数学 IB　まとめ(教科書とノートの復習)

IB ということで計算に関する話題中心にまとめました。理論を知りたい方はのみっちー IA のシケプリを参考にするとよいと思います。河澄教授いわく、テストはまんべんなく出すらしいです。でも、重積分（特に変数変換使うもの）、線積分とグリーンの定理はほぼ間違いなく出ると思うんで、時間がない人はこのあたりに絞ってやるとよいと思います。

多分、前にも書きましたが、IB での計算ミスは致命傷となりかねないので、計算ミスはくれぐれもしないようにお願いします。（先生もそうおっしゃってました。）

1 基本的な積分の計算方法

(1)変数変換(cost とか t-x とかで置き換える。三角関数の有理式の積分)

(2)部分分数分解（ご存知のあれです）

(3)漸化式を立てる。

〈例題〉

(1)$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$　　(2)$\int \sqrt{x^2+a}\,dx$　　(3)$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

(4)$\int \frac{5x-4}{2x^2+x+6}dx$　　(5)$\int \frac{xdx}{x^2+2x+5}$　　(6)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$

〈解答〉

(1)$t=\tan\frac{x}{2}$ とおく。$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$　$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$　$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

これらの式を代入すると

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)dt=\tan\frac{x}{2}+\log\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+C$$

(2)練習問題にあるので解答略。

(3)(2)と同様に$\sqrt{x^2+a}=t-x$ とおいて頑張って、計算すると

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\log|x+\sqrt{x^2+a}|+C$$

(4)部分分数分解してください。

$$\int \frac{5x-4}{2x^2+x+6}dx=\frac{1}{2}\log|2x-3|+2\log|x+2|+C$$

(5)$$\int \frac{xdx}{x^2+2x+5}=\int \frac{x+1-1}{(x+1)^2+4}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)dx}{(x+1)^2+4}-\int \frac{4dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{2}\log(x^2+2x+5)-\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\frac{x+1}{2}+C$$

(6)　演習でもやりましたね。漸化式立てるやつです。漸化式立てる問題は練習問題の１の（６）にもあります。

解答は教科書（p65）にあるので省きます（打つのがめちゃくちゃ面倒なんです・・・）が、１度はやっておいて損はないと思います。

２　微分方程式

大島君のシケプリと練習問題やればテストに出ても大丈夫だと思います。この分野は何のためにやったのか正直よくわからない・・・。

〈例題〉（練習問題より抜粋）

(1)$\frac{dy}{dx}$=xy　　(2)y$\frac{dx}{dy}$+2x=3xy　　(3)$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$　　(4)$2y^2\frac{dx}{dy}=x^2+y^2$

３　関数列と一様収束

ここはテストに出るのか？出たらもはや IB ではない気が・・・。一応重要な点をまとめてみます。

定義１　一様ノルム

関数 $f:D\to R$ に対して

$$\|f(x)\|=\sup\{|f(x)|:x\in D\}\leq+\infty$$

で定義される$\|f(x)\|$を**一様ノルム**といい、$\|f(x)\|<+\infty$であるとき f は、D 上有界であるという。

定義２　一様収束

関数列 f_n に対して

$$n\to+\infty\text{のとき}\quad \|fn-f\|\to 0\text{（D 上）}$$

が成り立つとき f_n は f に D 上**一様収束**するという。

定理　　項別積分定理

$a,b\in\boldsymbol{R}$　$a<b$　f,f_nを区間 D[a, b]で定義された連続関数($n\geq 1$)として

f_n が f に D 上**一様収束**するとき

$$\int_a^b f_n(x)dx\to\int_a^b f(x)dx\quad \text{as } n\to\infty$$

要するにシグマとインテグラルは順序交換できるということです。

〈例題〉（練習問題より抜粋）

項別積分定理を用いて$\int$Arctanxdx を求めよ。

ヒント

整級数は収束半径の内側で定義された区間で関数 f に一様収束します。

４　広義積分

練習問題解いて下さい。

定義

関数 f は D[a,b) 上の連続関数とする。$\lim_{\beta\uparrow b}\int_a^\beta f(x)dx$が収束するとき、f(x)は D 上積分可能で

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\beta\uparrow b}\int_a^\beta f(x)dx$$

と定義する。

定理１

関数f がD[a,b) 上連続であるとする。連続関数g(x)で、次の条件を満たすものが存在していれば$\int f(x)dx$は存在する。

1) $|f(x)| \le g(x)$

2) $\int g(x)dx$　は存在する。

このとき、g(x)はf(x)の**優関数**という。

定理２

a<c<b=+∞のとき、ある p（＞１）に対して、$\lim_{x\to\infty} x^p h(x) = 0$が成り立つとき、$\lim_{\beta\uparrow\infty}\int_a^\beta h(x)dx$は絶対収束する。

定理３

$-\infty \le a<c<b$のとき、ある p（＞１）に対して、$\lim_{x\downarrow a}(x-a)^p h(x) = 0$が成り立つとき、$\int_a^c h(x)dx$は絶対収束する。

＊ガンマ関数、ベータ関数については教科書 p70,p134~137 参照のこと

〈**例題**〉（練習問題より抜粋）

(1)$\int_{-1}^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　　(2)$\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}$

(3)広義積分$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$は収束するが、絶対収束しないことを示せ。

５　重積分①

フビニの定理

$D=\{(x, y)\,|\,a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}$（x に関して単純な領域）とし、Z=f(x,y)はD上連続であるとする。

１）D は面積確定で$S(D)=\int \{g(x)-f(x)\}dx$

２）累次積分の順序交換が可能。

6　重積分②

変数変換

有界閉領域 D,E が区分的になめらかで、f(x,y)が D 上連続であるとき、

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

〈例題〉（練習問題より抜粋）

(1)$\iint_D x^2ydxdy$　D={(x,y)|$x^2+y^2 \le a^2, y \ge 0$}

(2)$\iint_D (2x-y)dydy$　D={(x,y)|x≤ $y \le 2x, x+y \le 3$}

(3)$\iint_D \sin\frac{\pi y}{\sqrt{x}}dxdy$　D={(x,y)|$y^2 \le x, 1 \le x \le 2$}

(4)$\iint_D (a^2x^2+b^2y^2)dxdy$　D={(x,y)|$x^2+y^2 \le 1$} $a > 0, b > 0$

(5)$\iint_D (x+y)^4dxdy$　D={(x,y)|$x^2+2xy+2y^2 \le 1$}

(6)$\iint_D (x-y)dxdy$　D={(x,y)||x+2y|≤1,|x−y| ≤ 1}

この問題の他にもみっち一作のＩＡの練習問題にも重積分のいい問題が入っているので余裕があればやってみてください。

7　線積分とグリーンの定理

定義　線積分

有効曲線 C 上で連続な関数 f(x,y),g(x,y)に対して

$$\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

を有効曲線 C に沿った**線積分**と定義する。

グリーンの定理

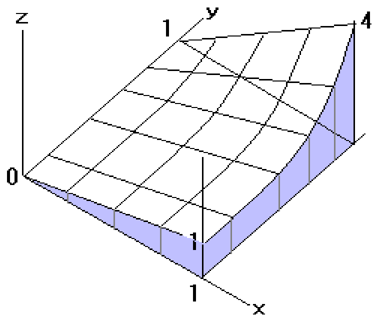
有界閉領域 D 上で P(x,y),Q(x,y)が C1 級関数のとき

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy$$

＊C は D の境界で D を左に見て１周する向き。

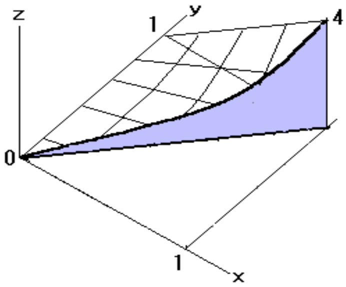
〈解説〉

線積分という概念は分かりにくいので、３次元空間での面積とみる考え方を紹介します。例えば $f(x,y)=x(y+1)^2$ という関数を考え、$\int_C f(x,y)dx+f(x,y)dy$ の線積分を求めましょう。



ここでは C は直線に沿って(0,0)→(0,1)→(1,1)にします。そうすると $f(x,y)dx$ の $f(x,y)$ の部分は高さを表し、dx は x 軸方向での微少な幅を表します。dy の部分も同様に考えるとると結果として $\int_C f(x,y)dx+f(x,y)dy$ は右図の青い部分の面積をあらわすことになります。

同様に $C: y=x\ (0\leq x\leq 1)$ に沿った線とすると線積分の値となる面積は右図の青い部分になります。



（良く分かる線積分より）

ただし、線積分を面積と考える方法は次元が大きくなると仕えないので、これは２変数関数での線積分の理解を助ける道具として使って下さい。

〈例題〉

(1) $\int_C (x^2+y^2)dx+xdy$　$C: y=\sqrt{1-x^2}$　向き：$(1,0)\to(-1,0)$

(2) $\int_C (y^3-y)dx+(3y^2x-x)dy$　C は単位円を反時計回りに一周したもの

最後に、数学の勉強するくらいならドイツ語の勉強やって下さい。もし、時間があったら数学の勉強して下さい。その際、少しでも時間短縮になればと思ってこのシケプリを作りました。皆さんの役に立つことを願ってます。