09 年度　数学 IB 解答例（河澄）

かなり丁寧めに書きました。適宜端折って下さい。

1. 計算問題×4

(1) $\displaystyle\int \frac{3x^2+x-1}{x^3-1}dx$　(2) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-x-1}dx$　(4) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}dx\right)dy$

ただし$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$の値は既知としてよい。

(1) $\displaystyle\int \frac{3x^2+x-1}{x^3-1}dx$

◎ 分子を分けて$\frac{1}{x^2+a^2}$の積分を使ったりします。

$$\int \frac{3x^2+x-1}{x^3-1}dx = \int \frac{(x^3-1)'}{x^3-1}dx + \int \frac{(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$$

$$= \log|x^3-1| + \int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}dx$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}dt \quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)=t\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \int \frac{(3x^2+x-1)}{x^3-1}dx = \boxed{\log|x^3-1| + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C \quad \ldots(\text{答})}$$

(2) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$

◎ 部分積分を使って既知の arcsin の微分にもちこみます。

$$\int \arcsin x\,dx = \int (x)'\arcsin x\,dx$$

$$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \left(\because \frac{d}{dx}\arcsin\frac{x}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \boxed{x\arcsin x - \sqrt{1-x^2}+C \quad \ldots(\text{答})}$$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-x-1}dx$

◎ヒントの

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\frac{1}{2}-1}dx=\sqrt{\pi}\qquad（これは覚える）$$

を無理矢理使おうとすると解けます。$\Gamma(\mathrm{s})=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$です。

$\mathrm{M}>0$ として、

$$\begin{aligned}\int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} e^{-x^2-x-1}dx&=\int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} e^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}}dx\\&=\frac{1}{e^{\frac{3}{4}}}\int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} e^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}dx\\&=\frac{1}{e^{\frac{3}{4}}}\int_{-\mathrm{M}'}^{\mathrm{M}'} e^{-t^2}dt\\&=\frac{1}{e^{\frac{3}{4}}}\int_{-\mathrm{M}'}^{\mathrm{M}'} e^{-t^2}dt\qquad\left(t^2=y\text{ で置換。}2tdt=dy\Leftrightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{y}}dy\right)\\&=\frac{1}{e^{\frac{3}{4}}}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{M}''} e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy\end{aligned}$$

$\mathrm{M}\to\infty$のとき、$\mathrm{M}''\to\infty$だから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-x-1}dx=\frac{1}{e^{\frac{3}{4}}}\int_0^{\infty} e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{e^{\frac{3}{4}}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{e^{\frac{3}{4}}}\quad\dots(\text{答})}$$

(4) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}dx\right)dy$

◎ e^{x^3}の積分なんて嫌なので Fubini の定理を使ってyから積分します。このとき、$y:0\to x^2$であることに注意します。

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}dx\right)dy&=\int_0^1\left(\int_0^{x^2} e^{x^3}dy\right)dx\\&=\int_0^1\left[y\,e^{x^3}\right]_{y=0}^{y=x^2}dx\\&=\int_0^1 x^2e^{x^3}dx\\&=\frac{1}{3}\int_0^1 (x^3)'e^{x^3}dx=\frac{1}{3}\left[e^{x^3}\right]_0^1=\boxed{\frac{1}{3}(e-1)\quad\dots(\text{答})}\end{aligned}$$

2. 重積分を使って一変数函数の積分の値を求める問題。

$0 < a < b$とする。函数 $f(x) = \frac{x^b - x^a}{\log x}$について以下の問いに答えよ。

(1) $\lim_{x\to 0} f(x)$および$\lim_{x\to 1} f(x)$を求めよ。

(2) 積分$\int_0^1 f(x)dx$を求めよ。（ヒント：x^yを重積分せよ。）

(1)

◎ $x \to 0$は普通にできます。$x \to 1$はロピタルでやります。

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{-\infty} = \boxed{0\ \dots(\text{答})}$$

$x \to 1$のとき、$x^b - x^a \to 1 - 1 = 0$、$\log x \to 0$だからロピタルの定理が使える。

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x^b - x^a)'}{(\log x)'} = \lim_{x\to 1} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} bx^b - ax^a = \boxed{b - a\ \dots(\text{答})}$$

(2)

◎ ヒントに従って、$\iint x^y dxdy$を考えます。

Fubini の定理より、

$$\int_0^1 \left(\int_a^b x^y\, dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\, dx \right) dy$$

$$(\text{左辺}) = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\log x} \right]_{y=a}^{y=b} dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx$$

$$(\text{右辺}) = \int_a^b \left[\frac{1}{y+1} x^{y+1} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \Big[\ \log|y+1|\ \Big]_a^b = \log\left|\frac{b+1}{a+1}\right| = \log\frac{b+1}{a+1}$$

したがって、

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx = \boxed{\log\frac{b+1}{a+1} \dots(\text{答})}$$

3. Green の定理を使った線積分の計算

a, bを正の実数とする。1 次微分形式$\theta = y^2dx + (x^3 + 2xy)dy$の（閉じた）曲線

$$l : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, l(t) = (a\cos t, b\sin t)$$

に沿う線積分$\int_l \theta$を求めよ。

◎小テストで似たようなのがありました。曲線が円ではないので強いて言えばそこに注意。

Green の定理より、$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$（楕円の内部領域）（$l = \partial D$） として、

$$\int_l \theta = \iint_D -\frac{\partial}{\partial y}y^2 + \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 2xy)\,dxdy = \iint_D (-2y + 3x^2 + 2y)\,dxdy = \iint_D 3x^2dxdy$$

$(x,y) \to (ar\cos t, br\sin t)$に変数変換する。このとき、$E = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2; [0,1] \times [0,2\pi]\}$

このときヤコビアンは、

$$\det(J\Phi) = \begin{vmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t & -ar\sin t \\ b\sin t & br\cos t \end{vmatrix} = abr$$

$$\begin{aligned}\iint_D 3x^2dxdy &= \iint_E 3(ar\cos t)^2 \cdot abr\,drdt \\ &= 3a^3b\int_0^1 r^3dr\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt \\ &= 3a^3b\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt \\ &= \frac{3}{4}a^3b\ \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \boxed{\frac{3}{4}\pi a^3 b\ \ldots(\text{答})}\end{aligned}$$

4. 地雷。
$(x,y)\in\mathbb{R}^2$について、$r=\sqrt{x^2+y^2}$とおく。$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : r\le 1\}$ とする。
このとき積分

$$\iint_D \frac{1}{r^\alpha}\,dxdy$$

が有限な値をとるための$\alpha>0$の範囲を求め、そのときの積分の値を求めよ。

◎ 正の函数を積分して負の値が出てきたら死ぬ気で間違いを探しましょう。
　さもないと本当に死にます。

極座標への変数変換。ヤコビアンの絶対値は$\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}\right|=r$

$$\iint_D r^{-\alpha}\,dxdy=\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^{-\alpha}\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}\right| drd\theta$$

$$=2\pi\int_0^1 r^{1-\alpha}\,dr$$

$$=2\pi\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 r^{1-\alpha}\,dr$$

$$=\begin{cases}\alpha=2\text{ のとき} & 2\pi[\log r]_\varepsilon^1=+\infty\\ \alpha\neq 2\text{ のとき} & 2\pi\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\frac{1}{2-\alpha}r^{2-\alpha}\right]_\varepsilon^1=\begin{cases}\frac{2\pi}{2-\alpha} & (\alpha<2)\\ +\infty & (\alpha>2)\end{cases}\end{cases}$$

$\boxed{(\text{答})\ \alpha<2\text{ のとき}\quad\text{値は}\frac{2\pi}{2-\alpha}}$

よくある間違い： $\alpha\neq 2$ のとき　値は$\frac{2\pi}{2-\alpha}$　×

5. 微分方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x''(t)}{x'(t)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x''(t)}{x'(t)}\right)^2$$

をみたすtの関数$x=x(t)$を求めよ

◎ 微分方程式苦手なので間違ってると思います。**→間違ってました。**

$\dfrac{x''(t)}{x'(t)}=y(t)$とおく。

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}y^2$$

$$\frac{1}{y^2}dy=\frac{1}{2}dt$$

$$-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}t+C_1$$

$$y=-\frac{2}{t+2C_1}$$

$$\frac{x''(t)}{x'(t)}=-\frac{2}{t+2C_1}$$

$$\int\frac{x''(t)}{x'(t)}dt=\int-\frac{2}{t+2C_1}dt$$

$$\log|x'(t)|=\log|t+2C_1|^{-2}$$

$$\frac{dx}{dt}=\pm(t+2C_1)^{-2}$$

$$dx=\pm(t+2C_1)^{-2}dt$$

$$x=\mp\frac{1}{t+2C_1}+C_2=\boxed{\frac{A_2}{t+A_1}}$$

どうもすいませんでした！

《あとがき》

個人的に一番難しいと感じたのは 1.(3)です。しばらく部分積分したりして路頭に迷ってしまいました。他はじっくり考えれば割とすんなりできる問題が多かった感じがします。arcsin とか arctan の微分を忘れている人は復習しておいて下さい。（教科書 p.60 参照）

しかし、前ばらしで言ってた「変数分離型で解けなさそうにみえて実は解ける微分方程式」ってどんなんでしょうか。一つ見つけたのが、$y'=1/\cos(x+y)$ってやつです。暇な人はやってみて下さい。後は地雷に気をつけて下さい。