数学 II・第 2 学期期末試験 (2012 年 2 月 13 日 (月曜日) 4 限 15:05-16:35)

理科 I 類 1 年 28-30 組 (担当・関口)

持ち込み:不可

解答用紙: 1 枚, 問題用紙: 1 枚, 計算用紙: 1 枚

○ 問題は 4 問あります.

1. 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，A^n を求めよ.

2. V を 2 次以下の実係数多項式からなる線形空間，$V = \{a_0 + a_1 x + a_1 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ とする.
V に属する多項式 f, g に対して，実数 (f, g) を以下のように定める.

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

(1) $(\,,\,)$ は V に内積を定めることを示せ.

(2) V の基底 $E = \langle 1, x, x^2 \rangle$ からシュミットの直交化法を用いて V の正規直交基底を構成せよ.（ここで得られた基底を F とおく.）

(3) V から V への線形写像 $T = \dfrac{d}{dx}$ の基底 F に関する行列表示を求めよ.

(4) 線形写像 T の核 $\mathrm{Ker}\, T$ の次元，および，$\mathrm{Ker}\, T$ の直交補空間の次元を求めよ.

(5) $\mathrm{Ker}\, T$ の直交補空間の基底を一組挙げよ.

3. (x_1, x_2, x_3) を座標とする空間の中で，以下の方程式をみたす点 (x_1, x_2, x_3) はどのような 2 次曲面を与えるか，曲面の名称を挙げ，概形を図示せよ.

$$8x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 10x_2x_3 + 4x_3x_1 - 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2 = 0$$

4. n を 3 以上の自然数，$\boldsymbol{a}$ を n 次実縦ベクトルとする.
このとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}$ の転置 ${}^t\boldsymbol{a}$ の積として与えられる n 次正方行列 $\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{a}$ に関して以下の 3 つの小問 $(\sharp), (\flat), (\natural)$ に答えよ．ただし，$\boldsymbol{a}$ は零ベクトルではないものとする.
本問は下記に挙げる小問の順に解答しなくても良いが，論理を明快にすること.

$(\sharp)$ $\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{a}$ は対角化可能か.

$(\flat)$ $\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{a}$ の固有値を全て求めよ.

$(\natural)$ $\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{a}$ の固有値に対応する固有空間の次元をそれぞれ求めよ.

===問題はここまでです．===

解答

1. A の特性多項式 $\Phi_A(x)$ は,

$$\Phi_A(x)=|xE-A|=\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 1 & x-1 & -2 \\ -4 & 4 & x-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & x-1 & x-3 \\ 0 & 4 & x+3 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 0 & x-3 & x-3 \\ 0 & 4 & x+3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 \\ 0 & 1-x & x+3 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 0 & x-3 \\ 1-x & x+3 \end{vmatrix}=x(x-1)(x-3)$$

よって,A の固有値は 0,1,3.

固有値 0 に関して,$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ のとき,$A\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$(行基本変形) より,$\boldsymbol{x}=s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(s\neq 0)$.

固有値 1 に関して,$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ すなわち $(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ のとき,$A-E=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}\to$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$(行基本変形) より,$\boldsymbol{x}=s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s\neq 0)$.

固有値 3 に関して,$A\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{x}$ すなわち $(A-3E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ のとき,$A-3E=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}\to$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$(行基本変形) より,$\boldsymbol{x}=s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(s\neq 0)$.

以上から,$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと,$AP=P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

P の列ベクトルは,それぞれ異なる固有値に対応する固有ベクトルなので,線形独立である.すなわち,P は正則であるので,逆行列 P^{-1} を計算すると,

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

よって,$A=P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$ から,$A^n=P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^nP^{-1}$ となるので,

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 3^n-4 & -2\cdot 3^n+4 & 2 \\ 3^n-4 & -3^n+4 & 2 \\ 2\cdot 3^n-2 & -2\cdot 3^n+2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (1) $f, g, h \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．

$$\begin{aligned}(\alpha f+\beta g, h) &= \int_{-1}^{1}(\alpha f(x)+\beta g(x))h(x)dx = \int_{-1}^{1}(\alpha f(x)h(x)+\beta g(x)h(x))dx \\ &= \alpha\int_{-1}^{1} f(x)h(x)+\beta\int_{-1}^{1} g(x)h(x)dx = \alpha(f,h)+\beta(g,h)\end{aligned}$$

$$(g,f) = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = (f,g)$$

$$(f,f) = \int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx \geq 0 \qquad (\text{すべての } x \text{ について } \{f(x)\}^2 \geq 0 \text{ から．})$$

$$(f,f) = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

以上より，$(,)$ は V に内積を定める． ∎

(2) $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2$ とする．

$\|e_1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1^2dx = 2$ から，$f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ とおく．

次に，$e_2' = e_2 - (e_2, f_1)f_1$ とおけば，$(e_2, f_1) = \int_{-1}^{1} x\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}dx = 0$ から，$e_2' = x$.

$\|e_2'\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2dx = \dfrac{2}{3}$ から，$f_2 = \dfrac{e_2'}{\|e_2'\|} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}x$ とおく．

次に，$e_3' = e_3 - (e_3, f_1)f_1 - (e_3, f_2)f_2$ とおけば，$(e_3, f_1) = \int_{-1}^{1} x^2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}dx = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$(e_3, f_2) = \int_{-1}^{1} x^2\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}xdx = 0$ から，$e_2' = x^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = x^2 - \dfrac{1}{3}$.

$\|e_3'\|^2 = \int_{-1}^{1}(x^2-\dfrac{1}{3})^2dx = \dfrac{8}{45}$ から，$f_3 = \dfrac{e_3'}{\|e_3'\|} = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}(x^2-\dfrac{1}{3}) = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}x^2 - \dfrac{\sqrt{10}}{4}$ とおく．

$\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ は正規直交基底となっている．

以上から，正規直交基底 F は，$F = \langle f_1, f_2, f_3\rangle = \langle\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{6}}{2}x, \dfrac{3\sqrt{10}}{4}x^2 - \dfrac{\sqrt{10}}{4}\rangle$ と求められる．

(3) $Tf_1 = \dfrac{d}{dx}f_1 = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = 0 = 0\cdot f_1 + 0\cdot f_2 + 0\cdot f_3$

$Tf_2 = \dfrac{d}{dx}f_2 = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{\sqrt{6}}{2}x) = \dfrac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{3}\cdot f_1 + 0\cdot f_2 + 0\cdot f_3$

$Tf_3 = \dfrac{d}{dx}f_3 = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{3\sqrt{10}}{4}x^2 - \dfrac{\sqrt{10}}{4}) = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}x = 0\cdot f_1 + \sqrt{15}\cdot f_2 + 0\cdot f_3$

以上より，$T\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{15} \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(4) $\operatorname{Ker} T = \{f \in V : \dfrac{d}{dx}f = 0\}$ すなわち，$\operatorname{Ker} T = \{f \in V : f = c, c \in \mathbb{R}\}$ だから，$\operatorname{Ker} T$ の基底として，$\langle f_1\rangle$ をとれる．よって，$\dim(\operatorname{Ker} T) = 1$.

$\operatorname{Ker} T$ は V の部分空間であるから, $V = \operatorname{Ker} T \oplus (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ である．ゆえに, $\dim V = \dim(\operatorname{Ker} T) + \dim(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$．$\dim V = 3$ であるから，$\dim(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \dim V - \dim(\operatorname{Ker} T) = 3 - 1 = 2$.

(5) $\mathrm{Ker}\,T$ の基底として $\langle f_1 \rangle$ をとれば，$\mathrm{Ker}\,T$ の任意の元 f を $f = cf_1(c \in \mathbb{R})$ と表せる．
ここで，$\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ は V の正規直交基底なので，f_2, f_3 は線形独立で，$(f, f_2) = c(f_1, f_2) = 0, (f, f_3) = c(f_1, f_3) = 0$ から f_2, f_3 は $(\mathrm{Ker}\,T)^{\perp}$ の元である．
このことと，$\dim(\mathrm{Ker}\,T)^{\perp} = 2$ から，$(\mathrm{Ker}\,T)^{\perp}$ の基底として，$\langle f_2, f_3 \rangle$=$\langle \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{3\sqrt{10}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4} \rangle$ をとることができる．

> **1**.,**2**. ともに，計算を頑張れば解けます．**2**.(4),(5) では，次元と直和，直交補空間に関する定理を組み合わせれば，(3) で求めた基底を利用できることが分かります．

3. $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすれば，方程式は ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + 2{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} - 2 = 0$ と表せる．

また，$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{x} & -2 \end{pmatrix}, \tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすれば，方程式は ${}^t\tilde{\boldsymbol{x}}\tilde{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$ と表せる．

ここで，$\mathrm{rank}\,A = 2$ で，

$$|xE - A| = \begin{vmatrix} x-8 & -2 & -2 \\ -2 & x+4 & -5 \\ -2 & -5 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-8 & -2 & -2 \\ -2 & x+4 & -5 \\ 0 & -(x+9) & x+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-8 & -4 & -2 \\ -2 & x-1 & -5 \\ 0 & 0 & x+9 \end{vmatrix}$$
$$= (x+9)\begin{vmatrix} x-8 & -4 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} = (x+9)\{(x-8)(x-1) - 8\} = x(x+9)(x-9)$$

より，A の固有値は $0, \pm 9$ なので，$\mathrm{sgn}\,A = (1, 1)$．
また，$\mathrm{rank}\,\tilde{A} = 4$ であるから，方程式の表す曲面は、双曲放物面．(図は省略)

> そもそも，$\mathrm{rank}\,\tilde{A} = 4$ である本来の二次曲面を出題するということは予想できるので，$\mathrm{rank}\,A = 2$ の時点で楕円放物面か双曲放物面のどちらかだと思って良いでしょう．$\mathrm{sgn}\,A = (1, 1)$ の時点で双曲放物面と分かります．

4. (♮) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ とおく．ただし $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}, (a_1, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$．

$A = \boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{a}$ とする．$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$ より，
A は実対称行列であるから，対角化可能である．

(♭), (♮) の結果から，$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$ なので，A は対角化可能，としても OK.

(♭), (♮) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ とする．$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ をみたすような $\boldsymbol{x}(\neq \boldsymbol{o})$ と α があれば，α は A の固有値である．

$\alpha = 0$ のとき $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)\boldsymbol{a} = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ で，$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ なので，$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ となるように $\boldsymbol{x}$ をとれば成立する．

よって，0 は A の固有値である．

次に，$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ において，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2) \\ a_2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2) \\ \vdots \\ a_n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2) \end{pmatrix}$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}$$

$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ より，$\alpha = a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2 = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}(\neq 0)$．よって，${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$ も A の固有値である．

固有値 $0, {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$ に対応する固有空間をそれぞれ W_1, W_2 とおく．W_1, W_2 は異なる固有値に対応する固有空間なので，$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$ が成り立つ．

固有値 0 に対応する固有ベクトルを考えると，上で述べたことから，$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ となる $\boldsymbol{x}(\neq \boldsymbol{o})$ が固有ベクトルである．

ここで，n 次正方行列 B を，$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ とすると，$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ と表すことができる．$(a_1, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$ であるから，$\operatorname{rank} B = 1$．

よって，この方程式の解 $\boldsymbol{x}$ は，$n - \operatorname{rank} B = n - 1$ 個の自明でない解を持ち，それらは線形独立である．よって，任意の解はそれらの $n-1$ 個の解の線型結合によって表される．

以上より，$\dim W_1 = n - 1$.

また，W_1, W_2 は $\mathbb{R}^n$ の部分空間なので，$W_1 \oplus W_2$ も $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．よって，$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 \leq \mathbb{R}^n = n$ が成り立つ．すなわち, $\dim W_2 \leq n - \dim W_1 = n - (n-1) = 1$．一方，$W_2 \neq \{\boldsymbol{o}\}$ より $\dim W_2 \geq 1$ だから，$1 \leq \dim W_2 \leq 1$．よって $\dim W_2 = 1$ である．

ここで，$\dim W_1 + \dim W_2 = n = \dim \mathbb{R}^n$ だから，$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$．したがって，$A$ の固有値は $0, {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$ だけである．

以上をまとめると，A の固有値は，$0, {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$ で，対応する固有空間の次元はそれぞれ，$n-1, 1$.

$n = 3$ のときで，具体的に計算して固有値に当たりをつけてから，それが実際に固有値になるかを確かめています．他にもやり方があるかもしれないです．