2009年冬学期 電磁気学 Maxwell 方程式＆公式集

2009年入学 理科1類23組

第4版

真空中のMaxwell方程式

同値な式の左側を「積分形」、右側を「微分形」と呼び、これらは表記が違うが同じ物である。

$$\varepsilon_0 \int_S E_n dS = \int_V \rho dV \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\int_S B_n dS = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

$$\oint_C E_s ds = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\oint_C B_s ds = \mu_0 \int_S (i_n + \varepsilon_0 \frac{\partial E_n}{\partial t}) dS \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{B} = -\mu_0(\boldsymbol{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}) \tag{4}$$

これは最重要な式で、暗記しなければならない。

あと、もちろん荷電粒子に働くローレンツ力の式も知っておいた方がいいが、講義で電荷の運動についてはほとんど扱わなかったのでテストには出ないかも。

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{5}$$

ベクトル解析関係

勾配 (grad, ∇)

$$\mathrm{grad} f \equiv (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) \equiv \nabla f$$

$$\nabla f \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$

grad は、スカラーに作用してベクトルを出力する。ここで、f は x, y, z の3変数を取り、スカラーを与える関数、たとえばある座標におけるポテンシャルエネルギーを与える関数である。

発散 (div)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} (= \nabla \cdot \boldsymbol{E})$$

div は、ベクトルに作用してスカラーを出力する。ここで、$\boldsymbol{E}$ は x, y, z の 3 変数を取り、ベクトル (E_x, E_y, E_z) を与える関数、たとえば、ある座標における電場ベクトルを与えるような関数である。

ラプラシアン (Δ)

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\mathrm{grad}V) &= (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}) \\
&= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\
&= \nabla^2 V \\
&\equiv \Delta V
\end{aligned}$$

Δ は、スカラーに作用してスカラーを出力する。ここで、V は x, y, z の 3 変数を取り、スカラーを与える関数である。

回転 (rot)

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\boldsymbol{v} &= (\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}) \\
&= \triangle \times \boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

rot は、ベクトルに作用してベクトルを出力する。ここで、$\boldsymbol{v}$ は x, y, z の 3 変数を取り、ベクトル (v_x, v_y, v_z) を与える関数である。

ガウスの定理

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{A} dV = \int_S A_n dS$$

ここで、S は閉曲面、V は S によって囲まれる空間である。

（注）この定理は純粋に数学的な物であって、（電場に関する）ガウスの法則とは別物。

ストークスの定理

$$\int_S (\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_n dS = \oint_C A_s ds$$

ここで、C は閉曲線、S は C を縁とする曲面である。

ベクトル解析の公式

$$\begin{aligned}
\nabla(\phi\varphi) &= \phi\nabla\varphi + \varphi\nabla\phi \\
\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) &= (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A} + \phi(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) \\
\nabla\times(\phi\boldsymbol{A}) &= (\nabla\phi)\times\boldsymbol{A} + \phi(\nabla\times\boldsymbol{A}) \\
\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) \\
\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) \\
\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) &= (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}x(\nabla x\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}x(\nabla x\boldsymbol{B}) \\
\nabla\times(\nabla\phi) &= \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi) \equiv \boldsymbol{0} \\
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) &= \mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) \\
\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

交流回路

実効値

ある交流電源を抵抗に掛けたときの発熱と、ある直流電源を抵抗に掛けたときの発熱が等しくなるとき、交流電源の電圧の「実効値」が直流電源の電圧と等しいという。

具体的には、振幅 V_0[V] の正弦波交流の実効値は $\frac{V_0}{\sqrt{2}}$[V] である。実効値 100V の正弦波交流の振幅は 100V $\times \sqrt{2} = 141$V である。

複素インピーダンス

交流電源の複素表示を

$$V = V_0 e^{i\omega t} = V_0(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

のように定義し、各時刻での実際の電圧は $\mathrm{Re}(V)$(実部のみを取る) である。

交流回路における抵抗 Z を

$$V = ZI$$

として定義する (Re(I) が実際の電流)。交流回路における抵抗を特に「インピーダンス」と呼ぶ。

純抵抗のインピーダンスは、

$$Z = R$$

で、直流での抵抗と同じである。

コンデンサーのインピーダンスは、

$$Z = \frac{1}{i\omega C}$$

で、周波数が上がるとインピーダンスは小さくなる。

コイルのインピーダンスは、

$$Z = i\omega L$$

で、周波数が上がるとインピーダンスは大きくなる。

電圧・回路素子の値を上記のような複素数で表すことにより、直流電源と抵抗がつながった回路の各点の状態を計算する方法と同じ方法で交流回路の各点の状態を計算できる。

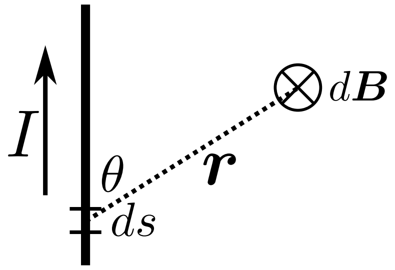
電場

電場の単位体積あたりのエネルギー

$$u = \frac{\varepsilon}{2}E^2 \tag{6}$$

磁場

Biot-Savart(ビオ・サバール) の法則



真空中で、電流が流れている微小区間 ds によって生じる磁束は次のように表される。

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I \sin\theta ds}{4\pi r^2}$$

磁束の向きは、I,r をベクトルと見れば $\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{r}$ の向きである。最初からベクトル表記すれば、

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 \boldsymbol{I} ds \times \boldsymbol{r}}{4\pi r^3}$$

となる。分母が r^3 に変わっていることに注意。

磁場の単位体積あたりのエネルギー

$$u = \frac{\mu}{2}H^2 \tag{7}$$

真空中の電磁波

1　進行方向

電磁波の進行方向は $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ の向き。電磁波は疎密波ではない。電場・磁場・進行方向は互いに直交している。

波動方程式

真空中・電荷・電流のない時の Maxwell 方程式は以下である。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0 \tag{8}$$
$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{9}$$
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{10}$$
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{11}$$

これを変形すると、

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{12}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{13}$$

が得られ、さらに変形すると

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{14}$$
$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \tag{15}$$

が得られる。ただし、

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{16}$$

と定義する。

波動方程式の解

式 (12),(13) に対し、その解として

$$E_x = E_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)) \tag{17}$$

$$B_y = B_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)) \tag{18}$$

を仮定して代入すると、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \frac{E_0}{B_0} = c \tag{19}$$

となる。

電磁波のエネルギー密度

式 (6),(7) より、電磁波の単位体積あたりのエネルギー密度 u は

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2 \tag{20}$$

とかけ、さらに式 (19) を使うと

$$u = \varepsilon_0 E^2 \tag{21}$$

とかける。式 (17) を代入して時間平均を取ると

$$\bar{u} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \tag{22}$$

となる。

Poyntingベクトル

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \tag{23}$$

を Poynting ベクトルと定義する (Pointing ではない)。これは電磁波のエネルギー密度の流れを表す。式変形により、

$$\mathrm{div}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial u}{\partial t} \tag{24}$$

となる。

誘電体

誘電分極

誘電分極によって単位面積を通過した正電荷の量と向きを合わせて分極 $\boldsymbol{P}[C/m^2]$ というベクトルで表す。これと真電荷密度 ρ_0 を使って Gauss の法則 (1) を書き直すと、

$$\int_S ((\varepsilon_0 E_n) + P_n) dS = \int_V \rho_0 dV \tag{25}$$

となる。ここでさらに電束密度 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{P}$ という概念を導入すると、

$$\int_S D_n dS = \int_V \rho_0 dV \tag{26}$$

と書ける。また、

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho_0 \tag{27}$$

となる。

$\boldsymbol{P}$ は経験的に外部電場 $\boldsymbol{E}$ に比例する (しない場合も実際にある)。このとき、電気感受率 χ_0 という物質ごとに決まる比例定数を定義すれば $\boldsymbol{P} = \chi_0 \boldsymbol{E}$ と書ける。

誘電体表面での境界条件

1. 電場の、誘電体表面に平行な成分は誘電体内外で一致する。
2. 電束密度の、誘電体表面に垂直な成分は誘電体内外で一致する。

磁性体

磁化

磁性体に外部磁場 $\boldsymbol{H}$ を与えたとき、磁性体の影響によって生じる磁場を磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$ として表現する。

ある点での磁束密度は次の式で表される。

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} \tag{28}$$

また、磁化ベクトルが外部磁場に比例するとき、磁化率 χ_m という比例定数を導入して

$$\boldsymbol{B} = (\mu_0 + \chi_m) \boldsymbol{H} \tag{29}$$

と書くこともできる。さらに透磁率 $\mu \equiv \mu_0 + \chi_m$ と定義する。

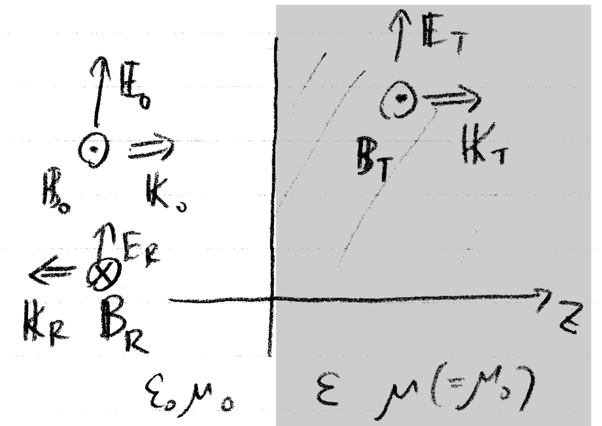
磁性体表面での境界条件

1. 磁場の、磁性体表面に平行な成分は磁性体内外で一致する。
2. 磁束密度の、磁性体表面に垂直な成分は磁性体内外で一致する。

Maxwell 方程式の書き換え

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{D} &= \rho_0 && (30)\\ \mathrm{div}\boldsymbol{B} &= 0 && (31)\\ \mathrm{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} && (32)\\ \mathrm{rot}\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} && (33) \end{aligned}$$

電磁波の透過・反射



入力波・透過波・反射波の各成分の向きを図のように置く。$\boldsymbol{E}_{\parallel}$,$\boldsymbol{H}_{\parallel}$ が境界面で連続という条件から、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_R &= \boldsymbol{E}_T && (34)\\ \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} - \frac{\boldsymbol{B}_R}{\mu_0} &= \frac{\boldsymbol{B}_T}{\mu} && (35) \end{aligned}$$

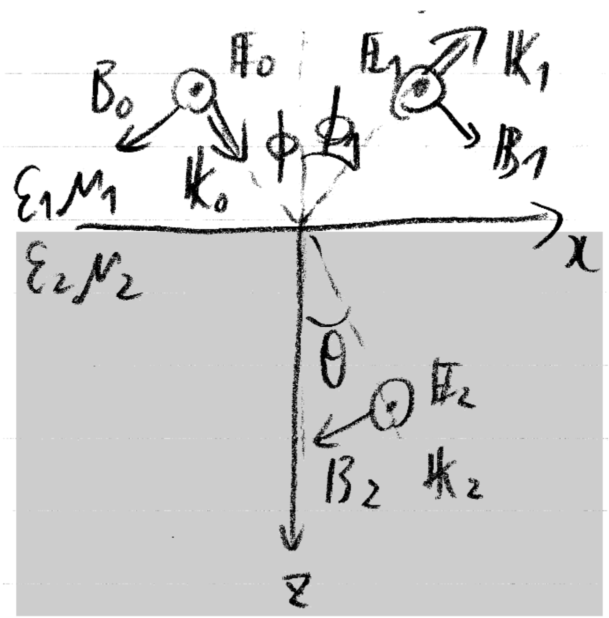
講義では $\mu = \mu_0$ として以下の関係を導出した。

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_R = \omega_T && (36)\\ B_0 &= \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E_0 && (37)\\ B_R &= \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E_R && (38) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_T &= \sqrt{\varepsilon\mu_0}E_T && (39)\\
E_T &= \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}}E_0 && (40)\\
E_R &= \frac{\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}}E_0 && (41)\\
\text{反射率 } R &= (\frac{\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}})^2 && (42)\\
\text{透過率 } T &= \frac{4\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon}}{(\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon})^2} && (43)
\end{aligned}
$$

また、$R+T=1$ となることも注目。

斜めに入射 (垂直偏光の場合)



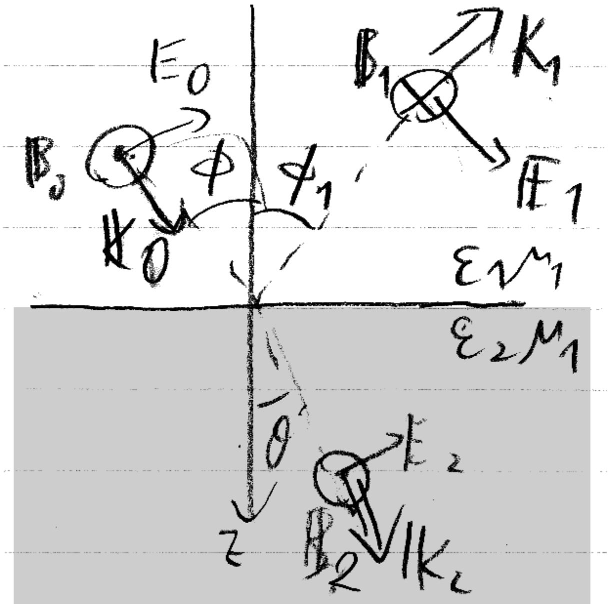
垂直偏光:電場が入射面に垂直な電磁波。講義ではこの図の場合を平行偏光として扱っているのだが、Web の様々な資料と照らし合わせるとこれは垂直偏光なのではないかと思われる。入射面とは、反射面（境界面）の法線ベクトルと入射光線の進行方向のベクトルが貼る平面である。図においては紙面が入射面となる。

$\mu_1=\mu_2$ を仮定すると、

$$
\begin{aligned}
E_1 &= -\frac{\sin(\phi-\theta)}{\sin(\phi+\theta)}E_0 && (44)\\
E_2 &= \frac{2\cos\phi\sin\theta}{\sin(\phi+\theta)}E_0 && (45)\\
R_{\parallel} &= (\frac{\sin(\phi-\theta)}{\sin(\phi+\theta)})^2 && (46)
\end{aligned}
$$

が得られる。

斜めに入射 (水平偏光の場合)



平行偏光:電場が入射面に平行な電磁波。授業中はこれが垂直偏光と表記されていた。実際の所どうなのかよくわからないので用語については批判的に見て欲しい。

$\mu_1 = \mu_2$ を仮定すると、

$$E_1 = -\frac{\tan(\phi - \theta)}{\tan(\phi + \theta)} E_0 \tag{47}$$

$$E_2 = \frac{2\cos\phi\sin\theta}{\sin(\phi + \theta)\cos(\phi + \theta)} E_0 \tag{48}$$

$$R_\perp = (\frac{\tan(\phi - \theta)}{\tan(\phi + \theta)})^2 \tag{49}$$

が得られる。

あとがき

とりあえず公式はここまで。ページ数大杉。プリント作ってて気づいたけど、自分で式変形してみないと理解できないところも多いのではないかと思う。電磁波の反射関連の式は暗記が困難なので自分で導けるように練習した方がいいと思います。