal{L}[f'] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = [e^{-st} f(t)]_0^\infty + \int_0^\infty s e^{-st} f(t) dt = s\mathcal{L}[f] - f(0) \quad (2.86)$$

と示される. 繰り返して 3. が示される. ■

13) Heaviside 函数は, あいまいには単位ステップ函数 $u(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ と同一視 ($x=0$

で値があるか否か) されたり, $x=0$ で値を持たせた $H_c(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ c & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ とされたりしま

す. 手っ取り早いのは $c = 1/2$ ですかね.

Laplace 変換を用いれば常微分方程式は代数方程式へ変換され, 式 (2.84), (2.85) を見れば分かるように, 初期条件 $f(0), f'(0), \dots$ は自動的に取り込まれる. ゆえに, 直接特解を求めることができるのである.

例 2.9 (強制振動 ♠) 強制振動 (2 階の定数係数常微分方程式)

$$y'' + 2\gamma y' + \omega_0^2 y = f(t) \quad (2.87)$$

を, 初期条件 $y(0) = \alpha, y'(0) = \beta$ の下で解く. 両辺を Laplace 変換する. $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s), \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ として, 式 (2.85) を用いれば

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 2\gamma [sY(s) - y(0)] + \omega_0^2 Y(s) = F(s) \quad (2.88)$$

$$Y(s) = \frac{F(s) + \alpha s + 2\gamma \alpha + \beta}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2} \quad (2.89)$$

となる. これを逆変換 (2.4.5 節参照) すれば, 解が得られる.

2.4.4 移動定理

前小節で示した性質以外にも, 第 1 移動定理(substitution), 第 2 移動定理(translation) という性質がある.

定理 2.10 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ とおく. 以下の移動定理が成立する.

$$1. \text{ 第 1 移動定理: } \mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a) \quad (2.90)$$

$$2. \text{ 第 2 移動定理: } \mathcal{L}[\Theta(t - a)f(t - a)] = e^{-as} \mathcal{L}[f(t)] \quad (2.91)$$

$$\text{または} \quad \mathcal{L}[\Theta(t - a)f(t)] = e^{-as} \mathcal{L}[f(t + a)] \quad (2.92)$$

証明 1. は実際に計算すれば明らか. 2. は, 前半は

$$\mathcal{L}[\Theta(t - a)f(t - a)] = \int_a^\infty e^{-st} f(t - a) dt = e^{-as} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (2.93)$$

とすればよく, 後半の計算も同様にできる. ■

移動定理の応用例として, たたみこみを紹介する.

例 2.10 たたみこみ積分

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (2.94)$$

の Laplace 変換を考える．第 2 移動定理より

$$e^{-s\tau} \mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\Theta(t - \tau)f(t - \tau)] = \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t - \tau) dt \quad (2.95)$$

であるから，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g] &= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} g(\tau) \mathcal{L}[f] d\tau \\ &= \int_0^{\infty} d\tau \int_{\tau}^{\infty} dt e^{-st} f(t - \tau) g(\tau). \end{aligned} \quad (2.96)$$

いま，積分区間は $\tau: 0 \rightarrow \infty, t: \tau \rightarrow \infty$ であるが， $t - \tau$ 平面を考えれば， $t: 0 \rightarrow \infty, \tau: 0 \rightarrow t$ としてもよい．よって

$$\mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g] = \int_0^{\infty} dt e^{-st} \int_0^t d\tau f(t - \tau) g(\tau) \quad (2.97)$$

と変形でき，

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g] \quad (2.98)$$

となる．Fourier 変換と同様に，たたみこみ積分の Laplace 変換は Laplace 変換の積であることがわかった．

2.4.5 逆 Laplace 変換

定義 2.4 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ となるような函数 $f(t)$ が存在するとき，これを $F(s)$ の逆 Laplace 変換(inverse - transform) といって次のように書く：

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]. \quad (2.99)$$

指針

逆 Laplace 変換は実際には複雑であるから，以下のような手法を用いることが多い：

- Laplace 変換表と移動定理を用いる．
- 部分分数展開と移動定理，Laplace 変換の線形性を用いる．
- たたみこみを利用する．
- 複素解析を用いる．

例 2.11 (部分分数展開による Laplace 逆変換) 函数 $F(s) = g(s)/h(s)$ を $F(s) = c_1/(s - a_1) + \cdots + c_n/(s - a_n)$ と分解し， $\mathcal{L}[1] = 1/s$ に移動定理を用いれば $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}] = e^{ax}$ である．よって Laplace 変換の線形性より $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = c_1 e^{a_1 x} + \cdots + c_n e^{a_n x}$ ．

Bromwich 積分

複素解析を用いると，次のように求められる．

定理 2.11 函数 $F(s)$ の逆 Laplace 変換は

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} F(s) ds \quad (2.100)$$

$$= \sum_{\operatorname{Re} s < \sigma} \operatorname{Res} [e^{sx} F(s)] \quad (2.101)$$

によって求められる．これは Bromwich 積分と呼ばれる積分である．

証明 $f(t)$ が $F(s)$ へと Laplace 変換可能ならば， $s > \sigma_0$ に対して $|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}$ を満たす．ここで， $s = \sigma + ih$ ($\sigma > s$) とおく．また $f(t) = 0$ ($t > 0$) とする．ここで，函数 $g(t)$ を $g(t) = e^{-\sigma t} f(t)$ ，そして $g(\infty) \rightarrow 0$ かつ $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt$ が存在するとする．Fourier の積分定理より

$$e^{-\sigma t} f(t) = g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) e^{i\omega(x-t)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-(\sigma+i\omega)t} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega x} \underbrace{\int_0^{\infty} dt f(t) e^{-(\sigma+i\omega)t}}_{F(\sigma+i\omega)}. \quad (2.102)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{(\sigma+i\omega)x} F(\sigma+i\omega) \\
&\quad \left(G(\omega) = F(\sigma+i\omega) \text{ の逆 Fourier 変換} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds e^{sx} F(s) \quad (2.103)
\end{aligned}$$

と、第 1 式が示された。第 2 式は留数定理より示すことができる。ただし、 σ は \odot ■

例 2.12 $F(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$ の逆 Laplace 変換を、Bromwich 積分によって求める。 $e^{sx} F(s) = \frac{ae^{sx}}{s^2 - a^2}$ の特異点は $s = \pm a$ である。どちらも単純極なので、留数は

$$\text{Res}_{s=\pm a} e^{sx} F(s) = \lim_{s \rightarrow \pm a} (s \mp a) \frac{ae^{sx}}{s^2 - a^2} = \pm \frac{e^{\pm ax}}{2} \quad (2.104)$$

となる。よって

$$f(t) = \frac{e^{ax}}{2} - \frac{e^{-ax}}{2} = \sinh ax. \quad (2.105)$$

数値的（離散的）には

数値的 Fourier 逆変換は効率的でかつ安定していたが、数値的逆 Laplace 変換は不安定である。

§ 2.5 積分変換

Fourier 変換や Laplace 変換は、積分変換という変換の一種である。積分変換には他にも様々なものがある。例を幾つか挙げる。

2.5.1 定義

定義 2.5 ある函数 $f(t)$ を定積分

$$g(\alpha) = \int_a^b f(t)K(\alpha, t)dt \quad (2.106)$$

によって $g(\alpha)$ に変換することを積分変換という． $K(\alpha, t)$ を核(kernel) という．

定義式から分かるように，変換後の変数は核にのみ依存している．これは，特に両辺に α についての演算（微分・積分）を行うときに有用である．

2.5.2 積分変換の例

Fourier 変換

$K(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\alpha t}$, $a = -\infty, b = \infty$ ならば Fourier 変換である：

$$g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt. \quad (2.107)$$

$K(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\alpha t}$ ならば Fourier 逆変換である：

$$g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha t}dt. \quad (2.108)$$

Laplace 変換

$K(\alpha, t) = e^{-\alpha t}$, $a = 0, b = \infty$ ならば Laplace 変換である：

$$g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\alpha t}dt. \quad (2.109)$$

$K(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi i}e^{\alpha t}$, $a = \gamma - i\infty, b = \gamma + i\infty$ ならば Laplace 逆変換である：

$$g(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} f(t)e^{\alpha t}dt. \quad (2.110)$$

Mellin 変換

$K(\alpha, t) = t^{\alpha-1}, a = 0, b = \infty$ のときの変換を Mellin 変換(-transform) という:

$$g(\alpha) = \int_0^\infty f(t)t^{\alpha-1}dt. \quad (2.111)$$

$K(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi i} \alpha^{-t}, a = \gamma - i\infty, b = \gamma + i\infty$ ならば Mellin 逆変換である:

$$g(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(t)x^{-t}dt. \quad (2.112)$$

その他 ♠¹⁴⁾

- $K(\alpha, t) = \frac{1}{\pi(t-\alpha)}, a = -\infty, b = \infty$, さらに積分を Cauchy の主値として Hilbert 変換.
- $K(\alpha, t) = \sqrt{\alpha t} J_\nu(\alpha t)$ (第 1 種 Bessel 函数), $a = 0, b = \infty$ として ν 次 Hankel 変換.
 - $\nu = \pm 1$ では $K(\alpha, t) = \sqrt{2/\pi} \sin \alpha t, \sqrt{2/\pi} \cos \alpha t$ と, Fourier 正弦・余弦変換となる.
 - J_ν を他の Bessel 函数で置き換えたものを総称して Bessel 変換という.
 - * 第 2 種 Bessel 函数 Y_ν (Neumann 函数 N_ν) として Y 変換.
 - * Struve 函数 H_ν として Y 変換の逆変換である H 変換 (Struve 変換).
 - * 変形 Bessel 函数 K_ν として K 変換.
 - * 変形 Bessel 函数 I_ν , さらに積分区間を $a = \gamma - i\infty, b = \gamma + i\infty$ として K 変換の逆変換 (Meijer の公式).
- $K(\alpha, t) = \frac{1}{(\alpha+t)^\rho}, a = 0, b = \infty$ として ρ 次 Stieltjes¹⁵⁾ 変換.
 - $\rho = 1$ ならば, Laplace 変換を 2 回繰り返したものになる.

14) 授業では言っていませんでしたが, 他にも色々な変換があります. 特殊函数大量発生なので意味が分からないと思いますが, Struve 函数とかは筆者もよく分かっていません.

15) ステルチェスと読むらしいです.

- $K(\alpha, t) = \exp[-(\alpha - t)^2]$, $a = -\infty, b = \infty$ として Gauss 変換 .
 - 多変数関数 $f(t_1, \dots, t_n)$ にも適用でき $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t_1, \dots, t_n) = \exp\left[-\sum_{r=1}^n (\alpha_r - t_r)^2\right]$ とする .

2.5.3 有用性

積分変換を適切に用いれば, 問題を簡単な形に変換することができる . Fourier 変換・Laplace 変換で例を挙げたように, 偏微分方程式を常微分方程式に, 常微分方程式を代数方程式へ変換できた . さらに, 次小節で述べるたたみこみ積分を用いれば, さらに問題が簡単になることがある .

2.5.4 たたみこみ

定義 ♠

定義 2.6 関数 f, g に対して, たたみこみ $f * g$ を次のように定義する :

$$(f * g)(t) = \int f(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (2.113)$$

積分区間は, 対象とする関数や積分変換によります .

性質 ♠

定理 2.12 たたみこみに関して, 以下の性質がある :

$$1. \text{ 交換則: } f * g = g * f \quad (2.114)$$

$$2. \text{ 結合則: } (f * g) * h = f * (g * h) \quad (2.115)$$

$$3. \text{ 分配則: } f * (g + h) = (f * g) + (f * h) \quad (2.116)$$

$$4. \text{ 定数倍: } a(f * g) = (af) * g = f * (ag) \quad (2.117)$$

証明 1. は変数変換すれば示せる . 残りは定義より明らか . ■

定理 2.13 (たたみこみ定理 ♠) Fourier 変換 \mathcal{F} , Laplace 変換 \mathcal{L} , ♠ Mellin 変換 \mathcal{M} をたたみこみ $f * g$ に作用させると, 各々の変換の積になる:

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g], \quad \mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g], \quad \mathcal{M}[f * g] = \mathcal{M}[f]\mathcal{M}[g]. \quad (2.118)$$

これをたたみこみ定理(convolution theorem) という.

物理的な意味

一口にたたみこみと言っても, 変換や函数で積分区間が変わり, 物理的な意味(応用方法)も変わる. ここでは, Fourier 変換と Laplace 変換との違いを述べる.

Fourier 変換を使うたたみこみは

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx \quad (2.119)$$

である. これは, 2つの現象が別々にあり, 一方の点 x での原因 $g(x)$ が, もう一方の点 t へ影響を及ぼすものといえる. 2つの点の間の距離は $t-x$ で, そしてそのときの影響は $f(t-x)$ であり(応答函数・伝搬函数という), これらを x の全空間で考慮した結果がたたみこみ $f * g$ である.

Laplace 変換を使うたたみこみは

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad (2.120)$$

である. これは1つの現象において, 過去の点 τ での原因 $g(\tau)$ が $t-\tau$ だけあとの点 t に影響 $f(t-\tau)$ を及ぼすもので, すべての過去の点で考慮した結果がたたみこみ $f * g$ である.

§ 2.6 直交函数列による展開

ここで一旦 Fourier 変換へ戻る. ここまでは具体的にさまざまな積分変換がどのようになるかを考えてきたが, ここでは Fourier 級数展開の直交性・完全性に注目し, また微分方程式の固有函数が直交函数系をなすことを述べる.

2.6.1 複素 Fourier 級数展開と直交関数系

複素 Fourier 級数展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}} \quad (2.121)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{i \frac{n\pi x}{L}} dx \quad (2.122)$$

において, $e^{i \frac{n\pi x}{L}}$ は直交性と完全性をもつ.

2.6.2 直交性と完全性について ♠

授業では説明がなかったので, ここでまとめておきます.

定義 2.7 2 つの函数 $f(x), g(x)$ に対して, 内積(inner product) を

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \int_a^b f^*(x) g(x) dx \quad (2.123)$$

によって定義する. 積分区間 a, b は適当に決定される.

定義 2.8 2 つの函数の内積が 0 になるとき, これらの函数は直交しているという.

函数の集合 $\{f_n\}$ が

$$\langle f_i, f_j \rangle = N_i \delta_{ij} \quad (N_i > 0) \quad (2.124)$$

を満たすとき, これを直交関数系という. さらに,

$$\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{N_i}} f_i \quad (2.125)$$

$$\Rightarrow \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (2.126)$$

とした集合 $\{\varphi_n\}$ は, 正規直交関数系という.

例 2.13 複素 Fourier 級数展開に現れる函数列 $\{e^{i\frac{n\pi x}{L}}\}$ は

$$\langle e^{i\frac{n\pi x}{L}}, e^{i\frac{m\pi x}{L}} \rangle = \int_{-L}^L e^{-i\frac{n\pi x}{L}} e^{i\frac{m\pi x}{L}} dx = 2L\delta_{n,m} \quad (2.127)$$

なので直交函数系である．また $\left\{\frac{1}{\sqrt{2L}}e^{i\frac{n\pi x}{L}}\right\}$ は正規直交函数系をなす．

定義 2.9 任意の函数 $f(x)$ が $\{f_n\}$ の線型結合で表すことができるとき， $\{f_n\}$ は完全系をなすという．

定理 2.14 函数系 $\{\varphi_n\}$ が完全形をなすとは，

$$\sum_n \varphi_n^*(x) \varphi_n(y) = \delta(x-y) \quad (2.128)$$

を満たすことと同値である．

証明 デルタ函数が展開できる，つまり

$$\delta(x-y) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(y) \varphi_n(x) \quad (2.129)$$

をみたく $d_n(y)$ が存在すれば，任意の函数 $f(x)$ について

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \delta(x-y) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[\int dy d_n(y) f(y) \right]}_{c_n} \varphi_n(x) \quad (2.130)$$

と展開できるので，完全系であるといえる．(2.129) 式が成立する条件を求め．両辺に $\varphi_m^*(x)$ をかけて x で積分すると，

$$(\text{左辺}) = \int \delta(x-y) \varphi_m^*(x) dx = \varphi_m^*(y) \quad (2.131)$$

$$(\text{右辺}) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(y) \underbrace{\int \varphi_m^*(y) \varphi_n(x) dx}_{\delta_{mn}} = d_m(y) \quad (2.132)$$

となる．ゆえに $d_n(x) = \varphi_n^*(x)$ なので，(2.129) 式へ代入すると (2.128) 式が示される． ■

例 2.14 複素 Fourier 級数展開における正規直交系 $\{\frac{1}{\sqrt{2L}}e^{i\frac{n\pi x}{L}}\}$ は

$$\frac{1}{2L} \sum_n e^{-i\frac{n\pi x}{L}} e^{i\frac{n\pi y}{L}} = \delta(x - y) \quad (2.133)$$

なので，完全系をなす¹⁶⁾．

2.6.3 調和振動子型の微分方程式

調和振動子 (harmonic oscillator) 型の微分方程式

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad (\lambda > 0) \quad (2.134)$$

の一般解は

$$y(x) = c_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x} \quad (2.135)$$

である．任意定数 c_1, c_2 を求めるには，初期値を与える方法と境界条件を与える方法がある．

初期値問題 (initial-value problem)

初期値，つまり $y(a), y'(a)$ を与えると c_1, c_2 は一意に定まる (特解)．Wronskian は

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{i\sqrt{\lambda}x} & e^{-i\sqrt{\lambda}x} \\ i\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}x} & -i\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}x} \end{vmatrix} = -2i\sqrt{\lambda} \neq 0 \quad (2.136)$$

なので，これは基本解である¹⁷⁾．

16) 証明方法忘れました．ごめんなさい．

17) 得られた解の Wronskian が 0 でなければ，それらの解は基本解である...らしい．

境界値問題 (boundary-value problem)

初期値でなく, 境界条件を与えても解は得られる. 例えば周期境界条件 (periodic boundary condition), $y(0) = y(p), y'(0) = y'(p)$ を与えると,

$$e^{i\sqrt{\lambda}p} = 1 \Rightarrow \sqrt{\lambda}p = 2n\pi \quad (2.137)$$

なので, $L = 2p$ として

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2\pi n}{p} = \frac{n\pi}{L} \quad (2.138)$$

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (2.139)$$

のときに解が存在する. 基本解は $e^{\pm i \frac{n\pi x}{L}}$ である.

境界条件には他にも,

$$\text{固定端 (fixed end):} \quad y(a) = y(b) = 0 \quad (2.140)$$

$$\text{自由端 (free end):} \quad y'(a) = y'(b) = 0 \quad (2.141)$$

などがある. これらの条件では解は異なる.

固有値と固有函数

定義 2.10 λ は境界条件から定まる特定の離散値をとる. この値を固有値(eigenvalue), λ に対応する解のことを固有函数(eigen function) という.

例 2.15 調和振動子型の微分方程式では, 固有函数は $\{e^{\pm i \frac{n\pi x}{L}}\}$ である. これは完全直交函数系をなしている.

2.6.4 線型代数との対応

微分方程式の境界値問題と, 線型代数の行列の固有値問題の間には, 表 2.1 のような対応がある.

表 2.1 微分方程式と線型代数の対応

微分方程式		線型代数
微分方程式	\Leftrightarrow	Hermite 行列
函数	\Leftrightarrow	ベクトル
内積 (積分)	\Leftrightarrow	ベクトルの内積
正規直交函数系	\Leftrightarrow	正規直交基底
固有値	\Leftrightarrow	固有値
固有函数	\Leftrightarrow	固有ベクトル

2.6.5 Sturm-Liouville 型の微分方程式

より一般の 2 階線型同次微分方程式

$$p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + q(x) \frac{dy}{dx} + [r(x) + \lambda w(x)] y = 0 \quad (2.142)$$

について述べる．ただし一般と言っても，ここでは $p'(x) = q(x)$ とした Sturm-Liouville 型という微分方程式について述べることにする．

定義 2.11

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [r(x) + \lambda w(x)] y = 0 \quad (2.143)$$

とう形の微分方程式を Sturm-Liouville 型の微分方程式という．

定理 2.15 Sturm-Liouville 型の微分方程式は，以下の性質を持つ．

- 固有値は実数である．
- 固有函数は完全直交系をなす．

例 2.16 $p = 1, r = 0, w = 1$ とすれば調和振動子型の微分方程式となる．固有函数系は確かに完全直交系をなしている．

特殊函数 ◆

授業では扱いませんでしたが，物理でよく登場する特殊函数とその微分方程式を挙げてみました．すべて Sturm-Liouville 型の微分方程式です．固有函数が比例の形になっているのは，規格化定数を除いているためです¹⁸⁾． p, r, w に $e^{f(x)}$ を入れるだけでずいぶん幅が広がりますね．

例 2.17 (Legendre) $p = 1 - x^2$ とすれば Legendre の微分方程式

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \quad (2.144)$$

となる．固有値は $\lambda = n(n - 1)$ ，固有函数は Legendre 多項式

$$P_n(x) \propto \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x^2)^n] \quad (2.145)$$

となる．

例 2.18 (Hermite) $p = e^{-x^2}, r = 0, w = e^{-x^2}$ とすれば Hermite の微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \quad (2.146)$$

となる．固有値は $\lambda = 2n$ で，固有函数は Hermite 多項式

$$H_n(x) \propto e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (2.147)$$

である．

例 2.19 (Laguerre) $p = xe^{-x}, r = 0, w = e^{-x}$ すれば Laguerre の微分方程式

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1 - x) \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \quad (2.148)$$

18) 規格化定数も含めりゃいいだろ，と思いましたが，中には内積を 1 に規格化しないのが慣例となっているものもあり，それを言うのも面倒なので比例にしておきました．

となる．固有値は $\lambda = n$ で，固有函数は Laguerre 多項式

$$L_n(x) \propto e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad (2.149)$$

である．

例 2.20 (Bessel) $p = x, r = x, w = 1/x$ とすれば Bessel の微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 + \lambda)y = 0 \quad (2.150)$$

となる．固有値は $\lambda = -n^2$ で，固有函数は Bessel 函数

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (2.151)$$

である．

補足 4 Legendre と Laguerre については，微分方程式をさらに複数回微分した Legendre 陪微分方程式・陪多項式，Laguerre 陪微分方程式・陪多項式という微分方程式もあります．

補足 5 ちなみに，Bessel だけは他と違って多項式ではありません．逆に言えば，残りは全部多項式ということです．

Legendre, Hermite, Laguerre の多項式では，どれも微分の形で解を示した．実はこれは一般化でき，次のようになる．

定理 2.16 (Rodrigues)

$$P_n(x) = c_n \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ w(x) [Q(x)]^n \right\} \quad (2.152)$$

は異なる n について直交する多項式である．これを Rodrigues の公式という．ただし c_n は規格化定数で， $Q(x)$ は多項式である．

この多項式は，微分方程式

$$\left[Q(x) \frac{d^2}{dx^2} + \frac{P_1}{c_1} \frac{d}{dx} + \lambda_n \right] u(x) = 0 \quad (2.153)$$

の解になっていて，固有値は次のようになる：

$$\lambda_n = -n \left(\frac{P_1'}{c_1} + \frac{n-1}{2} Q'' \right). \quad (2.154)$$

第 3 章

偏微分方程式

§ 3.1 偏微分方程式と境界条件

3.1.1 偏微分方程式とは

偏微分方程式 (partial differential equation; PDE) と常微分方程式 (ordinary differential equation; ODE) との違いは、後者は独立変数が 1 つなのに対し、前者が複数の独立変数を持っているということだけである。

定義 3.1 偏微分方程式とは、複数の独立変数 x, y, \dots に関する未知関数 $f(x, y, \dots)$ と、その導関数 f_x, f_y, \dots を含む方程式である。その性質によって以下のように呼ばれる：

n 階 導関数の階数の最大が n である。

線型 未知関数とその導関数の多項式と見たときに、1 次の多項式である。

同次 すべての項が、未知関数とその導関数を含んでいる。

これらの呼び方は、常微分方程式と同じである。

例 3.1 例えば、2 次元 Laplace 方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

は 2 階線型同次偏微分方程式である。この方程式の解には、 $u(x, y) = xy, x^2 - y^2, e^x \cos y, \log(x^2 + y^2)$ などがある。

Laplace 方程式の例からわかるように、偏微分方程式の解全体の集合は、非常に大きな集合を作っている。一意的な解は、境界条件や初期条件を用いることで得られる。

3.1.2 境界条件

定義 3.2 領域 \mathcal{R} の境界 \mathcal{C} での条件 (境界条件, boundary condition; b.c.) が課せられた問題を境界値問題() という. 境界条件は, 以下のように分類される:

Dirichlet の境界条件 $u(x, \dots)$ の値が \mathcal{C} 上で与えられるもの. 固定端.
Neumann の境界条件 $u(x, \dots)$ の境界での法線方向の勾配 (微分) $u_n = \partial u / \partial n = \mathbf{n} \cdot (\nabla u)$ が \mathcal{C} 上で与えられるもの. 自由端.
 混合条件 \mathcal{C} 上の一部で固定端, 一部で自由端となっているもの.

3.1.3 解の重ね合わせ

さらに, 以下の性質も用いて解を考える.

定理 3.1 線型同次 (偏) 微分方程式の解が u_1, u_2, \dots と与えられたとき, $u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots$ もその微分方程式の解である.

証明 線型同次ならば成り立つのは明らか:

$$c_0 u(x_1, x_2, \dots) + \sum_n c_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (3.2)$$

たとえ線型であっても, 非同次であれば成り立たない:

$$\underbrace{F(x, \dots, u, u_x, \dots)}_{\text{線型同次}} = \underbrace{C}_{\neq 0}, \quad (3.3)$$

$$F(u_1) = C, \quad F(u_2) = C \Rightarrow \underbrace{F(u_1 + u_2) = C + C}_{\text{線型同次性から}} \neq C. \quad (3.4)$$



3.1.4 変数分離法

定義に沿って分類すると偏微分方程式だが、実際には常微分方程式として解けるものもある。

例 3.2 例えば、 $u = u(x, y)$ に対して

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0 \quad (3.5)$$

は確かに偏微分方程式だが、 u の内部以外に y は現れないので、パラメータとして扱って、 $u = A(y)e^x + B(y)e^{-x}$ とすればよい。ただし $A(y), B(y)$ は任意関数で、常微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - f(x) = 0 \quad (3.6)$$

の任意定数に相当する。

これは式の形から明らかに常微分方程式へ帰着できる例である。他にも n 階の偏微分方程式を、解に変数分離 (separation of variables) の形を仮定して

$$u(x, y, \dots) = X(x)Y(y) \cdots \quad (3.7)$$

とすることで n 個の常微分方程式へ分離できることがある。その時は、分離することに 1 つ任意定数が発生する。

§ 3.2 拡散方程式（熱伝導方程式）

この節では、偏微分方程式の例として拡散方程式を考える。

定義 3.3 $u(x, y, z, t)$ に関する

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \nabla^2 u \quad (3.8)$$

という形の偏微分方程式方程式を、拡散方程式(diffusion equation) もしくは熱伝導方程式(heat equation) という。定数 $\kappa > 0$ は拡散係数(diffusion coefficient) という。

3.2.1 導出

空間中の点 r での時刻 t の温度を $u(r, t)$ とする．微小領域 \mathcal{V} (表面 S) を考えると, δt で流入する熱量は

$$\delta Q \sim \delta t \int_S (\nabla u) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \delta t \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\nabla u) dV \approx \delta t V \nabla^2 u \quad (3.9)$$

である．1 つ目の等式は Fourier の法則 (熱の移動する速さは温度勾配に比例) を, 2 つ目の等号では発散定理を, 3 つ目の等号では \mathcal{V} が微小であることを用いた．一方, 比熱を C とおけば,

$$\delta Q = CV \delta u \quad (3.10)$$

である．これから $\kappa = 1/C$ とした拡散方程式が得られる．

3.2.2 変数分離による解法

拡散方程式の解を求める．簡単のために 1 次元の場合

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

を, 初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ の下で変数分離で解く．解の形を $u(x, t) = X(x)T(t)$ と仮定して代入すると,

$$X \frac{dT}{dt} = \kappa T \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \kappa \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (3.13)$$

となる．左辺は t のみ, 右辺は x のみの函数であるから, これらが等しいには定数となるほかない．その定数を $-a^2 \kappa < 0$ とおくと,

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -a^2 \kappa \quad \therefore T(t) = e^{-a^2 \kappa t} \quad (3.14)$$

$$\kappa \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -a^2 \kappa \quad \therefore X(x) = \sin ax, \cos ax \quad (3.15)$$

と基本解が得られる．よって，解の一つは

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{-a^2 \kappa t} (A \cos ax + B \sin ax) \\ &= C(x_0) e^{-a^2 \kappa t} \cos a(x - x_0) \end{aligned} \quad (3.16)$$

となる．

異なった a, x_0, C の重ね合わせも解なので，

$$u(x, t) = \int_0^\infty da \int_{-\infty}^\infty dx_0 C(x_0) e^{-a^2 \kappa t} \cos a(x - x_0) \quad (3.17)$$

である．初期条件を考慮すると， $f(x)$ に対して Fourier の積分定理を用いて

$$u(x, 0) = \int_0^a da \int_{-\infty}^\infty C(x_0) \cos a(x - x_0) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega \int_{-\infty}^\infty dt f(t) \cos \omega(x - t) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^\infty dt f(t) \cos \omega(x - t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

となるので， $\omega \leftrightarrow a, t \leftrightarrow x_0$ と比較して $C(x_0) = f(x_0)/\pi$ ．これを元の式へ代入して，まず a に関する積分を実行すれば

$$\begin{aligned} \int_0^a da e^{-a^2 \kappa t} \cos a(x - x_0) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty da e^{-a^2 \kappa t - ia(x - x_0)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty da e^{-\kappa t \left(a + i \frac{x - x_0}{2\kappa t} \right)^2 - \frac{(x - x_0)^2}{4\kappa t}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi \kappa t}} e^{-\frac{(x - x_0)^2}{4\kappa t}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

なので，

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \kappa t}} \int_{-\infty}^\infty dx_0 f(x_0) e^{-\frac{(x - x_0)^2}{4\kappa t}} \quad (3.21)$$

となる．これは変数分離の形ではない．よって，変数分離でない解も得られる．また，変数分離の方法は 1 通りではない．

§ 3.3 Green 函数

拡散方程式で，初期条件を $f(x) = \delta(x)$ とすると

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \quad (3.22)$$

である．これを $G(x, t)$ と置けば，(3.21) 式は

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 f(x_0) G(x - x_0, t) \quad (3.23)$$

と，たたみこみの形になっていることがわかる．このような $G(x, t)$ のことを（拡散方程式の）Green 函数という．

より一般に，Green 函数とは以下のように定義される．

定義 3.4 （非同次）線型偏微分方程式

$$\mathcal{L}u(x_1, \dots, x_n) = r(x_1, \dots, x_n) \quad (3.24)$$

において¹⁾，右辺を Dirac のデルタ函数 $\delta(x)$ とおいた

$$\mathcal{L}u(x_1, \dots, x_n) = \delta(x_1) \cdots \delta(x_n) \quad (3.25)$$

の解を主要解，境界条件をみたすものを Green 函数といい， G と書く．方程式の解は

$$u(x) = \int dx_0 r(x_0) G(x - x_0) \quad (3.26)$$

である（両辺に \mathcal{L} を作用させれば明らか）．

例 3.3（拡散方程式） 拡散方程式では $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ なので，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) G = \delta(x) \delta(t) \quad (3.27)$$

1) \mathcal{L} は線型な微分演算子である．

となる G を求めればよい． G を Fourier 変換

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \int dk \hat{G}(\omega, k) e^{i(\omega t + kx)} \quad (3.28)$$

の形にすると，(3.27) 式は，デルタ函数の Fourier 変換は定数なので，

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \int dk (i\omega + \kappa k^2) \hat{G}(\omega, k) e^{i(\omega t + kx)} \quad (3.29)$$

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{4\pi^2} \int d\omega \int dk e^{i(\omega t + kx)} \quad (3.30)$$

となる．よって

$$\hat{G}(\omega, k) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i\omega + \kappa k^2}, \quad (3.31)$$

$$\therefore G(\omega, k) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int d\omega \int dk \frac{e^{i(\omega t + kx)}}{\omega - i\kappa k^2}. \quad (3.32)$$

まず ω について $\frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\kappa k^2}$ を積分する． $t > 0$ ならば ω は上半分の半円を経路にとって，Jordan の補題から半円部は 0．よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\kappa k^2} d\omega = 2\pi i \operatorname{Res}_{\omega = i\kappa k^2} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\kappa k^2} = 2\pi i e^{-\kappa k^2 t}. \quad (3.33)$$

$t < 0$ ならば今度は下半分の半円．すると $\frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\kappa k^2}$ は解析的であるから積分は 0．よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\kappa k^2} d\omega = 2\pi i e^{-\kappa k^2 t} \Theta(t) \quad (3.34)$$

$$\therefore G(x, t) = \frac{\Theta(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\kappa t k^2 + i x k} = \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\pi \kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}. \quad (3.35)$$

確かに (3.22) 式に一致している． $\Theta(t)$ は，過去 $t < 0$ へは影響は及ぼさないこと（因果律）を示している．

例 3.4 (Poisson 方程式) 電磁気学で習った，クーロンポテンシャルに関する Poisson 方程式

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \quad (3.36)$$

の Green 関数は

$$G(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|} \quad (3.37)$$

である．よって解は

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{\varepsilon} \int d\boldsymbol{x}' \rho(\boldsymbol{x}) G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d\boldsymbol{x}' \end{aligned} \quad (3.38)$$

となる．

§ 3.4 Helmholtz 方程式

変数分離が 1 通りではないことの例として，Helmholtz 方程式を考える．

定義 3.5 $u(x, y, z, t)$ に関する

$$(\nabla^2 + k)u = 0 \quad (3.39)$$

という偏微分方程式を，Helmholtz 方程式という．

3.4.1 デカルト座標

$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ とすれば，

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -l^2 \quad (3.40)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 + l^2 - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -m^2 \quad (3.41)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 + l^2 + m^2 = -n^2 \quad (3.42)$$

と微分方程式が分離できるので，基本解は

$$u_{l,m,n}(x, y, z) = e^{ilx} e^{imy} e^{inz} = e^{i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}} \quad (3.43)$$

と, 平面波になる²⁾. ただし $\mathbf{k} = (l, m, n)$, $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$ は波数である. これらの重ねあわせももちろん解である:

$$u(x, y, z) = \sum_{\mathbf{k}} [a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + b_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}]. \quad (3.44)$$

3.4.2 極座標

極座標 (r, θ, φ) では, Laplacian は

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (3.45)$$

となる. $u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ と変数分離すればよい.

♣ 一般解は

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{k, l, m} [a_{lm} j_l(kr) + b_{lm} n_l(kr)] Y_l^m(\theta, \phi) \quad (3.46)$$

となる. ただし j_l, n_l は球 Bessel 函数, Y_l^m は球面調和函数という特殊函数である.

3.4.3 円筒座標 ♣

円筒座標 (ρ, θ, z) では Laplacian は

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.47)$$

となる. $u = R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)$ と変数分離すれば, 解は

$$u(\rho, \theta, z) = \sum_{m, n} [a_{mn} J_m(\sqrt{k^2 + n^2} \rho) + b_{mn} Y_m(\sqrt{k^2 + n^2} \rho)] e^{im\theta} e^{nz} \quad (3.48)$$

となる. ただし J_m, Y_m は Bessel 函数である.

2) \mathbf{k} を $-\mathbf{k}$ としてもやはり解である. それは逆向きへ進行する波となる.

§ 3.5 定係数 2 階線型偏微分方程式

3.5.1 分類

定係数 2 階線型偏微分方程式の一般形は

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c = f(x_1, \dots, x_N) \quad (3.49)$$

である．ただし $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ は x_i, x_j が入れ換えられる（とする）ので， $a_{ij} = a_{ji}$ とすることができる．つまり $A = \{a_{ij}\}$ は N 次対称行列で， N 個の固有値を持つ．固有値の符号によって，偏微分方程式は以下のように分類される．

楕円型 固有値が全て同符号．

双曲型 固有値の中に異符号が 1 つ以上ある．残りは同符号．

放物型 固有値の 1 つ以上が 0．

例 3.5 (Laplace 方程式) Laplace 方程式 $\nabla^2 u = 0$ は $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ より $A = \text{diag}(1, 1, 1)^3$ なので，楕円型である．

例 3.6 (波動方程式) 波動方程式 $\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ は $A = \text{diag}(1, 1, 1, -1/c^2)$ なので，双曲型である．

例 3.7 (拡散方程式) 拡散方程式 $\kappa \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ は変数が x, y, z, t にもかかわらず t に関する微分は 1 階のみなので， $A = \text{diag}(\kappa, \kappa, \kappa, 0)$ と，放物型である．

以降は，2 階偏微分のみを含む一般の 2 次元線形偏微分方程式

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (3.50)$$

の解について述べる． $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ である．

3) $\text{diag}(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ である．3 次以上も同様に対角行列となる．

3.5.2 2 次元双曲型偏微分方程式の解

双曲型は固有値に異符号があるので，固有方程式から

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0 \quad (3.51)$$

$$a_{12}^2 > a_{11}a_{22} \quad (3.52)$$

となる．

$x_1 \rightarrow x, x_2 \rightarrow y$ として， $p = p(x, y), q = q(x, y)$ と変数変換する．すると変換後の $\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}$ の係数は

$$a_{11} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + a_{22} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \quad (3.53)$$

となる．これが 0 となるような p を選ぶとする．すると判別式は

$$\frac{D}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0 \quad (3.54)$$

と，(3.52) 式から常に正である．そこで因数分解によって

$$\left(a \frac{\partial p}{\partial x} + b \frac{\partial p}{\partial y} \right) \left(c \frac{\partial p}{\partial x} + d \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.55)$$

となる．解は 2 つあるので，一方を p ，もう一方を q とする．すると対称性から $\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}$ の係数も 0 となる．よって (3.50) 式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} = 0 \quad (3.56)$$

となっていればよい．この式から $\frac{\partial u}{\partial p} = h(p)$ とでき，

$$u = \underbrace{\int h(p) dp}_{\text{改めて } h(p) \text{ とする}} + g(q) \quad (3.57)$$

と解が得られる．

例 3.8 (1次元波動方程式) 1次元波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.58)$$

であるから, 先程の議論によれば

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^2 = 0 \quad (3.59)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.60)$$

を満たすのが p, q で,

$$p = x - ct, \quad q = x + ct \quad (3.61)$$

$$\therefore u(x, t) = h(x - ct) + g(x + ct) \quad (3.62)$$

と, 左右方向の進行波の重ね合わせが解である. この解を d'Alembert の解という.

3.5.3 2次元楕円型偏微分方程式の解

楕円型に関しては例のみを挙げる.

例 3.9 (2次元 Laplace 方程式) 2次元 Laplace 方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.63)$$

について, 双曲型と同様に p, q を考えれば, 満たすべき方程式は

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (3.64)$$

双曲型と異なり, この式は判別式が負で, 実数では因数分解できない. そこで複素数に拡張して

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial p}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial x} - i \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.65)$$

とする．1.4.2 節を思い出せば，

$$\frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (3.66)$$

$$p = x + iy = z, \quad q = x - iy = \bar{z} \quad (3.67)$$

$$\therefore u = h(z) + g(\bar{z}) \quad (3.68)$$

とできる．

u が実数であると仮定する．すると $g(\bar{z}) = \overline{h(z)}$ なので， $u = \operatorname{Re}[2h(z)]$ となる． $h(z)$ は \bar{z} をふくんでおらず，解析的である． $g(\bar{z}) = -\overline{h(z)}$ と置けば $u = i \operatorname{Im}[2h(z)]$ である．よって，解析関数の実部と虚部は Laplace 方程式を満たす⁴⁾．

4) 実はこんな議論をすることなく示せる．p18 参照

レポート問題・解答例

No.1

問題

- (1) 複素函数 $f(z) = \frac{z-1}{z(z-2)}$ を $z=1$ のまわりで Taylor 展開せよ (ヒント: 部分分数展開).
- (2) 上で求めたべき級数の収束半径を求め, 複素平面上で収束領域を示せ.

解答例

- (1) $f(z)$ を部分分数展開すれば,

$$f(z) = \frac{z-1}{z(2-z)} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{1}{2-z}}_{f_1(z)} - \underbrace{\frac{1}{z}}_{f_2(z)} \right) \quad (\text{A.1})$$

となる. 項別での n 階微分は

$$f_1^{(n)}(z) = n!(2-z)^{-1-n}, \quad f_2^{(n)}(z) = n!(-1)^n z^{-1-n} \quad (\text{A.2})$$

である ($n=0$ では明らかで, 以下帰納的に示すことができる) から, Taylor 展開は

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_1^{(n)}(1)}{n!} (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n, \quad (\text{A.3})$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_2^{(n)}(1)}{n!} (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad (\text{A.4})$$

となる．よって元の函数の Taylor 展開は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2} (z-1)^n = \sum_{n:\text{odd}(> 0)} (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^{2n+1}. \quad (\text{A.5})$$

- (2) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は $|z| < 1$ で収束する．項数は $f(z)$ の方が少ないので， $|z-1| < 1$ では収束する．対して $|z-1| \geq 1$ では， $\lim_{n \rightarrow \infty} |z-1|^{2n+1} \geq 1$ なので収束しない．ゆえに収束半径は ($z=1$ を中心として) 1 である．図 A.1 のようになる．

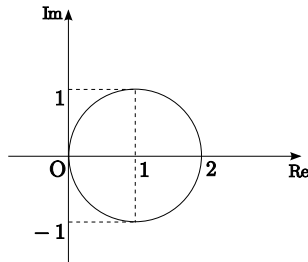


図 A.1 円の内部．境界は含まない．

No.2

問題

$\log z = \text{Log } |z| + i \arg z$ および $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$ に留意して，取りうる値をすべて求めよ．

(a) $\log(-1)$ (b) $\log(1+i)$ (c) $(-4)^{1/4}$ (d) i^i (e) $(-1)^{1/\pi}$

解答例

n を整数とする．

(a) $|-1| = 1, \arg(-1) = \pi + 2n\pi = (2n+1)\pi$ より ,

$$\log(-1) = \text{Log}|-1| + i\arg(-1) = \underline{i(2n+1)\pi}. \quad (\text{A.6})$$

(b) $|1+i| = \sqrt{(1+i)(1-i)} = \sqrt{2}, \arg(1+i) = \pi/4 + 2n\pi$ より ,

$$\begin{aligned} \log(1+i) &= \text{Log}|1+i| + i\arg(1+i) = \text{Log}\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) \\ &= \underline{\frac{1}{2}\text{Log}2 + i\frac{8n+1}{4}\pi}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

(c) $(-4)^{1/4} = \exp[\log(-4)/4], \log(-4) = \text{Log}|-4| + i\arg(-4) = \text{Log}4 + i(\pi + 2n\pi)$ より ,

$$(-4)^{1/4} = \exp\left(\frac{1}{2}\text{Log}2 + i\frac{2n+1}{4}\pi\right) = \underbrace{\exp\left(\frac{1}{2}\text{Log}2\right)}_{\sqrt{2}} \exp\left(i\frac{2n+1}{4}\pi\right) \quad (\text{A.8})$$

$$= \begin{cases} 1+i & : n \equiv 0 \pmod{4} \\ -1+i & : n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1-i & : n \equiv 2 \pmod{4} \\ 1-i & : n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

(d) $i^i = \exp(i\log i), \log i = \text{Log}|i| + i\arg i = i(\pi/2 + 2n\pi)$ より ,

$$i^i = \underline{\exp\left(-\frac{4n+1}{2}\pi\right)}. \quad (\text{A.10})$$

(e) $(-1)^{1/\pi} = \exp[\{\log(-1)\}/\pi], \log(-1) = i(2n+1)\pi$ より ,

$$(-1)^{1/\pi} = \underline{\exp[i(2n+1)]}. \quad (\text{A.11})$$

No.3

問題

函数 $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ について以下の問いに答えよ .

(1) $u(x, y)$ が二次元 Laplace 方程式 $\nabla^2 u = 0$ を満たすことを示せ .

- (2) $u(x, y)$ が全複素平面 C 上で正則な複素函数 f の実部である時, Cauchy-Riemann の関係式を用いて f の虚部 $v(x, y)$ を求めよ. さらに, $f = u(x, y) + iv(x, y)$ を $z = x + iy$ と $\bar{z} = x - iy$ を用いて表せ.

解答例

- (1) 実際に計算して,

$$\nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (x^3 - 3xy^2) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 - 3y^2) - \frac{\partial}{\partial y} (-6xy) = 0. \quad (\text{A.12})$$

- (2) Cauchy-Riemann の関係式より

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + g(x) + C_1 \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy \Rightarrow v(x, y) = 3x^2 y + h(y) + C_2 \quad (\text{A.14})$$

$$\therefore \underline{v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + C.} \quad (\text{A.15})$$

f について,

$$z^3 = (x + iy)^3 = \underbrace{x^3 - 3xy^2}_{u(x, y)} + \underbrace{i3x^2 y - iy^3}_{iv(x, y)} \quad (\text{A.16})$$

より, $\underline{f(z) = z^3 + C}$. ただし C_1, C_2, C は積分定数.

No.4

問題

$\int z^2 dz$ および $\int |z|^2 dz$ の値を次の線分からなる積分路について求めよ.

- (a) $C_1 : 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 1 + i$. (b) $C_2 : 0 \rightarrow i, i \rightarrow 1 + i$. (c) $C_3 : 0 \rightarrow 1 + i$.

解答例

右図のように経路を分割する.

(a) 経路を $z = x, 0 \leq x \leq 1$ と $z = 1 + iy, 0 \leq y \leq 1$ で考えれば,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} z^2 dz &= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 (1 + iy)^2 i dy = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{(1 + iy)^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{(1 + i)^3}{3}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} |z|^2 dz &= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 (1 + iy)(1 - iy) i dy \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 \cdot i = \frac{1 + 4i}{3}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

(b) 経路を $z = iy, 0 \leq y \leq 1$ と $z = x + i, 0 \leq x \leq 1$ で考えれば,

$$\begin{aligned} \int_{C_2} z^2 dz &= \int_0^1 (-y^2) i dy + \int_0^1 (x + i)^2 dx = \left[-\frac{iy^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{(x + i)^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{(1 + i)^3}{3}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} |z|^2 dz &= \int_0^1 y^2 i dy + \int_0^1 (x + i)(x - i) dx = \left[\frac{iy^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 \\ &= \frac{4 + i}{3}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

(c) 経路が $z = x + iy, 0 \leq x = y \leq 1$ なのでパラメータ $t = x = y$ を用いる。
 $dz/dt = 1 + i$ なので,

$$\begin{aligned} \int_{C_3} z^2 dz &= \int_0^1 \{(1 + i)t\}^2 (1 + i) dt = \left[\frac{(1 + i)^3}{3} t^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{(1 + i)^3}{3}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \int_{C_3} |z|^2 dz &= \int_0^1 (1 + i)t \cdot (1 - i)t \cdot (1 + i) dt = \left[\frac{2(1 + i)}{3} t^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{2(1 + i)}{3}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

No.5

問題

$f(z) = \frac{2}{z(z-1)(z-2)}$ について,

- (1) すべての特異点およびその留数を求めよ．
 (2) $z=0$ を中心として, (a) $0 < |z| < 1$, (b) $1 < |z| < 2$, (c) $|z| > 2$ のそれぞれ
 の領域で Laurent 展開せよ．

解答例

- (1) 部分分数展開すると

$$\frac{2}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{z+1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} - \frac{2}{z-1} + \frac{1}{z-2} \quad (\text{A.23})$$

なので, 特異点は $z=0, 1, 2$, 留数は

$$\frac{\text{Res } f(z)}{z=0} = 1, \quad \frac{\text{Res } f(z)}{z=1} = -2, \quad \frac{\text{Res } f(z)}{z=2} = 1 \quad (\text{A.24})$$

- (2) $z=0$ を中心とした Laurent 展開なので, 各領域で収束するような z のべき乗に展開する．部分分数展開した結果のうち, $\frac{1}{z}$ はそのまま, 残りの項を無限級数に変形する．

- (a) $0 < |z| < 1$:

$$-\frac{2}{z-1} = \frac{2}{1-z} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-(z/2)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{A.26})$$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n. \quad (\text{A.27})$$

数項を書き出すと,

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4}z + \frac{15}{8}z^2 + \cdots \quad (\text{A.28})$$

である .

(b) $1 < |z| < 2$: (a) の展開で $\frac{1}{z-2}$ の項は収束する .

$$-\frac{2}{z-1} = -\frac{2}{z} \frac{1}{1-(1/z)} = -\frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{z^{n+1}} \quad (\text{A.29})$$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z^{n+1}} + \frac{z^n}{2^{n+1}} \right). \quad (\text{A.30})$$

数項を書き出すと ,

$$f(z) = \cdots - \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \cdots \quad (\text{A.31})$$

である .

(c) (b) の展開で $-\frac{2}{z-1}$ の項は収束する .

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-(2/z)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \quad (\text{A.32})$$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n - 2}{z^{n+1}}}_{(*)} \quad (\text{A.33})$$

(*) は $n=0$ で第 1 項と打ち消し合い , $n=1$ では 0 なので ,

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n - 2}{z^{n+1}} = \frac{2}{z^3} + \frac{6}{z^4} + \frac{14}{z^5} + \cdots \quad (\text{A.34})$$

となる .

No.6

問題

以下の積分を留数定理を用いて求めよ .

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos \theta} \quad (2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x+x^2}$$

$$(3) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x-i} dx \quad (t \text{ は正または負の実数})$$

解答例

- (1) $z = e^{i\theta}$ と変数変換する．すると $\cos \theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $\frac{dz}{d\theta} = iz$, 積分範囲は単位円 ($|z|=1$) なので,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos \theta} &= \int_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{2}-\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{1}{iz} = 2i \int_{|z|=1} \frac{dz}{1-2\sqrt{2}z+z^2} \\ &= i \int_{|z|=1} \left[\frac{1}{z-(\sqrt{2}+1)} - \frac{1}{z-(\sqrt{2}-1)} \right] dz \quad (\text{A.35}) \end{aligned}$$

となる．被積分函数の特異点は $z = \sqrt{2} \pm 1$ だが，積分領域内 ($|z| \leq 1$) にあるのは $z = \sqrt{2}-1$ のみである．ゆえに留数定理より，

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos \theta} = 2\pi i \cdot i \cdot (-1) = 2\pi. \quad (\text{A.36})$$

- (2) 部分分数展開して，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} - \frac{1}{x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}} \right) dx \quad (\text{A.37})$$

ここで，右図のような経路での複素積分を考える．ただし半径 R は特異点を内部に含む大きさ以上だとする．半円部では $z = Re^{i\theta}$ として

$$\frac{dz}{1+z+z^2} = \frac{d\theta}{1+Re^{i\theta}+R^2e^{2i\theta}} \frac{1}{iRe^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}d\theta}{iRe^{2i\theta}(1+Re^{i\theta}+R^2e^{2i\theta})} \quad (\text{A.38})$$

であり， $\frac{1}{iRe^{2i\theta}(1+Re^{i\theta}+R^2e^{2i\theta})}$ は $|z|=R \rightarrow \infty$ で絶対値が一様に 0 に収束する．よって Jordan の補題から半円部での積分は 0 である．残る経路は実軸上のみで，その $R \rightarrow \infty$ の極限は求めるべき積分値に等しい．よって経路全体の積分の結果が求める値となる．経路全体の積分を求めるために留数定理を用いる．経路内部における被積分函数の特異点が $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のみで，留数は $\frac{1}{\sqrt{3}i}$ であるから，複素積分の結果は R によらず $2\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{3}i}$.

よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}. \quad (\text{A.39})$$

- (3) まず (2) と同様の積分経路を考える. $\frac{1}{z-i}$ は $|z| \rightarrow 0$ において一様に 0 に収束するので, $t > 0$ ならば Jordan の補題から半円部での積分は 0. よって求める値は経路全体のものに等しい. 留数定理から,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x-i} dx &= \text{Res}_{z=i} \frac{e^{itz}}{z-i} = e^{-t} \text{Res}_{z=i} \frac{e^{it(z-i)}}{z-i} \\ &= e^{-t} \text{Res}_{z=i} \left[\frac{1}{z-i} \left(1 + it(z-i) + \dots + \frac{\{it(z-i)\}^n}{n!} + \dots \right) \right] = e^{-t} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

$t < 0$ では先ほどの経路では Jordan の補題が適用できない. そこで, 図④のような下半分の経路を考える. すると半円部では Jordan の補題 (の係数が負の場合) を用いることができ, 求める積分は経路全体の積分に等しい. この経路では内部に特異点が存在しないので, 留数定理 (Cauchy の積分定理) から積分値は 0. 以上より

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x-i} dx = \begin{cases} e^{-t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

$$(\text{A.42})$$

No.7

問題

函数 $f(z) = \frac{z^3}{z^2-1}$ について,

- (1) 拡張複素平面 (無限遠点を含む) 上の全ての特異点の位置・位数・留数を求めよ.
- (2) 積分 $I = \oint_{|z|=2} f(z) dz$ (積分路は反時計回り) を次の 2 通りの方法で計算せよ.
 - (a) 直接留数定理を用いて計算.
 - (b) $w = 1/z$ と変数変換してから留数定理を用いて計算.

解答例

(1) 部分分数展開すると,

$$f(z) = \frac{z^3}{z^2 - 1} = z + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right). \quad (\text{A.43})$$

よって特異点は $z = \pm 1, \infty$. $z = \pm 1$ は共に位数 1, 留数 $\frac{1}{2}$ である. $z = \infty$ では発散するので 無限遠点も特異点, 位数は 1 である. 次に $z = 1/w$ と変数変換して,

$$\begin{aligned} -\frac{f(1/w)}{w^2} &= -\frac{1}{w^2} \left[\frac{1}{w} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{w}-1} + \frac{1}{\frac{1}{w}+1} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{w} - \frac{1}{w^3} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-w} - \frac{1}{1+w} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

$\text{Res}_{z=\infty} f(z) = -\text{Res}_{w=0} f(1/w)/w^2$ だから, $z = \infty$ は留数 -1 である.

(2) (a) $|z| = 2$ の囲む領域内の特異点は $z = \pm 1$ (留数は共に $1/2$) のみである. 積分路が反時計回りなので, 留数定理から

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z=\pm 1} \text{Res } f(z) = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \underline{2\pi i}. \quad (\text{A.45})$$

(b) $z = 1/w$ と変数変換すれば積分は

$$-\oint_{|w|=1/2} \frac{f(1/w)}{w^2} dw \quad (\text{A.46})$$

となるが, 積分路は時計回りである. なぜならば, もともと積分路は反時計回りなので $z = 2e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とおけ, $w = e^{-i\theta}/2$ となるからである. そのため留数定理を用いるときに符号が反転することに注意する. 領域内の留数は $w = 0$ ($z = \infty$) で留数は -1 であるから, 留数定理より

$$\begin{aligned} \oint_{|w|=1/2} \left[-\frac{f(1/w)}{w^2} \right] dw &= -2\pi i \text{Res}_{w=0} \left[-\frac{f(1/w)}{w^2} \right] \\ &= -2\pi i \cdot (-1) = \underline{2\pi i}. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

No.8

問題

- (1) $f(x) = x, g(x) = x^3$ を区間 $(-\pi, \pi)$ で Fourier 級数展開せよ .
 (2) 上の結果を用いて , $\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2^3} + \frac{\sin(3x)}{3^3} - \frac{\sin(4x)}{4^3} + \dots$ を求めよ .

解答例

- (1) $f(x)$ も $g(x)$ も奇函数なので , Fourier 正弦級数を考えれば良い . まず $f(x)$ について ,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \\ &= -2 \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{\pi} \underbrace{\left[\frac{\sin nx}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi}}_0 = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{n} \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{n} \sin nx. \quad (\text{A.49})$$

続いて $g(x)$ について , 途中で上の式の積分結果を用いて ,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-x^3 \frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3x^2 \cos nx}{n} dx \\ &= -\frac{2\pi^2}{n} \cos n\pi + \frac{1}{\pi n} \underbrace{\left[3x^2 \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi}}_0 - \frac{6}{n^2} \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx}_{f(x) \text{ の係数}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2\pi^2}{n} + \frac{(-1)^n \cdot 12}{n^3} \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

$$\therefore g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi^2}{n} - \frac{12}{n^3} \right) \cdot (-1)^{n+1} \sin nx. \quad (\text{A.51})$$

(2) 求めるのは $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin nx$ である。(1) より,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin nx &= -\frac{1}{12} \left[g(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi^2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx \right] \\ &= -\frac{1}{12} [g(x) - \pi^2 f(x)] = \frac{\pi^2 x - x^3}{12}. \quad (\text{A.52}) \end{aligned}$$

No.9

問題

周期 2π の鋸歯状波 $f(x) = x (-\pi < x < \pi)$ の Fourier 級数展開

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) = 2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin 4x + \cdots \quad (\text{A.53})$$

(レポート No.8 の結果) の第 n 項までの和を $f_n(x)$ とする.

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$ について $f_n(x)$ を描画し, $f(x)$ と比較せよ.

(2) $f_n(x)$ と $f(x)$ の平均二乗誤差

$$\delta^2 = \langle (f - f_n)^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (f - f_n)^2 dx \quad (\text{A.54})$$

を求め, さらに $n \rightarrow \infty$ における値を求めよ.

解答例

(1) 図 A.2 に $n = 1, \dots, 6$ と $f(x) = x$ を重ねて, 図 A.3 に $n = 100$ をプロットした. 描画には Mathematica を用いた.

(2) 途中まで展開する:

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \langle (f - f_n)^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f - f_n)^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[x - \sum_{k=1}^n \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k} \sin kx \right]^2 dx \end{aligned}$$

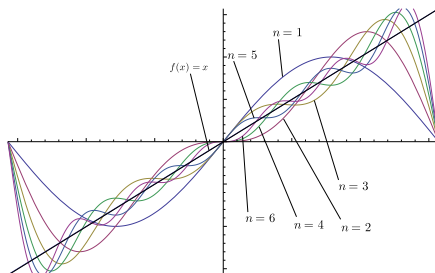


図 A.2 $n = 1, \dots, 6$ と $f(x) = x$ のグラフ

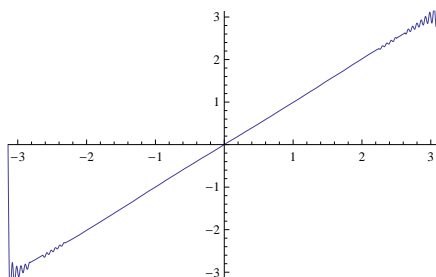


図 A.3 $n = 100$ のグラフ

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ x^2 - 2x \sum_{k=1}^n \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k} \sin kx + \left[\sum_{k=1}^n \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k} \sin kx \right] \right\} dx. \quad (\text{A.55})$$

項別に積分する .

$$(\text{第 1 項}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3} \quad (\text{A.56})$$

$$\begin{aligned} (\text{第 2 項}): \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx &= \left[x \frac{\cos kx}{-k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos kx}{k} dx \\ &= -\frac{2\pi \cos kx}{k} = \frac{2\pi \cdot (-1)^{k+1}}{k} \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi} \left(-2 \sum_{k=1}^n \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k} \right) \cdot \frac{2\pi (-1)^{k+1}}{k} = - \sum_{k=1}^n \frac{4}{k^2} \quad (\text{A.58})$$

$$\begin{aligned}
 (\text{第3項}): \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin k'x dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(k-k')x - \cos(k+k')x}{2} dx \\
 &= \pi \delta_{k,k'}
 \end{aligned} \tag{A.59}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sum_{k'=1}^n \frac{2(-1)^{k'+1}}{k'} \cdot \pi \delta_{k,k'} \\
 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k} \right]^2 = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k^2}
 \end{aligned} \tag{A.60}$$

よって

$$\delta^2 = \langle (f - f_n)^2 \rangle = \frac{\pi^2}{3} - \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{2}{k^2}} \tag{A.61}$$

また, $n \rightarrow \infty$ では, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ より $\delta^2 \rightarrow 0$.

No.10

問題

(1) Fourier 余弦変換を用いて

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\omega}{1+\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-x} \tag{A.62}$$

を示せ. ただし $x > 0$ とする.

(2) 次の Fourier 変換を求めよ.

$$\text{(a) } \delta(x-a) \quad \text{(b) } \frac{\sin ax}{x}$$

解答例

(1) 一旦 x を全区間に拡張して考える.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ e^x & x \leq 0 \end{cases} \tag{A.63}$$

とすると、これは偶関数である。よって Fourier 余弦変換すると、

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_c(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \omega x dx \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\cancel{e^{-x} \frac{\sin \omega x}{\omega}} \right]_0^{\infty} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin \omega x}{\omega} dx \\
 &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[e^{-x} \frac{\cos \omega x}{\omega^2} \right]_0^{\infty} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\cos \omega x}{\omega^2} dx \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega^2} - \frac{\hat{f}_c}{\omega^2}.
 \end{aligned} \tag{A.64}$$

ゆえに $\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}$ 。これも偶関数なので、逆変換も余弦変換で、

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_c(\omega) \cos \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1+\omega^2} d\omega \tag{A.65}$$

となる。ここで $x \geq 0$ に範囲を絞れば¹⁾、 $f(x) = e^{-x}$ より

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1+\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-x}. \tag{A.66}$$

(2) (a) 単純に計算して

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) e^{-i\omega x} dx = \frac{e^{-ia\omega}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{A.67}$$

(b) $a=0$ では $f=0$ より $\hat{f}=0$ 。まず $a>0$ として考える。偶関数なので Fourier 余弦変換を求める。

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_c(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos \omega x dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin(a+\omega)x + \sin(a-\omega)x}{x} dx
 \end{aligned} \tag{A.68}$$

であり、ここで

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\alpha) \tag{A.69}$$

1) なんか卑怯だけど問題ないよ！問題文の $x > 0$ がヒント...かな。

なので (sgn は符号函数²⁾),

$$\hat{f}_c(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & |\omega| < a : a + \omega > 0, a - \omega > 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} & |\omega| = a : (a + \omega)(a - \omega) = 0 \\ 0 & |\omega| > a : (a + \omega)(a - \omega) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.70})$$

となる ($a + \omega < 0$ かつ $a - \omega < 0$ はありえない). 次に $a < 0$ を考える. $\frac{\sin ax}{x} = -\frac{\sin(-a)x}{x}$, $-a > 0$ より, $a > 0$ の結果を用いれば

$$\hat{f}_c(\omega) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\pi}{2}} & |\omega| < -a \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} & |\omega| = -a \\ 0 & |\omega| > -a \end{cases} \quad (\text{A.71})$$

となる. 以上をまとめて,

$$\hat{f}_c(\omega) = \text{sgn}(a) \times \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & |\omega| < |a| \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} & |\omega| = |a| \\ 0 & |\omega| > |a| \end{cases} \quad (\text{A.72})$$

補足: (A.69) 式を示しておく. 計算は Dirichlet 核

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.73})$$

に帰着させる. まず $\alpha = 0$ ならば 0 となるのは明らか. $\alpha > 0$ ならば, $\alpha x = t$ と変数変換して

$$\int_{t=0}^\infty \frac{\sin t}{t/\alpha} d(t/\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.74})$$

$\alpha < 0$ ならば, $-\alpha x = t$ と変数変換して ($t > 0$)³⁾,

$$\int_{t=0}^\infty \frac{\sin(-t)}{-t/\alpha} d(-t/\alpha) = -\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.75})$$

2) $\alpha > 0$ で 1, $\alpha < 0$ で -1, $\alpha = 0$ で 0 をとる函数です.

3) $\alpha x = t$ と変数変換すると, t の積分区間が $0 \rightarrow -\infty$ となってややこしくなるので注意です.

よって示された .

No.11

問題

$u(x)$ の Fourier 変換 $\hat{u}(\omega)$ を用いて , 次の関数の Fourier 変換を求めよ .

$$(1) \frac{du}{dx} \quad (2) xu(x) \quad (3) u(x+1) \quad (4) e^{ix} u(x) \quad (5) u(-x)$$

解答例

(1) Fourier 逆変換の式

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{u}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (\text{A.76})$$

の両辺を x で微分して ,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int [i\omega \hat{u}(\omega)] e^{i\omega x} d\omega \Leftrightarrow \mathcal{F}\left[\frac{du}{dx}\right] = \underline{i\omega \hat{u}(\omega)}. \quad (\text{A.77})$$

(2)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[xu(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int xue^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int u \frac{1}{-i} \frac{d}{d\omega} (e^{-i\omega x}) dx \\ &= i \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int ue^{-i\omega x} dx \right] = \underline{i \frac{d\hat{u}}{d\omega}}. \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

(3)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u(x+1)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int u(x+1) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int u(x) e^{-i\omega(x-1)} dx \\ &= \underline{e^{i\omega} \hat{u}(\omega)}. \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

(4)

$$\mathcal{F}[e^{ix} u(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int ue^{-i(\omega-1)x} dx = \underline{\hat{u}(\omega-1)}. \quad (\text{A.80})$$

(5)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(-x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(-x) e^{-i\omega x} dx = - \int_{\infty}^{-\infty} u(x) e^{-i(-\omega)x} dx \\ &= \underline{\hat{u}(-\omega)}.\end{aligned}\tag{A.81}$$

No.12

問題

$F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$ ⁴⁾ の逆 Laplace 変換を (1) 部分分数展開⁵⁾, (2) たたみこみ, (3) Bromwich 積分を用いて求めよ.

解答例

(1) 部分分数展開すると,

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s-i} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+i}\tag{A.82}$$

となる. ここで,

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}\tag{A.83}$$

と移動定理から

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}] = \frac{1}{s+\alpha}\tag{A.84}$$

なので

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = 1 - \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \underline{1 - \cos t}.\tag{A.85}$$

(2) $F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1}$ と積に分ける. $1/s = \mathcal{L}[1]$ で, また

$$\int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt = [-\cos t e^{-st}]_0^{\infty} - s \int_0^{\infty} \cos t e^{-st} dt$$

4) プリントだと $F(x)$ だったけどね!

5) プリントだと連分数だったけどね!

$$= 1 - s \left[\sin t e^{-st} \right]_0^{\infty} - s^2 \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt \quad (\text{A.86})$$

より $\mathcal{L}[\sin t] = 1/(s^2 + 1)$ である . よって

$$F(s) = \mathcal{L}[1]\mathcal{L}[\sin t] = \mathcal{L}[1 * \sin t] \quad (\text{A.87})$$

となり ,

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 1 * \sin t = \int_0^t \sin x dx = \underline{1 - \cos t}. \quad (\text{A.88})$$

(3) Bromwich 積分に留数定理を用いれば , 求めるべき値は $e^{st}F(s)$ の留数の和である .

$e^{st}F(s) = \frac{e^{st}}{s(s^2+1)}$ の特異点は $s = 0, \pm i$ である . それぞれの留数は

$$\text{Res}_{s=0} \frac{e^{st}}{s(s^2+1)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{e^{st}}{s(s^2+1)} = 1 \quad (\text{A.89})$$

$$\text{Res}_{s=\pm i} \frac{e^{st}}{s(s^2+1)} = \lim_{s \rightarrow \pm i} (s \mp i) \frac{e^{st}}{s(s^2+1)} = -\frac{e^{\pm it}}{2} \quad (\text{A.90})$$

なので , $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 1 - \frac{e^{it}}{2} - \frac{e^{-it}}{2} = \underline{1 - \cos t}$.

付録 B

過去問・解答例

注意事項

- 参考書・ノート類の持ち込み不可。
- 解答用紙 3 枚，計算用紙 1 枚，原則として各問につき 1 枚の解答用紙を用いること（裏面を用いてもよい）。それぞれの解答用紙に学生証番号・氏名・問題番号を明記せよ。
- 問題の設定が不十分または不適當と思う場合は，その旨を明記し合理的な設定をした上で解答せよ。

時間なくてところどころ投げやりです。

間違っていたらすみません。自己責任でご利用ください。

問題は次ページからだよ！

2007 年¹⁾

問題

1.

$$f(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z+2)} \quad (\text{B.1})$$

について以下の問いに答えよ．

- (a) $[f(-1)]^{1/4}$ の値をすべて求めよ．(必要であれば, $(1.19) \approx 2$ を用いよ．)
- (b) Cauchy-Riemann の関係式を用いて, $f(z)$ が原点 ($z = 0$) とその近傍で正則であることを示せ．
- (c) $f(z)$ の全ての特異点を求めよ．さらに特異点が極である場合にはそれぞれの位数と留数を求めよ．
- (d) (c) で求めた特異点を原点から近い順に z_1, z_2, \dots とするとき, 領域 $|z| < |z_1|$ で収束する Taylor 展開を求めよ．
- (e) 値域²⁾ $|z_1| < |z| < |z_2|$ で収束する Laurent 展開を求めよ．
2. (a) $|z| \rightarrow \infty$ のとき一様に $|g(z)| \rightarrow 0$ であるならば, 下に示す半円 C 上の複素積分 $I_R = \int_C g(z)e^{iaz} dz$ ($a > 0$) が $R \rightarrow \infty$ で 0 となることを証明せよ．
- (b) 以下の積分を複素積分を用いて求めよ．積分路など計算の詳細も示せ．

- i. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos \theta}$
- ii. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ibx} dx$ ($a > 0$)
- iii. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$
- iv. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - ix}$ (Cauchy の主値を求めよ)

1) 2007 年は数学 2D 担当だったようです．

2) 定義域な気がする...

3. (a) 以下の函数の Fourier 変換を求めよ . ただし , $u(x)$ の Fourier 変換を $\hat{u}(k)$, $a > 0$ とする .

- i. $\delta(x - a)$
- ii. $\frac{1}{x^2 + a^2}$
- iii. e^{-ax^2}
- iv. $\frac{\sin ax}{x}$
- v. $\frac{d}{dx}u(x)$
- vi. $u(x + a)$

- (b) 2 次元 Laplace 方程式

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b) \quad (\text{B.2})$$

を境界条件 $\Phi(x, 0) = \Phi(0, y) = \Phi(a, y) = 0$, $\Phi(x, b) = h(x)$ の下で解くことを考える .

- i. 変数分離型の解 $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$ を仮定し , $X(x)$ と $Y(y)$ それぞれに関する微分方程式を求めよ .
- ii. $X(x)$ に関する境界値問題を解き , 全ての固有値と固有函数を求めよ .
- iii. 前問で得られた固有値を代入して $Y(y)$ に関する微分方程式を解き , 境界条件 $\Phi(x, 0) = \Phi(0, y) = \Phi(a, y) = 0$ を満たす一般解が , 定数 C_n ($n = 1, 2, \dots$) を用いて

$$\Phi(x, y) = X(x)Y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n \sinh \frac{n\pi y}{a} \quad (\text{B.3})$$

と表されることを示せ . (X_n は前問で n 番目に小さな固有値に対応する固有函数とする .)

- iv. $h(x)$ の Fourier 級数展開を考えることにより , 係数 C_n を $h(x)$ を含む積分の形で求めよ .

解答は次ページからだよ !

解答

1. (a) $f(-1) = 1/2$, 問題文から $\sqrt[4]{2} \approx 1.19$ なので, $[f(-1)]^{1/4} \approx 1/1.19 \approx 0.84\bar{4}$.

(b) 明らかに $z = 0$ は特異点でなく, $f(z)$ は \bar{z} を含んでいない. ゆえに原点近傍では, Cauchy-Riemann の関係式 $\partial f(z)/\partial \bar{z} = 0$ を満たすから正則である.

(c) 部分分数展開すると

$$f(z) = z - 1 + \frac{1}{3(z-1)} + \frac{8}{3(z+2)} \quad (\text{B.4})$$

なので, $z = 1, z = -2$ がそれぞれ 1 位の極である特異点. 留数は

$$\text{Res}_{z=1} = \frac{1}{3}, \quad \text{Res}_{z=-2} = \frac{8}{3} \quad (\text{B.5})$$

となる.

(d) $|z| < |z_1| = 1$ なので,

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+(z/2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n \quad (\text{B.7})$$

とすればこれらは収束している. よって

$$\underline{\underline{z-1 - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right] z^n.}} \quad (\text{B.8})$$

(以前のものでは波線部が抜けていました. 申し訳ありません.)

(e) (またもや結果だけ) $|z_1| = 1 < |z| < |z_2| = 2$ なので, $\frac{1}{z+2}$ は (d) の級数展開で収束する. $\frac{1}{z-1}$ は

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-(1/z)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (\text{B.9})$$

とすれば収束する．よって

$$\underline{z - 1 + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{(-z)^n}{2^{n-2}} \right]}. \quad (\text{B.10})$$

2. (a) Jordan の補題 (1.11.3 節・p36) 参照．

(b) (やっぱりまずは結果だけ)

- i. レポート No.6 (1) と同じ．
- ii. 授業でやった．p39 参照．
- iii. 実軸と上半分の半円を考えると，半円部は $x = Re^{i\theta}$ として

$$\begin{aligned} \left| \int_{C^+} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{1}{[1+(Re^{i\theta})^2]^2} Rie^{i\theta} d\theta \right| \\ &< \int_0^\pi \frac{d\theta}{R^3} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

と，無視できる．よって留数定理より，求める積分の値は上半分にある留数 (に $2\pi i$ をかけたもの) となる． $z = i$ がその条件を満たす特異点で，明らかに 2 位の極であるから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 \frac{1}{(1+z^2)^2} \right] = \underline{\frac{\pi}{2}}. \quad (\text{B.12})$$

- iv. 積分区間を，実軸から 0 付近を除いたもの，原点まわりの十分に小さな上半分の半円，十分に大きい上半分の半円とする．求める値は最初のものである．経路全体では，留数定理より， $x = i$ で 1 位の極だから， $\int = 2\pi i \operatorname{Res}_{x=i} = 2\pi$ ．十分に大きな半円では積分は 0．原点まわりの小さな上半分は， $x = \varepsilon e^{i\theta}$ として，

$$\int_\pi^0 \frac{x i d\theta}{x^2 - ix} = \int_0^\pi \frac{i d\theta}{\varepsilon e^{i\theta} - i} \rightarrow \int_0^\pi d\theta = \pi. \quad (\text{B.13})$$

よって求める値は π ．

3. (a) i. レポート No.10(2)(a) と同じ．

ii. 半径 R の半円 C_R を考える．上半分が下半分かはあとで分ける．

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{x^2 + a^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2 + a^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2 + a^2} dz. \quad (\text{B.14})$$

$\omega > 0$ とすると, Jordan の補題より下半分の円で円周部は 0. よって留数定理より, $z = -ia$ に 1 位の極があるから,

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{x^2 + a^2} \right] = -\frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Res}_{z=-ia} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2 + a^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a\omega}}{a}. \quad (\text{B.15})$$

$\omega < 0$ とすると, 今度は上半分の円で円周部が 0. よって同様にして, $z = ia$ に 1 位の極があつて,

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{x^2 + a^2} \right] = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2 + a^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{a\omega}}{a}. \quad (\text{B.16})$$

まとめると,

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{x^2 + a^2} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a|\omega|}}{a}. \quad (\text{B.17})$$

iii. 授業でやった. p73 と同じ. 計算は p.39 と同様.

iv. レポート No.10(2)(b) と同じ.

v. レポート No.11(1) と同じ.

vi. レポート No.11(3) とほぼ同じ.

(b) i. $\Phi = XY$ を代入して,

$$YX'' + XY'' = 0 \quad (\text{B.18})$$

$$\therefore \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k. \quad (k : \text{定数}) \quad (\text{B.19})$$

ii. X に関して得られた微分方程式から, 定数 A, B によって

$$X(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (\text{B.20})$$

という一般解が得られる. 問題文より $x = 0, a$ で $\Phi = 0, X = 0$ なので, $B = 0, \sin ka = 0$. よって $ka = n\pi$.

$$\therefore \text{固有値} : k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \text{固有関数} : X_n = \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (\text{B.21})$$

ただし A_n は各々自由な値をとる定数である．また n は正の整数である．なぜならば $n = 0$ ならば固有関数は 0 であり， $X \equiv 0$ なので明らかに不適である．また $n < 0$ であれば $\sin k_n x = -\sin(-k_n x)$ なので，正負をまとめて表記する ($A_n - A_{-n}$ を改めて A_n と書く) ことができるからである．

iii. Y に関して，微分方程式は

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{n\pi}{a} Y \quad (\text{B.22})$$

であるから，一般解は

$$Y_n = D_n \sinh \frac{n\pi y}{a} + E_n \cosh \frac{n\pi y}{a} \quad (\text{B.23})$$

である．問題文より $y = 0$ で $\Phi = 0, Y = 0$ より， $E_n = 0$ である．よって $Y_n = D \sinh \frac{n\pi y}{a}$ なので，

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n D_n}_{=: C_n} \underbrace{\sin \frac{n\pi x}{a}}_{X_n} \sinh \frac{n\pi y}{a} \quad (\text{B.24})$$

と，題意が示された．

iv. iii. で得られた解に $y = b$ を代入して $\Phi(x, b) = h(x)$ として， $h(x)$ の Fourier 変換と iii. の式を比べればよい．答えは

$$C_n = \frac{1}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a h(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx. \quad (\text{B.25})$$

(個人的には iii. の解に $y = b$ を代入してから，両辺に $\sin \frac{m\pi x}{a}$ をかけて積分したほうが楽な気がする．)

問題は次ページからだよ！

2008 年

問題

1. (a) 函数 $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ について以下の問いに答えよ .
 - i. $u(x, y)$ が二次元 Laplace 方程式 $\nabla^2 u = 0$ を満たすことを示せ .
 - ii. $u(x, y)$ が全複素平面 C 上で正則な複素函数 f の実部である時 ,
Cauchy-Riemann の関係式を用いて f の虚部 $v(x, y)$ を求めよ .
 - iii. $f = u(x, y) + iv(x, y)$ を $z = x + iy$ と $\bar{z} = x - iy$ を用いて表せ .
- (b) 複素函数 $\frac{3z}{(z-2)(z+4)}$ について以下の問いに答えよ .
 - i. 複素平面 C 上のすべての特異点とその留数を求めよ .
 - ii. $f(z)$ の Maclaulin 展開 ($z = 0$ を中心とする Taylor 展開) を求めよ .
 - iii. $z = 0$ を中心とする Laurent 展開のうち, $|z| = 3$ の円周上で収束するものを求めよ .
 - iv. $z = 0$ を中心とする Laurent 展開のうち, 絶対値の十分大きな z に対して収束するものを求めよ . さらに, 無限遠点 ∞ における留数を求めよ .
2. (a) $|z| \rightarrow \infty$ のとき一様に $|g(z)| \rightarrow 0$ であるならば, 下に示す半円 C 上の複素積分 $I_R = \int_C g(z)e^{iaz}dz$ ($a > 0$) が $R \rightarrow \infty$ で 0 となることを証明せよ .
- (b) 以下の積分を複素積分を用いて求めよ . 積分路など計算の詳細も示せ .
 - i. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \quad (-1 < a < 1)$
 - ii. $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x - i} dx \quad (t \in \mathbf{R}, t \neq 0)$
 - iii. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$
 - iv. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - ix}$ (Cauchy の主値を求めよ)

3. (a) Cauchy の積分定理を用いて , Gaussian : $g(x) = e^{-ax^2}$ (a は正の実数) の Fourier 変換を求めよ .
- (b) 函数 $f(x), g(x)$ とそれらの Fourier 変換 $\hat{f}(k), \hat{g}(k)$ について , たたみこみの定理

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\hat{g}(k)e^{ikx}dk \quad (\text{B.26})$$

が成り立つことを示せ .

- (c) $u = u(x, t)$ に関する 1 次元拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{B.27})$$

を初期条件 $u(x, 0) = v(x)$ のもとで解くことを考える .

- i. $u(x, t)$ の x に関する Fourier 変換を $\hat{u}(k, t)$ とする . 微分方程式の両辺に e^{-ikx} を乗じて x に関して積分することにより , $\hat{u}(k, t)$ の t に関する 1 階常微分方程式を導け .
- ii. 前問の方程式を解いて逆 Fourier 変換を行うことにより , 初期条件を満たす解が

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(k)h(k, t)e^{ikx}dk \quad (\text{B.28})$$

の形で与えられることを示せ . また $h(k, t)$ の具体的な形を示せ .

- iii. 前問の解をたたみこみの定理と比較し , さらに (a) の結果を用いることにより , Gaussian の重ね合わせの形で表現せよ .

解答は次ページからだよ !

解答

1. (a) レポート No.3 と同じ .

(b) やり方は 2007 年 1. と変わらないから結果だけ .

i. $\text{Res}_{z=2} = 1, \text{Res}_{z=-4} = 2$

ii.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[-1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{B.29})$$

iii.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(-\frac{z}{4} \right)^n + \frac{2^n}{z^{n+1}} \right] \quad (\text{B.30})$$

iv.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (2^{n+1} + 1)}{z^{n+1}} \quad (\text{B.31})$$

留数は...各自がんばってね !

2. (a) 2007 年度 2.(a) と同じ .

(b) i. 与式を I とおいて , 変形して ,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \frac{1}{2a} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{1+a^2}{2a} - \cos \theta}. \quad (\text{B.32})$$

$\frac{1+a^2}{2a} = A$ と置く . $a = 0$ で A は不定なので , まず $a \neq 0$ として後で別に計算することにする . $|a| < 1$ より $|A| > 1$ ($a > 0 \Rightarrow A > 1, a < 0 \Rightarrow A < -1$) . また $z = e^{\theta}$ と置けば $dz = z d\theta, \cos \theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$. そして積分範囲は半径 1 の円周 C (左回り) となる . 積分は

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2a} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{1+a^2}{2a} - \cos \theta} = \frac{i}{a} \int_C \frac{dz}{z^2 - 2Az + 1} \\ &= \frac{i}{a} \int_C \left[\frac{1}{z - (A + \sqrt{A^2 - 1})} - \frac{1}{z - (A - \sqrt{A^2 - 1})} \right] \frac{dz}{2\sqrt{A^2 - 1}} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

と変形できる．ここに留数定理を用いればよい． $0 < a < 1 (A > 1)$ と $-1 < a < 0 (A < -1)$ とで場合分けする．

$0 < a < 1 (A > 1)$ $A + \sqrt{A^2 - 1} > 1, 0 < A - \sqrt{A^2 - 1} < 1$ であるから，積分領域内の特異点は $z = A - \sqrt{A^2 - 1}$ で，留数定理から

$$I = \frac{i}{2a\sqrt{A^2 - 1}} \cdot 2\pi i(-1) = \frac{\pi}{a\sqrt{A^2 - 1}}. \quad (\text{B.34})$$

$a > 0$ より， $a\sqrt{A^2 - 1} = a\sqrt{\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^2 - 1} = \frac{1-a^2}{2}$ ．よって $I = \frac{2\pi}{1-a^2}$

$-1 < a < 0 (A < -1)$ $-1 < A + \sqrt{A^2 - 1} < 1, A - \sqrt{A^2 - 1} < -1$ であるから，積分領域内の特異点は $z = A + \sqrt{A^2 - 1}$ で，留数定理から

$$I = \frac{i}{2a\sqrt{A^2 - 1}} \cdot 2\pi i = -\frac{\pi}{a\sqrt{A^2 - 1}}. \quad (\text{B.35})$$

$a < 0$ より， $a\sqrt{A^2 - 1} = a\sqrt{\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^2 - 1} = -\frac{1-a^2}{2}$ ．よって $I = \frac{2\pi}{1-a^2}$

以上より， $a \neq 0$ ならば $I = \frac{2\pi}{1-a^2}$ である． $a = 0$ を計算すると $I = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ なので， $a = 0$ でもこれは満たす．よって

$$\frac{2\pi}{1-a^2}. \quad (\text{B.36})$$

- ii. レポート No.6 (3) と同じ．
- iii. 2007 年度 2.(b)iii. と同じ．
- iv. 2007 年度 2.(b)iv. と同じ．

- 3. (a) 2007 年度 3.(a)iii. と同じ．
- (b) 授業でやった．p.75 参照．

3) 懐かしき $\sqrt{a^2} = -a (a < 0)$ です．

- (c) i. p74 と同様にすればよい .

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -c^2 k^2 \hat{u}. \quad (\text{B.37})$$

- ii. i. を解けば $\hat{u}(k, t) = U(k)e^{-c^2 k^2 t}$. U を決めるには , $t = 0$ とすれば $U(k) = \hat{u}(k, 0) = \hat{v}(k)$ なので , 逆変換に代入すればよい . $h = e^{-c^2 k^2 t}$ である .

- iii. h の逆 Fourier 変換が (a) から Gaussian になることをたつきみに使えばよい . 解は

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dy v(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2 t}}. \quad (\text{B.38})$$

これは変数分離から求めた 3.2.2 節と同じ結果である .

索引

A

Abel の定理 6

B

Bessel
— 函数 92
— の微分方程式 92
— の不等式 63
複素 Fourier 級数における — 63
球 — 函数 103
Bromwich 積分 80

C

Cauchy
— の収束判定法 7
— の主値 38
— の積分公式 28
— の積分定理 24
— -Riemann の関係式 15, 17, 23

D

d'Alembert
— の解 106
— の収束判定法 7
Dirac のデルタ函数 — デルタ函数
Dirichlet
— 核 38
— の境界条件 96

F

Fourier
— 逆変換 69
— 級数展開 59
— 正弦級数 60
— 正弦変換 70
— の級数定理 68
— の積分定理 69
— の法則 98
— 変換 69
— 余弦級数 60

— 余弦変換 70
高速 — 変換 67
複素 — 級数展開 60
離散 — 変換 64
Fresnel 積分 41

G

Gauss 積分 39
Gibbs の現象 72
Goursat の公式 29
Green 函数 100
拡散方程式の — 100
Green の定理 24

H

Heaviside 函数 76
Helmholtz 方程式 102
Hermite
— 多項式 91
— の微分方程式 91

J

Jordan の補題 36

L

Laguerre
— 多項式 92
— の微分方程式 91
Laplace
— 変換 76
— 方程式 18, 95
逆 — 変換 79
Laurent 展開 30
Legendre
— 多項式 91
— の微分方程式 91

M

Mellin
— 逆変換 83
— 変換 83

N	
Neumann の境界条件	96
Nyquist 周波数	67

P	
Parseval の等式	63
Fourier 変換における—	74
複素 Fourier 級数における—	63

R	
Riemann	
—球面	42
—面	45
Rodrigues の公式	93

S	
Stirling の公式	55
Stokes の定理	24
Strum-Liouville 型の微分方程式	90

W	
Wronskian	88

あ	
鞍点法	55
移動定理	
第 1—	78
第 2—	78
因果律	101

か	
解析接続	11
解析的	14
解析函数	14
階段函数	76
核	82
拡散係数	97
拡散方程式	97
拡張複素平面	42
完全系	87
ガンマ函数	52
幾何級数	5
球面調和函数	103
境界値問題	89, 96
極	31
単純—	31
極表示	2
虚軸	2
虚数単位	1
虚部	1
固有函数	89

固有値	89
混合条件	96

さ	
最速降下法	55
指数函数	9
実軸	2
実部	1
周期	59
収束半径	7
主値	11
主要解	100
主要部	31
初期値問題	88
正則	14
—函数	14
積分変換	82
絶対収束	4
絶対値	2

た	
対数函数	10
多価関数	11
たたみこみ	75, 78, 84
定理	85
調和函数	18
調和振動子型の微分方程式	88
直交	86
—函数系	86
正規—函数系	86
デルタ函数	72
等角写像	19
等比級数	— 幾何級数
特異点	29
孤立—	29
集積—	29
真性—	32
特殊函数	91

な	
内積	86
熱伝導方程式	97

は	
波動方程式	74
微分方程式	
調和振動子型の—	88
複素函数	12
複素函数論	1
複素共役	3
複素数	1

複素積分	20
複素微分可能	14
複素平面	2
部分分数展開	48
分岐点	29
べき函数	— 累乗函数
べき級数	4
偏角	2
—の原理	47
変数分離	97

ま	
無限遠点	41
無限乗積	51
や	
ユニタリー行列	65
ら	
留数	32
—定理	33
累乗函数	12

著者略歴

- 1989 年 日本に生まれましたとさ
- 2008 年 東京大学に無事入学しましたとさ
- 2009 年 理物シス創に進学しましたとさ
- 2010 年 こんなものをつくってしまいましたとさ

数学 2F (工学部共通科目 藤堂教員)

2010 年 7 月 15 日 最新版発行

著 者 大野 (@)

著作権は筆者にあり，無断改変・販売を禁じます．

詳細はクリエイティブ・コモンズ ([BY-NC-ND](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)) を参照して下さい．