力学 A シケプリ？

0. 序文

（シケ対の戯言ですので無視してください。でも、暇だったら読むと私の思考が垣間見えるかも…）

まず、力学の問題をどうやって解くか、ということについて一応考えを書いておくと、結局のところは、次の 2 点になると思います。

・正しく、運動方程式を立てられる。

・立てた運動方程式（微分方程式）を数学的に（厳密性は抜きに）解ける。

前者については、できない人は東大にいないと思うし、いまさらどうしようもありません。しかも過去問を見ればわかるように運動方程式を立てるだけなら簡単です。

後者が今までの高校物理とは大きく異なる点で、かつ得点できるかどうかの分かれ目です。扱う微分方程式のレベルは上がっていますが、その種類は限られているので、いかに**それぞれの微分方程式の解き方を正確に覚え**、そして、**時間内に正確に解けるか**、が問題となってきます。しかし、あらかじめ言っておかなければならないのですが、時間内に正確に解く、ということは日々の努力でしか達成できません。公式を覚えただけでは東大の入試を乗り切れないのと同じです。

まあ偉そうなことをつらつらと書いてみましたが、要するに私ができることは、微分方程式の解き方をまとめ、過去問の解答を作ることだけなのです。ということで、本書？では微分方程式の解き方を中心に授業ノートをまとめていきます。

1. 数学についての公式

1.1 ベクトルの外積

・$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix} = -\vec{B} \times \vec{A}$

・$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \sin\theta$

1.2 テイラー $(Taylor)$ 展開

・$f(a+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{x^k}{n!}$

特に $a=0$ のとき 3 次の項までを取り出すと、

・$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{1}{2}f''(0)x^2 + \dfrac{1}{6}f'''(0)x^3$

1.3 オイラーの公式

$x \in \mathbb{R}$ のとき、
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

1.4 勾配 (ナブラ)
・$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
このとき、$V(\vec{r}) = -\displaystyle\int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$ と定義すれば、$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ となる。

2. 運動方程式の解法 ①（一次元の運動）
2.1 空気抵抗のある落下運動
自由落下しようとしている物体に、空気抵抗 $-m\gamma v$ が働くとき、位置 r は鉛直上方を正の向き、v は鉛直下方を正の向きととると、運動方程式は

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - m\gamma v$$

となるので、変形して、

$$\frac{1}{v - \frac{g}{\gamma}} \frac{dv}{dt} = -\gamma$$

となるので、両辺を $t = 0$ から $t = t$ まで積分して、

$$\log\left|\frac{v - \frac{g}{\gamma}}{v_0 - \frac{g}{\gamma}}\right| = -\gamma t$$

$$v = \frac{g}{\gamma} + (v_0 - \frac{g}{\gamma})e^{-\gamma t}$$

となる。よって、この運動の終端速度 v_∞ は、$t \to \infty$ として、

$$v_\infty = \frac{g}{\gamma}$$

である。また、

$$r = r_0 - \int_0^t v dt = r_0 - \frac{g}{\gamma}t - \frac{g}{\gamma^2}(1 - e^{-\gamma t})$$

となる。r と v を適当なところまで $Taylor$ 展開すると、

$$r = r_0 + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{6}\gamma g t^3$$

$$v = gt - \frac{1}{2}\gamma g t^2$$

となり、自由落下の効果や、空気抵抗の効果が表れる。

2.2 単振動・減衰振動・強制振動

質量 m の物体がばね定数 k のばねにつながれ、また、床から摩擦力 $-m\gamma v$ を受け、さらに外力 $F = F_0 \cos\omega t$ が加わっている時を考える。もちろん $F_0 = 0$ とすれば減衰振動、$\gamma = 0, F_0 = 0$ とすればただの単振動になるのでまとめて考える。

運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - m\gamma v + F_0\cos\omega t$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

となる。次にこの微分方程式を解くわけだが、この方法は天下り的に覚えるしかない。

① まず、次の微分方程式の一般解（x_0 と v_0 に依存する定数が 2 つ現れる）を求める。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

ここで、特性方程式

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

の解（複素数範囲で考える）が重解かどうかで場合分けをする。

まず、重解でないとき、解を λ_1, λ_2 とすると、一般解は

$$x_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$$

で表される。ただし、α_1, α_2 は x_0, v_0 で決まる定数。

次に、重解のときは、その解を λ として、一般解は

$$x_2(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t}$$

で表される。ただし、α_1, α_2 は x_0, v_0 で決まる定数。

② そして、次の微分方程式の特解を何か一つ見つける。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

はっきり言ってしまえば $x_3(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ の形になるのは予想できるのでそのまま代入してもいいのだが、それでは少々時間がかかるうえに計算量も増えるので、もっと楽な方法を考える。両辺を複素数に拡張して、$\hat{x_3}(t) = Ce^{\iota\omega t}$ を代わりに代入して、最後に $x_3(t) = \mathrm{Re}(\hat{x}_3(t))$ とすれば早い。実際にこうしてみると、

$$C = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{-\omega^2 + 2\gamma\omega i + \omega_0^2}\ (\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

となる。よって実部を計算することで、

$$x_3(t) = \frac{F_0}{m\left\{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2\right\}}\left\{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t\right\}$$

となるので、よって求める解は

$\omega_0 > \dfrac{\gamma}{2}$ なら、$x = x_{1-1}(t) + x_3(t)$

$\omega_0 = \dfrac{\gamma}{2}$ なら、$x = x_2(t) + x_3(t)$

$\omega_0 < \dfrac{\gamma}{2}$ なら、$x = x_{1-2}(t) + x_3(t)$

となる。各定数 α_1, α_2 の計算は各自でやってみてほしい。過去問で実際に計算させる問題 (2000 年) も出ているので、答え合わせはそちらを参照してほしい。また、注意だが、$\omega = \omega_0, \gamma = 0$ のときは、$x_3(t)$ はまず、$\gamma = 0$ とした後で、極限 $\omega \to \omega_0$ をすると求められる。これについては第 2 回のレポート問題を見てほしい。

3. 運動方程式の別の使い方

3.1 運動量と力積の関係式

運動量 $\vec{p} = m\vec{v}$ について、運動方程式から、

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

だから、両辺を $t = t_1$ から $t = t_2$ まで積分すれば、次の関係式が得られる。

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

ここで、上式の右辺を力積という。これの利用は 1999 年の過去問を見てほしい。

3.2 角運動量とトルク

角運動量 $\vec{\ell}$ は $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$ で定義されるが、この両辺を t で微分すると、

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

となる。この右辺をトルクという。特に中心力のように $\vec{F} \propto \vec{r}$ のときは $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ となり、角運動量は保存される。

3.3 仕事

仕事とは、力と力の方向の移動距離の積なので、一般に仕事 W は

$$W = \int_C \vec{F} d\vec{r}$$

で計算される。とはいえ、実際には適当な区間に分割して

$$W = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F} d\vec{r} + \cdots$$

と計算することになる。

3.4 運動エネルギーと仕事

運動エネルギーは $T=\dfrac{1}{2}m\vec{v}^2$ で定義されるが、この微小変化を考えると、

$$\Delta T=\Delta W$$

となるので、

$$T_B-T_A=W$$

という式が成り立つ。

3.5 保存力とポテンシャルエネルギー（$P.E.$）

どんな経路をとっても仕事が変わらないような力を保存力というが、具体的な保存力は、一様重力・バネの復元力・固定された電荷によるクーロン力・万有引力など今までと変わらない。

ここで、力が保存力ならば、定義から定められる仕事を用いて、$P.E.=V(\vec{r})$ を定められる。

$$V(\vec{r})=-\int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}}\vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$$

3.6 中心力

力の中心が存在し、ある点における力の向きが、力の中心とその点を結ぶ向きであり、大きさが中心からの距離によって決まる力を中心力といい、重要な性質として、中心力は保存力である。また三次元空間内での運動では、中心力のみによる運動はある平面上に乗り続ける。

3.7 力学的エネルギー保存則とその使い方

運動方程式の両辺を $\vec{r}=\vec{r_1}$ から $\vec{r}=\vec{r_2}$ まで積分すると、

$$\frac{1}{2}m\vec{v_2}^2-\frac{1}{2}m\vec{v_1}^2=\int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}}\vec{F}d\vec{r}$$

となるが、特に $\vec{F}$ が保存力のときは $V(\vec{r})$ を用いて、

$$\frac{1}{2}m\vec{v_2}^2+V(\vec{r_2})=\frac{1}{2}m\vec{v_1}^2+V(\vec{r_1})$$

となるので、ある定数 E を用いて、

$$\frac{1}{2}m\vec{v}^2+V(\vec{r})=E$$

となり、力学的エネルギーが保存する。

この式から、物体が運動できる範囲は、$\vec{v}^2 \geqq 0$ となるような $\vec{r}$ の範囲なので、不等式

$$E - V(\vec{r}) \geqq 0$$

を解くことによって、$\vec{r}$ の範囲が求められる。また不等式を解いた結果、$\vec{r}$ の範囲が複数あらわれたときは、$\vec{r_0}$ が範囲に含まれているものが答えになる。

また $v = \dfrac{dr}{dt}$ なので、上式を v について解くことによって

$$v = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)}$$

$$\int_0^t \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)}} \frac{dr}{dt} dt = \int_0^t dt = t$$

となるので、逆関数を求めることによって逆に r を求めることもできる。

4. 座標系と運動方程式

4.1 二次元での運動

今までは、ベクトルといえばデカルト座標（直交座標、つまり普通の座標）で考えてきたが、円運動をこの座標で考えるのは面倒である。そこで極座標を導入する。

$$x = r\cos\theta\ ,\ y = r\sin\theta$$

こうすると、まず速度は、

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}$$

となり、加速度は

$$\vec{a} = \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right\}\vec{e_\theta}$$

となる。これは、導出を覚えるよりは暗記したほうが役には立つだろう。

4.2 三次元

二次元の運動のときと同様に三次元の場合にも円運動を考えるが、次の二種類が考えられる。

4.2.1 円筒座標

$$x = \rho\cos\theta\ ,\ y = \rho\sin\theta\ ,\ z = z$$

これは、らせん運動を記述するときに役に立つ。このとき、

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}$$

$$\vec{a} = \left\{ \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right\} \vec{e_\theta} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{e_z}$$

となる。

4.2.2 極座標

$$x = r\cos\varphi\cos\theta \ , \ y = r\sin\varphi\sin\theta \ , \ z = r\cos\varphi$$

これは、物体が球面上を運動するときに役に立つ。このとき、

$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi} + r\sin\varphi\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}$

$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left\{ \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \sin^2\varphi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right\} \right] \vec{e_r}$

$+ \left\{ 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} - r\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right\} \vec{e_\varphi}$

$+ \left(2\sin\varphi\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + 2r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\sin\varphi\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \vec{e_\theta}$

となる。

5. ケプラー問題（惑星の運動）

以下がケプラーの法則である。

① 全ての惑星は、太陽を一つの焦点とする楕円状を運動する。

② 面積速度一定

③ 公転周期の 2 乗は平均距離の 3 乗に比例する。

② は角運動量保存のことなので、① と ③ について考察する。

まず万有引力は、

$$F(r) = -\frac{K}{r^2} \ , \ V(r) = -\frac{K}{r}$$

と表すことができるので、

$$V_{eff}(r) = -\frac{K}{r} + \frac{\ell^2}{2mr}$$

となる。ここで、$V_{eff}(r)$ の最小値を求めておくと、

$$\frac{dV_{eff}(r)}{dr} = \frac{K}{r^2} - \frac{\ell^2}{mr^3} = 0$$

より最小値は、

$$r = \frac{\ell^2}{km} = d \ V_{eff}(d) = -\frac{K^2 m}{2\ell^2}$$

となる。次に惑星が運動する範囲を求めると、条件式は、

$$V_{eff}(r) \leqq E$$

なので、離心率を $e=\sqrt{1+\frac{2mE}{\ell^2}d^2}$ とおくと、

$$\frac{1-e}{d} \leqq \frac{1}{r} \leq \frac{1+e}{d}$$

と変形できる。ここで、E の正負で場合分けすれば、r の取り得る範囲は求められるが、実際に r を t の関数として求めることは困難なので、極座標において、r を θ の関数として、軌道の方程式を求める。

まず、運動方程式は、

$$r\text{ 方向： } m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)=m\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{\ell^2}{mr^3}=-\frac{K}{r^2}$$

$$\theta\text{ 方向： } \ell=mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

次に変数変換をして、r 方向の運動方程式を、θ で微分した方程式にする。

$$\frac{dr}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dr}{d\theta}=\frac{\ell}{mr^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)=\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right)=\cdots=-\frac{\ell^2}{m^2r^2}\cdot\frac{d^2(r^{-1})}{d\theta^2}$$

となるので、$s=r^{-1}$ とおくと、r 方向の運動方程式は

$$\frac{d^2s}{d\theta^2}+s=\frac{1}{d}$$

となるので、特解は $s=\dfrac{1}{d}$ だから、一般解は、

$$s=A\cos(\theta+\theta_0)+\frac{1}{d}$$

であるので、上で求めた r の範囲から、E の正負にかかわらず s の最大値は $\dfrac{1+e}{d}$ であるので、このとき $\theta=0$ であるような座標系を考えれば、

$$s=\frac{1+e\cos\theta}{d}$$

$$r=\frac{d}{1+e\cos\theta}$$

となる。よってこの式から、惑星の軌道は、

①$E<0$ のとき、$0\leqq e<1$ なので、楕円

②$E=0$ のとき、$e=1$ なので、放物線

③$E>0$ のとき、$e>1$ なので、双曲線

となる。（ここがわからない人は、高校数学の数学Cにある二次曲線の章で勉強してください。）

次に公転周期Tを求めると、

$$T = \frac{\text{楕円の面積}}{\text{面積速度}}$$

であるので、面積速度$\dfrac{dS}{dt}$と楕円の面積$S = \pi ab$を求めて上式に代入すると、

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$$

となる。

6. 非慣性系での運動方程式

慣性系における座標原点を0、直交座標軸を$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$

非慣性系における座標原点を$0'$、直交座標系を$\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}$とおき、0から$0'$へ向かうベクトルを$\vec{R}$とする。また、定数$\omega_1, \omega_2, \omega_3$を、

$$\begin{pmatrix} \frac{d\vec{e_1'}}{dt} \\ \frac{d\vec{e_2'}}{dt} \\ \frac{d\vec{e_3'}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e_1'} \\ \vec{e_2'} \\ \vec{e_3'} \end{pmatrix}$$

で定め、

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e_1'} + \omega_2 \vec{e_2'} + \omega_3 \vec{e_3'}$$

とおくと、慣性系において

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

と表される運動は、非慣性系では

$$m\vec{a} = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} - m\frac{d^2R}{dt^2}$$

と表される。

7. 多体問題と保存法則

7.1 二体問題

それぞれ運動方程式が、

$$m_1\ddot{\vec{r_1}} = \vec{F}\ ,\ m_2\ddot{\vec{r_2}} = -\vec{F}$$

と表されるとき、$M = m_1 + m_2, \vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{M}$とおくと、上式を変形することで、

$$M\ddot{\vec{R}} = 0$$

となる。また、換算質量 $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$、相対座標 $\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$ とおくと、

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

となるので、上式と合わせると、結局二体問題は一体問題に帰着することができる。また、角運動量については、

$$\vec{\ell_1} + \vec{\ell_2} = \vec{R} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{p}$$

となり、重心と相対の角運動量の和になる。

7.2 多体問題

7.1 のように多体系においても系に外力が働かなければ全運動量や全角運動量、全エネルギーは保存する。

8. 終わりに

ごめんなさい、最後の方はだんだん飽きてきて適当になってしまいました。でもぶっちゃけこれ読んでも点取れないし…。とは言ってもちゃんと授業範囲は網羅しているので、公式を忘れたときに見るくらいがいいでしょう。導出過程もどうせ読まないだろうからあんまり載せなかったし。まあ、過去問を解いて解答を見るのが一番いいでしょう。

ということで、いつも通り誤字や内容的な誤りを発見した場合はクラスページにでも連絡してください。大きな間違いがあった場合には修正版を改めて作ります。

文責　2011 年度理科 1 類 25 組力学シケ対