振動波動論 '09

問題1

1 x　2 ω　3 振幅

4 $\frac{2\pi}{\omega}$　5 周波数

6 Hz（ヘルツ）

7 調和振動（単振動）

8 小さい　9 $\sqrt{\frac{k}{m}}$　10 等時性

問題2

1

$$\dot{x}_1 = a\omega\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}_1 = -a\omega^2\sin(\omega t)$$

より

$$m\ddot{x}_1 = -(m\omega^2)x_1$$

同様に、

$$\dot{x}_2 = -b\omega\sin(\omega t)$$

$$\ddot{x}_2 = -b\omega^2\cos(\omega t)$$

より

$$m\ddot{x}_2 = -(m\omega^2)x_2$$

□

2.

$$x = x_1 + x_2$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2$$ なので、

$$\ddot{x} = -(m\omega^2)x_1 - (m\omega^2)x_2$$

$$= -(m\omega^2)(x_1 + x_2)$$

$$= -(m\omega^2)x$$

□

3. $A\sin(\omega t + \varphi)$

$= A\cos\varphi\sin\omega t + A\sin\varphi\cos\omega t$

であるから、

$$A\sin(\omega t + \varphi) = a\sin\omega t + b\cos\omega t$$

がなりたつには、

$$\begin{cases} a = A\cos\varphi & \cdots (a) \\ b = A\sin\varphi & \cdots (b) \end{cases}$$

となることが必要。逆にこのとき、

$(a)^2 + (b)^2$ より

$$A^2 = a^2 + b^2$$

$A<0$ のとき、φ を π ずらすことによって $A>0$ とできるから、$A>0$ のみ考えればよく、

$$\begin{cases} A = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

となり、$A \in \mathbb{R}$、$|\cos\varphi|, |\sin\varphi| \leq 1$ をみたし、十分

□

4.

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A\sin\varphi = x_0 \\ A\omega\cos\varphi = v_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (\because A>0) \\ \sin\varphi = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}} \\ \cos\varphi = \frac{v_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}} \end{cases}$$

//

5

$$v = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

運動エネルギーTは

$$T=\frac{1}{2}mv^2$$

$$=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

ポテンシャルエネルギーUは

$$U=\frac{1}{2}kx^2$$

$$=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

ここで、(2-3)と①とくらべて

$m\omega^2=k$ より

$$U=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

//

6 $v=\frac{dx}{dt}$ とおく

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

$$\Leftrightarrow m\frac{dv}{dt}=-kx$$

$$\Leftrightarrow mv\frac{dv}{dt}=-kx\frac{dx}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\mathrm{const.}$$

5 より、全エネルギーEは

$$E=T+U$$

$$=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

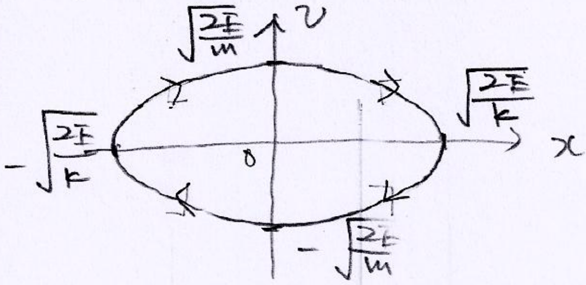
$$\therefore A=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\quad (\because A>0)$$

//

7 $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=E$

$$\Leftrightarrow \frac{v^2}{\frac{2E}{m}}+\frac{x^2}{\frac{2E}{k}}=1$$

より、楕円であり、



また、運動量 $p=mv$ とすれば、Hamiltonian $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2$ より、正準運動方程式から

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$=-kx$$

位相空間上で曲線が交わることはないから、位相空間では状態は時計回りにまわる。v-x平面での向きも同じである。したがって、図の矢印方向にまわる。

問3

1 $a\lambda^2\exp\lambda t+2a\lambda\gamma\exp\lambda t$

$$+\omega_0^2a\exp\lambda t=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2+2\gamma\lambda+\omega_0^2=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$$

2

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2-\gamma}$$
$$= -\gamma \pm \hat{\omega} i$$

x は物理量であるから、真の

x の値は $\xi = a\exp(\lambda t)$ として

$$x = \mathrm{Re}(\xi)$$

である。ここで、$a \in \mathbb{C}$ は、

$A, \varphi \in \mathbb{R}$ をもちいて

$$a = Ae^{\varphi i}$$

と表せるから、

$$\xi = Ae^{(-\gamma \pm \hat{\omega} i)t + \varphi i}$$
$$= Ae^{-\gamma t}e^{(\varphi \pm \hat{\omega} t)i}$$

よって

$$x = \mathrm{Re}(\xi) = Ae^{-\gamma t}\cos(\pm\hat{\omega}t + \varphi)$$

$\hat{\omega} < 0$ のとき、$\varphi < 0$ とすれば

$-\hat{\omega} = \hat{\omega}$ と考え $\hat{\omega} > 0$ にできる

から、$\hat{\omega} > 0$ のみ考えれば十分で

ある。

よって

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\hat{\omega}t + \varphi) \quad \square$$

3

$$v = \dot{x}$$
$$= -\gamma Ae^{-\gamma t}\cos(\hat{\omega}t+\varphi) - \hat{\omega}Ae^{-\gamma t}\sin(\hat{\omega}t+\varphi)$$

なので

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A\cos\varphi = x_0 \\ \gamma\cos\varphi + \hat{\omega}\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A\cos\varphi = x_0 \\ \hat{\omega}\sin\varphi = -\frac{\gamma}{A}x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A\cos\varphi = x_0 \\ A\sin\varphi = -\frac{\gamma}{\hat{\omega}}x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = x_0\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\hat{\omega}}\right)^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\hat{\omega}}\right)^2}} \\ \sin\varphi = -\dfrac{\gamma}{\hat{\omega}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\hat{\omega}}\right)^2}} \end{cases}$$

//

4. ・$\gamma > \omega_0$ のとき

$$x = e^{-\gamma t}(Ae^{-\hat{\omega}t} + Be^{\hat{\omega}t})$$

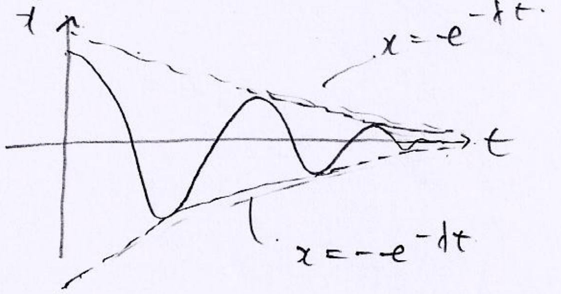
$(\hat{\omega} = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ とした$)$

・$\gamma = \omega_0$ のとき

$$x = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$$

以上より、

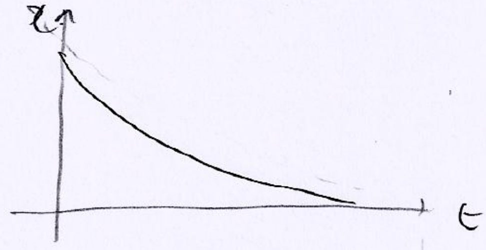
・$\gamma < \omega_0$ のとき



$t \to \infty$ で $x \to 0$.

減衰の度合いは γ に依存。

$\gamma = \omega_0$, $\gamma > \omega_0$ のとき



$t \to \infty$ で $x \to 0$.

減衰の度合いは γ に大きく依存

$(\because \gamma > \hat{\omega})$.

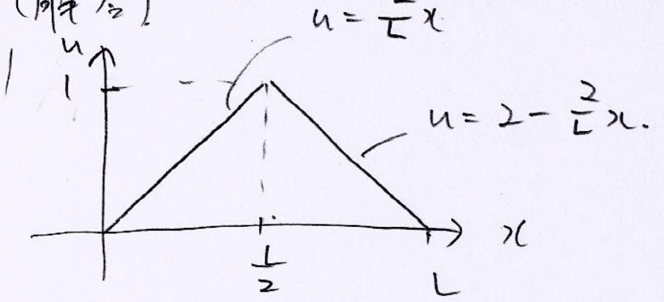
問4

（指針）

Fourier展開では対称性に注目するとうまくゆくことが多い.

（解答）

1.



$$A_p=\frac{2}{L}\left[\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{2}{L}x\sin\left(\frac{\pi p}{L}x\right)dx+\int_{\frac{L}{2}}^{L}\left(2-\frac{2}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi p}{L}x\right)dx\right]$$

ここで,

$$\int_{\frac{L}{2}}^{L}\left(2-\frac{2}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi p}{L}x\right)dx$$

$$=\int_{\frac{L}{2}}^{0}\frac{2}{L}y\sin\left(\pi p-\frac{\pi p}{L}y\right)(-dy)$$

（$L-x=y$ とした）.

$$=\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{2}{L}x\sin\left(\pi p-\frac{\pi p}{L}x\right)dx$$

$$=\begin{cases}-\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{2}{L}x\sin\left(\frac{\pi p}{L}x\right)dx & (p:\text{偶数})\\ \int_0^{\frac{L}{2}}\frac{2}{L}x\sin\left(\frac{\pi p}{L}x\right)dx & (p:\text{奇数})\end{cases}$$

より p 偶数のとき $A_p=0$

p 奇数のとき

$$A_p=\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{2}{L}x\sin\frac{\pi p}{L}x\,dx$$

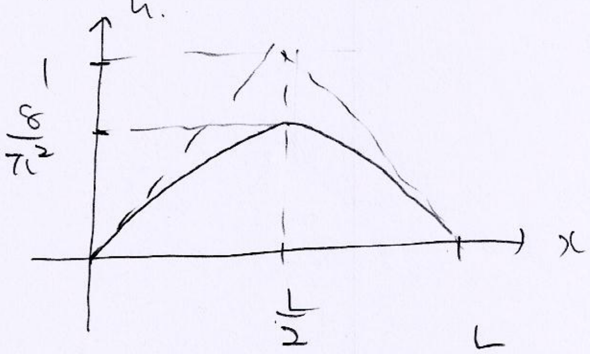
$$=\frac{8}{L^2}\cdot\frac{L}{\pi p}\left[\frac{L}{\pi p}\sin\frac{\pi p}{L}x-x\cos\frac{\pi p}{L}x\right]_0^{\frac{L}{2}}$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{\pi^2p^2}8$$

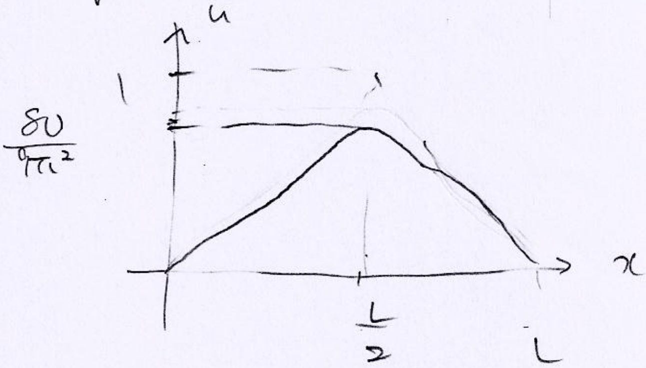
//

2.

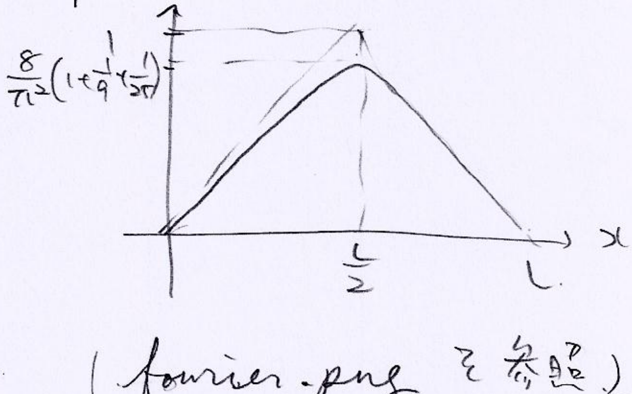
$p=1,2$



$p=3,4$



$p=5$



（fourier.png を参照）

問5

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[a\omega \sin(\omega t + \varphi)\right]$$
$$= -a\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$
$$= -\omega^2 u.$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{da}{dx}\cos(\omega t + \varphi)\right]$$
$$= \frac{d^2 a}{dx^2}\cos(\omega t + \varphi)$$
よって
$$-a\omega^2 = C\frac{d^2 a}{dx^2}$$
これは①の形であり
(2-3)より
$$a = A\sin(kt + \theta)$$
(A, θは任意定数)

2. $$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(0) = 0 \\ a(L) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\theta = 0 \\ \sin(kL + \theta) = 0 \end{cases}$$
$(\because A \neq 0)$

$\theta = \pi$であれば、$A<0$とすることで$\theta = 0$とできる。よって$\theta = 0$として良く、
このもとで
$$\sin kL = 0$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{\pi p}{L} \quad (p \in \mathbb{N})$$

以上からたしかに
$$a = A_k \sin(kx),$$
$$k = \frac{\pi p}{L} \quad (p \in \mathbb{N}).$$

3. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[-A\omega\cos(kx - \omega t)\right]$$
$$= -A\omega^2 \sin(kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[Ak\cos(kx - \omega t)\right]$$
$$= -Ak^2 \sin(kx - \omega t)$$
より、たしかになりたつ。

4. $$u(x,t) = u(x+\lambda, t)$$
$$\therefore k\lambda = 2n\pi \quad (n \in \mathbb{N})$$
ここで、λはこれをみたす最小のものであるから
$$k\lambda = 2\pi \Leftrightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

5. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$\Leftrightarrow \omega^2 = ck^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{\omega}{k} = \sqrt{c}$$
ここで、
$$k(x + v\Delta t) - \omega(t + \Delta t) = 0$$
$$\Leftrightarrow kv\Delta t = \omega\Delta t$$
$$\Leftrightarrow v = \frac{\omega}{k}$$
$$\therefore v = \sqrt{c}$$

6. $$\frac{3 \times 10^8}{500 \times 10^{-9}} = 6 \times 10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

たいへんよくできました。 H. Fukuda